

# Penyelesaian Kinematika Langsung Manipulator Paralel Bidang 3-RRR Secara Eksak Menggunakan *Open Source Computer Algebra Software: SymPy*

Adriyan

Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Riau  
Jl. Tuanku Tambusai Ujung Pekanbaru, Riau, Indonesia

*E-mail:* adriyan@umri.ac.id

## Abstract

*The determination of a direct kinematic solution for any parallel manipulator was an interesting topic to study because of its mathematical's complexity. This article presents the exact solution for direct kinematic problems of 3-RRR planar parallel manipulator utilizing the open-source computer algebra software: SymPy. Thus, a symbolic procedure is implemented to a python's function through the extensive use of SymPy library. This developed function is utilized to compute the direct kinematic solution for the known numeric values of kinematic constants and the active joints. A calculation result shows that there are two real solutions to its direct kinematic problem. Furthermore, these two real solutions indicate that the manipulator possesses two assembly modes for its direct kinematic problems which had a distinction from its inverse kinematic solutions.*

**Keywords:** planar parallel manipulator 3-RRR, the exact solution of the direct kinematic, and SymPy.

## Abstrak

Penentuan jawab kinematika langsung manipulator paralel merupakan hal yang menarik untuk dikaji karena kompleksitas matematisnya. Artikel ini menyajikan penyelesaian eksak permasalahan kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR melalui pemanfaatan perangkat lunak aljabar komputer dengan kode terbuka: SymPy. Prosedur penyelesaian secara simbolik diimplementasikan ke dalam sebuah fungsi python melalui penggunaan pustaka SymPy secara ekstensif. Melalui fungsi ini akan dikalkulasi jawab kinematika langsung manipulator secara numerik untuk nilai konstanta kinematik dan besar sudut input pada sambungan aktif. Hasil pengujian untuk suatu dimensi konstanta kinematika manipulator ini menunjukkan bahwa terdapat dua akar-akar ril penyelesaian kinematika langsungnya. Dua akar ril ini mengindikasikan bahwa manipulator memiliki dua modus rakitan kinematika langsung yang berbeda dengan modus rakitan untuk jawab kinematika invers.

**Kata kunci:** manipulator paralel bidang 3-RRR, jawab eksak kinematika langsung, dan SymPy.

## 1. Pendahuluan

Memanipulasi gerakan suatu objek baik di ruang dan di bidang dapat dilakukan dengan menggunakan suatu manipulator. Manipulator menggunakan rantai kinematik sebagai penyusun utama pemanipulasi gerakan. Dalam hal ini, rantai kinematik terdiri atas beberapa batang dan sambungan yang disusun sedemikian rupa untuk memenuhi tugas yang diinginkan untuk memanipulasi gerakan. Secara garis besar rantai kinematik ini dibedakan atas tiga yaitu rantai kinematik terbuka (*open loop*), tertutup (*closed loop*), dan kombinasi (*hybrid*). Selanjutnya,

manipulator dengan rantai kinematik terbuka dan tertutup disebut masing-masingnya dengan manipulator serial dan paralel. Sementara itu, manipulator dengan rantai kinematik hibrida merupakan kombinasi rantai kinematik serial dan paralel.

Perbedaan yang cukup mendasar untuk diamati pada manipulator serial dan paralel terletak pada ukuran ruang kerja (*workspace*). Manipulator paralel memiliki ukuran ruang kerja yang lebih kecil dibandingkan manipulator serial [1]. Perbedaan berikutnya terletak dalam permasalahan kinematika invers dan kinematika langsung yang bertolak belakang dalam hal

penyelesaiannya [2]. Permasalahan kinematika langsung dapat dengan mudah diselesaikan untuk manipulator serial dibandingkan dengan manipulator paralel. Namun, hal sebaliknya ditemui untuk penyelesaian kinematika invers.

Penyelesaian permasalahan kinematika langsung telah menarik minat peneliti untuk memecahkannya dengan diajukannya berbagai metode. Penentuan jawab eksak merupakan langkah awal yang umum dilakukan seperti yang dinyatakan oleh Gosselin [3], Tsai [4], dan Merlet [5]. Dalam hal ini, jawab eksak diperoleh sebagai penyelesaian suatu polinom berderajat 6 dan 8 untuk manipulator paralel bidang 3-RRR. Metode matematis lainnya seperti Gröbner basis dan metode resultan juga diterapkan oleh Naderi, dkk untuk menentukan jawab eksak manipulator paralel bidang [6]. Melalui artikel ini ditunjukkan bahwa manipulator paralel bidang memiliki 6 jawab maksimum yang konsisten dengan laporan oleh Gosselin.

Namun, melalui jawab ini belum dapat diidentifikasi berapa jumlah akar-akar ril dari seluruh akar-akar polinom. Untuk menjawab ini, Dastjerdi, dkk [7] mengajukan sebuah indeks geometri yang disebut dengan *distance circles' intersection* (DCI). Penerapan DCI menghasilkan jawab kinematika langsung dengan dua akar ril pada manipulator 3-RRR.

Di samping penyelesaian eksak atau geometri, metode lainnya juga diajukan seperti penyelesaian secara numerik dan penggunaan algoritma-algoritma pembelajaran mesin. Jawab kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR secara numerik melalui penggunaan Simulink juga diajukan oleh Dang, dkk [8]. Melalui penelitian ini disajikan jawab kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR yang dinyatakan ke dalam suatu fungsi waktu atau respons waktu. Respons ini dikalkulasi berdasarkan input di sambungan aktif yang diaktuiasi sebagai fungsi waktu juga.

Penerapan jaringan syaraf tiruan (*artificial neural networks* atau ANN) merupakan hal yang cukup populer dilakukan. Bidokhti dan Enferadi [9] mengimplementasikan dua jenis arsitektur ANN yaitu *back-propagation neural network* (BPNN) dan radial basis function neural network (RBFNN). Kedua arsitektur ini digunakan untuk menentukan jawab kinematika langsung dalam bentuk suatu lintasan spiral. Tentunya kedua arsitektur ini dilatih (*training*) berdasarkan lintasan spiral yang dihasilkan oleh suatu fungsi matematika tertentu. Hal senada juga dilakukan oleh Sayed, dkk [10] yang mengimplementasikan *neuro fuzzy inference system* (NFIS) dengan pen-tuning-an melalui *particle swarm organization* (PSO) dan *genetic algorithm* (GA). Mereka

memberikan jawab kinematika langsung dalam respons waktu setelah proses *training* dan *tuning* pada arsitektur NFIS yang digunakan. Langkah ini tentunya lebih cocok diterapkan ketika berhubungan dengan sistem kendali manipulator ini.

Artikel yang ditulis ini akan mengajukan suatu proses komputasi simbolik-numerik penyelesaian permasalahan kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR. Hal ini didasari pada kenyataan bahwa manipulator paralel bidang ini memiliki jawab tertutup. Meskipun representasi simbolik untuk konstanta kinematikanya tidak dapat dinyatakan secara eksplisit. Untuk itu, proses komputasi simbolik-numerik merupakan hal yang memungkinkan dilakukan melalui penggunaan perangkat lunak computer algebra system: SymPy [11].

Susunan artikel yang ditulis ini terdiri atas: Metode penyelesaian permasalahan kinematika langsung di bagian 2. Bagian 3 menyajikan hasil beserta pembahasan penyelesaian kinematika langsung ini. Akhirnya, kesimpulan ditarik sebagaimana yang diberikan dalam bagian 4.

## 2. Metodologi

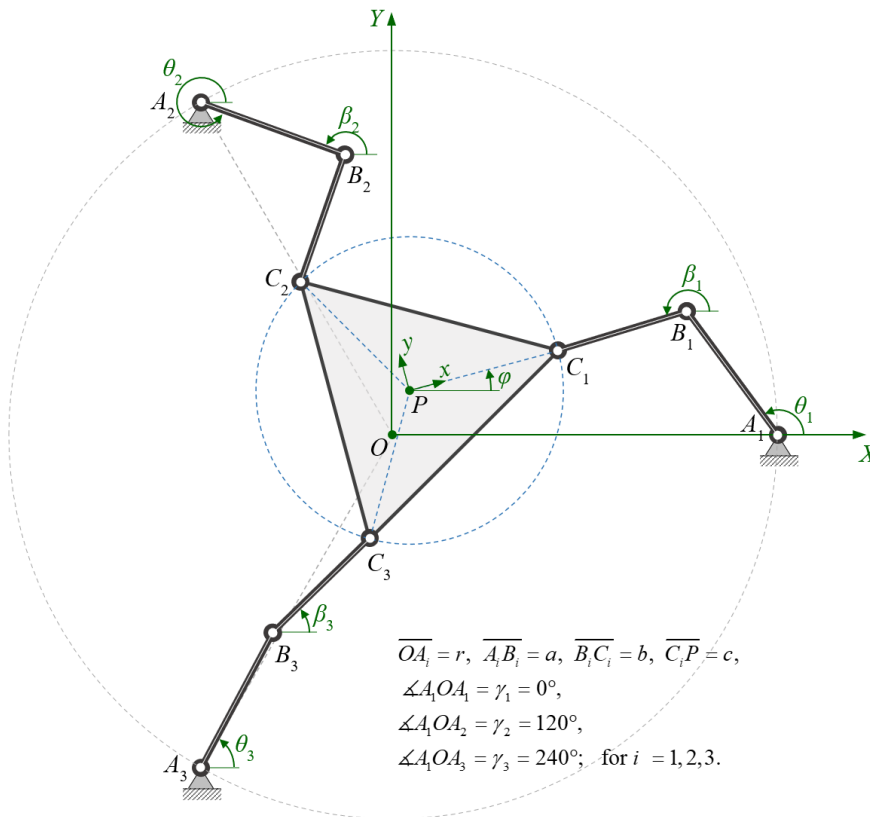
Manipulator paralel bidang 3 DoF dengan rantai kinematik 3-RRR ditunjukkan oleh Gambar 1. Manipulator ini terdiri atas satu batang tetap sebagai *base*, satu *platform* yang berupa batang bergerak, serta enam buah batang biner bergerak lainnya. *Base* dan *platform* merupakan batang ternari dengan bentuk berupa segitiga sama sisi. Selanjutnya, keenam batang biner bergerak ini masing-masingnya menyusun tiga *limb* (kaki) manipulator dengan satu *limb* disusun atas dua batang. Keseluruhan sambungan yang digunakan untuk menghubungkan batang-batang ini hingga membentuk suatu mekanisme pada Gambar 1 menggunakan sambungan revolut (R). Sambungan revolut pertama yang menghubungkan setiap kaki dengan *base* merupakan sambungan aktif atau sambungan yang diaktuiasi.

Dengan mengacu pada jumlah batang dan sambungan dapat ditentukan mobilitas manipulator ini melalui persamaan Grübler-Kutzbach yang didefinisikan oleh

$$M = \lambda(\ell - j - 1) + \sum_{i=1} f_i \quad (1)$$

dengan  $\ell$ ,  $j$ , dan  $f_i$  menyatakan jumlah batang, sambungan, dan gerakan yang diizinkan untuk setiap sambungan. Sementara itu,  $\lambda$  merupakan suatu konstanta yang mendefinisikan jumlah gerakan suatu benda kaku secara bebas di bidang

atau di ruang yang bernilai masing-masingnya 3 atau 6.



Gambar 1. Manipulator paralel bidang 3 DoF yang disusun oleh rantai kinematik 3-RRR.

Selanjutnya, vektor posisi titik  $P$  pada *platform* manipulator dapat ditentukan berdasarkan geometrinya untuk setiap *limb* dalam bentuk persamaan *loop* vektor. Dengan demikian, analisis posisi dapat dilakukan yang berupa kajian kinematika invers manipulator. Untuk kajian kinematika invers dapat ditentukan dengan pengetahuan akan input pada *platform* atau disebut *platform space*  $(x, y, \phi)$  untuk memperoleh besarnya sudut sambungan aktif atau *actuator space*  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Sebaliknya, dengan adanya informasi *actuator space* dapat diperoleh nilai pada *platform space* yang disebut kemudian dengan kajian kinematika langsung.

Jawab tertutup (*closed form solution*) kinematika langsung ini dapat ditentukan berdasarkan formulasi vektor posisi ini. Penyelesaiannya akan menghasilkan suatu polinom berderajat tertentu, katakanlah sebesar  $n$ . Polinom berderajat  $n$  ini tentunya memiliki  $n$  buah akar. Namun, tidak seluruh  $n$  akar ini yang bernilai ril melainkan juga ada yang berupa akar kompleks dan konjugatnya. Untuk sejumlah  $m$  ( $m < n$ ) akar ril dapat dihitung besarnya sudut orientasi *platform*  $\phi$ . Akhirnya, nilai posisi titik  $P$   $(x, y)$  dapat dihitung berdasarkan informasi sudut orientasi *platform* yang telah diperoleh ini.

Untuk memudahkan proses komputasinya maka dapat dibuatkan sebuah *package* yang dinyatakan ke dalam beberapa sebuah fungsi dengan bahasa pemrograman python. Dalam hal ini, komputasi secara simbolik secara ekstensif digunakan untuk memperoleh jawab kinematika langsung ini. Selanjutnya, penerapan ini dapat diimplementasikan menggunakan pustaka python untuk komputasi aljabar simbolik, yaitu SymPy (Symbolic Python). Melalui penerapan ini dapat ditentukan jawab kinematika langsung untuk  $m$  akar ril serta  $n - m$  akar-akar kompleks dan konjugatnya.

Tabel 1.

Nilai numerik untuk dimensi konstanta kinematik manipulator paralel bidang 3-RRR.

Konstanta kinematik	Dimensi (mm)
Jari-jari <i>base</i> , $r_b$	360
Batang bawah <i>limb</i> , $a$	220
Batang atas <i>limb</i> , $b$	240
Jari-jari <i>platform</i> , $r_p$	80

Sebagai suatu studi kasus pada manipulator paralel bidang 3-RRR digunakan dimensi konstanta kinematik manipulator seperti yang diberikan dalam Tabel 1. Penerapan nilai numerik ini akan menghasilkan jawab untuk permasalahan

kinematika langsung manipulator. Untuk jawab-jawab yang memenuhi dapat divisualisasikan posisi dan orientasi manipulator. Jawab-jawab yang memenuhi ini merupakan modus rakitan (*assembly modes*) kinematika langsung manipulator ini.

Komputasi dilakukan pada notebook yang memiliki prosesor Intel® i7 11800H dengan kecepatan 4.30 GHz dan RAM 32 GB. Sementara itu, perangkat lunak python dan SymPy digunakan dengan masing-masingnya pada versi 3.9.12 dan 1.10.1.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Penentuan mobilitas manipulator paralel bidang 3 DoF dengan rantai kinematik 3-RRR dapat ditentukan secara langsung dengan persamaan Grübler-Kutzbach berdasarkan jumlah batang dan sambungan. Manipulator ini memiliki 8 buah batang ( $\ell$ ) dan 9 buah sambungan ( $j$ ) serta setiap sambungan revolusi akan mengizinkan 1 gerakan ( $f_i$ ). Penerapan persamaan Grübler-Kutzbach menghasilkan mobilitas manipulator ini sebesar 3. Mobilitas sebesar 3 ini merupakan kemampuan dari *platform* untuk memiliki gerakan umum di bidang, yaitu dua gerak translasi pada suatu bidang dan satu gerak rotasi yang tegak lurus terhadap bidang tersebut.

#### 3.1. Persamaan Posisi

Titik  $P$  merupakan titik acuan untuk mendeskripsikan gerakan *platform* yang dinyatakan oleh variabel-variabel dalam *platform space*. Merujuk pada geometri manipulator yang ditampilkan dalam Gambar 1 dapat dituliskan secara matematis vektor posisi titik  $P$  terhadap titik  $O$  untuk ketiga *limb*-nya, yaitu

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{C_iP}, \quad (2)$$

untuk  $i = 1; 2; 3$ , dengan  $\overrightarrow{OP} = (x \ y)^T$ ,  $\overrightarrow{OA_i} = r_B \cdot (c\gamma_i \ s\gamma_i)^T$ ,  $\overrightarrow{A_iB_i} = a \cdot (c\theta_i \ s\theta_i)^T$ ,  $\overrightarrow{B_iC_i} = b \cdot (c\beta_i \ s\beta_i)^T$ , dan  $\overrightarrow{C_iP} = -\overrightarrow{C_iO} = r_P \cdot (c(\varphi + \gamma_i) \ s(\varphi + \gamma_i))^T$ .  $c\square$  dan  $s\square$  menyatakan masing-masingnya kosinus dan sinus suatu sudut  $\square$ , dengan  $\square$  dapat berupa sudut tunggal atau operasi aritmetik dua buah sudut atau lebih.

Selanjutnya, sambungan pasif  $\beta_i$  dapat dieliminasi dari persamaan vektor posisi yang dinyatakan oleh persamaan (2). Tentunya, persamaan (2) ini dapat disusun ulang menjadi

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{PC_i} = \overrightarrow{B_iC_i}. \quad (3)$$

Penerapan perkalian skalar vektor untuk kedua ruas persamaan (3) akan menghasilkan hubungan matematis

$$(x_i - a \cdot c\theta_i)^2 + (y_i - a \cdot s\theta_i)^2 = b^2, \quad (4)$$

dengan  $x_i = x - r_B \cdot c\gamma_i + r_P \cdot c(\varphi + \gamma_i)$ , dan  $y_i = y - r_B \cdot s\gamma_i + r_P \cdot s(\varphi + \gamma_i)$ . Akhirnya, persamaan (4) digunakan untuk memperoleh jawab permasalahan kinematika invers dan permasalahan kinematika langsung.

#### 3.2. Kinematika Invers

Jawab permasalahan kinematika invers dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (4) untuk nilai *actuator space*-nya berdasarkan nilai *platform space* yang diketahui. Untuk itu, persamaan (4) dapat diekspansikan dan ditulis kembali ke dalam suatu hubungan matematis yang diekspresikan oleh

$$x_i \cdot c\theta_i + y_i \cdot s\theta_i = K_i, \quad (5)$$

dengan  $K_i = (x_i^2 + y_i^2 + a^2 - b^2)/(2a)$ . Untuk menyelesaikan persamaan (5) dapat ditempuh dengan menerapkan hubungan tangen setengah sudut berikut

$$c\theta_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}; \quad s\theta_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2}; \quad t_i = \tan \frac{\theta_i}{2}.$$

Akhirnya, jawab kinematika invers  $\theta_i$  berupa besar sudut sambungan aktif dapat diperoleh dengan mensubstitusikan hubungan tangen setengah sudut ke dalam persamaan (5) dan melakukan manipulasi matematis setelahnya. Jawab ini diberikan oleh

$$\theta_i = 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{y_i + \kappa \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - K_i^2}}{K_i + x_i} \right), \quad (6)$$

untuk  $i = 1; 2; 3$ , dengan  $\kappa$  menyatakan indeks cabang untuk setiap nilai sambungan aktif  $\theta_i$  yang bernilai  $\pm 1$ . Indeks cabang setiap sudut sambungan aktif  $\theta_i$  memiliki dua nilai yang akan menentukan modus rakitan (*assembly modes*) manipulator ini. Dengan demikian, manipulator ini memiliki delapan buah modus rakitan.

#### 3.3. Kinematika Langsung

Penyelesaian permasalahan kinematika langsung dapat ditentukan berdasarkan persamaan (4). Untuk awalnya, persamaan (4) dapat ditulis ulang dan diekspansikan ke dalam bentuk

$$x^2 + y^2 + 2E_{ix}x + 2E_{iy}y + E_{i0} = 0, \quad (7)$$

dengan  $E_{ix} = r_p \cdot c(\varphi + \gamma_i) - r_B \cdot c\gamma_i - a \cdot c\theta_i$ ,  
 $E_{iy} = r_p \cdot s(\varphi + \gamma_i) - r_B \cdot s\gamma_i - a \cdot s\theta_i$ , dan  
 $E_{i0} = E_{ix}^2 + E_{iy}^2 - b^2$ , untuk  $i = 1; 2; 3$ .

Dengan mengurangi persamaan (7) untuk  $i = 1$  dengan  $i = 2$  dan  $3$  masing-masingnya diperoleh

$$E_{12x}x + E_{12y}y + E_{120} = 0, \quad (8)$$

$$E_{13x}x + E_{13y}y + E_{130} = 0, \quad (9)$$

dengan  $E_{120} = E_{10} - E_{20}$ ,  $E_{130} = E_{10} - E_{30}$ ,  
 $E_{12x} = 2(E_{1x} - E_{2x})$ ,  $E_{12y} = 2(E_{1y} - E_{2y})$ ,  
 $E_{13x} = 2(E_{1x} - E_{3x})$ , dan  $E_{13y} = 2(E_{1y} - E_{3y})$ .  
Selanjutnya, melalui persamaan (8) dan (9) dapat ditentukan jawab untuk  $x$  dan  $y$  masing-masingnya yang dinyatakan secara matematis sebagai

$$x = F_x/F_{xy}, \quad (10)$$

$$y = F_y/F_{xy}, \quad (11)$$

dengan  $F_x = E_{130}E_{12y} - E_{120}E_{13y}$ ,  
 $F_y = E_{120}E_{13x} - E_{130}E_{12x}$ , dan  
 $F_{xy} = E_{12x}E_{13y} - E_{13x}E_{12y}$ .

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (10) dan (11) ke dalam persamaan (7) untuk  $i = 1$  dapat diperoleh hubungan secara matematis yaitu

$$F_x^2 + F_y^2 + 2(E_{1x}F_x + E_{1y}F_y)F_{xy} + E_{10}F_{xy}^2 = 0. \quad (12)$$

Koefisien  $E_{1x}$ ,  $E_{1y}$ ,  $E_{10}$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ , dan  $F_{xy}$  pada persamaan (12) merupakan fungsi  $\varphi$ . Dengan memanfaatkan hubungan tangen setengah sudut untuk  $\varphi$

$$c\varphi = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}; \quad s\varphi = \frac{2\tau}{1+\tau^2}; \quad \tau = \tan \frac{\varphi}{2}$$

dapat dituliskan persamaan (12) ke dalam suatu polinom berderajat 12 dalam variabel bebas  $\tau$ .

Polinom ini dapat dituliskan secara matematis sebagai

$$\sum_{k=0}^{12} G_k \tau^k = 0, \quad (13)$$

dengan  $G_k$  mengandung koefisien  $E_{1x}$ ,  $E_{1y}$ ,  $E_{10}$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ , dan  $F_{xy}$ . Melalui persamaan (13) dapat diketahui bahwa polinom ini memiliki 12 buah akar, dengan hanya 2 akar saja yang ril. Sedangkan sisanya berupa akar kompleks dan konjugat. Kemudian, untuk dua akar ril ini dapat

ditentukan sudut orientasi *platform*  $\varphi$  dan posisi titik  $P$  di *platform*. Derajat polinom pada persamaan (13) ini lebih tinggi dibandingkan dengan derajat yang dinyatakan oleh Tsai [4] dan Gosselin [3] masing-masingnya 8 dan 6.

### 3.4. Implementasi Jawab Kinematika Langsung Melalui Open Source CAS: SymPy

Langkah penyelesaian kinematika langsung yang dinyatakan dari persamaan (7) hingga (13) dapat ditransfer ke dalam kode python. Tentunya, pemanfaatan pustaka SymPy ditujukan untuk memudahkan proses komputasi simbolik untuk menyelesaikan aljabar dan akar-akar polinom. Secara garis besar terdapat tujuh langkah untuk memperoleh jawab kinematika langsung manipulator paralel fungsi yang diprogram dengan bahasa pemrograman python.

Selanjutnya, fungsi ini dibangun dengan nama `exact_solution_dkp_3rrr_ppm`. Argumen masukan untuk fungsi ini berupa nilai numerik yang terdiri atas nilai sudut input pada sambungan aktif  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), konstanta kinematik manipulator ( $r_B, a, b, r_p$ ) yang diberikan oleh Tabel 1, dan nilai sudut  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Tujuh langkah ini dapat dinyatakan ke dalam *pseudocode* yang dinyatakan oleh Gambar 2.

1	Fungsi <code>exact_solution_dkp_3rrr_ppm</code> ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, r_B, a, b, r_p, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ):
2	Konstruksi persamaan posisi (7)
3	Bentuk persamaan (8) dan (9)
4	Selesaikan untuk $x$ dan $y$ , (10) dan (11)
5	Substitusi hasil pada baris ke-4 ke dalam persamaan (7) untuk $i = 1$
6	Bentuk polinom pada persamaan (13)
7	Selesaikan polinom untuk $\tau$
8	Dapatkan jawab untuk $x, y$ , dan $\varphi$

**Gambar 2.** Tujuh langkah penyelesaian permasalahan kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR secara simbolik-numerik.

Dengan demikian, fungsi ini dapat digunakan untuk mengevaluasi berbagai posisi dan orientasi *platform*. Untuk itu, evaluasi posisi dan orientasi *platform* akan ditentukan berdasarkan sudut input  $\theta_1, \theta_2$ , dan  $\theta_3$  yang nilainya secara berurut yaitu  $125^\circ, 245^\circ$ , dan  $50^\circ$ . Mengacu pada sudut input sambungan aktif ini diperoleh sebuah polinom berderajat 12 yang dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} & -93071.78 \cdot \tau^{12} + 253982.12 \cdot \tau^{11} - \\ & 442900.57 \cdot \tau^{10} + 596768.57 \cdot \tau^9 - \\ & 572899.97 \cdot \tau^8 + 454294.56 \cdot \tau^7 - \\ & 255408.85 \cdot \tau^6 + 116799.86 \cdot \tau^5 - \\ & 30323.83 \cdot \tau^4 + 4412.88 \cdot \tau^3 - 2306.54 \cdot \\ & \tau^2 - 878.86 \cdot \tau + 292.72 = 0. \end{aligned}$$

Akar-akar polinom berderajat 12 diberikan oleh

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -0.282073 \\ \tau_2 &= 1.245351 \\ \tau_3 &= 1.710842 \times 10^{-15} - i \\ \tau_4 &= 1.710842 \times 10^{-15} + i \\ \tau_5 &= 0.198933 - 0.457878i \\ \tau_6 &= 0.198933 + 0.457878i \\ \tau_7 &= 0.223870 - 0.513461i \\ \tau_8 &= 0.223870 + 0.513461i \\ \tau_9 &= 0.223870 - 0.513461i \\ \tau_{10} &= 0.223870 + 0.513461i \\ \tau_{11} &= 0.236130 - 0.556019i \\ \tau_{12} &= 0.236130 - 0.556019i\end{aligned}$$

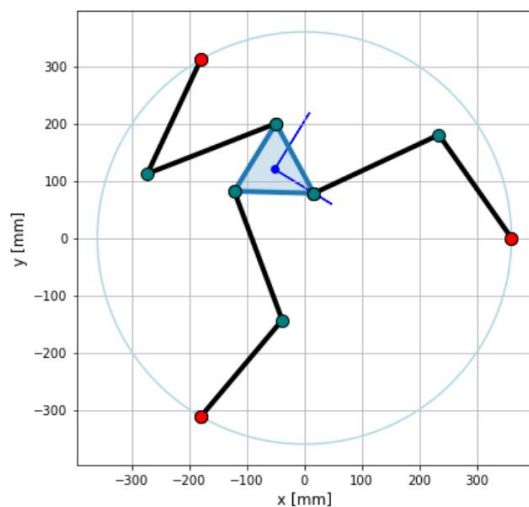
Di sini terdapat dua akar-akar ril yang akan digunakan untuk menentukan posisi dan orientasi *platform* yang diberikan oleh Tabel 2. Dua akar-akar ril ini konsisten dengan hasil yang diperoleh oleh Dastjerdi, dkk [7] melalui indeks geometri DCI.

**Tabel 2.**

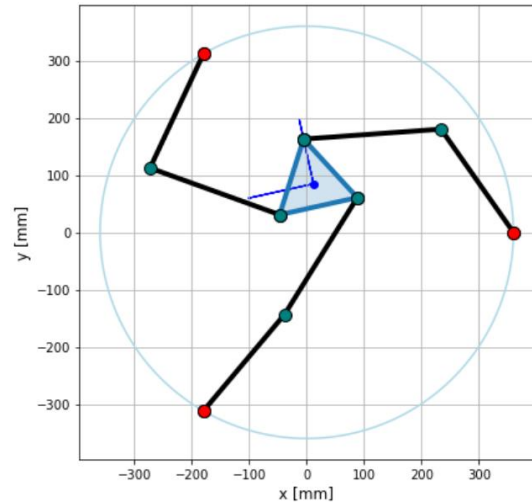
Jawab kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR berdasarkan nilai numerik Tabel 1 dan nilai sudut input sambungan yang diaktuasi.

Posisi dan orientasi	Jawab pertama	Jawab kedua
$x$ (mm)	-51.6273	11.7180
$y$ (mm)	119.9897	84.7536
$\varphi$ (°)	-31.5047	102.4720

Akhirnya, visualisasi jawab kinematika langsung manipulator paralel 3-RRR yang diberikan oleh Tabel 2 ditampilkan dalam Gambar 3 dan 4 masing-masingnya untuk jawab pertama dan jawab kedua.



**Gambar 3.** Posisi dan orientasi manipulator paralel bidang 3-RRR berdasarkan jawab pertama Tabel 2.



**Gambar 4.** Posisi dan orientasi manipulator paralel bidang 3-RRR berdasarkan jawab pertama Tabel 2.

#### 4. Kesimpulan

Penerapan penentuan jawab kinematika langsung manipulator paralel bidang 3-RRR menggunakan pendekatan simbolik-numerik secara eksak telah dilakukan. Pendekatan simbolik-numerik ini dituangkan dari prosedur jawab eksak secara ekplisit matematis ke dalam kode python dengan memanfaatkan pustaka SymPy. Secara umum, algoritma yang berbasis penyelesaian simbolik manipulator paralel bidang ini dapat mengidentifikasi dua akar ril. Dua akar ril ini berkorelasi dengan dua pasang jawab kinematika langsung manipulator yang juga ditampilkan secara langsung visualisasi posisi dan orientasinya. Untuk mendatangnya, penentuan jawab kinematika langsung dengan pendekatan simbolik-numerik pada manipulator paralel ruang dapat diimplementasikan.

#### Daftar Pustaka

- [1] Patel YD, George PM. Parallel Manipulators Applications—A Survey. *Mod Mech Eng* 2012; 02: 57–64.
- [2] Pandilov Z, Vladimir Dukovski. Comparison of the Characteristics Between Serial and Parallel Robots. *Acta Teh Corviniensis - Bull Eng* 2014; VII: 143–160.
- [3] Gosselin CM, Jaouad Sefrioui. Polynomial solutions for direct kinematics problem of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators. In: *Fifth International Conference on Advanced Robotics 'Robots in Unstructured Environments*. Pisa, Italy, 1991, pp. 1124–1129.
- [4] Tsai L-W. *Robot Analysis - The*

- Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [5] Merlet JP. Direct kinematics of planar parallel manipulators. *Proc - IEEE Int Conf Robot Autom* 1996; 4: 3744–3749.
- [6] Naderi D, Tale-Masouleh M, Varshovi-Jaghargh P. Gröbner basis and resultant method for the forward displacement of 3-DoF planar parallel manipulators in seven-dimensional kinematic space. *Robotica* 2016; 34: 2610–2628.
- [7] Amir Hashemi Dastjerdi, Maryam Valipour, Tale Masouleh M, et al. A General Geometric Index for Solving the Forward Kinematics of Planar Parallel Manipulators. In: *2021 9th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*. 2021. Epub ahead of print 2021. DOI: 10.1109/ICRoM54204.2021.9663489.
- [8] Dang XZ, Zhou LS, Liao LP, et al. Modelling and simulation of forward kinematics for planar 3-DOF parallel robot based on simulink. *Appl Mech Mater* 2013; 397–400: 1552–1557.
- [9] Bidokhti HS, Enferadi J. Direct kinematics solution of 3-RRR robot by using two different artificial neural networks. *Int Conf Robot Mechatronics, ICROM 2015* 2015; 606–611.
- [10] Sayed AS, Ahmad Taher Azar, Ibrahim ZF, et al. Deep Learning Based Kinematic Modeling of 3-RRR Parallel Manipulator. In: *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision (AICV2020)*. 2020, pp. 308–321.
- [11] Meurer A, Smith CP, Paprocki M, et al. SymPy: Symbolic computing in python. *PeerJ Comput Sci* 2017; 2017: 1–27.