PERSPECTIVAS

PERSPECTIVAS
REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

VOL. 7, Nº 2, 2022, P. 99-119
ISSN: 2448-2390

Aspectos da indiscernibilidade quântica e da teoria de quase-conjuntos

Aspects of Quantum Indiscernibility and of the Theory of Quasi-Sets

DOI: 10.20873/rpv7n2-45

Décio Krause

Orcid ID: 0000-0003-0463-2796
Email: deciokrause@gmail.com

Resumo
A indiscernibilidade das entidades quânticas é considerada como uma das noções centrais das teorias quânticas. Neste artigo expositivo, são apontadas algumas das razões para essa alegada importância, bem como as ideias básicas de uma teoria matemática que permite tratar de coleções dessas entidades. O artigo inicia com uma posição geral do autor sobre a filosofia da ciência.

Palavras-chave
Indiscernibilidade, quase-conjuntos, anti-realismo, sub-determinação.

Abstract
The indiscernibility of quantum entities is taken as one of the core concepts in quantum physics. In this article, some reasons to consider such a notion are presented and a mathematical theory aiming to deal with collections of indiscernible entities is sketched. A general position about the philosophy of science is also advanced.

Keywords
Indiscernibility; Quasi-sets; Anti-realism; Underdetermination.

Introdução

Filosoficamente, eu defendo uma espécie de anti-realismo que pretendo explicar em poucas linhas. Acredito que postulamos a existência de uma "realidade" independente de nossa mente e que ela é *moldada* de alguma forma pela nossa mente a partir de dados fenomênicos. O cientista (vou aqui falar do físico), pelo menos em princípio, quando interessado em uma parcela dessa suposta realidade, elabora um *modelo matemático* que a simula e que pode ser descrita por uma *estrutura matemática*, e é essencialmente com isso que ele trabalha. Os experimentos que realiza e os instrumentos que desenvolve visam proporcionar um modo de avaliar a correção, ao menos parcial, desse modelo. O modo pelo qual os diversos cientistas veem de forma quase que semelhante aquilo que nos cerca se deve, como bem salientou Schrödinger, à formação de determinados *invariantes* que dependem, dentre outros fatores, de nossa cultura e, eu diria, de nossa genética (SCHRÖDINGER 1996).

As teorias quânticas nada mais são do que *modelos matemáticos* nesse sentido. Porém, na minha opinião não consistem de meros dispositivos para prever (probabilisticamente) resultados de medições, mas *podem* ser acurados o suficiente para nos dar aproximações satisfatórias daquilo que idealizamos, em um processo que, como diria Bas van Fraassen, *salva os fenômenos* (VAN FRAASSEN 1976). Uma das tarefas do filósofo da física é a de buscar entender o que há (se algo há) *por trás* dessas formulações teóricas ou, dito de outro modo, como seria o mundo se essas teorias fossem verdadeiras. Em especial, está aí a busca por uma *ontologia* sugerida por uma particular teoria.

A questão é a que, dada uma teoria, via de regra podemos associar a ela diferentes e mesmo incompatíveis ontologias, ou *metafísicas*. Essa *sub-determinação* da metafísica pela física, como tem sido referida, é hoje fato quase que unanimemente aceito pelos filósofos e traz questionamentos a certas posturas filosóficas, como o *naturalismo*, segundo o qual, falando por alto, para que "saibamos" como é o mundo que nos cerca, devemos olhar para as nossas melhores teorias. Porém, se há essa sub-determinação, jamais saberemos de qual ontologia, ou metafísica, estamos nos acercando. No caso da mecânica quântica, há quem defenda uma *ontologia da função de onda* (ver NEY 2021), assim como há ontologias de entidades, num sentido que se aproxima de Ian Hacking (ver HACKING 1983), apesar de que eu não repute as entidades postuladas pelas teorias como *reais*. Não sabemos se elas existem de fato; aparentemente, elétrons, prótons e muitas outras coisas são *reais*, mas o que elas são de fato é, para mim, algo inacessível. O que temos são nossos modelos, nossas teorias, e essas coisas aparecem de diferentes modos em cada uma delas. Por exemplo, no capítulo 6 de seu livro *Particle Metaphysics* (FALKENBURG 2007), Brigitte Falkenburg discorre sobre a `evolução' do conceito de *partícula* desde a física clássica até o modelo padrão; em cada estágio, uma coisa diferente…

Para encurtar a discussão, na minha opinião as teorias quânticas postulam certas *entidades* às quais se atribuem certas características e que, no formalismo usual (via espaços de Hilbert) têm seu comportamento descrito por uma entidade matemática denominada de *função de onda* (vou me concentrar na mecânica quântica não relativística padrão, mas muito do que dissermos se adapta às teorias quânticas de campos, como argumentado em FRENCH & KRAUSE 2006, cap. 9). Podemos associar a esse formalismo pelo menos duas metafísicas distintas e incompatíveis, e não temos como saber qual delas é a *verdadeira*. A saber, uma delas admite que as entidades quânticas básicas são *indivíduos* ao par com as entidades postuladas pela física clássica, somente que estando sujeitos a uma restrição nos *estados* que lhes são acessíveis. A outra, que eu prefiro, considera essas entidades como *não-indivíduos* em um sentido que procurarei explicar abaixo.

Como teremos chance de verificar, o conceito de *indiscernibilidade*, ou de *indistinguibilidade* desempenha aqui papel fundamental nessa metafísica de não-indivíduos. Reputo esse conceito como tão relevante quando outros, típicos das teorias quânticas, como a *superposição* (em particular o *emaranhamento*), a *complementaridade,* a *não-localidade* e a *contextualidade,* das quais não falaremos, a despeito de sua importância. Falaremos também de uma teoria matemática (denominada de *teoria de quase-conjuntos*) que foi elaborada tendo essa metafísica em mente, a qual supostamente suporta um desenvolvimento de uma teoria quântica livre de certas imposições que vêm agregadas à matemática e à lógica clássica, usualmente tomadas (implicitamente) como base.

O artigo é primordialmente expositivo, e vou tentar fazer tudo usando um mínimo de notação matemática.

1. A indiscernibilidade e os quase-conjuntos

Informalmente, coisas indiscerníveis, ou indistinguíveis, são coisas que não apresentam qualquer diferença, exceto talvez por uma estar aqui e a outra ali. Mas a localização espaço-temporal não quer dizer muito, porque se fecharmos os olhos por um momento, quando os abrirmos novamente, veremos novamente uma coisa aqui e outra ali, mas não poderemos afirmar que, durante o tempo em que nossos olhos estiveram fechados, não houve uma troca de posições entre as duas coisas. Nunca saberemos se a que estava “aqui" é de fato a que está “aqui" agora, uma vez que, por hipótese, as duas coisas não se distinguem *qualitativamente* e pode ser que algum gênio maligno tenha trocado as duas de posição para nos enganar. É exatamente essa característica de que qualquer *troca* de uma coisa pela outra sem que isso leve a resultados perceptíveis que caracteriza as entidades quânticas, como elétrons, protons, átomos de uma mesma substância, moléculas de um mesmo material e assim por diante, até um limite que mesmo hoje não sabemos de fato qual é.

Os físicos se referem a essas coisas como *idênticas*, mas essa palavra não é a mais adequada. Com efeito, por *identidade* entendemos um conceito distinto: coisas idênticas são *a mesma coisa*. Ainda que redundante, essa caracterização nos ajuda a entender o que se pretende. Quando dizemos que duas coisas são idênticas, não estamos nos referindo, na verdade, a *duas* coisas, mas a uma só, que pode ser designada de diferentes modos. É clássico o exemplo de Frege de que “a estrela da manhã é idêntica à estrela da tarde” porque ambas as descrições têm o mesmo *referente*, o planeta Vênus. Assim, como quando dizem que elétrons são *idênticos*, os físicos não estão querendo afirmar que se tratam *do mesmo* elétron, mas que eles são *indiscerníveis*. É assim que vamos utilizar esses conceitos doravante.

Qual a relação entre esses dois conceitos? Para discutir isso, é conveniente que falemos um pouco sobre o oposto da identidade, a *diferença.* Com efeito, usualmente supomos que os objetos macroscópicos que nos cercam, como dois lápis, são *diferentes* porque acreditamos que uma análise detalhada, talvez com o uso de um microscópio, vai apresentar alguma coisa que indique a diferença entre eles, como uma mancha ou um arranhão. Ademais, se eles são *dois*, não podem ser um só, e se não são idênticos, são obviamente *diferentes*. Essa pelo menos é a nossa visão usual, que filosoficamente denominamos de uma *metafísica*: não há duas (ou mais) entidades absolutamente semelhantes, ou indiscerníveis, e isso é acompanhado na crença na lógica clássica: "se não são idênticos, são diferentes e reciprocamente" (uma instância do Princípio do Terceiro Excluído).

Somente esse pequeno e aparentemente trivial exemplo é suficiente para mostrar ao leitor quanta coisa está sendo pressuposta. Vamos destacar algumas delas. Primeiramente, há o referido apelo à lógica clássica e suas regras: nada pode ser uma coisa e não ser ao mesmo tempo (Princípio da Não-Contradição), todos as coisas são idênticas a elas mesmas (Princípio da Identidade), se temos duas coisas então temos uma coisa e temos também a outra coisa, de forma que da sua "conjunção", podemos considerá-las em separado, etc. Mas o mais relevante aqui é a concepção metafísica que vem pelo menos desde os estóicos e que foi sedimentada na filosofia de G. W. Leibniz: se temos *duas* coisas (ou mais coisas, evidentemente), elas têm que comportar alguma diferença de natureza qualitativa, ou seja, dada por alguma propriedade que uma delas tem e a outra não; elas não podem ser meramente *numericamente discerníveis*. A isso denomina-se Princípio da Identidade dos Indiscerníveis, que pode ser assim formulado: se coisas partilham as mesmas propriedades e relações (ou seja, se são indiscerníveis), então elas são idênticas (são a mesma coisa). A recíproca, ou seja a afirmativa de que coisas idênticas partilham as mesmas propriedades e relações é conhecida como Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos. Esse princípio vai aparecer na discussão filosófica sobre a física quântica levando-se em conta a distinção entre propriedades *intrínsecas* e *extrínsecas,* das quais falaremos algo a seguir.

É claro que, usando esses princípios, estamos implicitamente aceitando (outra suposição oculta) que nada mais há para caracterizar um objeto do que suas propriedades e relações. Isso não é assim tão simples de aceitar, apesar de ser aparentemente óbvio. Uma pessoa, por exemplo, envelhece, e muda completamente toda a sua massa corporal ao longo dos anos, e consequentemente todas as suas propriedades, como cor, textura da pele, altura, tom da voz, etc. No entanto, aceitamos que ela continua sendo *a mesma* pessoa. Como isso é possível? Uma das respostas padrão repousa na hipótese de que há algo a mais que identifica uma pessoa, para além (ou *transcendendo*) as suas propriedades, como alguma forma de *substrato*, algo inerente à pessoa e que não se reduz às suas propriedades e relações (alguns chegam a falar da *alma* da pessoa). Os medievais criaram outros termos para se referirem a algo assim, como `hecceidades', por exemplo. Mas assumir a existência de algo desse tipo é tornar a nossa metafísica muito ampla e, uma vez que não podemos explicar o que seria um tal substrato, pois necessitaríamos de propriedades e relações para isso, estaríamos na presença de algo de difícil ou até mesmo impossível caracterização. A propósito, discutindo essas noções no âmbito das teorias quânticas, o filósofo da física Paul Teller argumentou conclusivamente que essas teorias não são compatíveis com a existência de nada além das propriedades e relações (TELLER 1998): em física quântica, não há haecceities. Na física clássica, no entanto, como veremos mais abaixo quando falarmos das "estatísticas", constatamos que os objetos físicos, apesar de terem as mesmas qualidades, como dois elétrons, apresentam alguma forma de *individualidade transcendental* (às suas propriedades), para empregar as palavras de Heinz Post (veja FRENCH & KRAUSE 2006), o que não ocorre no nível quântico.

Vamos portanto assumir que, em se tratando de entidades ao nível quântico, nada mais há do que propriedades e relações. Mas o que são "propriedades"? Que tipos de propriedades há? Aqui aparecem outras suposições usualmente implícitas em nosso discurso filosófico. Tendemos a aceitar que existem propriedades *qualitativas*, que os físicos preferem chamar de *intrínsecas.* Essas são as propriedades que independem do *estado* do sistema físico que está sendo considerado (já falaremos mais sobre isso), como *massa*, *carga elétrica* e valor de *spin.* As restantes são as propriedades *extrínsecas*, que dependem do estado do sistema físico, como a localização espaço-temporal.

Assim, entidades quânticas podem partilhar todas as suas propriedades intrínsecas, mas diferir relativamente às extrínsecas. O mais importante, no entanto, como já apontado acima, é que se duas entidades *de mesmo tipo*, como dois elétrons ou dois protons, estiverem localizados em posições distintas a um só tempo, isso não lhes confere *diferença* em sentido forte (no sentido da teoria clássica da identidade),[1] por causa de uma possível e indetectável permutação. Ademais, podemos supor que um desses objetos é descrito em nosso formalismo matemático por uma *função de onda* e o outro por *outra* função de onda, e assim eles poderiam ser diferenciados.[2] Mas não é assim que a coisa funciona. Quando tratamos das *duas* entidades de uma só vez, temos que juntar as duas funções de onda em uma só que é simétrica ou anti-simétrica relativamente à permutação das entidades (ou de seus nomes, que atribuímos por necessidades linguísticas).[3]

Quando uma permutação é detetável, denominamos as entidades envolvidas de *indivíduos*. Mais especificamente, um *indivíduo* é uma entidade que obedece as seguintes condições: (i) é uma *unidade* de um certo *tipo,* ou *espécie* ("kind"); (ii) possui *identidade* no sentido de possuir algo que nos permita dizer que *aquela* entidade é *a mesma* de uma experiência anterior. A isso denominamos de *re-identificabilidade*. Um indivíduo é re-identificável, pode ser reconhecido como sendo *aquele* indivíduo de outra oportunidade (de outro *contexto*).

As entidades que não obedecem algum desses critérios são chamados de *não-indivíduos*. O termo pode não ser muito apropriado, mas tem origem histórica (para detalhes, ver FRENCH

---

[1] Segundo essa teoria, que incorpora de alguma forma o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis, se coisas são distintas, haverá uma propriedade que a distinga.

[2] Uma *função de onda* é uma entidade matemática que especifica o *estado* de um sistema físico em um dado instante de tempo. Uma característica notável da física quântica é que podemos ter certas combinações de funções de onda, de forma que sistemas possam estar em *estados de superposição.* Porém, contrariamente à crença comum, isso não significa que os sistemas estejam em *todos* os estados superpostos ao mesmo tempo.

[3] Com efeito, nossa linguagem comum, e a da matemática inclusive, faz uso de *rótulos*, como "objeto 1" e "objeto 2" para que possamos nos referir a eles. Porém, no caso quântico, usamos um truque matemático para fazer com que uma vez que esses rótulos sejam permutados, não se constatem diferenças nos resultados obtidos, desse modo simulando a indiscernibilidade.

& KRAUSE 2006). Nos primórdios da MQ, os seus fundadores acharam que as partículas elementares na MQ haviam *perdido a individualidade* que era comum na física clássica, sendo portanto *não-indivíduos* (veja SCHRÖDINGER 1967). Naquela época, não se distinguia entre *individualidade* e *identidade*, o que se faz hoje (ARENHART & KRAUSE 2014).

Como considerar os não-indivíduos? Um modo de se fazer isso, adotado em FRENCH & KRAUSE op.cit., foi o de se considerar que a noção usual de identidade, dada pela lógica clássica, não se aplica a essas entidades. A motivação vem de Schrödinger, que em seu livro *Ciência e Humanismo* (SCHRÖDINGER 1996) sugeriu que a noção de identidade careceria de sentido para as partículas elementares. Interpretamos isso do seguinte modo: se x ou y denotarem não-indivíduos, então a expressão "$x = y$" não é uma *fórmula*, uma "expressão bem formada" da linguagem. Isso traz dificuldades enormes para a formulação matemática de uma teoria envolvendo coleções de tais entidades, que foram chamadas de *quase-conjuntos,* como evidenciaremos brevemente abaixo.

No entanto, aceita-se que possa valer entre eles uma relação binária mais fraca, denominada de *relação de indiscernibilidade,* simbolizada por "$\equiv$". A teoria ainda admite que haja entidades que correspondem àquelas das teorias usuais de conjuntos com átomos, em especial ZFA (Zermelo-Fraenkel com Átomos — veja SUPPES 1960). Assim, há na teoria dois tipos de átomos; os M-átomos correspondem aos átomos usuais de ZFA, e os m-átomos, que correspondem aos não-indivíduos. Os quase-conjuntos são coleções que podem conter como elementos m-átomos, M-átomos, bem como outros quase-conjuntos, ou tudo misturado. Aqueles quase-conjuntos onde m-átomos não aparecem (tecnicamente, eles não estão presentes no fecho transitivo do quase-conjunto) são chamados de *conjuntos* e correspondem aos conjuntos de ZFA.

2. Algumas das dificuldades de se elaborar essa teoria.

Apontamos a seguir algumas das dificuldades que são encontradas na tentativa de se erigir uma teoria de quase-conjuntos. Essas dificuldades são superadas com sutilezas que não temos como revisar aqui. Porém esperamos que o leitor possa, com esses exemplos, entender como a noção de identidade é importante na matemática usual.

Definir *função*. Uma função f entre dois conjuntos A e B é um conjunto de pares ordenados $\langle a, b \rangle$ com $a \in A$ e $b \in B$ de modo que (i) para todo $a \in A$ exista um $b \in B$ tal que $\langle a, b \rangle \in f$, e (ii) se $\langle a, b \rangle \in f$ e se $\langle a', b \rangle \in f$, então $a = a'$. Vê-se que é preciso identificar os elementos do domínio e do co-domínio, ou seja, usar a identidade. Por isso, a teoria de quase-conjuntos usa um conceito mais débil de *quase-função*, que requer somente a indiscernibilidade; correspondentemente aos conceitos clássicos, pode-se definir *quase-injeção, quase-sobrejeção* e *quase-bijeção.*

Definir *par* e *par ordenado*. Uma vez que a noção de identidade não se aplica aos m-átomos, um "par", que nas teorias usuais denotamos por $\{a, b\}$, não conterá necessariamente só dois elementos, pois não podemos identificar m-átomos. A solução é definir um "par", denotado por "$[a, b]$", contendo como elementos os indiscerníveis de a e de b vindos de quase-conjuntos adequados. Um "par ordenado" é definido assim: $\langle a, b \rangle = [[a], [a, b]]$, formado pelos indiscerníveis de a e dos indiscerníveis de b. Os detalhes estão sendo omitidos. Em particular, pode-se inferir a existência de um *unitário forte* de qualquer elemento a, aqui denotado $[[a]]$, que tem quase-cardinal 1 (ver a seguir) e cujo elemento é indiscernível de a. Note uma coisa impotente: apesar de que $[[a]]$ tem um só elemento indiscernível de a, não podemos afirmar que esse elemento é a, pois para isso necessitaríamos da identidade, que não está disponível para os m-átomos. Assim, podemos legitimamente falar, na linguagem da teoria, em *um indiscernível de* a sem nos comprometermos com a sua identificação.

Atribuição de um cardinal. Em química, por exemplo, os cientistas têm um método para determinar a quantidade (fixa) de elétrons em cada orbital de um átomo, que é dada em função das quantidades de energia ligada ao campo elétrico do núcleo. A quantidade de elétrons, ou a cardinalidade de cada orbital: dois elétrons no primeiro nível de energia ($1s^2$), oito no segundo ($2s^2 2p^6$), e assim por diante, sem que seja considerada a *identidade* dos elétrons envolvidos: dito de modo abrupto, basta que sejam elétrons. Da mesma forma, em física quântica pode-se estimar a quantidade de átomos ou de moléculas em um Condensado de Bose-Einstein (BEC) "pesando-se" o composto. Um BEC é formado quando um dos dois tipos de entidades quânticas que se conhece, denominadas de *bósons*, são congelados até muito perto do zero absoluto. Nessas condições, essas entidades (que podem ser milhares) tornam-se absolutamente integradas, de modo que se comportam como se fossem uma só coisa. Mas não; como dito, são muitas vezes milhares, só que estão no mesmo *estado quântico*, não podendo ser discernidos de modo algum, nem teoricamente. Ou seja, a teoria deve permitir que associemos um *cardinal* a um quase-conjunto mesmo quando há m-átomos (não-indivíduos) envolvidos. Ora, qual o problema então? O problema é que em uma teoria usual de conjuntos, o cardinal de um conjunto é usualmente definido como sendo um *ordinal* de tipo especial: é o menor ordinal que é *equinumeroso* ao conjunto dado, sendo que "equinumerosidade" significa a existência de uma função bijetiva entre eles. Mas, como vimos, o estabelecimento de uma bijeção implica identificação, e se os não-indivíduos são considerados indiscerníveis, não se poderia supor que eles possam ser identificados. Como resolver o problema? Há dois modos. O primeiro é o adotado na teoria de quase-conjuntos, que adota um conceito de *quase-cardinal* como primitivo, sujeito a certos axiomas que balizam a noção. Um quase-cardinal é um cardinal, definido naquela parte da teoria que corresponde a ZFA, mas que pode ser associado mesmo a um quase-conjunto contendo m-átomos indiscerníveis. Uma outra solução é a de adotar, pelo menos para quase-conjuntos contendo finitos m-átomos, o que parece ser suficiente para as aplicações em física, os números naturais como dados pela Aritmética de Peano, que é "anexada" à teoria de quase-conjuntos como uma teoria de apoio (*step theory*). Note que não estamos nos referindo aos números naturais que podem ser definidos em ZFA; esses constituem um *modelo* para a aritmética de Peano, e são ordinais, ou definidos de algum modo que pressuponha ordinais.[4] Os números

---

[4] Há um *truque*, conhecido como *truque de Scott*, que permite definir cardinais de um modo alternativo ao usual (que faz uso do Axioma da Escolha), baseando-se unicamente no Axioma da Regularidade, mas fazendo uso da noção de *rank* de um conjunto, que novamente recai em ordinais. Para que nos vejamos realmente livres de qualquer referência a ordinais, a associação com a Aritmética de Peano parece ser de fato a mais eficiente.

naturais da aritmética de Peano são definidos à parte do conceito de ordinal; são eles o zero, o sucessor do zero (que é o "um"), o sucessor do sucessor do zero (que é o "dois") e assim por diante. Em resumo, a ideia é definir (algo que ainda está sendo estudado) um *produto* de teorias, que podemos escrever $T = T_1 \times T_2$, e definir, em T, um par ordenado $\langle a, b \rangle$, com $a \in T_1$ e $b \in T_2$. Cada teoria pode ter a sua particular noção de dedução, simbolizadas respectivamente por $\vdash_1$ $e \vdash_2$, a lógica de T sendo uma lógica *multidedutiva* (DE SOUZA 2000). Mas, para facilidade, usaremos uma noção só de dedução para ambas as lógicas, já que o nosso exemplo pretendido é o produto $\mathfrak{Q} \times PA$, entre a teoria de quase-conjuntos e a Aritmética de Peano. Insisto que a ideia é *não usar* o modelo de AP que existe na teoria de quase-conjuntos, uma vez que queremos evitar qualquer associação dos números naturais com ordinais. Assim, se A é um quase-conjunto cujos elementos são m-átomos indiscerníveis, o par $\langle A, n \rangle$ indica que ao quase-conjunto A associamos um número natural (algo da forma $ss \ldots s0$, sendo s a operação de tomar o sucessor, e não um ordinal correspondente a esse número) que seria o seu cardinal. Isso funciona para o uso finito, mas parece ser suficiente para as finalidades da física.

O que importa é que possamos, de uma forma ou de outra, falar em uma certa quantidade de elementos indiscerníveis sem identificá-los, que é o que requer a física quântica e, obviamente, a química, como veremos também mais abaixo. Os outros detalhes da teoria não serão apresentados, pois encontram-se nas nossas referências ou em trabalhos ainda sendo realizados.

Na matemática clássica, pode-se lidar com entidades *supostamente* indiscerníveis restringindo a discussão para dentro do que se denominam *estruturas não-rígidas* (ou *deformáveis*). Primeiramente, reconheçamos que uma *estrutura*, dito de maneira muito geral, é um conjunto formado por um ou mais domínios (vamos assumir um só) e relações entre os elementos desses domínios. As estruturas podem ser mais ricas, envolvendo também relações e operações com subconjuntos desses domínios, ou de outras entidades "de ordem superior" (veja KRAUSE & ARENHART 2017 para uma apresentação mais detalhada). Uma estrutura admite um tipo de função entre os seus elementos que é denominada de *automorfismo*, e se trata de uma função bijetiva do domínio no domínio que preserva todas as relações da estrutura. Se $h: D \to D$ for um automorfismo de uma estrutura que tem domínio D, e se R for uma relação binária definida entre os elementos do domínio, então teremos que $xRy \to f(x)Rf(y)$, ou seja, o automorfismo "preserva" as relações. Em uma estrutura, dois elementos do domínio são ditos serem *indiscerníveis* se existe um automorfismo que leva um no outro. Como uma bijeção é inversível e a inversa de um automorfismo é também um automorfismo, resulta que os dois elementos são levados (por automorfismos) um no outro. Finalmente, cabe mencionar que a *função identidade* $i(x) = x$ é sempre um automorfismo em qualquer estrutura. Se o único automorfismo for essa função identidade, a estrutura é dita ser *rígida*.

Por exemplo, tomemos a estrutura do corpo dos números complexos. *Dentro* dessa estrutura, os números complexos i e $-i$ são indiscerníveis pois a operação de tomar o complexo conjugado é um automorfismo da estrutura, como é fácil demonstrar. No entanto, esses números complexos podem ser discernidos *de fora* da estrutura, por exemplo representando-os num Plano de Argand-Gauss, ou Plano Complexo (uma olhada na web mostra facilmente o que isso significa). Nesse plano, os números complexos em apreço são representados por pares distintos de números reais, respectivamente $(0,1)$ e $(0,-1)$. Ora, perguntará você: porque então não nos restringimos às estruturas não-rígidas?

A resposta tem a ver com o que queremos fazer. *Se* nossa intenção é sustentar uma metafísica que entende os objetos quânticos como não-indivíduos, vamos querer que eles não possam ser discernidos *de modo algum*, como ocorre com os elementos de um BEC, de forma que não estejamos *fazendo de conta* que eles são indiscerníveis quando na verdade não são. Com efeito, seria estanho sustentarmos que os elementos de um BEC não podem ser discernidos *de modo algum* mas a nossa matemática permite que façamos isso… e isso *sempre* é possível na matemática padrão, que assumimos ser aquela que pode ser erigida em uma teoria usual de conjuntos. Isso se deve a um resultado interessante, que pode ser assim enunciado: *nessas teorias de conjuntos, qualquer estrutura pode ser rigidificada, ou seja, tornada rígida pela adição de novas relações.* Isso implica que, na matemática usual, não há como representar entidades que se assuma serem *completamente* indiscerníveis, pois se são indiscerníveis relativamente a uma estrutura, poderão ser discernidas em uma extensão que seja rígida. A teoria de quase-conjuntos foi proposta com essa finalidade, pois ela permite que se erijam estruturas não rígidas que não podem ser rigidificadas. A teoria tem se mostrado útil também em outros contextos, alguns dos quais lembrados aqui, ainda que por alto.

3. Aplicações da indiscernibilidade e dos quase-conjuntos

Em física quântica, a teoria dos quase-conjuntos e a noção de indiscernibilidade têm pelo menos as seguintes aplicações.

A) Expressão de uma metafísica, como comentado acima, a saber, aquela que enxerga as entidades quânticas como não-indivíduos, podendo ser *absolutamente* indiscerníveis em determinadas situações. Saliente-se alguns dos aspectos dessa metafísica. Um não indivíduo pode eventualmente ser *isolado*, ou *individualizado* por exemplo por uma "armadilha quântica". A propósito, foi fazendo isso que os físicos Hans Dehmelt (Nobel de 1989) e Haroche e Vineland (Nobel em 2012) venceram os seus prêmios. Em particular, Dehmelt "aprisionou" um pósitron (a anti-partícula do elétron), assim não haveria possibilidade de confundi-la com outra) a qual chamou de "Priscilla". Em sua *Nobel Lecture*, Dehmelt chega a afirmar que, no tempo em que ficou na armadilha, Priscilla "tinha identidade". Isso foi por mim contestado (KRAUSE 2011) com os seguintes argumentos. *Identidade* não é algo que uma coisa pode ter em certos momentos e não em outros. Julius Caesar era *a mesma pessoa* no Egito, em Roma ou passando o Rubicão. Em segundo lugar, se ele fosse substituído por outra pessoa, como por Pompeo, a situação mudaria essencialmente. Isso com efeito não acontece com Priscilla ou com qualquer outra entidade quântica aprisionada. Dehmelt não escolheu *aquele* pósitron particular, mas *um* pósitron para chamar de "Priscilla", certamente depois de inúmeros experimentos e pósitrons descartados. Ademais, *qualquer pósitron* serviria para os seus propósitos experimentais, ao passo que ninguém substituiria Julius Caesar para as ambições de Cleópatra à época. Desse modo, tem-se uma ideia mais precisa do que entendo por um não-indivíduo. Um dos pósitrons pode ser "aprisionado", isolado, mas isso não faz dele um indivíduo ou algo que seja dotado de identidade. Repare-se, ademais, que não estou fazendo referência específica a "partículas", mas falo de "objetos (ou entidades) quânticas" visando ser o mais neutro possível. A natureza dessas entidades é ainda um mistério, e tudo o que temos são nossas teorias e nossas crenças de que elas de fato parecem existir. Não importa se são *partículas*, *excitações de campos, representações irredutíveis de certos grupos* ou qualquer outra caracterização.[5] O que é relevante é que elas apresentam essa característica essencial da indiscernibilidade.[6]

B) Vejamos agora de que forma o uso da hipótese de que as entidades quânticas são de fato indiscerníveis (em certas situações) pode auxiliar no entendimento de questões importantes. Na física clássica, um objeto físico pode ter propriedades, e todas essas propriedades têm, a um dado tempo, valores bem determinados, ainda que não os conheçamos. A propósito, Einstein acreditava que o mesmo deveria valer para as entidades quânticas. No entanto, foi demonstrado na década de 1960 (depois de Einstein, portanto), que na interpretação padrão da física quântica isso não é assim. Tudo o que podemos ter são grupos de propriedades (denominadas de contextos) assumido valores, mas nunca todas as propriedades possíveis. Esse resultado é denominado de Teorema Kochen-Specker (muitas vezes tratado como se fosse um "paradoxo"), e veio a lume em 1967. Há hoje em dia vários modos de se formular esse teorema, simplificando o artigo original. Em um artigo recente, José Acácio de

[5] Dependendo da teoria adotada, as "partículas" aparecem de diferentes formas, as indicadas no texto sendo apenas algumas delas.

[6] É relevante, no entanto, mencionar a mecânica quântica de David Bohm, que assume uma ontologia semelhante (porém diferente) à da física clássica. Na mecânica bohmiana, as partículas têm trajetórias, logo identidade. No entanto, essas trajetórias são descritas por "variáveis ocultas" (*hidden variables*), e apesar de se propagar que elas podem ser conhecidas, na minha opinião são como as bruxas de Florianópolis: ninguém viu uma, mas elas existem! Por motivos como esse (e há outros), prefiro deixar a mecânica de Bohm de lado, por ser, na minha opinião, incompatível com a metafísica que defendo.

Barros, Federico Holik e eu verificamos que se assumirmos a indiscernibilidade dos objetos quânticos e ainda que nunca realizamos a mesma experiência com eles, mas quando “repetimos" um experimento realizamos um experimento indiscernível do primeiro, o referido teorema não sai, ou seja, não se verifica (DE BARROS et al. 2017). Como dizem os autores no seu resumo,

> É bem sabido que na mecânica quântica não podemos definir sempre e de forma consistente propriedades que são independentes de contexto. Muitas abordagens descrevem propriedades contextuais, tais como Contextualidade por Default (CbD), teorias de *sheaf,* de topos, e atribuições não padrão de probabilidades. Neste artigo, propomos um tratamento de propriedades contextuais que é específico para a mecânica quântica, a qual baseia-se nas relações entre contextualidade e indiscernibilidade. Em particular, propomos que se assumirmos a tese ontológica de que as partículas quânticas e as propriedades podem ser indiscerníveis, ainda que diferentes, nenhuma contradição é originada a partir de argumentos do tipo Kochen-Specker: quando repetimos um experimento, estamos na verdade realizando um experimento que mede uma propriedade que é indiscernível do primeiro, mas não o mesmo. Discutiremos como as consequências dessa ação pode nos ajudar a entender a contextualidade quântica.

C) Em vários trabalhos, Olímpia Lombardi e colaboradores têm investigado a possibilidade de uma ontologia para a mecânica quântica que assuma *propriedades* como entidades fundamentais (veja HOLIK et al., a aparecer). Acompanhando esses trabalhos prévios, mostra-se neste artigo que utilizando-se a teoria de quase-conjuntos encontra-se uma metalinguagem adequada para expressar uma ontologia segundo a qual os sistemas quânticos podem ser vistos como coleções de propriedades sem que seja necessário levar em conta a sua individualidade.

D) A indiscernibilidade é fundamental para expressar as “estatísticas quânticas”. Vamos dar uma ideia do que acontece. Na física clássica, como já dito, as partículas, mesmo que sejam de um mesmo *tipo*, como elétrons, possuindo portanto as mesmas características, podem ser, em princípio, sempre discernidas umas das outras. A física clássica é um mundo de indivíduos. Assim, se temos uma situação em que uma partícula está em um certo estado e uma outra está em outro estado, uma permutação das partículas altera os estados: os resultados de medições são afetados por uma permutação de indivíduos. Tecnicamente, diz-se que essas entidades obedecem a uma distribuição ou "estatística" de Maxwell-Boltzmann. Assim, se temos dois estados, ou "situações" possíveis, que chamamos de A e B, e se dispomos de suas partículas (que na física clássica podem ser nomeadas significativamente) a e b, as situações possíveis são as seguintes, cada uma com igual probabilidade (=1/4) de ocorrer: ambas estarem em A, ambas estarem em B, a partícula a estar em A e a partícula b estar em B, ou o contrário, a estar em B e a partícula b estar em A. Como se percebe, a permutação é detectável.

Na física quântica, no entanto, a situação é completamente diferente; há dois tipos de entidades quânticas que são conhecidas, ainda que o formalismo matemático seja compatível com outras formas (as *para-partículas* de vários tipos), a saber, os *bósons* e os *férmions*. Os bósons, como já vimos, obedecem a uma distribuição denominada de Bose-Einstein e são tais que uma permutação dessas entidades não afeta os resultados de medições, ou seja, temos unicamente as seguintes situações, cada uma com probabilidade 1/3 de ocorrer (aqui não faz mais sentido nomear as partículas, mas unicamente falar em sua quantidade): ambas estarem em A, ou ambas estarem em B, ou *uma delas* estar em A e a outra estar em B, e qualquer permutação conduz a essa mesma situação (ou seja, a permutação não é observada). Para os férmions, temos unicamente essa última situação (estatística de Fermi-Dirac, F-D), pois eles não podem partilhar um mesmo estado físico; essa situação, portanto, ocorre com probabilidade 1.

Como se vê, as "estatísticas" quânticas são distintas da clássica, e isso de deve essencialmente à indiscernibilidade das entidades envolvidas.

E) Há vários fenômenos típicos das "coisas quânticas" que não se verificariam sem a hipótese de que as entidades envolvidas são não-indivíduos. Não mencionaremos os detalhes, que exigiriam muito discurso, mas faremos apenas as referências. No entanto, uma propaganda: tudo isso é discutido em um livro que está sendo preparado por de Barros, Holik e eu, onde isso e bem mais irão apontar a importância e mesmo a necessidade da não-individualidade no domínio quântico, tanto teórico quanto experimental. Os resultados dos experimentos do tipo Mach-Zehnder e todos aqueles que atestam a existência de *padrões de interferência* não seriam verificados, como o *efeito Hong-Ou-Mandel* (DE BARROS, HOLIK AND KRAUSE a aparecer).

F) Fornecer um aparato matemático para se desenvolver uma mecânica quântica que incorpore *ab initio* a indiscernibilidade. Comecemos do fim. Em seu livro monumental *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (WEYL 1949), Hermann Weyl lida, nos apêndices principalmente, com as estruturas simbólicas abstratas que caracterizam a ciência atual. No Apêndice B, ele trata de certos tipos de estruturas que lidam com “agregados ou complexos” de *indivíduos* (no nosso contexto, deveríamos substituir essa palavra por “coisas”, “objetos" ou qualquer outra que não passe a ideia de entidades com identidade, pois é exatamente isso que Weyl está contestando). Ele sugere que um *agregado* é um par ordenado $\langle S, \sim \rangle$ formado por um conjunto com n elementos e uma relação de equivalência definida sobre esse conjunto. Passando-se o quociente, obtemos o *conjunto quociente* $S/\sim$cujos elementos são classes de equivalência, cada uma contendo $n_i, i = 1, \ldots, k$ elementos. O que seria importante para a física quântica, segundo Weyl, seria a *decomposição* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, que indicaria quantos elementos há em cada uma das classes, sem que seja importante darmos atenção à sua individualidade. Desse modo, diz ele,

> … os elementos de *S* podem ser caracterizados completamente pelas classes às quais pertencem (pelo seu estado ou pela sua `natureza’) e não há necessidade de uma diferenciação artificial pelos rótulos (*labels*) (WEYL 1949, p. 240).

Ora, Weyl esquece que essa “diferenciação artificial” não tem nada de artificial mas é inerente à própria matemática que ele está utilizando. Com efeito, uma vez que

DOI: 10.20873/rpv7n2-45

assume ser S um *conjunto*, já está assumindo que seus elementos têm identidade, e que portanto (sendo em número de n), podem ser rotulados, nomeados enfim. A intenção de fato é aquela que interessa; os agregados de Weyl podem ser obtidos, com muito mais propriedade, na teoria de quase-conjuntos.

Essa questão, vista de outro ângulo, aparece em um livro também célebre, onde Eugen Merzbacher diz o seguinte (MERZBACHER 1970, p.508):

> [n]a mecânica quântica o estado de um sistema de n partículas idênticas [ou seja, indiscerníveis] é descrito em termos de algum conjunto completo de variáveis dinâmicas K, apropriado para cada partícula individual [isso nada mais é do que um jogo de palavras, já que essas partículas não podem ser consideradas individualmente; o que ele quer dizer é que essas variáveis são *adequadas para elas*]. Um estado particular do sistema é especificado estabelecendo-se que das n partículas, n' têm o valor K', n'' têm o valor K'', etc. [...] É impossível dizer quais partículas têm o valor K', quais têm o valor K'', etc.

Nossa ênfase vai para o "é impossível dizer", o que atesta a sua indiscernibilidade em sentido forte. Recorde que, se fosse possível discerni-las, as estatísticas B-E e F-D não seriam verificadas (veja-se no entanto o que foi dito na nota de rodapé 3 e no item E acima). Desse modo, constata-se que a matemática padrão, centrada na noção de conjunto como "uma coleção de objetos *distintos* de nossa intuição ou pensamento", como dizia Cantor, não pode se coadunar com a física quântica.

O desenvolvimento de uma mecânica quântica que assume a indiscernibilidade como um conceito primitivo, e incorporado na lógica subjacente, que é a teoria de quase-conjuntos, foi apresentada em vários artigos: DOMENECH et al. 2008, DOMENECH et al. 2010, HOLIK et al. 2020. Nessa formulação, com a construção de espaços de Hilbert adequados na teoria de quase-conjuntos, evita-se a necessidade de se postular coisas como a invariância por permutações, que afirma que se permutarmos duas entidades quânticas indiscerníveis, os resultados das medições não se alteram. Esse é, a propósito, um dos postulados fundamentais da física quântica tradicional.

G) Outra aplicação importante da teoria de quase-conjuntos é apresentar uma solução para o que denominamos de Problema de Manin. Para contextualizar, um pouco de história. Em 1900, David Hilbert era um dois maiores matemáticos vivos, e ele foi de fato um dos maiores de todos os tempos. Era o ano do II Congresso Internacional de Matemáticos, que se realiza até hoje de quatro em quatro anos, e onde se atribuem as Medalhas Fields, o "Nobel" da matemática. Em sua conferência, Hilbert apresentou o que se tornou conhecido como uma lista dos 23 Problemas da Matemática, que seriam como que um legado do século XIX ao século XX que se iniciaria, mostrando quais seriam alguns dos problemas a serem resolvidos (HILBERT 1976). Em 1974, a American Mathematical Society realizou um evento visando discutir o que havia sido feito até então relativamente aos problemas de Hilbert, e uma nova lista surgiu, atualizando a original. O primeiro problema da lista foi proposto pelo matemático russo Yuri I. Manin, e propõe encontrar uma teoria de "conjuntos" (as aspas são dele) que desse conta dos objetos da física quântica, cujas coleções não se comportariam como "conjuntos de grãos de areia" da física clássica (MANIN 1976). Claro que isso está relacionado à indiscernibilidade dessas entidades que, sendo indiscerníveis, não podem ser representados por *conjuntos* das teorias usuais de conjuntos. A história mais detalhada está em FRENCH & KRAUSE 2006. No entanto, fica aqui a sugestão para que o leitor reflita sobre se a teoria de quase-conjuntos veio solucionar o problema proposto por Manin.

Agradecimento

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Eduardo Simões, do Colegiado de Filosofia da Universidade Federal do Tocantins, pelo convite para submeter um artigo para o volume especial da revista *Perspectivas* dedicado à filosofia da física. Espero que o presente trabalho esteja a contento. Agradeço também ao parecerista anônimo que fez uma leitura cuidadosa e sugeriu

pontos que, para serem levandos em conta, necessitariam de um noo artigo; obrigado pelas sugestões.

Referências

ARENHART, J. R. B. & KRAUSE, D. Why non-individuality? A discussion on individuality, identity, and cardinality in the quantum context. *Erkenntnis* 79: 1-18, 2014.

DE BARROS, J. A., HOLIK, F. & KRAUSE, D. Contextuality and indistinguishability. *Entropy* 19 (9): 435-457, 2017.

DE BARROS, J. A., HOLIK, F. & KRAUSE, D. *Distinguishing Indistinguishabilities: Differences Between Classical and Quantum Regimes.* A aparecer.

DE BARROS, J. A., JORGE, J. P. & HOLIK, F. On the assumptions underlying KS-type contradictions. https://arxiv.org/abs/2103.06830, 2021.

DE SOUZA, E. G. Multideductive logic and the theoretical-formal unification of physical theories. *Synthese* 135: 253-262, 2000.

DOMENECH, G., HOLIK, F. & KRAUSE, D. Q-spaces and the foundations of quantum mechanics. *Foundations of Physics* 38: 969-994, 2008.

DOMENECH, G., HOLIK, F., KNIZNIK, L. & KRAUSE, D. No labeling quantum mechanics of indiscernible particles. *International J. Theoretical Physics* 49: 3085-3091, 2010.

FALKENBURG, B. *Particle Metaphysics: A Critical Account of Subatomic Reality.* The Frontiers Collection. Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

FRENCH, S. & KRAUSE, D. *Identity in Physics: A Historical, Philosophical, and Formal Analysis*. Oxford: Oxford Un. Press, 2006.

HACKING, I. *Representing and Intervening: Introductory Topics in the Philosophy of Natural Science.* Cambridge: Cambridge Un. Press.

HILBERT, D. Mathematical problems. Em BROWDER, F. E. (ed.) *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 28*. Providence: American Mathematical Society, pp.1-34, 1976.

HOLIK, F., JORGE, J. P. & Massri, C. Indistinguishability right from the start in standard quantum mechanics. https://arxiv.org/abs/2011.10903 , 2020.

HOLIK, F., JORGE, J. P., KRAUSE, D. & LOMBARDI, O. Quasi-set theory for a quantum ontology of properties. A aparecer, 2021.

KRAUSE, D. Is Priscilla, the trapped positron, an individual? Quantum physics, the use of names, and individuation. Arbor 187 (747): 61-66, 2011.

KRAUSE, D. & ARENHART, J. R. B. *The Logical Foundations of Scientific Theories: Languages, Structures, and Models*. London: Routledge, 2017.

KRAUSE, D., ARENHART, J. R. B. & BUENO, O. *The non-individuals interpretation of quantum mechanics.* Em FREIRE JR., O, (ed), Oxford Handbook of the History of Interpretations of Quantum Mechanics, a aparecer, 2021.

MANIN, Y. I., Problems of present day mathematics: I (Foundations). Em BROWDER, F. E. (ed.) *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 28. Providence: American Mathematical Society, p.36, 1976.

MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 2nd. ed. New York: John Wiley, 1970.

NEY, A. *The World in the Wave Function: A Metaphysics for Quantum Physics*. Oxford: Oxford Un. Press, 2021.

SCHRÖDINGER, E. What is an elementary particle? Em SCHRÖDINGER, E. *Science Theory and Man*. London. George Allen and Unwin Ltd, pp. 193-223, 1967.

SCHRÖDINGER, E. *Nature and the Greeks and Science and Humanism*. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1996.

SCHRÖDINGER, E. *The Interpretation of Quantum Mechanics: Dublin Seminars (1949-1955) and other unpublished essays*. Woodsbridge, CT: Ox Bow Press, 1995.

SUPPES, P. *Axiomatic Set Theory*. New York: Dover, 1972.

TELLER, P. Quantum mechanics and haecceities. Em CASTELLANI, E. (Ed.), I*nterpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton: Princeton Un.Press, pp. 114-141, 1998.

VAN FRAASSEN, B. *To save the phenomena*. The Journal of Philosophy 73 (18): 623-632, 1976.

WEYL, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton Un. Press, 1949.

Recebido em: 22/10/2021
Aprovado em: 25/04/2022

Décio Krause
Professor titular aposentado do Departamento de Filosofia da UFSC e do Departamento de Matemática da UFPR. Presentemente é professor permanente do Curso de Pós-Graduação em Lógica e Metafísica da UFRJ. É pesquisador 1A do CNPq e membro do CLE-Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP e da Academia Internacional de Filosofia da Ciência (AIPS), com sede em Bruxelas, além de de outras associações científicas da área. Seus interesses vão da aplicação das lógicas não clássicas às disciplinas científicas à filosofia e a metafísica das teorias quânticas.