

# Aproximación estocástica al análisis de observabilidad en redes de abastecimiento de agua

## *Stochastic approach to observability analysis in water networks*

Díaz, S.<sup>a1</sup>, Mínguez, R.<sup>b</sup>, González, J.<sup>a2</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Castilla-La Mancha, ETSI Caminos, Canales y Puertos Ciudad Real, Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación. Edificio Politécnico Av. Camilo José Cela s/n, 13071, Ciudad Real (España). E-mail: <sup>a1</sup> Sarai.Diaz@uclm.es, <sup>a2</sup> Javier.Gonzalez@uclm.es

<sup>b</sup>HIDRALAB, S.L., Spin-Off UCLM, Laboratorio Hidráulica Universidad Castilla-La Mancha. Av. Pedriza-Camino Moledores s/n, 13071, Ciudad Real (España). E-mail: roberto.minguez@hidralab.es

Recibido: 01/02/2016

Aceptado: 22/06/2016

Publicado: 29/07/2016

---

## RESUMEN

Este artículo presenta una técnica alternativa a los métodos existentes en la literatura para el análisis de observabilidad (AO) de redes de agua, paso previo imprescindible para la adaptación de las técnicas de estimación de estado (EE) a estos sistemas. La metodología propuesta parte de un estado de flujo conocido y asume distribuciones aleatorias normales para la incertidumbre de algunas variables hidráulicas, que se propaga luego al resto del sistema. Este proceso se repite a continuación para valorar el cambio en la incertidumbre de la red al añadir aparatos de medida cuyo error se considera nulo, en base al cual se puede evaluar la observabilidad de la red. El potencial del método se presenta mediante un ejemplo ilustrativo, que pone de manifiesto la información adicional que esta metodología aporta con respecto a los enfoques de AO tradicionales. Esta propuesta permite un mejor conocimiento de la red y es una herramienta útil para priorizar la colocación de nuevos equipos de medida, contribuyendo a la transformación de los grandes núcleos urbanos en *smart cities*.

**Palabras clave** | Estimación de estado; Análisis de incertidumbre; Equipos de medida; Monitorización en tiempo real.

---

## ABSTRACT

*This work presents an alternative technique to the existing methods for observability analysis (OA) in water networks, which is a prior essential step for the implementation of state estimation (SE) techniques within such systems. The methodology presented here starts from a known hydraulic state and assumes random gaussian distributions for the uncertainty of some hydraulic variables, which is then propagated to the rest of the system. This process is repeated again to analyze the change in the network uncertainty when metering devices considered as error-free are included, based on which the network observability can be evaluated. The method's potential is presented in an illustrative example, which shows the additional information that this methodology provides with respect to traditional OA approaches. This proposal allows a better understanding of the network and constitutes a practical tool to prioritize the location of additional meters, thus enhancing the transformation of large urban areas into actual smart cities.*

**Key words** | State estimation; Uncertainty analysis; Metering devices; Real time monitoring.

## INTRODUCCIÓN

Para respaldar el proceso de toma de decisiones en la gestión de redes de abastecimiento, existe una creciente tendencia a instalar en grandes ciudades programas de tecnología de la información (TIC, del inglés *Information Communication Technology*). Estos sistemas están formados por centros de control y adquisición de datos (SCADA, del inglés *Supervisory Control and Data Acquisition*) y sistemas de información geográfica (SIG, del inglés *Geographic Information System*), que proporcionan información en tiempo real de la red. Sin embargo, la gran cantidad de datos recogida por el sistema no se traduce automáticamente en una mejora de la operación y el servicio al usuario. Es necesario transformar toda la información en conocimiento real de la red para que ésta sea útil para la toma de decisiones a corto y largo plazo, con la consiguiente mejora del funcionamiento del sistema. Con este fin se desarrollaron en los años 70 las denominadas *técnicas de estimación de estado*, EE, que fueron concebidas para caracterizar el estado de grandes redes eléctricas (Schweppe and Wildes, 1970) y extendidas poco después a sistemas de abastecimiento de agua (Coulbeck, 1977).

Las técnicas de estimación de estado consisten en la implementación de un algoritmo que permite deducir, en base a toda la información recopilada por el sistema SCADA y las ecuaciones que gobiernan el problema hidráulico, las condiciones de flujo en cualquier instante y cualquier punto de la red. Concretamente, la EE se plantea de forma que en base al conjunto de medidas disponibles se puedan inferir las denominadas *variables de estado*, que son el mínimo conjunto de variables que permite caracterizar el estado de la red, y a partir de las cuales se determinarán el resto de variables del sistema gracias a las ecuaciones del modelo hidráulico.

La EE requiere por tanto definir las relaciones entre las diferentes variables existentes. En una red de abastecimiento genérica se puede considerar un vector de medidas cualquiera  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^m$ , que podría estar formado por medidas de presión o demanda en los nodos, de nivel en los depósitos o de flujo en las conducciones. Además, existirá un vector que contenga las variables de estado  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ , que serán consideradas los niveles piezométricos en los nodos en este trabajo. Entre ellos existirá una relación no lineal, que resulta de la aplicación de las ecuaciones de conservación de masa y energía:

$$\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa los errores asociados con las medidas, típicamente asumidos como gaussianos con media cero y matriz varianza-covarianza  $\mathbf{R}_z$ , la cual resulta ser una matriz diagonal puesto que los errores de medida suelen asumirse independientes.

El problema de la EE, que consiste en encontrar los valores más probables de las variables de estado resolviendo un ajuste de mínimos cuadrados, puede escribirse entonces como:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} F(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{R}_z^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{z} - \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}_z^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{g}(\mathbf{x})] \quad (2)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es la solución óptima del problema.

El problema planteado en la Ecuación (2) se resuelve habitualmente utilizando el método de las ecuaciones normales, que permite calcular la solución óptima de las variables de estado resolviendo de forma iterativa el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{(v+1)} = [\mathbf{J}_{(v)}^T \mathbf{R}_z^{-1} \mathbf{J}_{(v)}]^{-1} [\mathbf{J}_{(v)}^T \mathbf{R}_z^{-1}][\mathbf{z} - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_v)] \quad (3)$$

donde  $\mathbf{J}_{(v)} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  es la matriz jacobiana de medidas del sistema en el óptimo  $\hat{\mathbf{x}}_{(v)}$ . Así, la solución óptima puede ir actualizándose como  $\hat{\mathbf{x}}_{(v+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{(v)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{(v+1)}$ .

La formulación presentada hasta el momento pone de manifiesto que para que exista solución única al problema de EE es necesario que la matriz  $\mathbf{J}$  sea de rango completo  $n$ , ya que en ese caso la matriz  $[\mathbf{J}_{(v)}^T \mathbf{R}_z^{-1} \mathbf{J}_{(v)}]$  es invertible y el sistema resulta compatible determinado. Esta condición implica que no cualquier configuración de medidas (filas de la matriz  $\mathbf{J}$ ) es válida para

caracterizar el estado hidráulico de la red. La distribución de las medidas debe ser tal que las ecuaciones de flujo del sistema permitan relacionar todas las variables involucradas, es decir, la red debe ser observable. En general, se entiende como variable observable aquella variable que puede ser determinada en base a las medidas existentes, siendo la red en su conjunto observable cuando todas las variables lo son a nivel individual.

Por tanto, el análisis de observabilidad, AO, es un estudio previo que permite identificar qué variables (flujos, demandas y presiones) podrán conocerse al aplicar un posterior proceso de EE para una configuración de medidas determinada. Así pues, es una herramienta indispensable para identificar las regiones de la red de abastecimiento donde la EE proporcionaría resultados fiables. Algunos métodos han sido propuestos en la literatura para llevar a cabo este análisis en redes de agua. Bargiela (1984) y Carpentier and Cohen (1991) presentan métodos para el AO basados en la teoría de grafos. Nagar and Powell (2000) presentan una metodología que también evalúa la incertidumbre asociada a las medidas y los parámetros del sistema. Díaz *et al.* (2015) adaptan del sector eléctrico un método algebraico para el análisis de la matriz jacobiana  $J$ , que permite extraer gran cantidad de información. Además, en la literatura propia del sector eléctrico, un referente en la implementación de técnicas de EE y AO, se pueden encontrar una gran variedad de propuestas: métodos topológicos (Krumpholz *et al.*, 1980; Nucera and Gilles, 1991; entre otros), algebraicos (Castillo *et al.*, 2005; Solares *et al.*, 2009; entre otros), híbridos entre los dos anteriores (Contaxis and Korres, 1998; Korres and Katsikas, 2003; entre otros) e incluso otros basados en técnicas heurísticas (Habiballah and Irving, 2001; Caro *et al.*, 2013).

El objetivo de este trabajo es presentar un planteamiento alternativo al AO en redes de agua. La motivación nace de la realidad metrológica de estos sistemas, menos instrumentados que las redes eléctricas. En este sentido, debe mencionarse que la escasez de dispositivos de medida en redes de abastecimiento se ha venido complementando tradicionalmente con predicciones de demanda, también llamadas *pseudomedidas* (Bargiela and Hainsworth, 1989). Estas predicciones permiten completar las medidas necesarias para que la red sea observable, pero son sólo estimaciones basadas en registros históricos, por lo que presentan una precisión menor que la propia de equipos de medida, con el consiguiente aumento en la incertidumbre del resultado de la EE. El método aquí presentado, denominado estocástico, asume una configuración de pseudomedidas inicial determinada, con una incertidumbre propia de distribuciones aleatorias normales. Posteriormente, propaga la incertidumbre de las variables aleatorias al resto de variables del sistema, permitiendo luego evaluar cómo varía la incertidumbre así estimada al añadir los equipos de medida existentes en la realidad, cuyo error se considera nulo en comparación con las desviaciones originales. Esto da una idea del conocimiento de cada variable respecto al escenario de partida, lo cual permite determinar cuán observable resulta cada variable. De esta forma, la metodología estocástica no sólo permite conocer si el sistema es observable o no, sino que también proporciona una medida del nivel de observabilidad para la configuración de medidas en cuestión, tanto a nivel individual para las variables involucradas como para la red en su conjunto.

La organización del trabajo es la siguiente. En el apartado de Metodología se presentan las ecuaciones para modelizar la incertidumbre de la red, el procedimiento para cuantificar la incertidumbre en el escenario inicial y dada una configuración de medidas determinada, y el consiguiente AO mediante el denominado método estocástico. Posteriormente, se presenta un Ejemplo ilustrativo que permite comprender el potencial del método y la información que aporta con respecto a los planteamientos tradicionales. A continuación, se presenta una discusión en base a los resultados obtenidos para, finalmente, extraer las Conclusiones asociadas. El método presentado en este trabajo muestra un buen rendimiento y permite obtener información adicional de la red en base a los datos recopilados por los sistemas SCADA, contribuyendo a la transformación de los grandes núcleos urbanos en verdaderas *smart cities*.

---

## METODOLOGÍA

El método estocástico presentado en este estudio se centra en analizar la incertidumbre de las variables hidráulicas de una red de abastecimiento de agua. Por tanto, en este apartado se muestran en primer lugar las variables y ecuaciones involucradas para modelizar la incertidumbre de la red en un cierto instante de tiempo, para luego proceder a analizar la incertidumbre inicial y condicionada del sistema, en base a las cuales se evaluará su observabilidad.

## Modelo de incertidumbre de la red

En general, existen tres tipos de variables que definen el estado hidráulico de una red de distribución de agua, los cuales se presentan a continuación. Nótese que cada variable puede descomponerse a su vez en dos componentes fundamentales: el valor esperado (representado con un subíndice  $b$  que acompaña a la variable) y la desviación o incertidumbre de la variable (representada con un apóstrofe ' que acompaña a la variable).

- Niveles piezométricos en los nodos  $\mathbf{h}=\mathbf{h}_b+\mathbf{h}'$ , que serán tantos como número de nodos haya en la red  $n=n_n+n_d$ , donde  $n_n$  se refiere al número de nodos que no son depósitos y  $n_d$  a los depósitos existentes en el sistema.
- Flujos en los tubos  $\mathbf{q}=\mathbf{q}_b+\mathbf{q}'$ , que serán tantos como número de conducciones existan en la red ( $n_p$ ).
- Términos de balance o demandas en los nodos  $\mathbf{b}=\mathbf{b}_b+\mathbf{b}'$ , que serán tantos como número de nodos que no son depósitos ( $n_n$ ) existan en el sistema. Nótese que sólo se considera la existencia de consumos en nodos que no son depósitos, puesto que éstos actúan como condiciones de contorno de la red, motivo por el cual los flujos que llegan a los depósitos desde el exterior de la misma no serán considerados explícitamente en la formulación de las ecuaciones del sistema. Por otro lado, debe mencionarse que los términos de balance se consideran negativos cuando el flujo sale del sistema (demandas), positivos cuando se produce una entrada (aportaciones) y nulos cuando no existe ninguna salida ni entrada (nodos de tránsito).

Por su parte, las ecuaciones que rigen el flujo en redes de distribución de agua son la ecuación de conservación de la energía y la ecuación de continuidad o conservación de masa. Estas expresiones pueden adaptarse para definir las relaciones entre las incertidumbres de las diferentes variables involucradas:

- Ecuación de energía. Establece la relación entre los flujos  $\mathbf{q}$  y los niveles piezométricos en los nodos  $\mathbf{h}$ , teniendo en cuenta la pérdida de energía que se produce a lo largo del tubo debido a su geometría y rugosidad. Recogiendo en una matriz de conectividad  $\mathbf{C}_p$  la información relativa a los nodos de inicio (+1) y final (-1) de cada tubo del sistema, esta ecuación se puede plantear de forma general como:

$$\mathbf{C}_p \cdot \mathbf{h} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}^c \quad (4)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz diagonal de resistencia hidráulica y  $c$  el exponente adoptado en función de la ecuación de pérdidas asumida ( $c=1.852$  para la ecuación de Hazen-Williams o  $c=2$  para Darcy-Weisbach o Manning).

Reescribiendo la Ecuación (4) en términos de valor esperado e incertidumbre de las variables y linealizando la solución en torno al valor medio, se obtiene:

$$\mathbf{C}_p \cdot (\mathbf{h}_b + \mathbf{h}') \approx \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^c + c \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^{c-1} \cdot \mathbf{q}' \quad (5)$$

Así, la ecuación de energía en términos de la incertidumbre de las variables puede considerarse:

$$\mathbf{C}_p \cdot \mathbf{h}' = c \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^{c-1} \cdot \mathbf{q}' \quad (6)$$

- Ecuación de continuidad. Establece la relación entre la demanda  $\mathbf{b}$  y el resto de caudales  $\mathbf{q}$  que entran o salen de un nodo en cuestión. Si la información relativa a los flujos que entran (+1) y salen (-1) de cada nodo del sistema se agrupa en una matriz de conexiones  $\mathbf{C}_N$ , la ecuación de continuidad se puede expresar con toda generalidad como:

$$\mathbf{C}_N \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{b} \quad (7)$$

donde el término independiente o demanda  $\mathbf{b}$  va acompañado por un signo negativo para que los flujos sean positivos cuando entran al nodo y negativos cuando salen de él.

Reescribiendo la Ecuación (7) en términos del valor esperado y las desviaciones, y centrando el análisis únicamente en la incertidumbre de la variable, la ecuación de continuidad resulta:

$$\mathbf{C}_N \cdot \mathbf{q}' = -\mathbf{b}' \quad (8)$$

Reorganizando las expresiones (6) y (8) en una única matriz, las ecuaciones involucradas en la resolución de la incertidumbre de una red de abastecimiento pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_N & \mathbf{1} \\ \mathbf{C}_P & -c \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^{c-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{h}', \mathbf{q}', \mathbf{b}']^T = \mathbf{0} \quad (9)$$

Así pues, el análisis realizado pone de manifiesto que en el modelo de incertidumbre de la red existen  $2n_n + n_d + n_p$  variables o incógnitas y  $n_p + n_n$  ecuaciones, por lo que es necesario definir  $n_n + n_d$  condiciones adicionales para que el sistema se pueda resolver, o lo que es lo mismo, para que la red resulte observable.

### Incertidumbre inicial

En este escenario inicial, en el que aún no se considera la existencia de equipos de medida en la red de distribución, se asumen  $n_n + n_d$  condiciones adicionales para poder resolver la incertidumbre de la red planteada conforme al apartado anterior. En concreto, se considera que existen pseudomedidas de demanda y de niveles en depósitos, ya que en la práctica es fácil que exista una estimación aproximada de los consumos y del rango de niveles que se puede dar en los depósitos de la red. La distribución asumida para la incertidumbre de estas medidas será normal de media cero, es decir,  $b_i' \in N(0, \sigma_i)$  y  $h_{d_i}' \in N(0, \sigma_i)$  respectivamente. De esta forma, se puede propagar la incertidumbre que producen estas variables aleatorias a las variables de estado  $\mathbf{h}' = [\mathbf{h}_n', \mathbf{h}_d']^T$ , donde  $\mathbf{h}_n'$  se refiere a las desviaciones del nivel piezométrico en los nodos que no son depósitos y  $\mathbf{h}_d'$  a la incertidumbre de los niveles piezométricos en los propios depósitos. Descomponiendo de igual modo  $\mathbf{C}_P = [\mathbf{C}_{P_n} \ \mathbf{C}_{P_d}]$ , la Ecuación (9) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_N & \mathbf{1} \\ \mathbf{C}_{P_n} & \mathbf{C}_{P_d} & -c \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^{c-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{h}_n', \mathbf{h}_d', \mathbf{q}', \mathbf{b}']^T = \mathbf{0} \quad (10)$$

donde la matriz que aparece en el primer miembro de la ecuación anterior contiene los coeficientes del sistema de ecuaciones, designada matriz  $\mathbf{M}$ . Además, puesto que  $\mathbf{b}'$  y  $\mathbf{h}_d'$  son variables aleatorias asumidas, el sistema anterior se puede reagrupar en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_N \\ \mathbf{C}_{P_n} & -c \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_b^{c-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_n' \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{C}_{P_d} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_d' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} \quad (11)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{M}_U \cdot \mathbf{U} = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{A} \quad (12)$$

que recoge en la parte izquierda de la ecuación los términos desconocidos y en la derecha los términos aleatorios conocidos. Nótese que las matrices  $\mathbf{M}_U$  y  $\mathbf{M}_A$  de esta expresión se refieren a las matrices que aparecen en el primer y segundo miembro de la Ecuación (11), respectivamente. De esta forma, la incertidumbre asociada al resto de variables podría estimarse como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}_U^{-1} \cdot \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{A} \quad (13)$$

Por tanto, la matriz de varianzas-covarianzas de las variables hidráulicas de la red  $\mathbf{R}_{[A,U]}$  resultaría:

$$\mathbf{R}_{[A,U]} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A & \mathbf{R}_{A,U} \\ \mathbf{R}_{U,A} & \mathbf{R}_U \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{R}_A$  es la matriz de varianzas-covarianzas de las distribuciones aleatorias asumidas y el resto pueden ser derivadas atendiendo a las siguientes expresiones:

$$\mathbf{R}_{U \cdot A} = E[\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}^T] = E[\mathbf{M}_U^{-1} \cdot \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T] = \mathbf{M}_U^{-1} \cdot \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R}_A \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{A \cdot U} = E[\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^T] = \mathbf{R}_{U \cdot A}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_U = E[\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T] = E[\mathbf{M}_U^{-1} \cdot \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{M}_A^T \cdot \mathbf{M}_U^{-1T}] = \mathbf{M}_U^{-1} \cdot \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{M}_A^T \cdot \mathbf{M}_U^{-1T} \quad (17)$$

Nótese que la suma de los elementos de la diagonal de  $\mathbf{R}_{[A,U]}$  en las primeras  $n = n_n + n_d$  posiciones proporciona una medida inicial de la incertidumbre de los niveles piezométricos en el sistema ( $\sum_{i=1}^n \sigma_{h_{i0}}^2$ ) conforme a las distribuciones aleatorias asumidas para  $\mathbf{b}'$  y  $\mathbf{h}'_d$ . Este valor inicial no proporciona información relevante por sí solo, pero sirve como referencia para su comparación con el escenario real que incluye las medidas disponibles en el sistema (apartado siguiente).

Llegados a este punto, deben destacarse algunas características de la metodología propuesta:

- Se debe considerar un número máximo de  $n = n_n + n_d$  distribuciones aleatorias para la aplicación del método. Si se añaden más condiciones, el problema sería una red bayesiana en vez de un problema de propagación de incertidumbre en un sistema determinado.
- Si cualquiera de las variables que intervienen presenta incertidumbre cero, como puede ser el caso de un nodo de tránsito del que se conoce con certeza que la demanda es nula ( $\mathbf{b}_b = 0$ ) siempre y cuando no existan fugas, no debe incluirse en las ecuaciones de la (15) a la (17). En ese caso, se debería utilizar una versión reducida de la matriz de varianzas-covarianza para la propagación de incertidumbre, aunque la matriz resultante  $\mathbf{R}_{[A,U]}$  debe incluir todas las incertidumbres de la red. Por tanto, se debe prestar especial atención al cambio de orden o posición de las variables en la matriz de varianzas-covarianza a lo largo del proceso.

## Incertidumbre condicionada: inclusión de equipos de medida

Para reproducir la existencia de un conjunto de equipos de medida en la red se debe modificar el cálculo propuesto para la incertidumbre inicial. En el planteamiento estocástico presentado en este trabajo se considera que si se mide alguna variable con un instrumento ( $\mathbf{h}_n$ ,  $\mathbf{h}_d$ ,  $\mathbf{q}$  o  $\mathbf{b}$ ) su valor es exacto, o al menos de un orden de magnitud inferior a su incertidumbre inicial, por lo que su desviación se puede suponer despreciable a efectos de observabilidad determinística. Por tanto, si se considera que existe un vector de medidas  $\mathbf{X}$  y el resto de variables no medidas se denotan como  $\mathbf{Y}$ , se pueden utilizar las propiedades de una distribución multivariada normal condicionada:

$$\mu_{Y|X} = \mu_Y + \mathbf{R}_{Y \cdot X} \cdot \mathbf{R}_X^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \mu_X) \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_{Y|X} = \mathbf{R}_Y - \mathbf{R}_{Y \cdot X} \cdot \mathbf{R}_X^{-1} \cdot \mathbf{R}_{X \cdot Y} \quad (19)$$

donde  $\mu_{Y|X}$  y  $\mathbf{R}_{Y|X}$  representan, respectivamente, la media y la matriz varianzas-covarianza de la distribución condicionada. De forma similar a la matriz original de covarianza  $\mathbf{R}_{[A,U]}$ , la suma de las primeras  $n$  posiciones de la diagonal de  $\mathbf{R}_{Y|X}$  proporciona la incertidumbre de los niveles piezométricos condicionada al conjunto de medidas existente ( $\sum_{i=1}^n \sigma_{h_{ic}}^2$ ), que será en cualquier caso menor que la obtenida en la estimación inicial.

Es necesario destacar dos aspectos importantes del proceso de cálculo de la incertidumbre condicionada:

- a) De acuerdo con esta metodología, la inclusión de equipos de medida en el escenario condicionado implica asumir que la incertidumbre de la lectura es cero. Por tanto, tal y como sucede con el cálculo de la incertidumbre inicial, se deben utilizar versiones reducidas de las matrices de varianza-covarianza  $\mathbf{R}_X$  y  $\mathbf{R}_Y$  para calcular  $\mathbf{R}_{Y|X}$ , siendo necesario prestar especial atención al cambio de posición de las variables a lo largo del proceso.
- b) Este procedimiento sólo permite trabajar con configuraciones de medidas no redundantes. Nótese que si existe redundancia entre las medidas, esto es, si varias medidas pueden sustituirse entre sí para mantener el mismo nivel de observabilidad en el sistema, la matriz de covarianza  $\mathbf{R}_X$  no será invertible, impidiendo el cálculo de  $\mathbf{R}_{Y|X}$ .

## Análisis de observabilidad

Una vez obtenidas las incertidumbres inicial y condicionada de las variables del sistema, es posible definir índices que permitan interpretar estos resultados en términos de observabilidad. Por ejemplo, se puede definir el índice de observabilidad estocástico relativo a niveles piezométricos de todo el sistema ( $SOI_h$ , del inglés *Stochastic Observability Index*) como:

$$SOI_h = \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{h_{ic}}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_{h_{i0}}^2} \right) \cdot 100 \quad (20)$$

Esta expresión muestra que a medida que la incertidumbre condicionada se reduce, el índice de observabilidad aumenta, alcanzando un valor del 100% cuando la red es observable para la configuración de medidas considerada. En este sentido, debe resaltarse que el índice puede alcanzar un valor del 100% puesto que aunque las diferentes variables tengan una incertidumbre inicial asociada, este método simplificado asume que la incertidumbre de la lectura de cualquier equipo de medida es nula.

El  $SOI_h$  recoge información sobre la observabilidad de las variables de estado del sistema. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, también podría interesar el índice de observabilidad del sistema en términos de los flujos en las conducciones. Así, trabajando con la suma de las varianzas de las posiciones de la diagonal que se corresponden con los flujos en las matrices  $\mathbf{R}_{Y|X}$  ( $\sum_{i=n+1}^{n+n_p} \sigma_{q_{ic}}^2$ ) y  $\mathbf{R}_{[A,U]}$  ( $\sum_{i=n+1}^{n+n_p} \sigma_{q_{i0}}^2$ ), el índice de observabilidad estocástico referido a caudales ( $SOI_q$ ) podría obtenerse como:

$$SOI_q = \left( 1 - \frac{\sum_{i=n+1}^{n+n_p} \sigma_{q_{ic}}^2}{\sum_{i=n+1}^{n+n_p} \sigma_{q_{i0}}^2} \right) \cdot 100 \quad (21)$$

De forma similar, podría obtenerse un índice de observabilidad ponderado ( $SOWI$ , del inglés *Stochastic Observability Weighted Index*) afectando las incertidumbres de los flujos por el valor absoluto de su valor esperado a través de cada tubo:

$$SOWI = \left( 1 - \frac{\sum_{i=n+1}^{n+n_p} |q_{b_i}| \cdot \sigma_{q_{ic}}^2}{\sum_{i=n+1}^{n+n_p} |q_{b_i}| \cdot \sigma_{q_{i0}}^2} \right) \cdot 100 \quad (22)$$

Además de estos índices, que analizan el comportamiento general de la red para un conjunto de medidas disponible, las diagonales de las matrices  $\mathbf{R}_{Y|X}$  y  $\mathbf{R}_{[A,U]}$  contienen la varianza asociada a cada una de las variables de la red ( $\sigma_{var_c}^2$  y  $\sigma_{var_0}^2$  respectivamente), por lo que resulta posible evaluar el nivel de observabilidad de cada variable  $var$  a nivel individual ( $SOI_{var}$ ) como:

$$SOI_{var} = \left( 1 - \frac{\sigma_{var_c}^2}{\sigma_{var_0}^2} \right) \cdot 100 \quad (23)$$

Por tanto, la metodología presentada en este trabajo permite analizar la observabilidad de cada variable de la red, lo cual posibilita la identificación de islas observables. De acuerdo con Díaz *et al.* (2015), una isla observable es una región del sistema

donde todas las variables de estado se conocen a pesar de la falta de observabilidad de la red en su totalidad, siendo posible su identificación mediante la agrupación de las variables observables. El hecho de que esta metodología permita identificar regiones observables la hace competitiva con otros métodos, como la propuesta algebraica de estos mismos autores. Además, y como se verá en el ejemplo ilustrativo, el método estocástico complementa perfectamente al algebraico, ya que establece una escala de color dentro de las variables no observables, permitiendo su clasificación dentro de la no observabilidad.

No obstante, la principal limitación de este método tiene que ver con la imposibilidad de trabajar con medidas redundantes. La aplicación de esta metodología queda por tanto restringida a escenarios no redundantes, permitiendo estudiar en estos casos cómo la adición de medidas sucesivas afecta a la observabilidad de cada variable individual, así como al comportamiento general de la red. En este sentido, la información proporcionada por el método podría utilizarse para priorizar la localización de dispositivos adicionales, siendo éste un activo campo de investigación en redes de agua hoy día, ya sea con el objeto de mejorar los resultados de una posible calibración del sistema (Walski, 1983; Kapelan *et al.*, 2003; Savic *et al.*, 2009) o de la posterior EE (Yu and Powell, 1994; Kang and Lansley, 2010). No obstante, para cubrir escenarios redundantes será necesario recurrir a técnicas de cuantificación de incertidumbre específicas de la EE, en base a las cuales puede proponerse la colocación de aparatos adicionales.

## Estandarización del método

Los índices de observabilidad definidos en el apartado anterior son valores relativos que permiten comparar la varianza del escenario condicionado, el cual considera los equipos de medida existentes en el sistema, con respecto al escenario inicial. Por este motivo, su valor es altamente dependiente de las distribuciones asumidas para las variables aleatorias  $b_i \in N(0, \sigma_i)$  y  $h_{d_j} \in N(0, \sigma_j)$ .

En principio, estimar la incertidumbre de los niveles piezométricos en los depósitos de la red no debería resultar complicado, puesto que se conoce la cota mínima y máxima que puede alcanzar el agua en ellos y se puede por tanto deducir la matriz diagonal asociada a la desviación típica de cada nivel,  $\mathbf{R}_{A_{hd}}$ . No obstante, y con el objeto de establecer un marco común para la implementación de este método estocástico, la incertidumbre de los depósitos se puede considerar nula. De esta forma, la incertidumbre inicial queda determinada únicamente por las desviaciones asumidas en los consumos.

Por su parte, el cálculo de la matriz de varianza-covarianza de las demandas ( $\mathbf{R}_{A_b}$ ) en el escenario inicial puede estandarizarse como:

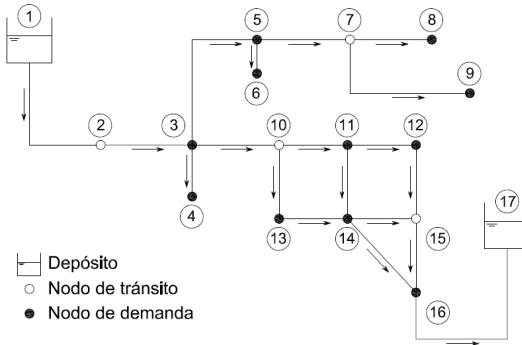
$$\mathbf{R}_{A_b} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{b_{b_1}} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{b_{b_m}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Esta asunción considera que las desviaciones de la demanda son inversamente proporcionales a la población abastecida, la cual es a su vez proporcional a la demanda base ( $\mathbf{b}_b$ ). Esta hipótesis asume un comportamiento independiente entre los distintos nodos (de ahí que resulte una matriz diagonal), si bien es cierto que en la realidad las incertidumbres de las proyecciones no son independientes puesto que no consideran el 100% de los patrones comunes. En cualquier caso, esta propuesta permite obtener un valor estándar de la incertidumbre inicial, si bien es cierto que en casos reales concretos las desviaciones de demanda pueden obtenerse en base a los registros históricos de consumo de la población en cuestión, caracterizados por su naturaleza estocástica (Preis *et al.*, 2011). Por último, debe matizarse que los nodos de tránsito son un caso particular, puesto que en principio se conoce con certeza que la demanda en ellos es nula (no existen fugas). Por este motivo, la incertidumbre de estos nodos puede considerarse directamente igual a cero, siendo necesaria su consiguiente extracción de la matriz para la propagación de incertidumbre, tal y como se ha comentado en los apartados anteriores.



## EJEMPLO ILUSTRATIVO

A continuación, se propone un ejemplo ilustrativo para comprender el potencial del método. La red de distribución tomada como ejemplo está formada por 17 nodos (2 depósitos, 4 nodos de tránsito y 11 nodos de demanda) y 19 tubos, siendo su disposición en planta la que aparece en la Figura 1.



**Figura 1** | Disposición en planta de la red empleada como ejemplo ilustrativo.

Es importante señalar que para la implementación del método estocástico es necesario partir de un estado hidráulico conocido para poder calcular las matrices  $\mathbf{M}_U$  y  $\mathbf{M}_A$ , definidas por las Ecuaciones (11) y (12). Para ello, se asumen las características de los nodos y los tubos recogidas en la Tabla 1, donde también aparecen las condiciones de flujo resultantes al resolver la red en base a esta información.

**Tabla 1** | Características de la red y condiciones de flujo.

Nodo	Características			Tubo	Características			$q_b$ (m <sup>3</sup> /h)
	Cota (m)	$b_b$ (m <sup>3</sup> /h)	$h_b$ (m)		Longitud (km)	Diámetro (mm)	Rugosidad C	
1	100	-	100.00	1-2	5.0	800	100	1834.60
2	75	0	91.03	2-3	3.0	800	100	1834.60
3	70	-100	85.64	3-4	1.0	400	100	50.00
4	65	-50	85.58	3-5	2.0	500	100	560.00
5	64	-100	81.71	5-6	0.5	300	100	10.00
6	62	-10	81.70	5-7	0.8	500	100	450.00
7	61	0	80.66	7-8	1.0	400	100	150.00
8	50	-150	80.15	7-9	1.5	400	100	300.00
9	50	-300	77.90	3-10	1.0	500	100	1124.60
10	60	0	78.49	10-11	0.7	300	100	641.71
11	55	-200	57.15	11-12	0.7	300	100	203.49
12	50	-50	54.61	10-13	1.0	300	100	482.88
13	40	-100	60.48	11-14	1.0	300	100	238.22
14	20	-500	52.29	12-15	1.0	300	100	153.49
15	30	0	52.45	13-14	0.7	300	100	382.88
16	25	-100	51.35	14-15	0.7	300	100	-46.57
17	50	-	50.00	14-16	1.5	400	100	167.67
				15-16	1.0	300	100	106.93
				16-17	2.0	400	100	174.60

Una vez caracterizado el estado inicial de la red, se deben definir las configuraciones de medidas para las que se desea analizar la observabilidad. En este trabajo, se adoptará un escenario de partida en el que se asume que se dispone de medidas de nivel piezométrico en los depósitos ( $\tilde{h}_1$  y  $\tilde{h}_{17}$ , nótese que la tilde refleja que se trata de medidas disponibles en el sistema) y de demanda en el resto de los nodos ( $\tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \dots, \tilde{q}_{15}, \tilde{q}_{16}$ ). Posteriormente, se analizará la observabilidad en caso de pérdida de dos medidas de demanda, concretamente en los nodos 13 y 14, ubicados en la zona mallada de la red.

### Escenario de partida

El AO mediante el método estocástico requiere cuantificar primeramente la incertidumbre inicial y condicionada asociada a este escenario. Comenzando por la incertidumbre inicial, en este ejemplo se asume que la desviación de los niveles piezométricos en los depósitos y de la demanda en los nodos de tránsito es nula (tal y como se comentó en el apartado de Estandarización del método anterior). Por su parte, las varianzas asumidas para los nodos de balance se obtienen como  $1/b_b$ . Estas consideraciones permiten obtener la matriz varianza-covarianza  $R_A$ , en base a la cual se puede obtener  $R_{[A,U]}$ . Por su parte, para el escenario condicionado será necesario considerar la existencia de sensores de nivel en los depósitos y medidores de caudal en los nodos de demanda. Asumiendo que la incertidumbre de la medida con estos aparatos es nula, se puede obtener la matriz varianza-covarianza condicionada  $R_{Y|X}$ .

En este caso, los índices de observabilidad resultantes son  $SOI_h=SOI_q=SOWI=100\%$ , lo cual indica que la red es observable. Este resultado era esperable, puesto que la configuración de medidas asumida en este primer escenario introduce  $n_n + n_d$  condiciones a la resolución de la red, haciendo que se trate de un sistema de ecuaciones compatible determinado.

### Escenario de pérdida de dos demandas

Asumiendo las mismas distribuciones de incertidumbre aleatorias que en el escenario anterior y considerando la pérdida de la señal de los caudalímetros empleados para la medida de demanda en los nodos 13 y 14, en este caso se obtiene  $SOI_h=95.58\%$ ,  $SOI_q=96.66\%$  y  $SOWI=97.81\%$ , lo cual indica la pérdida de observabilidad de la red. Por su parte, los índices de observabilidad obtenidos a nivel individual para cada una de las variables de la red (flujo y nivel piezométrico) se recogen en la Figura 2. Esta imagen muestra que la observabilidad de la red en este escenario es relativamente buena (>75%), aunque el nivel de observabilidad disminuye en las proximidades de los nodos en los que se ha perdido la medida de demanda.

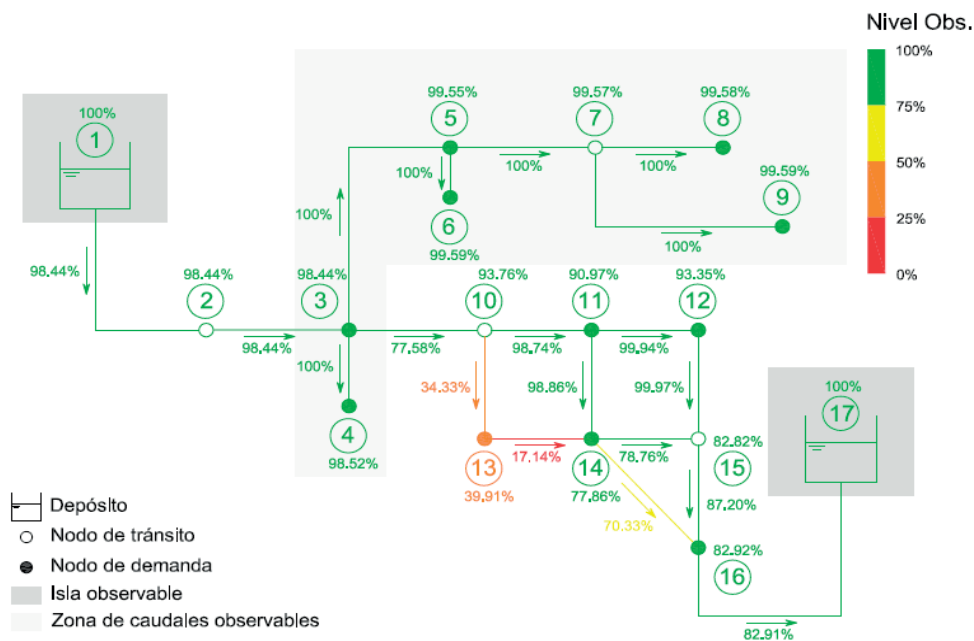


Figura 2 | Índice de observabilidad de los elementos de la red para el escenario de pérdida de dos demandas.

Además, el hecho de que el método estocástico permita analizar la observabilidad de cada una de las variables posibilita la detección de islas observables. En este caso concreto, se identifican dos islas correspondientes a los puntos en los que se mide el nivel piezométrico (nodos 1 y 17). Esto se justifica porque al dejar de disponer de las dos medidas de demanda en cuestión, el sistema no resulta compatible determinado y tan sólo se pueden conocer las variables de estado (niveles piezométricos) en aquellas posiciones donde el nivel piezométrico se está midiendo directamente. No obstante, también se identifica una zona del sistema en la que sólo los flujos resultan observables, que se corresponde con la región ramificada de la red. Es interesante mencionar que de haberse aplicado el método algebraico tal y como lo presentan Díaz *et al.* (2015) únicamente se habrían podido obtener los sombreados grises que aparecen en la Figura 2, lo cual pone de manifiesto la información adicional que supone la implementación del método estocástico gracias al cálculo del índice de observabilidad, que complementa el resultado y da una idea del nivel de observabilidad de la red.

Por otro lado, y puesto que para llegar a este escenario se ha producido la pérdida simultánea de las medidas  $\tilde{q}_{13}$  y  $\tilde{q}_{14}$ , resulta interesante analizar cómo contribuye la pérdida individual de cada una de ellas por separado al deterioro de la observabilidad de la red. Esto es interesante puesto que aunque el objetivo sea siempre restaurar la observabilidad total para obtener unos resultados fiables en el posterior proceso de EE, en la práctica pueden existir restricciones en el presupuesto que tan sólo permitan añadir una medida, en cuyo caso es deseable que sea aquella que maximiza la observabilidad del sistema. Los diferentes índices de observabilidad estocásticos obtenidos para la caída individual no sólo de estas dos demandas, sino de cualquier medida de la red, respecto al escenario de partida se recogen en la Tabla 2.

**Tabla 2** | Sensibilidad de los índices de observabilidad estocásticos ante la pérdida de una medida disponible en el escenario de partida.

Medida perdida respecto al escenario de partida	Índices de observabilidad estocásticos		
	$SOI_h$ (%)	$SOI_q$ (%)	SOWI (%)
$\tilde{h}_1$	100	100	100
$\tilde{h}_{17}$	100	100	100
$\tilde{q}_2$	100	100	100
$\tilde{q}_3$	97.81	97.27	94.70
$\tilde{q}_4$	95.40	90.94	89.20
$\tilde{q}_5$	93.78	95.47	93.59
$\tilde{q}_6$	36.66	36.69	35.68
$\tilde{q}_7$	100	100	100
$\tilde{q}_8$	94.61	94.58	94.93
$\tilde{q}_9$	96.82	97.29	97.37
$\tilde{q}_{10}$	100	100	100
$\tilde{q}_{11}$	98.22	98.70	99.25
$\tilde{q}_{12}$	92.28	93.89	97.72
$\tilde{q}_{13}$	96.01	97.10	97.93
$\tilde{q}_{14}$	99.57	99.56	99.87
$\tilde{q}_{15}$	100	100	100
$\tilde{q}_{16}$	98.83	98.52	99.76

Estos resultados reflejan que la pérdida de la medida de demanda en el nodo 13 es más determinante que el fallo en el nodo 14, puesto que todos los índices de observabilidad estocástica propuestos resultan menores cuando se pierde  $\tilde{q}_{13}$ . Además, esta tabla permite ver que el fallo que más perjudicaría a la observabilidad general de la red sería la pérdida de la medida de demanda

en el nodo 6. También se debe resaltar que según estos resultados son varias las medidas cuya caída no afectaría a la observabilidad del sistema, manteniéndose el 100% en todos los índices. Esto se debe a que, como se ha mencionado anteriormente, este método simplificado supone que la desviación en la medida de los niveles en los depósitos y en la medida de demanda en los nodos de tránsito es nula, no siendo posible evaluar con esta propuesta cómo se ve afectado el sistema ante su pérdida. En cualquier caso, la información facilitada por la tabla refleja que la implementación de un método de este tipo puede ser una buena estrategia para reaccionar ante la pérdida de medidas en el sistema, constituyéndose como una herramienta útil para la toma de decisiones siempre que no existan medidas redundantes.

---

## DISCUSIÓN

El método estocástico presentado en este trabajo para el AO proporciona información sobre la observabilidad general de la red y sobre cada una de las variables de forma individual, permitiendo además la identificación de islas observables. Esta propuesta supone un paso más en lo que respecta a los métodos existentes en la literatura, puesto que permite cuantificar el nivel de observabilidad, que proporciona una idea de lo cerca o lejos que se encuentra el sistema o la variable de alcanzar la observabilidad. Es importante señalar que la estimación de la incertidumbre presentada en este trabajo difiere de la incertidumbre que se obtendría al llevar a cabo la EE propiamente dicha, en cuyo caso los aparatos de medida tendrían una incertidumbre consistente con la precisión del equipo. No obstante, considerar que la desviación en la lectura de los equipos es nula permite una primera aproximación al problema, que es consistente con la realidad de las redes de abastecimiento, donde las predicciones de consumo en base a registros históricos aún distan mucho de reproducir fielmente el comportamiento del sistema.

El interés del método aquí presentado reside por tanto en su capacidad para analizar la observabilidad de la red de una forma rápida y además detectar las zonas donde el índice de observabilidad es menor, ya que en ellas será necesario añadir aparatos de medida para mejorar la observabilidad y por tanto los resultados de la EE. En este sentido, se debe resaltar que la observabilidad de la red únicamente garantiza que todas las variables del sistema se puedan deducir en base a las medidas existentes, pero otra realidad distinta es la incertidumbre con la que esa estimación es posible, la cual vendrá determinada por la precisión de las medidas. Por tanto, este método supone un primer esfuerzo para contemplar esta dimensión estocástica en el AO, necesario hoy día para afrontar con una cierta garantía de éxito la implantación de las técnicas de EE, cuya adaptación a sistemas de abastecimiento se ha convertido hoy día en una prioridad a nivel mundial para contribuir a la transformación de los grandes núcleos urbanos en *smart cities*.

No obstante, una de las principales limitaciones del método es la imposibilidad de afrontar escenarios redundantes. De hecho, el mayor problema que puede existir al aplicar esta metodología a un escenario redundante consiste en detectar cuáles son precisamente esas medidas redundantes. Una estrategia posible para detectar las medidas que están provocando el malfuncionamiento de la aproximación estocástica es realizar el método algebraico propuesto por Díaz *et al.* (2015) de forma previa. Este planteamiento también permite analizar la observabilidad de todas las variables, pero su estructura matricial permite además detectar medidas redundantes entre sí. De esta forma, una vez detectadas las medidas redundantes, éstas se podrían suprimir, puesto que no aportan nada nuevo a la observabilidad del sistema, para permitir la utilización del método estocástico aquí presentado. Así, el planteamiento estocástico podría entenderse como un análisis complementario que permite evaluar de forma rápida el interés que presenta la incorporación de un grupo de medidas en una zona y no otra del sistema, o incluso la recolocación de las medidas redundantes en regiones donde proporcionarían información útil. En este caso, el trabajo aquí presentado podría entenderse como un post-proceso eficaz, rápido e intuitivo para la toma de decisiones en lo que respecta a la monitorización y explotación de redes de abastecimiento.

---

## CONCLUSIONES

Este trabajo plantea un método estocástico alternativo para el AO mediante la evaluación de la incertidumbre del sistema asociada a dos escenarios: uno primero que asume que la incertidumbre de los niveles en los depósitos y las demandas en los nodos sigue distribuciones aleatorias normales, y un segundo en el que esta estimación se ve modificada por la existencia de equipos de medida en el sistema, cuyo error se considera nulo. Este planteamiento compara posteriormente la incertidumbre en el escenario

condicionado con respecto al escenario de partida, lo cual permite juzgar cuán observable resulta cada uno de los elementos de la red.

El método ha probado ser eficaz en su aplicación a un ejemplo ilustrativo, que permite comprender la información adicional que este planteamiento proporciona con respecto a otros métodos existentes en la literatura. No obstante, esta metodología únicamente resulta aplicable a escenarios donde las medidas no son redundantes, lo cual limita su potencial para priorizar la incorporación de equipos de medida adicionales a estos sencillos casos. Por este motivo, se plantea su utilización como complemento al método algebraico para el AO, de forma que este análisis matricial previo permita identificar las medidas redundantes y suprimirlas para el posterior análisis estocástico. Así, el método aquí presentado sería un post-proceso a este AO básico, proporcionando información intuitiva con vistas a la colocación de dispositivos adicionales o la reubicación de las medidas detectadas como redundantes. Su implementación contribuye por tanto a mejorar los resultados de un posterior proceso de EE, objetivo actual de un gran número de núcleos de población que necesitan conocer el estado hidráulico de la red en tiempo real para mejorar el funcionamiento del sistema y el servicio al usuario.

---

## REFERENCIAS

- Bargiela, A. B. (1984). *On-line monitoring of water distribution networks*. Ph.D. thesis, University of Durham, United Kingdom.
- Bargiela, A., Hainsworth, G. (1989). Pressure and flow uncertainty in water systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 115(2), 212-229. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(1989)115:2(212)
- Caro, E., Arévalo, I., García-Martos, C., Conejo, A. J. (2013). Power system observability via optimization. *Electric Power Systems Research*, 104, 207-215. doi:10.1016/j.epsr.2013.06.019
- Carpentier, P., Cohen, G. (1991). State estimation and leak detection in water distribution networks. *Civil Engineering Systems*, 8(4), 247-257. doi:10.1080/02630259108970634
- Castillo, E., Conejo, A. J., Pruneda, R. E., Solares, C. (2005). State estimation observability based on the null space of the measurement Jacobian matrix. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(3), 1656-1658. doi:10.1109/TPWRS.2005.852093
- Contaxis, G. C., Korres, G. N. (1988). A reduced model for power system observability analysis and restoration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(4), 1411-1417. doi:10.1109/59.192947
- Coulbeck, B. (1977). *Optimisation and modelling technics in dynamic control of water distribution systems*. Ph.D. thesis, University of Sheffield, United Kingdom.
- Díaz, S., González, J., Mínguez, R. (2015). Observability analysis in water transport networks: Algebraic approach. *Journal of Water Resources Planning and Management*, doi:10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000621
- Habiballah, I.O., Irving, M.R. (2001). Observability analysis for state estimation using linear programming. *IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution*, 148(2), 142-145. doi:10.1049/ip-gtd:20010061
- Kang, D., Lansey, K. (2010). Optimal meter placement for water distribution system state estimation. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 136(3), 337-347. doi:10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000037
- Kapelan, Z., Savic, D., Walters, G. (2003). Multiobjective sampling design for water distribution model calibration. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 129(6), 466-479. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:6(466)
- Korres, G. N., Katsikas, P. J. (2003). A hybrid method for observability analysis using a reduced network graph theory. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(1), 295-304. doi:10.1109/TPWRS.2002.807072
- Krumpholz, G.R., Clements, K.A., Davis, P.D. (1980). Power system observability - A practical algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99(4), 1534-1542. doi:10.1109/TPAS.1980.319578

- Nagar, A. K., Powell, R. S. (2000). Observability analysis of water distribution systems under parametric and measurement uncertainty. *Building Partnerships*, 1-10. doi:10.1061/40517(2000)213
- Nucera, R.R., Gilles, M.L. (1991). Observability analysis: A new topological algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(2), 466-475. doi:10.1109/59.76688
- Preis, A., Whittle, A. J., Ostfeld, A., Perelman, L. (2011). Efficient hydraulic state estimation technique using reduced models of urban water networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 137(4), 343-351. doi:10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000113
- Savic, D., Kapelan, Z., Jonkergouw, P. (2009). Quo vadis water distribution model calibration? *Urban Water Journal*, 6(1), 3-22. doi:10.1080/15730620802613380
- Schewpe, F. C., Wildes, J. (1970). Power system static state estimation, Part I: Exact model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(1), 120-125. doi:10.1109/TPAS.1970.292678
- Solares, C., Conejo, A.J., Castillo, E., Pruneda, R.E. (2009). Binary-arithmetic approach to observability checking in state estimation. *IET Generation, Transmission and Distribution*, 3(4), 336-345. doi:10.1049/iet-gtd.2008.0248
- Walski, T.M. (1983). Techniques for calibrating network models. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 109(4), 360-372. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(1983)109:4(360)
- Yu, G., Powell, R.S. (1994). Optimal design meter placement in water distribution systems. *International Journal of Systems Science*, 25(12), 2155-2166. doi:10.1080/00207729408949342