



# **Filtragem Não Linear Adaptativa e Seguimento Radar Ótimo de Veículos Aeroespaciais**

**Milca de Freitas Coelho**

Tese para obtenção do Grau de Doutor em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(3<sup>o</sup> ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**Data das provas de doutoramento: 16 setembro 2022**

**Júri:**

Dr. Joaquim Mateus Paulo Serra  
Vice-Reitor da Universidade da Beira Interior e Presidente do júri

Dr. Kouamana Bousson  
Professor Associado da Universidade da Beira Interior

Dr. José António Menezes Felipe de Souza  
Professor Associado da Universidade da Beira Interior

Dr. Francisco Miguel Ribeiro Proença Brójo  
Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior

Dr. André Resende Rodrigues da Silva  
Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior

Dr. Mário Paulo Brito  
Professor Associado da Universidade de Southampton

Dr. Carlos Miguel Nóbrega Velosa  
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências Naturais, Engenharias e Tecnologias da Universidade Lusófona do Porto

Dr. Alberto Manuel Martinho Vale  
Professor Auxiliar do Instituto Técnico da Universidade de Lisboa

**outubro 2022**



# Declaração de Integridade

Eu, Milca de Freitas Coelho, que abaixo assino, estudante com o número de inscrição D1558 de Engenharia Aeronáutica da Faculdade de Engenharias, declaro ter desenvolvido o presente trabalho e elaborado o presente texto em total consonância com o Código de Integridades da Universidade da Beira Interior.

Mais concretamente afirmo não ter incorrido em qualquer das variedades de Fraude Académica, e que aqui declaro conhecer, que em particular atendi à exigida referência de frases, extratos, imagens e outras formas de trabalho intelectual, e assumindo assim na íntegra as responsabilidades da autoria.

Universidade da Beira Interior, Covilhã, 14 de outubro de 2023

Milca de Freitas Coelho

(assinatura conforme Cartão de Cidadão ou preferencialmente assinatura digital no documento original se naquele mesmo formato)



Aos meus pais, o meu mais sincero e profundo obrigado!



# Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais, sem os quais esta caminhada não se teria realizado. O vosso incondicional apoio, constante motivação, confiança e presença, permitiram-me chegar até aqui. Vocês são o meu alicerce e por tudo o meu mais profundo obrigada!

Agradeço também aos meus irmãos: Disa, Jó e Miriam, por fazerem parte do meu percurso, por me motivarem e enriquecerem os meus dias. Vocês tornaram o meu percurso mais memorável.

Expresso também um enorme agradecimento ao meu orientador, Prof. Doutor Kouamana Bousson, pela oportunidade e privilégio de desenvolver um tema numa área que me fascina e entusiasma. O meu mais sincero obrigada por toda a sua orientação, apoio, conhecimentos e ensinamentos, que sem dúvida foram essenciais para a conclusão desta tese e também para o meu crescimento pessoal.

Um especial agradecimento aos meus colegas de laboratório, em particular ao engenheiro Kawser Ahmed, pelas valiosas discussões, apoio e por me acompanhar nesta longa jornada, da qual levo grandes memórias.

O meu sincero agradecimento ao Departamento de Ciências Aeroespaciais da Universidade da Beira Interior, em particular a unidade de Investigação LAETA-UBI/AeroG e ao Laboratório de Aviónica e Controlo por me proporcionarem as condições necessárias ao desenvolvimento e conclusão deste trabalho.







# Resumo

A filtragem não-linear é um dos tópicos mais importantes e complexos em engenharia, especialmente quando aplicada a situações de tempo-real em ambientes altamente não-lineares. Este é o cenário da maioria das aplicações aeroespaciais nomeadamente, aviso de colisão, seguimento radar, vigilância, orientação, navegação e controlo de veículos aeroespaciais, sendo que o principal objetivo é a estimação dos estados de um determinado alvo (seja este uma aeronave, satélite, míssil ou outro) a partir de medições ruidosas. A maior dificuldade está em desenvolver métodos que sejam capazes de lidar não só com a não-linearidade dos modelos, mas também com as incertezas associadas aos instrumentos de medições e às perturbações existentes no meio envolvente que afetam diretamente o sistema e, na sua maioria, são difíceis de prever e computar. Uma das estratégias mais utilizadas para garantir o ajuste dinâmico e ótimo dos métodos de filtragem face a todas estas adversidades é a implementação de algoritmos adaptativos.

Assim sendo, a abordagem mais utilizada para lidar com esta problemática é a filtragem de Kalman. O seu sucesso, principalmente na área de engenharia, deve-se na sua maioria ao filtro de Kalman estendido (EKF – *Extended Kalman Filter*). Este assenta no pressuposto de que a linearização é suficiente para representar localmente a não-linearidade do sistema e, por conseguinte, o algoritmo utiliza o modelo linearizado em substituição ao modelo original não-linear. A linearização é um processo relativamente fácil de compreender e aplicar, o que justifica a popularidade do filtro. Contudo, ao lidar com sistemas altamente não-lineares, o EKF tende a apresentar algumas limitações, tais como, estimativas erráticas, comportamentos instáveis e por vezes até divergentes.

De forma a colmatar algumas destas limitações, esta tese apresenta um filtro de Kalman estendido melhorado e adaptativo, denominado por *improved Extended Kalman Filter* (iEKF), onde para além da adaptabilidade clássica das matrizes de ruído, é proposto uso da norma de Frobenius como fator de correção da estimativa da covariância *a priori* e é também proposto um novo ponto de linearização. Desta forma, o iEKF adapta as matrizes de transição dos modelos através do novo ponto de linearização e adapta as informações estatísticas através da matriz de covariância proposta. A principal intenção é manter a simplicidade e estrutura pelo qual o EKF é

conhecido, porém melhorar o seu desempenho e precisão com conceitos simples, eficazes e adaptativos.

Um outro foco desta tese é analisar o desempenho da filtragem no seguimento radar. Assim sendo, tanto o EKF como o iEKF foram implementados e analisados em quatro aplicações deste âmbito, sendo estas: a estimação de uma órbita de um satélite artificial, a estimação de uma transferência orbital (transferência de Hohmann), a estimação de uma reentrada na atmosfera, e por fim, a estimação da trajetória de uma aeronave comercial, em que objetivo é estimar a posição e velocidade do veículo. Tanto o EKF como o iEKF foram analisados e comparados com base no RMSE (*Root Mean Square Error*). Os resultados demonstram que o iEKF fornece estimativas superiores. O algoritmo é, em geral, mais preciso, estável e confiável, demonstrando ser uma alternativa conveniente ao clássico EKF.

Em suma, esta tese propõe um novo método de filtragem não-linear adaptativo, denominado por iEKF. Os resultados indicam que este deve ser tido em consideração para a estimação de estados não-linear tanto para o seguimento radar, como para qualquer outra área que necessidade de um algoritmo de filtragem eficiente.

## **Palavras-chave**

Filtragem Não-Linear Adaptativa; Estimação de Estados Não-Linear; Filtros de Kalman Não-Lineares; EKF; iEKF; Seguimento Radar; Aplicações Aeroespaciais.

# Abstract

Nonlinear filtering is an important and complex topic in engineering, especially when applied to real-time applications with a highly nonlinear environment. This scenario involves most aerospace applications, such as surveillance, guidance, navigation, attitude control, collision warning and target tracking, where the main objective consists of estimating the states of a moving target (aircraft, satellite, missile, spacecraft, etc.) based on noisy measurements. The challenge is to develop methods that are capable to cope, not only with the nonlinearities of the models but also with the instrumental inaccuracies related to the data acquisition system and the environmental perturbations that are unwanted and, in most cases, difficult to compute. One of the promising strategies to dynamically adjust and guarantee filter optimality is the computation of adaptative algorithms.

A very well-known framework to deal with those problems is the Kalman filter algorithms, whose success in engineering applications is mostly due to the Extended Kalman Filter (EKF). The EKF is based on the assumption that a local linearization of the system may be a sufficient description of nonlinearities, therefore the linearized model is used instead of the original nonlinear function. Such approximations are easy to understand and apply, which explains the popularity of the filter. However, when dealing with highly nonlinear systems, the EKF estimates suffer serious problems, such as unstable and quickly divergent behaviours and/or erratic estimates.

To address those limitations, this thesis proposes an improved Extended Kalman filter (iEKF) with an adaptative structure, where a new Jacobian matrix expansion point is proposed, and a Frobenius norm of the covariance matrix is suggested as a correction factor for the a priori estimates. Therefore, the iEKF does not only update the statistical information based on the proposed covariance matrix but also updates the state and measurements transitions matrices based on the new Jacobian expansion point. The core idea is to maintain the EKF structure and simplicity but improve the overall performance with simple yet effective concepts.

Another objective of this thesis was to evaluate the performance of the filtering methods on radar tracking applications. Thus, the effectiveness of EKF and iEKF were analysed and compared in four radar tracking applications: an artificial satellite orbit estimation, a Hohmann orbit transfer, an atmospheric reentry estimation, and a

commercial aircraft trajectory estimation, where the position and velocity of the aerospace vehicle were computed.

The EKF and iEKF were compared based on the RMSE (Root Mean Square Error). Simulations results suggest that the iEKF provides a considerably higher accuracy on the overall results. The algorithm is more precise, stable, and reliable, which make it an attractive alternative to the classic EKF.

In summary, this thesis proposed an improved Extended Kalman Filter with an adaptative structure. This algorithm is a promising method for nonlinear state estimation, not only for radar tracking applications but any applications that require an efficient nonlinear filter.

## **Keywords**

Nonlinear Adaptive Filtering; Nonlinear State Estimation; Nonlinear Kalman Filters; EKF; iEKF; Radar Tracking; Aerospace Applications.

# Índice

Declaração de Integridade . . . . .	iii
Dedicatória . . . . .	v
Agradecimentos . . . . .	vii
Resumo . . . . .	ix
Abstract . . . . .	xi
Índice . . . . .	xiii
Lista de Figuras . . . . .	xvii
Lista de Tabelas . . . . .	xix
Lista de Acrónimos . . . . .	xxi
Lista de Símbolos . . . . .	xxiii

## Capítulo 1

<b>1 Introdução . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto e Motivação . . . . .	1
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	4
1.3 Princípios de um Sistema Radar. . . . .	9
1.3.1 Configuração Básica de um Radar. . . . .	11
1.3.2 Princípios Operacionais . . . . .	12
1.3.3 Problemática do Seguimento Radar. . . . .	14
1.4 Objetivos da Tese . . . . .	17
1.5 Estrutura da Tese . . . . .	18

## Capítulo 2

<b>2 Filtragem de Kalman Clássica . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1 Processos Estocásticos e Conceitos Probabilísticos . . . . .	21
2.1.1 Processos Estocásticos . . . . .	21
2.1.1.1 Representação Estado – Espaço . . . . .	22
2.1.1.2 Observabilidade . . . . .	25

2.1.1.3	Processos de Markov . . . . .	25
2.1.1.3.1	Cadeias de Markov. . . . .	26
2.1.2	Conceitos de Probabilidade e Estatística. . . . .	27
2.1.2.1	Variável Aleatória . . . . .	28
2.1.2.2	Esperança Matemática . . . . .	28
2.1.2.3	Variância . . . . .	29
2.1.2.4	Covariância . . . . .	29
2.1.2.5	Correlação. . . . .	30
2.1.2.6	Distribuição Gaussiana (ou Normal) . . . . .	30
2.1.2.7	Distribuição Gaussiana Multivariada . . . . .	32
2.1.2.8	Ruído Branco . . . . .	33
2.1.2.9	Probabilidade Condicionada / Função Densidade de Probabilidade Condicionada . . . . .	35
2.1.2.10	Teorema de Bayes . . . . .	36
2.2	Métodos da Filtragem de Kalman Clássica . . . . .	38
2.2.1	Filtragem de Kalman Linear . . . . .	39
2.2.1.1	Algoritmo do FK Linear . . . . .	41
2.2.2	Filtragem de Kalman Estendida . . . . .	43
2.2.2.1	Algoritmo do EKF . . . . .	43
2.2.2.2	Vantagens e Limitações do EKF . . . . .	46
2.2.3	Filtragem de Kalman <i>Unscented</i> . . . . .	47
2.2.3.1	Transformação no âmbito da Filtragem <i>Unscented</i> . . . . .	47
2.2.3.2	Algoritmo do UKF . . . . .	49
2.2.3.3	Vantagens e Limitações do UKF . . . . .	52
2.2.4	Filtragem de Kalman de Cubatura . . . . .	53
2.2.4.1	Algoritmo do CKF . . . . .	54
2.2.4.2	Regra de Cubatura . . . . .	56
2.2.4.3	Transformação no âmbito da Filtragem de Cubatura . . . . .	58
2.2.4.4	Vantagens e Limitações do CKF . . . . .	59

2.2.5	Filtragem de Kalman <i>Ensemble</i> . . . . .	60
2.2.5.1	Algoritmo do EnKF. . . . .	61
2.2.5.2	Vantagens e Limitações do EnKF. . . . .	64
2.2.6	Outras Variações do Filtro de Kalman. . . . .	65
2.2.7	Conclusão . . . . .	66

## Capítulo 3

<b>3</b>	<b>Filtragem Não Linear Adaptativa</b> . . . . .	<b>67</b>
3.1	Técnicas Adaptativas Propostas . . . . .	68
3.1.1	Ponto de Linearização . . . . .	68
3.1.2	Matriz de Covariância . . . . .	71
3.1.3	Matrizes de Ruído . . . . .	74
3.2	Algoritmo Proposto – iEKF. . . . .	75
3.3	Conclusão . . . . .	77

## Capítulo 4

<b>4</b>	<b>Simulações Numéricas.</b> . . . . .	<b>79</b>
4.1	Caso 1: Órbita de Satélite Artificial. . . . .	79
4.1.1	Localização do Radar . . . . .	80
4.1.2	Modelo Dinâmico. . . . .	80
4.1.3	Simulações e Resultados. . . . .	82
4.2	Caso 2: Transferência Orbital. . . . .	89
4.2.1	Modelo Dinâmico. . . . .	89
4.2.2	Simulações e Resultados. . . . .	91
4.3	Caso 3: Reentrada na Atmosfera . . . . .	98
4.3.1	Modelo Dinâmico. . . . .	98
4.3.2	Simulações e Resultados. . . . .	100
4.4	Caso 4: Trajetória de uma Aeronave Comercial . . . . .	104
4.4.1	Modelo Dinâmico. . . . .	104
4.4.2	Simulações e Resultados. . . . .	105
4.5	Conclusão . . . . .	110

## Capítulo 5

<b>5 Conclusões e Trabalhos Futuros.</b>	111
5.1 Conclusão	111
5.2 Trabalhos Futuros	113

<b>Referências Bibliográficas</b>	115
-----------------------------------	-----

## Anexos

Anexo A – Publicações Relevantes	137
Anexo B – Função <i>Dirac Delta</i>	139
Anexo C – Linearização	141
Anexo D – Gradiente, Matrizes Jacobianas e Hessianas	145
Anexo E – Algoritmo de Runge-Kutta de 4 <sup>a</sup> Ordem	147
Anexo F – Norma de Frobenius	149



# Lista de Figuras

Figura 1.1	- Ilustração ( <i>top-level</i> ) do seguimento radar . . . . .	1
Figura 1.2	- Funcionalidades de um sistema radar típico . . . . .	11
Figura 1.3	- Representação de pulsos emitidos pelo radar . . . . .	14
Figura 1.4	- Ilustração de um problema de seguimento radar . . . . .	16
Figura 2.1	- Classificação de um processo estocástico . . . . .	24
Figura 2.2	- Função generalizada da distribuição de probabilidade normal (Gaussiana) . . . . .	31
Figura 2.3	- Representação do ruído branco em função do tempo (gráfico a) e da frequência (gráfico b) . . . . .	34
Figura 2.4	- Função densidade de probabilidade condicionada . . . . .	36
Figura 2.5	- Representação genérica dos grupos de equações que compõem o filtro de Kalman. . . . .	40
Figura 3.1	- Ilustração dos pontos de linearização . . . . .	71
Figura 4.1	- Ilustração do referencial que define as equações da dinâmica de um satélite artificial . . . . .	81
Figura 4.2	- Representação dos parâmetros orbitais de uma elipse . . . . .	82
Figura 4.3	- Caso de Estudo 1: Representação 3D da órbita de referência . . . . .	84
Figura 4.4	- Caso de Estudo 1: Medições realizadas pelo radar . . . . .	85
Figura 4.5	- Caso de Estudo 1: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição . . . . .	87
Figura 4.6	- Caso de Estudo 1: RMSE do iEKF para a posição . . . . .	87
Figura 4.7	- Caso de Estudo 1: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade . . . . .	88
Figura 4.8	- Caso de Estudo 1: RMSE do iEKF para a velocidade . . . . .	88
Figura 4.9	- Representação de uma transferência de Hohmann. . . . .	90
Figura 4.10	- Representação polar da transferência orbital de Hohmann, obtida através do algoritmo de RK4 . . . . .	93

Figura 4.11	-	Caso de Estudo 2: Representação 3D da trajetória de referência.	94
Figura 4.12	-	Caso de Estudo 2: Medições realizadas pelo radar . . . . .	94
Figura 4.13	-	Caso de Estudo 2: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição . . . . .	96
Figura 4.14	-	Caso de Estudo 2: RMSE do iEKF para a posição . . . . .	96
Figura 4.15	-	Caso de Estudo 2: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade . . . . .	97
Figura 4.16	-	Caso de Estudo 2: RMSE do iEKF para a velocidade . . . . .	97
Figura 4.17	-	Representação de uma reentrada na atmosfera . . . . .	99
Figura 4.18	-	Caso de Estudo 3: Representação 3D da trajetória de reentrada.	100
Figura 4.19	-	Caso de Estudo 3: Medições realizadas pelo radar . . . . .	101
Figura 4.20	-	Caso de Estudo 3: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição . . . . .	102
Figura 4.21	-	Caso de Estudo 3: RMSE do iEKF para a posição . . . . .	102
Figura 4.22	-	Caso de Estudo 3: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade . . . . .	103
Figura 4.23	-	Caso de Estudo 3: RMSE do iEKF para a velocidade . . . . .	103
Figura 4.24	-	Fases de voo . . . . .	105
Figura 4.25	-	Trajетória real de uma aeronave comercial (entre Lisboa e Roma) . . . . .	105
Figura 4.26	-	Caso de Estudo 4: Representação 3D da trajetória de referência.	106
Figura 4.27	-	Caso de Estudo 4: Medições realizadas pelo radar . . . . .	107
Figura 4.28	-	Caso de Estudo 4: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição . . . . .	108
Figura 4.29	-	Caso de Estudo 4: RMSE do iEKF para a posição . . . . .	108
Figura 4.30	-	Caso de Estudo 4: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade . . . . .	109
Figura 4.31	-	Caso de Estudo 4: RMSE do iEKF para a velocidade . . . . .	109

# Lista de Tabelas

Tabela 2.1	-	Algoritmo do Filtro de Kalman Linear . . . . .	42
Tabela 2.2	-	Algoritmo do Filtro de Kalman Estendido . . . . .	44
Tabela 2.3	-	Algoritmo do Filtro de Kalman <i>Unscented</i> . . . . .	50
Tabela 2.4	-	Algoritmo do Filtro de Kalman de Cubatura . . . . .	58
Tabela 2.5	-	Algoritmo do Filtro de Kalman de <i>Ensemble</i> . . . . .	64
Tabela 3.1	-	Algoritmo do iEKF . . . . .	77
Tabela 4.1	-	Caso de Estudo 1: Elementos Orbitais . . . . .	83
Tabela 4.2	-	Caso de Estudo 2: Elementos Orbitais . . . . .	92



# Lista de Acrónimos

CKF	- <i>Cubature Kalman Filter</i>
DPC	- Densidade de Probabilidade Condicionada
EKF	- <i>Extended Kalman Filter</i>
EnKF	- <i>Ensemble Kalman Filter</i>
FDP	- Função de Densidade de Probabilidade
FK	- Filtro de Kalman
iEKF	- <i>Improved Extended Kalman Filter</i>
RADAR	- <i>RADio Detection And Ranging</i>
RK4	- Runge-Kutta de quarta ordem
RMSE	- <i>Root Mean Square Error</i>
SLAM	- <i>Simultaneous Localization And Mapping</i>
UKF	- <i>Unscented Kalman Filter</i>
UT	- <i>Unscented Transform</i>



# Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição	Unidades
$\alpha$	Parâmetro que determina a propagação dos pontos-sigma ao redor da média - transformação <i>unscented</i> .....	[-]
$\beta$	Parâmetro que introduz o conhecimento <i>a priori</i> da distribuição - transformação <i>unscented</i> .....	[-]
$\beta$	Ângulo de inclinação do veículo aeroespacial (capítulo 4)	[rad]
$\gamma$	Autocorrelação de uma variável ou processo .....	[-]
$\gamma$	Ângulo da trajetória de voo (capítulo 4.3) .....	[rad]
$\delta$	Função <i>delta Kronecker</i> .....	[-]
$\zeta$	Coefficiente de correlação .....	[-]
$\theta$	Ângulo de azimute .....	[rad]
$\theta$	Latitude da reentrada na atmosfera (capítulo 4.3) .....	[rad]
$\kappa$	Parâmetro escalar secundário, utilizado na transformação <i>unscented</i> .....	[-]
$\lambda$	Parâmetro escalar utilizado na transformação <i>unscented</i> .	[-]
$\lambda$	Comprimento de onda emitida pelo radar (capítulo 1.3)...	[m]
$\mu$	Média .....	[-]
$\mu_{Terra}$	Parâmetro universal da Terra .....	[N.m <sup>2</sup> /kg]
$\xi$	Conjunto de pontos de cubatura (CKF) .....	[-]
$\rho$	Densidade atmosférica .....	[kg/m <sup>3</sup> ]

$\rho_0$	Densidade atmosférica à superfície terrestre .....	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Desvio padrão .....	[-]
$\sigma_\theta$	Desvio padrão associado à coordenada esférica $\theta$ .....	[-]
$\sigma_\phi$	Desvio padrão associado à coordenada esférica $\phi$ .....	[-]
$\sigma_Q$	Desvio padrão associado à matriz $Q$ .....	[-]
$\sigma_r$	Desvio padrão associado à coordenada esférica $r$ .....	[-]
$\sigma_R$	Desvio padrão associado à matriz $R$ .....	[-]
$\sigma_v$	Desvio padrão associado ao ruído $v$ .....	[-]
$\sigma_w$	Desvio padrão associado ao ruído $w$ .....	[-]
$\sigma^2$	Variância de uma variável aleatória contínua .....	[-]
$\wp$	Função de densidade espectral de potência .....	[-]
$\tau$	Intervalo de tempo .....	[s]
$\tau_e$	Tempo de atraso do eco .....	[s]
$\Delta(\tau)$	Função <i>dirac delta</i> .....	[-]
$\phi$	Ângulo de elevação .....	[rad]
$\phi$	Longitude da reentrada na atmosfera (capítulo 4.3) .....	[rad]
$\phi_i$	Ângulo entre o eixo-Z e o vetor $r$ .....	[rad]
$\mathfrak{F}[\cdot]$	Transformadas de Fourier .....	[-]
$\Upsilon$	Propagação/projeção dos pontos-sigma pelo modelo não-linear das medições .....	[-]
$g$	Matriz de observabilidade .....	[-]



$\psi$	Ângulo de azimute do veículo aeroespacial .....	[rad]
$\upsilon$	Resíduo da estimativa .....	[-]
$\omega$	Número de ciclos por segundo .....	[ciclos/s]
$\varpi$	Coeficiente de dispersão do alvo .....	[m <sup>2</sup> ou dBsm]
$\chi$	Pontos (sigma ou de cubatura, consoante o método aplicado) .....	[-]
$\hat{\chi}$	Propagação/projeção dos pontos (sigma) pelos modelos não-lineares (UKF) .....	[-]
$\chi^*$	Propagação/projeção dos pontos (de cubatura) pelos modelos não-lineares (CKF) .....	[-]
$\chi_k^f$	<i>Forecast ensemble</i> dos vetores de estado no instante $k$ (EnKF) .....	[-]
$a$	Semieixo maior da órbita elíptica .....	[m]
$a_{trans}$	Semieixo maior da órbita de transferência (Hohmann) ...	[m]
$A$	Matriz estado, relacionada o estado no instante $k-1$ , com o estado atual $k$ .....	[-]
$A$	Evento Aleatório (capítulo 2.1) .....	[-]
$b$	Semieixo menor da órbita elíptica .....	[m]
$B$	Matriz que relaciona o vetor de controlo $\mathbf{u}$ com o estado $\mathbf{x}$ (capítulo 2.1) .....	[-]
$B$	Evento Aleatório (capítulo 2.1) .....	[-]
$B$	Coeficiente inverso da altitude (capítulo 4.3) .....	[m <sup>-1</sup> ]
$c$	Velocidade da luz .....	[m/s]

$C_D$	Coeficiente de resistência .....	[-]
$C_L$	Coeficiente de sustentação .....	[-]
$C_{vk}$	Matriz de Inovação .....	[-]
$Cov[.]$	Covariância entre duas variáveis aleatórias .....	[-]
$D$	Matriz genérica de coeficientes constantes ( $m \times r$ ) .....	[-]
$D$	Resistência ao avanço/arrasto (capítulo 4) .....	[-]
$D_{k-1}$	Histórico dos pares <i>inputs</i> -medições presentes no CKF ..	[-]
$e$	Excentricidade da órbita .....	[-]
$e_{xx}$	Residual do modelo dinâmico .....	[-]
$e_{yy}$	Residual do modelo das medições .....	[-]
$E[.]$	Valor esperado de uma variável aleatória .....	[-]
$E_{y_k}^a$	Matriz do erro da saída do <i>ensemble</i> - EnKF .....	[-]
$E_k^f$	Matriz do erro da covariância do <i>ensemble</i> na fase <i>forecast</i> - EnKF .....	[-]
$f(.)$	Função não-linear que descreve o modelo dinâmico .....	[-]
$g$	Aceleração gravítica .....	[m/s <sup>2</sup> ]
$g(.)$	Função não-linear genérica .....	[-]
$G$	Ganho da antena .....	[dB]
$G_{Terra}$	Constante gravitacional da Terra .....	[N.m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup> ]
$h$	Altitude do veículo aeroespacial na reentrada atmosférica .....	[m]

$h(\cdot)$	Função não-linear que descreve o modelo das medições .	[-]
$h_a$	Distância entre a superfície da Terra e o apogeu .....	[m]
$h_p$	Distância entre a superfície da Terra e o perigeu .....	[m]
$h_{radar}$	Altitude do radar em relação ao nível do mar .....	[m]
$H$	Matriz que relaciona o estado $\mathbf{x}$ , com as medições, $\mathbf{y}$ .....	[-]
$i$	Inclinação da órbita .....	[deg]
$I$	Matriz identidade .....	[-]
$J_2$	Segundo harmónico zonal .....	[-]
$K$	Matriz do ganho de Kalman .....	[-]
$L$	Perda ou dissipação de energia (capítulo 1.3) .....	[dB]
$L$	Sustentação (capítulo 4) .....	[-]
$lat_{radar}$	Latitude do radar .....	[rad]
$long_{radar}$	Longitude do radar .....	[rad]
$m$	Massa do veículo aeroespacial (capítulo 4.3) .....	[kg]
$m$	Dimensão do vetor de medições .....	[-]
$M_{Terra}$	Massa da Terra .....	[kg]
$N$	Dimensão do <i>ensemble</i> .....	[-]
$n$	Dimensão da variável aleatória/vetor de estado .....	[-]
$\bar{p}$	Vetor da probabilidade estacionária .....	[-]
$p(\cdot)$	Função densidade de probabilidade .....	[-]
$p_k$	Vetor de probabilidades .....	[-]

$p(\mathbf{x}_k   D_{k-1})$	Previsão da densidade do CKF .....	[-]
$p(\mathbf{y}_k   D_{k-1})$	Previsão da densidade das medições do CKF .....	[-]
$P_*$	Matriz de covariância .....	[-]
$P\{\cdot\}$	Probabilidade de um evento .....	[-]
$P\{A B\}$	Probabilidade condicional de um evento $A$ dado $B$ .....	[-]
$P_r$	Potência do eco recebida pelo radar .....	[W]
$P_S$	Matriz de covariância de $S$ .....	[-]
$P_t$	Potência transmitida pela antena do radar .....	[W]
$P_X$	Matriz de covariância da variável aleatória $X$ .....	[-]
$P_{\mathbf{xy}}$	Matriz de covariância de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ .....	[-]
$Q$	Matriz de covariância do ruído associado ao processo .....	[-]
$r$	Distância radial entre o radar (sensor) e o alvo .....	[m]
$r$	Dimensão do vetor de controle $\mathbf{u}$ (capítulo 2) .....	[-]
$r_1$	Raio da órbita inicial (transferência de Hohmann) .....	[m]
$r_2$	Raio da órbita final (transferência de Hohmann) .....	[m]
$r_a$	Distância entre o centro da Terra e o apogeu .....	[m]
$r_c$	Distância entre o centro da Terra e o veículo aeroespacial .....	[m]
$r_p$	Distância entre o centro da Terra e o perigeu .....	[m]
$r_{Terra}$	Raio da Terra .....	[m]
$R$	Alcance máximo do radar (capítulo 1.3) .....	[m]

$R$	Matriz de covariância do ruído associado às medições .....	[-]
$R_{alvo}$	Distância entre o radar e o alvo .....	[m]
$\mathbf{s}$	Propagação dos pontos de cubatura através da função não-linear $h$ .....	[-]
$\bar{\mathbf{s}}$	Média de $\mathbf{s}$ .....	[-]
$S$	Propagação/projeção dos pontos-sigma .....	[-]
$S$	Área de referência do veículo aeroespacial para a sustentação e resistência (capítulo 4.3) .....	[m <sup>2</sup> ]
$\bar{S}$	Média de $S$ .....	[-]
$S_i$	Propagação dos pontos sigma ....	[-]
$t$	Tempo .....	[s]
$T$	Período da órbita .....	[s]
$T_s$	Número total de passos utilizados na simulação: time – steps .....	[-]
$\mathbf{u}_k$	Vetor de entradas/inputs de controlo .....	[-]
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$	Elementos do vetor de controlo .....	[-]
$(u_r, u_\theta, u_\phi)$	Componentes da aceleração do satélite na direção de $(\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\phi)$ respetivamente .....	[-]
$v_k$	Ruído gaussiano, branco, de média zero, associado às medições .....	[-]
$V$	Vetor da velocidade do veículo aeroespacial .....	[m/s]
$\hat{V}$	Estimativa do vetor de velocidade .....	[m/s]
$V_1$	Velocidade do veículo aeroespacial na órbita inicial	[m/s]

	(transferência de Hohmann) .....	
$V_2$	Velocidade do veículo aeroespacial na órbita final (transferência de Hohmann) .....	[m/s]
$V_{trans_1}$	Velocidade no perigeu (transferência de Hohmann) .....	[m/s]
$V_{trans_2}$	Velocidade no apogeu (transferência de Hohmann) .....	[m/s]
$Var[.]$	Variância de uma variável aleatória discreta .....	[-]
$w_k$	Ruído gaussiano, branco, independente de média zero, associado ao processo .....	[-]
$W$	Peso do veículo .....	[kg.m/s <sup>2</sup> ]
$W^m$	Peso da média (transformação <i>unscented</i> ) .....	[-]
$W^c$	Peso da covariância (transformação <i>unscented</i> ) .....	[-]
$x$	Posição do alvo no eixo-X .....	[m]
$\mathbf{x}_k$	Vetor de estado .....	[-]
$\dot{\mathbf{x}}_k$	Derivada do vetor de estado, $\mathbf{x}_k$ .....	[-]
$\hat{\mathbf{x}}_k$	Estimativa do vetor de estado .....	[-]
$\tilde{\mathbf{x}}_k$	Aproximação do vetor de estado .....	[-]
$\mathbf{x}_k^{a_i}$	Vetor de estado atualizado utilizado no EnKF .....	[-]
$\bar{\mathbf{x}}_k^a$	Média do <i>ensemble</i> (fase <i>analysis</i> ) no instante $k$ , utilizado no EnKF .....	[-]
$\bar{\mathbf{x}}_k^f$	Média do <i>ensemble</i> (fase <i>forecast</i> ) no instante $k$ , utilizado no EnKF .....	[-]
$\mathbf{x}_0$	Estado inicial .....	[-]

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$	Elementos do vetor de estado .....	[-]
$\mathbf{x}_k^{f_1}, \dots, \mathbf{x}_k^{f_N}$	Elementos do <i>ensemble</i> $\chi_k^f$ .....	[-]
$x_{radar}$	Posição do radar no eixo-X .....	[m]
$X$	Variável aleatória .....	[-]
$\bar{X}$	Média da variável aleatória $X$ .....	[-]
$\mathbf{y}_k$	Vetor de saída/medições do sistema .....	[-]
$\hat{\mathbf{y}}_k$	Estimativa do vetor de medições .....	[-]
$\tilde{\mathbf{y}}_k$	Aproximação do vetor de medições .....	[-]
$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$	Elementos do vetor de medições .....	[-]
$Y$	Variável aleatória .....	[-]
$y$	Posição do alvo no eixo-Y .....	[m]
$y_{radar}$	Posição do radar no eixo-Y .....	[m]
$z$	Posição do alvo no eixo-Z .....	[m]
$z_{radar}$	Posição do radar no eixo-Z .....	[m]
$\ \cdot\ _F$	Norma de Frobenius de uma matriz .....	[-]

**NOTA:** Em alguns casos, parâmetros diferentes possuem o mesmo símbolo. Estes casos estão identificados nesta lista de símbolos juntamente com os capítulos em que são utilizados. A identificação dos capítulos serve apenas para reforçar a ideia de que a sua definição deve ser assumida apenas no capítulo assinalado. Nos casos em que os capítulos não são mencionados, a definição do símbolo é para toda a tese.





# Capítulo 1

## 1. Introdução

### 1.1 Contexto e Motivação

A maioria dos sistemas físicos são projetados e construídos com um propósito específico, ou seja, com a intenção de desempenharem certas funções. Por exemplo, um sistema de rede elétrica deve ser capaz de responder à demanda de carga que dele é exigida. Assim como, aeronaves, foguetões, satélites, submarinos (e outros veículos) devem de ser capazes de navegar no seu meio envolvente e atingirem os objetivos de missão. De forma a determinar se o sistema está a executar corretamente os seus objetivos é preciso saber o seu comportamento num determinado instante do tempo. Por outras palavras, é necessário saber o estado do sistema, isto é, os parâmetros que descrevem o seu comportamento. Geralmente, em navegação o estado do sistema corresponde à posição, velocidade, aceleração ou atitude do veículo.

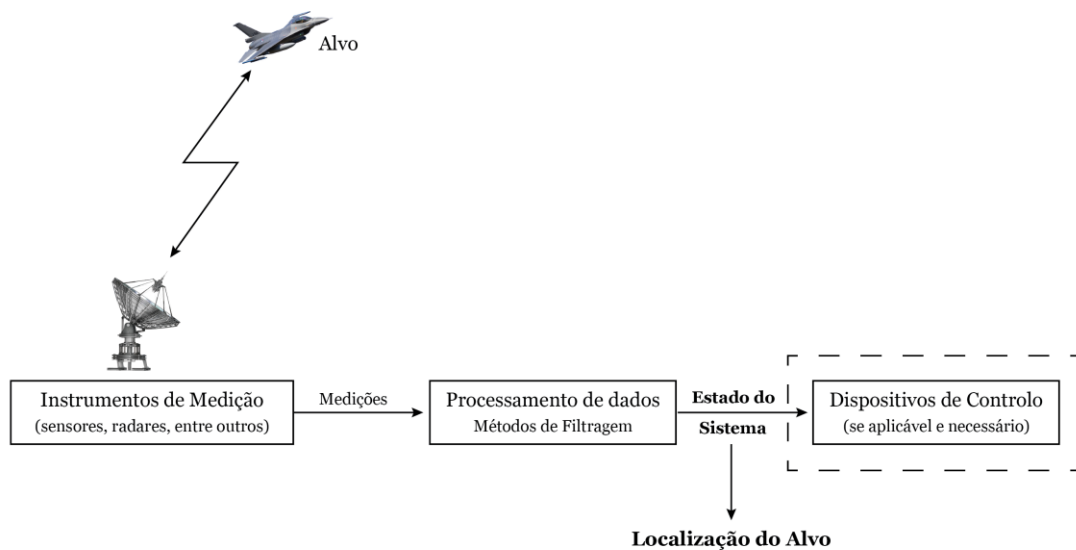


Figura 1.1 –Ilustração (*top-level*) do seguimento radar.

As observações do sistema são obtidas através de instrumentos de aquisição de dados aptos a fornecer medições. Estes instrumentos podem ser radares (ou outros sensores) dependendo do sistema em questão (figura 1.1). O inconveniente é que estas medições não são exatas e possuem ruído que deve ser processado e eliminado. Isto porque, os sistemas operam em meios com incertezas e perturbações que são difíceis de prever e/ou modelar. Para além disto, também existe as imprecisões instrumentais inerentes aos sistemas de aquisição de dados e a complexidade da dinâmica dos próprios sistemas. Todos estes aspetos são fontes de erros e de imprecisões.

O processo de estimar os estados de um sistema com base em medições ruidosas é denominado por estimação ou filtragem e é o principal tópico desta tese. O problema da filtragem consiste em estimar, de uma forma fiável e eficaz, o estado atual de um determinado sistema, com base no conhecimento analítico dos modelos dinâmicos, das entradas de controlo (*inputs*), dos instrumentos de aquisição de dados e das próprias medições [1-3]. Por outras palavras, o objetivo da filtragem é encontrar a estimativa ótima do sistema dinâmico através da minimização (ou supressão, se possível) do ruído, perturbações e de toda a ambiguidade que possa existir nas medições.

Nas últimas décadas, o tema da filtragem tem sido alvo de uma intensa pesquisa científica, pois é útil nas mais diversas áreas. Desde a engenharia aeroespacial, mecânica, química à economia, biologia e robótica, todas estas áreas deparam-se diariamente com a problemática da estimação de estados, cuja solução (aproximada) encontra-se nos métodos de filtragem [4-6].

Em relação ao campo aeroespacial o maior foco encontra-se nas áreas de navegação inercial, seguimento radar, fusão multissensorial de dados, aviso de colisão, controlos automáticos, entre outras, em que o problema se resume a estimar a posição, velocidade, aceleração ou atitude do veículo aeroespacial, seja este um satélite, avião, nave-espacial, míssil ou outro. Contudo, esta não é uma tarefa fácil, porque na maioria dos casos apenas tem-se conhecimento das entradas e saídas do sistema, com um conjunto de incertezas associado. Além do mais, muitas das variáveis de estado não podem ser medidas diretamente, ou seja, são necessários métodos que sejam capazes de inferir estes valores, o que acrescenta complexidade ao problema.

Todos estes aspetos motivam a que sejam feitas as seguintes perguntas:

- Como modelar, analisar e implementar modelos dinâmicos que sejam capazes de incluir todas as incertezas de uma forma direta e prática?
- Tendo tais modelos e sabendo que todos os dados/medições associados estão corrompidos com ruídos e perturbações, que são difíceis de modelar e prever, como estimar de uma forma ótima todas as variáveis de interesse?
- Sabendo que as estimativas têm um impacto direto nos sistemas de controlo, como avaliar o desempenho dos métodos de estimação, de forma a garantir que não há um colapso total do sistema?

Esta tese pretende dar respostas a estas perguntas.

Um dos principais focos do seguimento radar de veículos aeroespaciais é a filtragem não-linear dos dados de voo. É necessário ter em conta que, a natureza destes sistemas e das suas aplicações exigem o uso de métodos de filtragem excecionalmente rápidos, eficazes e precisos, pois na maioria das vezes, o tempo é um fator crítico, assim como, a falha nas estimativas. Uma

das formas de minimizar os erros é a implementação de métodos/algoritmos com caráter adaptativo [7-10], ou seja, que sejam capazes de atualizar os seus parâmetros à medida que novos dados estão disponíveis, principalmente em relação às informações estatísticas do ruído e às matrizes de transição do sistema.

Muitos dos conceitos e técnicas matemáticas que são relevantes para a projeção dos sistemas de seguimento radar podem ser discutidos com base na estatística unificada que essencialmente faz uso do teorema de Bayes. Ou seja, sob uma perspectiva Bayesiana, um sistema de seguimento radar pode ser definido como uma estrutura de atualização iterativa da densidade de probabilidade condicional que descreve os estados do sistema com base em toda a informação disponível até ao momento, incluindo as características dos sensores, a dinâmica do sistema, as condições operacionais, entre outras. A esta iteração de densidades denomina-se de filtragem. Normalmente as densidades possuem uma estrutura particular, ou seja, são somas ponderadas de densidades individuais, sendo que cada uma delas está relacionada a uma hipótese de modelo e a uma interpretação de dados individuais.

Assumindo uma deteção perfeita e um único modelo dinâmico, a abordagem Bayesiana reduz-se ao conhecido filtro de Kalman. A estrutura deste filtro é uma consequência direta da origem incerta das medições e das incertezas associadas aos modelos dinâmicos. Assim sendo, e de uma forma bastante sucinta, o filtro de Kalman é definido como um algoritmo ótimo recursivo de processamento de dados [11-12]. Isto porque, fornece uma solução recursiva, onde todas as informações disponíveis até ao momento são incorporadas sem que seja necessário armazenar e reprocessar todos os dados anteriormente obtidos em cada instante a que uma nova medição é realizada. Desta forma, o filtro de Kalman otimiza o seu processo e aumenta a sua eficiência computacional. Estas características justificam a sua popularidade nas mais diversas áreas, quando comparado aos demais métodos.

Nas últimas décadas, o filtro de Kalman foi um dos tópicos mais abordados pela comunidade científica, pelos motivos anteriormente mencionados, contudo ainda há espaço para novos avanços e melhorias, especialmente nas técnicas de filtragem não-linear adaptativas. Os métodos correntes ou são baseados em aproximações locais e lineares do sistema, ou são baseados em métodos derivados dos algoritmos de Monte-Carlo, que por sua vez, requerem cálculos intensivos e tempos computacionais elevados que podem limitar o desempenho do próprio sistema, principalmente quando se lida com aplicações online, como é o caso do seguimento radar.

O método mais utilizado em aplicações aeroespaciais e conseqüentemente, no seguimento radar, é o filtro de Kalman estendido (EKF - *Extended Kalman Filter*) que assume que uma linearização local do sistema é suficiente para lidar com as suas não-linearidades. Porém, perante sistemas altamente não-lineares, o EKF apresenta várias limitações tais como, comportamentos instáveis e divergentes, estimativas erráticas e “fraca” linearização.

Como o EKF é o filtro mais popular no seguimento radar de veículos aeroespaciais e de forma a colmatar as suas limitações, esta tese tem como principal objetivo propor um filtro de Kalman estendido melhorado e adaptativo, denominado por *improved Extended Kalman Filter* (iEKF), onde são sugeridos um novo ponto de expansão das matrizes Jacobianas e a aplicação da norma de Frobenius da matriz de covariância como fator de correção da estimativa *a priori*. Para além da adaptabilidade clássica das informações estatísticas do ruído, o iEKF também adapta as matrizes de transição do sistema através destes novos parâmetros. A sua estrutura adaptativa permite resultados mais precisos e estáveis sem agravar a simplicidade pela qual o EKF é conhecido.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O primeiro problema documentado de estimação de estados ocorreu em 1795 no campo da astrodinâmica, quando Karl F. Gauss estudava o movimento dos planetas e dos cometas através de medições obtidas pelo seu telescópio [13]. Gauss precisava de uma ferramenta de estimação e com esse propósito criou o teorema dos mínimos quadrados<sup>1</sup>. Este teorema é uma técnica de otimização matemática, que tem como principal objetivo obter a melhor aproximação para um determinado conjunto de dados, através da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e os valores observados, ou seja, através da soma dos quadrados dos resíduos da aproximação.

Posteriormente, em 1912, Fisher [13] desenvolveu o método de máxima verossimilhança. Este método tem como principal objetivo estimar um conjunto de parâmetros da distribuição de probabilidade de um determinado modelo estocástico através da maximização da função de verossimilhança.

140 anos depois do teorema dos mínimos quadrados surgiu a ideia de desenvolver matematicamente um estimador recursivo ótimo. Os matemáticos Wiener [14] e Kolmogorov [15], de forma independente, estenderam o problema de Gauss para sistemas estocásticos através de uma estimação média linear dos mínimos quadrados. Deram assim os primeiros passos na história da filtragem e da teoria moderna da estimação. A solução de Kolmogorov foi elaborada para o tempo-discreto e a de Wiener para o tempo-contínuo [16]. Atualmente, estes métodos ainda continuam a ser utilizados no processamento de sinais e comunicações, porém restritos a sinais estacionários.

Rudolf E. Kalman alargou o trabalho de Wiener e elaborou um novo algoritmo, o filtro de Kalman (FK), método mais generalizado que inclui processos não-estacionários [17]. Uma das diferenças entre estes dois filtros é o domínio no qual foram desenvolvidos, ou seja, o filtro de

---

<sup>1</sup> Há controvérsia sobre quem foi o autor dos métodos dos mínimos quadrados, *Gauss* ou *Legendre*. *Gauss* só publicou o método em 1809 no livro: “*Theoria Motus Corporum Coelestium*”, onde cita o trabalho de *Legendre*, que, de forma independente, desenvolveu e publicou em 1806 o método dos mínimos quadrados no seu livro: “*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*”.

Wiener foi desenvolvido no domínio das frequências, sendo por isso mais utilizado para estimação de sinais, enquanto, o filtro de Kalman foi desenvolvido no domínio do tempo (tempo-discreto), sendo por isso mais utilizado para estimação de estados [17]. Contudo, não é restrito a este domínio. Uma outra diferença é que o filtro de Wiener apenas pode ser aplicado em sistemas estacionários, pois não considera as características estatísticas do sistema, o que não é o caso do filtro de Kalman.

Posteriormente, Kalman colaborou com Bucy para desenvolver uma versão do filtro de Kalman para tempo-contínuo, dando origem ao filtro de Kalman-Bucy [13, 19].

O filtro de Kalman é considerado um estimador ótimo<sup>2</sup> [12] quando está perante sistemas lineares com perturbações brancas e gaussianas, contudo estas premissas são a sua limitação para lidar com problemas reais, que na sua maioria são definidos por equações não-lineares.

Stanley F. Schmidt [20], engenheiro aeroespacial da NASA que em 1960 estava a trabalhar na missão de Apollo, necessitava de uma abordagem que fosse capaz de estimar o estado de um sistema não-linear através de medições feitas a bordo. Esta nova abordagem devia ser “leve” o suficiente para não sobrecarregar os equipamentos. Assim sendo, Schmidt juntamente com Kalman começaram a explorar formas de expandir o uso do filtro de Kalman para sistemas não-lineares, o que lhes permitiu elaborar o famoso *Extended Kalman Filter* (EKF). O EKF é baseado no pressuposto de que uma linearização local do sistema é suficiente para lidar com todas as suas não-linearidades. Após este primeiro sucesso, a popularidade do EKF na engenharia cresceu e a linearização passou a ser um método muito recorrente para lidar com sistemas não-lineares [21, 22]. Atualmente, este é um filtro muito bem documentado na literatura, sendo alguns dos muitos exemplos as seguintes referências [4, 6] [23-27].

Na literatura, o debate sobre o EKF é extenso e muitos autores descrevem o seu desempenho, vantagens e limitações. Por exemplo, [29] utilizaram o EKF para estimar a atitude de um veículo espacial. [30] implementaram o algoritmo para estimar a posição de *rovers* na superfície de Marte. [31] analisaram o desempenho do EKF em problemas de seguimento de aeronaves. [32, 33] implementaram o EKF utilizando uma pseudo-linearização para estimar trajetórias de satélites artificiais. [34] implementaram o EKF para estimar o estado de um veículo autónomo através da fusão de dados, provenientes de sensores odométricos e sonares. [35] utilizaram o EKF para uma estimação online de um rotor, com base em medições de tensões, correntes e em medições das velocidades do motor de indução. [36] utilizaram o critério de máxima de correntropia para melhorar o desempenho do EKF, de modo, a obter estimativas mais precisas no seguimento radar. [37] analisaram a estabilidade estocástica e o comportamento do erro do EKF com base em observações intermitentes. [38] implementaram um EKF robusto para ajustar automaticamente os parâmetros de um controlador PID (proporcional-integral-derivativo)

---

<sup>2</sup> O filtro de Kalman é ótimo, pois possui a capacidade de minimizar recursivamente o erro quadrático relativo às estimativas, tendo em conta as características probabilísticas das incertezas associadas ao modelo dinâmico do sistema e às medições/observações.

enquanto em operação, de forma a minimizar os erros de controlo para qualquer sistema que aplique este tipo de controladores. [39] fez uma análise ao comportamento convergente/divergente do EKF quando utilizado como um estimador de parâmetros em sistemas lineares. [40] analisou o EKF como uma ferramenta prática para sistemas aeroespaciais. [21] apresentaram um *survey* sobre as várias aplicações aeroespaciais do filtro de Kalman, incluindo o EKF, desde 1960 até 2010. [41] analisaram o comportamento do erro do EKF para sistemas não-lineares estocásticos. [42] propuseram um vetor de controlo de um motor de indução através da estimação da velocidade obtida pelo EKF. [43] analisaram os aspetos convergentes do filtro, quando este é utilizado como um observador determinístico de um sistema não-linear discreto. [44] utilizaram o EKF para formular um algoritmo de controlo preditivo de sistemas não-lineares, sendo que, neste caso a função principal do filtro é prever os estados futuros do sistema. [45] fez uma análise geral ao desempenho de EKF, comparando-o ao filtro de iteração de estágio único e ao filtro não-linear de segunda ordem. [46] propuseram um método de deteção e identificação de falhas baseado no EKF e na iteração de múltiplos modelos, sendo que, a validação é feita em sistemas aeroespaciais. [47] aplicaram o EKF com sucesso para estimar a atitude orbital de um satélite com base no vetor de Gibbs. [48] demonstraram a eficiência do EKF para a estimativa de estados de um motor síncrono de imã permanente. [49] analisaram o desempenho do EKF no seguimento de alvos através de uma rede de sensores wireless.

Em 1994, Evensen [50] propôs o filtro de Kalman de *Ensemble*<sup>3</sup> (EnKF – *Ensemble Kalman Filter*) que é um método baseado na implementação de Monte-Carlo. Este filtro foi inicialmente proposto para campo da geofísica com o objetivo de proporcionar uma solução aproximada para os problemas cujo vetores de estados são definidos por grandes dimensões (espaciais). Assim sendo, este filtro surge como alternativa ao clássico filtro de Kalman para lidar com problemas não-lineares de elevadas dimensões e com muitos graus de liberdade [51, 52], como é o caso dos modelos atmosféricos e oceanográficos [50, 53]. Isto porque, nestes casos, o EKF para além de possuir uma matriz de covariância geralmente difícil de implementar e com um custo computacional elevado, também possui uma pobre caracterização da fonte de erros [51, 52, 54].

A grande maioria da literatura do EnKF pertence a área da geofísica, assimilação de dados, atmosfera/previsão do tempo, por exemplo [54-61]. E apesar dos seus múltiplos sucessos nestas áreas, este filtro passa praticamente despercebido no sector aeroespacial, à exceção do trabalho de [62] que implementaram o EnKF numa aplicação de seguimento de alvos e [63] que o implementaram para determinar o fluxo hidrodinâmico.

Em 1995, Julier e Uhlmann [64] também propuseram uma nova abordagem para colmatar algumas das limitações do EKF, o *Unscented Kalman Filter*<sup>4</sup> (UKF). O UKF é um método livre de derivadas que utiliza uma amostra determinística de pontos, os chamados sigma-pontos,

---

<sup>3</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

<sup>4</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

para calcular a média e a covariância do sistema [65-67], permitindo assim resultados com precisões superiores ao EKF. Esta observação foi documentada por [25] [69-78]. [79] também apresentam uma comparação entre os dois métodos, contudo mencionam e comparam aspectos menos abordados na literatura, tais como a implementação dos algoritmos com base na equação explícita de Riccati (abordagem padrão) e a implementação baseada nas expectativas condicionais, abordagem que não envolve a equação de Riccati explicitamente. Esta análise é feita com base nos modelos de observação de seguimento de alvos e redes de sensores. [80] derivou o UKF para sistemas não-lineares contínuos, cujo processo de estado e o processo de medições são modelados por equações diferenciais estocásticas. [81] demonstraram a eficiência do UKF iterativo para o seguimento passivo de alvos. [82] analisaram a eficiência, robustez e velocidade de convergência do UKF na estimação de estados não-linear, onde são apresentados diversos casos de estudo. [83] aplicaram com sucesso o UKF num problema de seguimento de múltiplos alvos, em que a equação de medições é simétrica. [84] implementaram o UKF para avaliar o desempenho de um motor magnético síncrono e comparam os resultados obtidos com o EKF. [85] derivaram o UKF para estimar a atitude de um veículo espacial. [86] aplicaram o UKF para solucionar o problema não-linear do seguimento de alvos e [87] para estimar o vetor de estado de veículos modelados com 3 graus de liberdade.

Mais recentemente, Arasaratnam e Haykin [88, 89] propuseram uma nova abordagem: o filtro de Kalman de Cubatura (CKF - *Cubature Kalman Filter*). Este filtro baseia-se na regra de cubatura esférica-radial, onde amostras determinísticas são aplicadas para calcular integrais multidimensionais com pesos gaussianos. Os métodos de filtragem têm as suas raízes na análise bayesiana, contudo, em condições gaussianas e num ambiente não-linear, o CKF é considerado o método mais próximo do filtro Bayesiano. Estes [1] [12] [90-95] são apenas alguns exemplos de autores que abordaram o problema da estimação de estados através de uma perspectiva bayesiana.

[96] validaram o CKF em aplicações aeroespaciais, mais concretamente, no seguimento de objetos reentrando na atmosfera. [89] implementaram o CKF em aplicações que envolviam o seguimento radar e constataram que, para casos contínuo-discretos, o CKF supera os restantes filtros. [97] comparam alguns métodos de filtragem não-linear, incluindo o CKF, para uma aplicação de posicionamento em que utilizaram dados obtidos através de uma simulação GPS. [98] propôs o CKF para aplicações de localização e mapeamento simultâneo, mais conhecidas como SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*), muito útil para a navegação autónoma. [99] aplicaram o CKF iterativo para solucionar o problema da reentrada na atmosfera de um alvo balístico quando o seu coeficiente é desconhecido. Concluíram que o CKF iterativo possui uma precisão superior ao UKF. [100] implementaram um CKF robusto para estimar a atitude de um veículo espacial num cenário em há incompatibilidade dos modelos, mutação dos estados e perturbações desconhecidas. [101] utilizaram o CKF juntamente com a regra *radial-simplex-esférica*, de forma a obter uma precisão superior em problemas de seguimento de alvos em manobras. [102] fez uma comparação entre o EKF e o CKF quando aplicados a um sistema de

navegação GPS/IMU acoplados. O autor concluiu que quando o grau de observabilidade é baixo ou em situações em que o sistema exibe um comportamento muito não-linear, o CKF tem um desempenho superior, caso contrário, os desempenhos entre o EKF e o CKF são muito semelhantes. [103] propuseram o CKF como solução para a estimação dos estados dinâmicos de sistemas de energia. Para tal, utilizaram a regra de cubatura-esférica e a regra da quadratura-gaussiana, de forma a obterem a função de densidade de probabilidade. [104] fizeram uma análise ao desempenho do CKF quando aplicado a um problema de estimação da atitude relativa e posição de um veículo espacial. [105] avaliaram o CKF de soma gaussiana para o problema de seguimento de alvos, com apenas o ângulo de azimute. Os autores compararam os resultados com o filtro de partículas. [106] avaliaram a estabilidade do CKF para sistemas não-lineares com medições lineares. Neste estudo também é analisado o efeito da covariância.

Em relação aos livros presentes na literatura, possivelmente, o primeiro a incluir a filtragem de Kalman foi o “*Astronautical Guidance*” de Battin [107]. Neste livro, o autor aborda a temática da dinâmica orbital e a orientação de veículos aeroespaciais. Battin também incluiu um capítulo para a teoria de navegação recursiva, onde expõe uma derivação independente do filtro de Kalman aplicada à navegação aeroespacial, inclusive discute uma possível sequência de medições, de modo a minimizar o erro da covariância da estimativa.

Uns meses mais tarde, Lee [108] publicou o livro “*Optimal Estimation, Identification, and Control*”, onde aborda, de uma forma mais extensiva, o filtro de Kalman intitulando-o por “Filtro de Wiener-Kalman”. Por sua vez, Deutsch [109] aborda o filtro de Wiener e a estimativa de constantes através do método dos mínimos quadrados, onde incorpora o trabalho original de Gauss.

Aoki [110] e Liebelt [111] são também referências na filtragem de Kalman, tal como Bucy e Joseph [112]. Contudo este último foca-se na derivação de segunda ordem do filtro em tempo-contínuo quando aplicado a sistemas não-lineares aeroespaciais. Meditch [113] foi o primeiro a incluir num livro tanto a temática da filtragem de Kalman como a teoria do controlador linear quadrático.

O que há de fascinante nestes livros iniciais é que todos eles foram escritos numa época em que muitos dos conceitos básicos da teoria da estimação eram novos na engenharia, conceitos tais como, representação estado-espço, observabilidade, e muitos outros que hoje em dia são consideramos como triviais, na época não o eram.

Uns anos mais tarde, Jazwinski [1] descreveu a filtragem não-linear sob uma perspectiva bayesiana. Em 1974, Gelb [114] abordou o tema com uma simplicidade matemática tão grande que o seu livro foi considerado um clássico à introdução do filtro de Kalman. Atualmente, já há muitos mais livros com esta clareza e simplicidade, acessível a todos os níveis de conhecimento, por exemplo [115] é uma referência para principiantes.



Um outro clássico, é a série de três volumes de Maybeck, que abordam a estimação de estados e o controlo ótimo. O primeiro volume [12] está reservado à filtragem linear clássica e expõe as primeiras discussões sobre a integração do filtro de Kalman nos sistemas de GPS/INS. O segundo volume [116] consiste em tópicos mais avançados da filtragem de Kalman, por exemplo, como modelar as incertezas dos modelos, estimação não-linear e entre outros. O terceiro volume [117] desenvolve tópicos sobre o controlo ótimo.

[93] e [117, 119] são livros que incluem uma extensiva discussão sobre o seguimento radar e a navegação, inclusive abordam o tema da estimação adaptativa. [120-126] e mais recentemente [127, 5] são alguns dos muitos exemplos de livros que abordam a filtragem de Kalman. Em adição a todos estes, é possível encontrar capítulos sobre esta temática em livros com outro foco, como por exemplo, controlo ótimo e processamento de sinais.

A literatura é imensa e bastante vasta em tópicos sobre a filtragem. Assim sendo, foi tomada a decisão (consciente) de apenas descrever e analisar os métodos mais utilizados, sendo estes:

1. Filtro de Kalman Estendido (EKF – *Extended Kalman Filter*)
2. *Unscented Kalman Filter*<sup>5</sup> (UKF)
3. Filtro de Kalman de Cubatura (CKF - *Cubature Kalman Filter*)
4. Filtro de Kalman de *Ensemble*<sup>6</sup> (EnKF - *Ensemble Kalman Filter*)

Em que a maior diferença entre estes é a forma como propagam as variáveis de estado e os momentos estatísticos do sistema.

É necessário ter em conta que diferentes sistemas, possuem diferentes reações aos demais métodos de filtragem. Por isso, dependendo da natureza do problema, determinados métodos terão resultados superiores em relação aos restantes. O mais importante, principalmente no caso de seguimento radar é encontrar o equilíbrio entre a precisão dos resultados e o tempo/complexidade computacional.

### **1.3. Princípios de um Sistema Radar**

O seguimento radar ótimo é um dos principais focos desta tese, pois possui um papel fundamental na navegação de sistemas, por exemplo no caso dos satélites artificiais, estes rapidamente se tornariam inúteis se não fosse possível detetá-los. Para mais, a maioria dos veículos aeroespaciais necessitam de um controlo ativo da sua trajetória, de forma a que sejam capazes de cumprir os requisitos da sua missão. Assim sendo, a navegação e o seguimento radar são uma parte essencial na operação destes veículos [128].

---

<sup>5</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

<sup>6</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

A palavra RADAR é a abreviação de *Radio Detection And Ranging* e define-se como o sistema que deteta e localiza a presença de objetos, sejam estes, aeronaves, navios, veículos espaciais ou qualquer outro tipo de objeto que interesse localizar. Os sistemas de seguimento são utilizados para obter medições instantâneas da posição, velocidade, aceleração, atitude ou mesmo da taxa de mudança destes objetos. No caso dos satélites e restantes veículos aeroespaciais, a maioria dos sistemas de seguimento utilizam sinais rádio que são transmitidos, de ou para uma antena terrestre. Estes sistemas são capazes de realizar medições através da análise direcional do sinal transmitido pelo alvo. A resolução e precisão destas medições depende não só, das características físicas do próprio radar (por exemplo, diâmetro angular do cone da antena, frequência do sinal, tipo de sensor, entre outras) mas também do meio envolvente e dos algoritmos de filtragem utilizados no tratamento dos dados [128]. Para além deste seguimento radiométrico também existe outro tipo de sensores bastante populares, por exemplo, sensores óticos, sonares, eletromagnéticos, entre outros [93, 129].

O sistema de seguimento pode estar localizado numa estação terrestre ou mesmo num outro satélite, mas independentemente da sua localização, possuem todos o mesmo objetivo: recolher informação sobre um objeto em movimento. Esta informação integra o vetor de estado, que tipicamente consiste em alguns dos seguintes componentes [93, 118, 130]:

- **Componentes cinemáticos:** posição, velocidade, aceleração, taxa de viragem, entre outros.

- **Componentes de recurso:** intensidade do sinal irradiado, características espectrais, classificação do alvo, entre outros.

- **Parâmetros constantes** (ou que variam muito lentamente): por exemplo, os parâmetros aerodinâmicos.

Nesta tese são considerados os componentes cinemáticos: posição e velocidade.

Em relação às medições, estas são definidas como observações corrompidas por ruído e podem ser [93, 118]:

- Estimadas diretamente pelo radar/sensor e assim sendo, este fornece informações sobre a distância, azimute e elevação. Em alguns casos os sensores podem medir apenas a distância, ou apenas os ângulos (é o caso, dos sensores óticos), ou uma combinação de ambos, dependendo do tipo de sensor.

- Estimadas através da diferença do tempo de chegada de um sinal, quando entre dois sensores.

- Estimadas através da frequência de banda do sinal emitido pelo alvo, mais conhecida como *Doppler Shift*, isto é, a mudança na frequência do sinal transmitido devido ao movimento relativo entre o radar e o alvo.

- Ou podem ser estimadas através da diferença na frequência, quando medidas por dois sensores (diferença de *Doppler*).

Nesta tese são utilizadas as observações diretas, ou seja, medidas diretamente pelo radar, assim sendo, tem-se informações sobre a distância e os ângulos de azimute e elevação entre o radar e o alvo.

Atualmente, os métodos mais utilizados para lidar com este tipo de observações baseiam-se nos filtros de Kalman. Estes assumem que o estado “verdadeiro” do alvo segue um processo de Markov não-observado, o que significa que, o estado num determinado instante  $k$ , dado o estado imediatamente anterior, isto é,  $k-1$ , é condicionalmente independente de todos os outros estados anteriores. A mesma analogia ocorre com as medições, ou seja, uma medição/observação feita num determinado instante  $k$ , dada a medição imediatamente anterior, isto é,  $k-1$ , é condicionalmente independente de todas as outras medições anteriores [93, 118, 130].

O objetivo final é que os métodos de filtragem sejam capazes de eliminar o ruído existente nas medições do radar (ou pelo menos eliminar o máximo possível), de forma a obter estimativas com elevadas precisões.

### 1.3.1 Configuração Básica de um Radar

Um sistema de radar típico possui as funcionalidades representadas na figura 1.2.

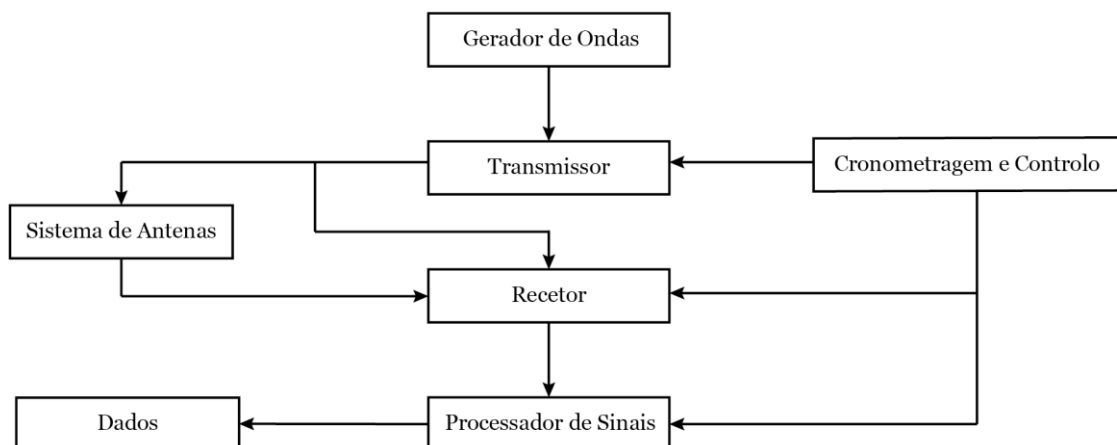


Figura 1.2 –Funcionalidades de um sistema radar típico.

Sendo que [131, 132]:

- **Gerador de Ondas:** é responsável por produzir e controlar a forma das ondas. Posteriormente estas ondas são moduladas e emitidas pelo transmissor. Dependendo da aplicação este gerador pode modular a amplitude, frequência linear e a frequência em degraus, mais conhecida como *stepped frequency*.

- **Transmissor:** é responsável por gerar pulsos e/ou ondas eletromagnéticas em intervalos de tempo bem precisos. Estes pulsos são posteriormente enviados para o sistema de antenas. Normalmente, a transmissão por radar utiliza tubos de micro-ondas ressonantes ou dispositivos de estado-sólido para transmissões de elevada potência.

- **Sistema de Antenas:** é responsável por encaminhar a energia vinda do transmissor e emití-la sob a forma de feixe-direcionais. É também responsável por recolher a energia proveniente dos ecos de retorno e reencaminhá-los para o recetor, com o mínimo de perda possível. Quando o recetor e transmissor operam em antenas separadas, diz-se que o sistema radar é bi-estático. Quando a mesma antena é utilizada para ambas as funções, diz-se que o sistema radar é mono-estático. Neste caso, é necessário o uso de um *duplexer*, que basicamente atua como um interruptor eletrónico (ou circuito de micro-ondas). A sua função é alternar o uso da antena entre a função de recetor e de transmissor.

- **Recetor:** como o nome indica, é responsável por receber a energia refletida pelo alvo. É também responsável por realizar a amplificação, filtragem e demodulação do sinal recebido. Este sinal pré-processado é, posteriormente, enviado para o processador.

- **Processador de Sinais:** é responsável por executar os cálculos matemáticos e as computações dos sinais pré-processados, de forma a obter informações sobre o alvo, como a posição, velocidade ou alcance.

- **Cronometragem e Controlo:** este bloco é responsável por fornecer informações do tempo, bem como sincronizar os vários sinais. É também responsável por controlar as operações dos outros componentes do radar.

### 1.3.2 Princípios Operacionais

De uma forma simples, uma operação radar pode ser dividida nos seguintes processos:

1. O radar emite pulsos eletromagnéticos;
2. O radar troca para o modo recetor, ou seja, está apto a receber a energia refletida pelo alvo;
3. Os pulsos são refletidos pelo alvo;
4. O radar recebe vários ecos que lhe permite extrair informações úteis, tais como a distância e velocidade do alvo.

Durante estas operações, há a preocupação de obter a distância entre o radar e o alvo, e os ângulos de azimute e elevação do próprio radar. Isto porque, são estes parâmetros que permitem determinar a posição do alvo. O alcance máximo do radar,  $R$ , é dado por [131, 132]:

$$R = \sqrt[4]{\frac{P_t G^2 \lambda^2 \varpi}{(4\pi)^3 P_r L}} \quad (1.1)$$

Sendo que,

- $P_t$  representa a potência transmitida pela antena.
- $P_r$  representa a potência do eco recebida pelo radar.
- $G$  representa o ganho da antena. Este ganho indica quantas vezes “mais intenso” um determinado sinal é transmitido (ou recebido) quando em comparação com uma antena isotrópica<sup>7</sup>. Ou seja, o ganho é a relação entre a intensidade de radiação numa dada direção e a que teríamos se a potência entregue à antena fosse radiada de forma isotrópica. Quanto maior for o ganho, maior será a área direcional da antena.
- $\lambda$  representa o comprimento de onda emitido pelo radar.
- $\varpi$  representa o coeficiente de dispersão do alvo ou a secção transversal do radar e é definido em  $m^2$ . Este parâmetro é uma medida de tamanho, neste caso do alvo, visto através de um determinado comprimento de onda ou polarização do próprio radar. O coeficiente de dispersão também pode ser medido em decibéis em relação ao metro quadrado [dBsm], ou seja,  $\varpi [\text{dBsm}] = 10 \log_{10}(\varpi [\text{m}^2])$ . As características deste coeficiente dependem do campo de polaridade do transmissor e receptor.
- $L$  representa as perdas (por exemplo, do sistema, da propagação, etc.). Isto porque, há sempre perdas/dissipações de energia, tanto nos circuitos, como nos equipamentos do radar que devem ser contabilizados.

A distância entre o radar e o alvo é calculada através da cronometragem do eco (figura 1.3). Ou seja, considerando que os pulsos eletromagnéticos são emitidos a uma velocidade  $c = 3 \times 10^8$  m/s e que o atraso do eco é dado por  $\tau_e$ , então a distância entre o radar e o alvo é obtida por:

$$R_{alvo} = \frac{\tau_e c}{2} \quad (1.2)$$

---

<sup>7</sup> Uma antena isotrópica é uma antena capaz de emitir uniformemente sinais em todas as direções. É importante ter em conta que este tipo de antena não existe na realidade, isto porque, não é possível projetar e construir uma antena com estas características. Contudo, é importante como meio de comparação com as antenas reais e também para a conceção e cálculo de parâmetros relevantes às redes Wi-Fi, ligações via satélite (entre outras).

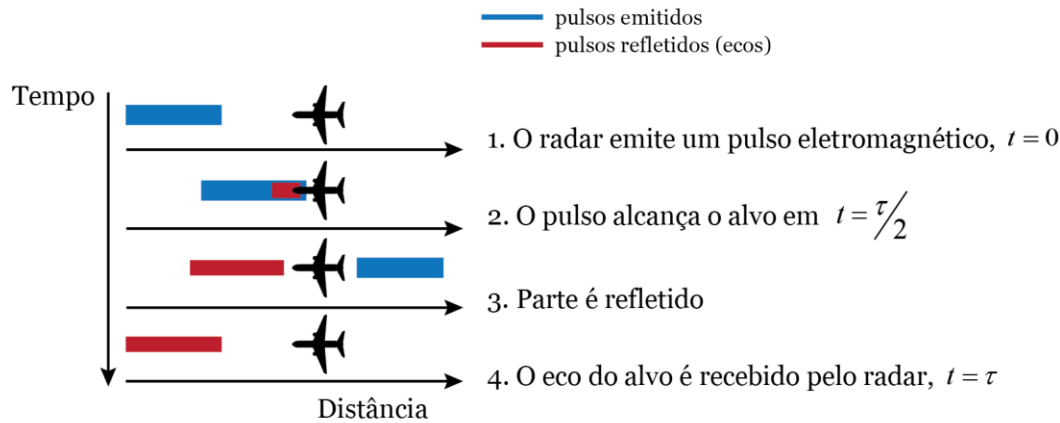


Figura 1.3 – Representação de pulsos emitidos pelo radar.

A direção do alvo é determinada através da diretividade da antena, ou seja, tanto o azimute como a elevação podem ser determinados através do conhecimento sobre a direção (ângulos) da antena quando esta recebe o sinal de eco.

### 1.3.3 Problemática do Seguimento Radar

O seguimento radar é dos problemas mais complexos no domínio da filtragem não-linear, principalmente quando inserido em áreas de vigilância, navegação e controlo [26, 129].

Inicialmente, estes problemas eram abordados através da filtragem polinomial [26, 133], sendo que os maiores avanços surgiram após 1960 com o aparecimento do filtro de Kalman. Ao contrário da filtragem polinomial, o filtro de Kalman faz uso explícito das equações da dinâmica do sistema, o que proporciona estimativas mais robustas [17, 134].

Muitos dos métodos correntes da filtragem de Kalman requerem cálculos intensivos e tempos computacionais elevados, o que limita o seu uso em aplicações de seguimento radar. Por isso esta tese optou por abordar o EKF.

A estimação é o processo de inferir determinados valores de interesse a partir de observações indiretas, imprecisas e com ruído, neste caso, providas do radar. Para endereçar este problema, são necessários dois modelos:

1. **Modelo dinâmico:** responsável por descrever a evolução dos estados do sistema ao longo do tempo, ou seja, é composto pelo vetor de estado e é dado por:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (1.3)$$

Onde,  $\mathbf{x}_k$  representa o vetor de estado no instante  $k$ ;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve o modelo dinâmico,  $\mathbf{u}_k$  representa o vetor de controle no instante  $k$ ;  $w_k$  representa o ruído branco e gaussiano relacionado com processo no instante  $k$ .

**2. Modelo das medições:** responsável por relacionar os estados com as medições, neste caso realizadas pelo radar. É composto pelo vetor das medições e é dado por:

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k \quad (1.4)$$

Em que,  $\mathbf{y}_k$  representa o vetor das medições no instante  $k$ ;  $h(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve o modelo das medições;  $v_k$  representa o ruído branco e gaussiano relacionado com medições no instante  $k$ .

Considerando um problema de seguimento radar tridimensional (caso de estudo desta tese), em que o radar/sensor efetua medições sobre o alvo nas três dimensões espaciais, ou seja, distância ( $r$ ), ângulo de azimute ( $\theta$ ) e de elevação ( $\phi$ ), tem-se [26, 135, 136]:

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \quad (1.5)$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) \quad (1.6)$$

$$\phi_k = \sin^{-1}\left(\frac{z_k}{r_k}\right) \quad (1.7)$$

Sendo que,  $r_k$  representa a distância radial entre o radar (sensor) e o alvo;  $\theta_k$  representa o ângulo medido no plano XY entre o eixo X e a projeção de  $r_k$  neste mesmo plano;  $\phi_k$  representa o ângulo entre o eixo Z e o vetor  $r_k$ .

Desta forma, o vetor das medições,  $\mathbf{y}_k$  pode ser descrito com base na figura 1.4 por:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} r_k + v_{1,k} \\ \theta_k + v_{2,k} \\ \phi_k + v_{3,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + v_{1,k} \\ \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) + v_{2,k} \\ \sin^{-1}\left(\frac{z_k}{r_k}\right) + v_{3,k} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Sendo que,  $v_{1,k}$ ,  $v_{2,k}$  e  $v_{3,k}$  representam o ruído branco e gaussiano em cada uma das coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  no instante  $k$ .

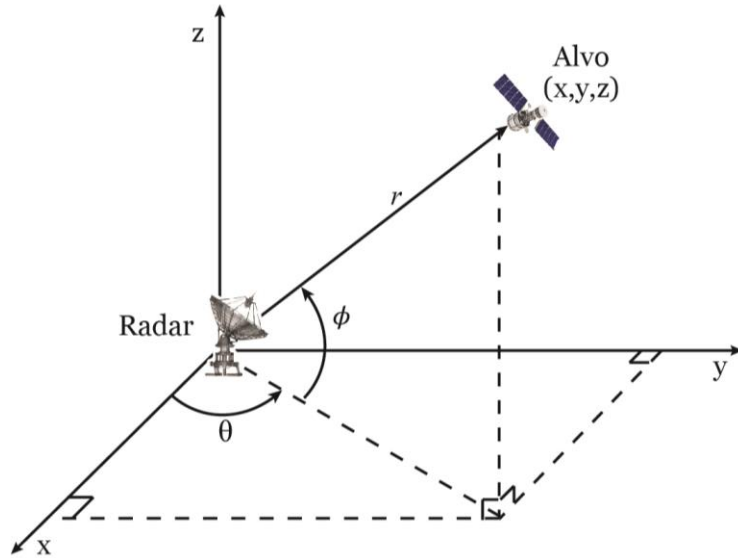


Figura 1.4 – Ilustração de um problema de seguimento radar.

Em relação ao vetor de estado, este pode ser constituído pela posição e velocidade do alvo. É necessário ter em conta que, a velocidade não é medida diretamente, mas os seus valores podem ser inferidos através das medições da posição. Ou seja, podem ser calculadas através de  $(r_k, \theta_k, \phi_k)$ .

Em relação à posição em coordenadas cartesianas, esta é definida por:

$$x_k = r_k \cos \theta_k \cos \phi_k \quad (1.9)$$

$$y_k = r_k \sin \theta_k \cos \phi_k \quad (1.10)$$

$$z_k = r_k \sin \phi_k \quad (1.11)$$

Em que  $(x_k, y_k, z_k)$  representam a posição do alvo no eixo X, Y e Z respetivamente, ou seja, descrevem o seu movimento no espaço tridimensional cartesiano.

Se o vetor de estado,  $\mathbf{x}_k$ , for composto pela posição e velocidade, este é dado por:

$$\mathbf{x}_k = [x_k \quad \dot{x}_k \quad y_k \quad \dot{y}_k \quad z_k \quad \dot{z}_k] \quad (1.12)$$



Dependendo do objetivo, a aceleração também pode ser incluída na equação (1.12). Em alguns casos, o vetor de estado é composto pela atitude do veículo, ou outro parâmetro de interesse.

A dificuldade do seguimento radar e consequente estimação, está em obter o vetor de estado (equação 1.12) com a melhor precisão possível, ou seja, com o erro estatisticamente minimizado. Estes erros podem ser, por exemplo:

- Imprecisões nos modelos matemáticos que representam o sistema, uma vez que, na maioria dos casos, é utilizado modelos aproximados;
- Ruído existente nas medições obtidas pelo radar;
- Erros inerentes aos equipamentos de medição;
- Perturbações do meio ambiente que influenciam diretamente o sistema e são difíceis de modelar;
- Erros computacionais causados, por exemplo, pelo truncamento ou mesmo pelo arredondamento de valores;

Erros nas estimativas implicam erros no controlo e possivelmente uma falha nos objetivos da missão. Isto porque, se as estimativas estiverem erradas, os controladores serão acionados erráticamente, ou seja, poderemos estar a corrigir uma trajetória que não precisa de correção ou vice-versa. Um exemplo mais grave seria não evitar uma colisão por considerar que o veículo está na sua trajetória correta. Por isso, é de extrema relevância possuir métodos que sejam capazes de proporcionar estimativas precisas. Atualmente, os métodos mais utilizados são baseados na filtragem de Kalman e por esse motivo são o foco desta tese.

## 1.4 Objetivos da Tese

O principal objetivo desta tese é desenvolver um método de filtragem não-linear adaptativo com capacidade de lidar não só com a complexidade da dinâmica dos modelos não-lineares, próprios das aplicações aeroespaciais, mas também com as perturbações do meio ambiente, as incertezas inerentes aos instrumentos de aquisição de dados e aos ruídos associados às medições.

Um dos métodos de filtragem mais populares no seguimento radar é o EKF, contudo este apresenta algumas limitações ao operar com sistemas muito não-lineares, tais como, comportamentos instáveis e por vezes divergentes, estimativas erráticas e fraca linearização. Assim sendo, esta tese propõe um filtro de Kalman estendido melhorado, denominado por *improved Extended Kalman Filter* (iEKF). Neste método é proposto um novo ponto de expansão para as matrizes Jacobianas e a aplicação da norma de Frobenius da matriz de covariância como fator de correção da estimativa *a priori*, para além da adaptabilidade clássica das matrizes de ruído (Q e R). Pretende-se que este método seja capaz de fornecer estimativas mais precisas e fiáveis quando em comparação com o EKF, mas sem agravar o seu tempo e complexidade computacional.

Para cumprir este objetivo foi necessário completar uma série de outros objetivos, de igual importância e que compõem esta tese:

- Análise dos métodos de filtragem não-linear, baseados nos algoritmos de Kalman: EKF, UKF, CKF e EnKF. Incluindo uma decomposição e análise individual da estrutura matemática destes algoritmos, bem como, uma avaliação das vantagens e limitações de cada um deles.
- Análise à problemática do seguimento radar. Incluindo a descrição do modelo dinâmico e do modelo de medições.
- Proposta de um novo método de filtragem não-linear adaptativo. Incluindo a descrição e análise das técnicas propostas:
  1. Novo ponto de expansão das matrizes Jacobianas, ou seja, é proposto um novo ponto de linearização. O objetivo é diminuir os erros inerentes à modelação do sistema e/ou às aproximações lineares através de um ponto mais preciso, que é atualizado (adaptado) a cada iteração do filtro;
  2. Uso da norma de Frobenius da matriz de covariância como fator de correção da estimativa *a priori* e assim diminuir os erros associados a estimativa *a priori*;
  3. Atualizar as matrizes de ruído. O objetivo é diminuir os erros associados aos momentos estatísticos do ruído através de uma implementação adaptativa das matrizes  $Q$  e  $R$ .
- Validação das técnicas propostas em aplicações de seguimento radar de veículos aeroespaciais. As aplicações escolhidas foram:
  1. Órbita de um satélite artificial;
  2. Transferência orbital de um veículo aeroespacial;
  3. Reentrada na atmosfera de um veículo aeroespacial;
  4. Trajetória de uma aeronave comercial.

## 1.5 Estrutura da Tese

Esta tese é composta por 5 capítulos organizados da seguinte forma:

- **Capítulo 1** – apresenta os princípios de um sistema de seguimento radar. Este capítulo é composto por uma breve introdução ao tema, seguido por explicação da configuração básica do radar e das equações mais relevantes deste contexto. Por fim, é apresentado o problema do seguimento radar, onde as equações do modelo da dinâmica e das medições são descritas.

- **Capítulo 2** – descreve os conceitos matemáticos e estatísticos mais importantes à compreensão do tópico da estimação de estados, bem como os métodos e filtragem não-linear baseados no algoritmo de Kalman: EKF, UKF, CKF e EnKF, onde é detalhada a estrutura matemática de cada um deles, bem como as suas vantagens e limitações.
- **Capítulo 3** – propõe um filtro de Kalman estendido melhorado e adaptativo, denominado por *improved Extended Kalman Filter* (iEKF), onde, para além da adaptabilidade clássica das matrizes de ruído, também é proposto o uso da norma de Frobenius da matriz de covariância como fator de correção da estimativa *a priori* e é proposto um novo ponto de expansão das matrizes Jacobianas.
- **Capítulo 4** – apresenta as simulações e resultados da tese. Os algoritmos EKF e iEKF são implementados e comparados através das seguintes aplicações de seguimento radar: estimação de uma órbita de um satélite artificial, estimação de uma transferência orbital (transferência de Hohmann), estimação de uma reentrada na atmosfera, e por fim, estimação de uma trajetória de uma aeronave comercial.
- **Capítulo 5** – apresenta as conclusões obtidas, bem como propostas para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## 2. Filtragem de Kalman Clássica

### 2.1 Processos Estocásticos e Conceitos Probabilísticos

Na maioria das situações reais, as variáveis de estado, isto é, as variáveis que descrevem o comportamento do sistema num determinado instante do tempo, não são medidas diretamente ou não são quantidades observáveis pelos sensores. Assim sendo, é necessário que haja métodos capazes de inferir estes valores. Os métodos de filtragem possuem esta capacidade, ou seja, são capazes de inferir valores através dos dados disponíveis, isto é, através das entradas e saídas do sistema, mesmo que estes estejam contaminados por ruído [127, 137].

Nesta secção, são apresentados alguns conceitos introdutórios à estimação de estados, probabilidade e estatística necessários à compreensão dos capítulos subsequentes. Na maioria das vezes, e principalmente na literatura de engenharia, estes conceitos são negligenciados. Contudo são de extrema relevância para esta temática, pois para além de permitirem uma melhor interpretação dos sistemas e dos resultados obtidos, também permitem uma análise crítica à própria construção (design) do algoritmo.

#### 2.1.1 Processos Estocásticos

Normalmente, a problemática da estimação de estados lida com sistemas estocásticos, ou seja, sistemas em que os seus comportamentos não são completamente previsíveis e por isso, são determinados com base na teoria de probabilidade [6, 12, 127]. De uma forma sucinta, pode-se afirmar que existe três grandes razões para modelarmos o sistema por princípios estocásticos:

1. *Os sensores não fornecem medições completas nem exatas sobre o comportamento do sistema.* Grande parte dos sistemas dinâmicos (sejam eles, uma aeronave, um processo químico ou a economia nacional) possuem parâmetros de interesse que não podem ser medidos diretamente, seja por estarem inacessíveis aos sensores ou por custos de projeto (tanto monetários como conceptuais: volume, peso, etc.). Por isso, é necessário inferi-los através de outros sinais que estejam disponíveis ou através de dados redundantes. Mesmo quando é possível medir os sinais diretamente, é importante ter em consideração que os dados provenientes dos sensores não são perfeitos nem completos, uma vez que, também estão sujeitos à sua própria dinâmica, distorção e ruído.
2. *Os modelos matemáticos não são perfeitos,* isto porque, qualquer sistema físico que precise de ser estimado tem de ser representado através de um modelo matemático, cujo

objetivo é representar comportamentos que sejam dominantes ou críticos na resposta do sistema. Infelizmente, nenhum modelo é perfeito, e muitos comportamentos são ignorados<sup>8</sup>, sejam, comportamentos dinâmicos ou simplesmente variações nos parâmetros, provocando assim, a não-modelação de muitos efeitos.

3. *Os sistemas dinâmicos não são movidos apenas pelas entradas de controlo, mas também pelas perturbações do meio envolvente, que por sua vez, não são controláveis nem modeláveis, mas que possuem um grande impacto no comportamento do sistema.*

Os modelos estocásticos visam essencialmente:

- Incluir todas as certezas de uma forma direta e prática;
- Estimar e otimizar as quantidades de interesse, mesmo que os dados disponíveis pelos sensores sejam incompletos e suscetíveis a ruídos e incertezas;
- Independentemente das incertezas, otimizar o controlador do sistema (se existente), de modo a agir da forma pretendida;
- Avaliar a veracidade das estimativas e as capacidades dos controladores, antes e depois da sua aplicação.

### 2.1.1.1 Representação Estado - Espaço

Uma representação estado-espaço é uma forma alternativa de representar um sistema dinâmico no domínio do tempo. Esta representação é de extrema importância, pois sem este formato não se poderia aplicar nenhum algoritmo de estimação. A intenção é representar um sistema dinâmico, independentemente da sua complexidade, sob a forma de matrizes, ou seja, através de uma expressão que seja simples, compacta e que facilite a utilização de estratégias de estimação e controlo [1, 138]. Nesta representação são necessários 3 tipos de variáveis: variáveis de entrada (*inputs* de controlo), variáveis de saída (*outputs*) e as variáveis de estado. Os *inputs* e *outputs* constituem respetivamente, o vetor de entrada e de saída.

A representação estado-espaço permite descrever matematicamente qualquer sistema dinâmico através de um conjunto de  $n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, conhecidas como equações de estado [2, 6, 93]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2)$$

Na prática, estas derivadas representam a taxa de variação do sistema. Se a função  $f$  ou  $h$  envolver o tempo  $t$  explicitamente, diz-se que o sistema é variante no tempo, ou seja, pelo

---

<sup>8</sup> Por vezes estes comportamentos são ignorados intencionalmente, para que haja equilíbrio entre o desempenho do algoritmo e a sua eficiência computacional. Esta situação ocorre mais frequentemente em processadores de dados online e controladores.

menos um dos seus parâmetros varia em função do tempo, caso contrário diz-se que o sistema é invariante no tempo.

Se o sistema for linear ou linearizado (de ordem  $n$ ), a sua representação pode ser feita através de um conjunto de  $n$  equações lineares diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ao simplificar a equação (2.3), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (2.4)$$

Onde,  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado com dimensão  $(n \times 1)$ ;  $A$  é uma matriz de coeficientes contantes,  $(a_{ij})$  com dimensão  $(n \times n)$ , sendo conhecida como a matriz de estado e é responsável por definir, em geral, a estabilidade do sistema;  $\mathbf{u}$  é o vetor de entradas (*inputs* de controlo) de dimensão  $(r \times 1)$ ;  $B$  é uma matriz de coeficientes contantes,  $(b_{ij})$  com dimensão  $(n \times r)$ .

Em relação ao vetor de saída, este é definido pelas variáveis de interesse, cuja representação é dada pela combinação linear entre as variáveis de estado,  $\mathbf{x}_i(t)$  e as entradas de controlo  $\mathbf{u}_i(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ao simplificar a equação (2.5), tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

Onde,  $\mathbf{y}$  é o vetor de saída com dimensão  $(m \times 1)$ ;  $H$  é uma matriz de coeficientes contantes,  $(h_{ij})$  com dimensão  $(m \times n)$ ;  $\mathbf{u}$  é o vetor de entradas (*inputs* de controlo) de dimensão  $(r \times 1)$ ;  $D$  é uma matriz de coeficientes contantes  $(d_{ij})$  com dimensão  $(m \times r)$ . Em muitos casos esta matriz é nula, o que reduz a equação para a combinação das variáveis de estado com a matriz  $H$ . Em suma, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.8)$$

Estas equações (2.7 e 2.8) descrevem a base de toda a teoria da estimação moderna e controlo. A sua representação matricial simplifica todo o processo de estimação, especialmente se estivermos a lidar com sistemas MIMO (*multiple-input-multiple-output*).

[137], [139-146] são alguns dos autores que aprofundam outros aspetos da representação estado-espço, tais como, as suas representações geométricas, transformações equilibradas das matrizes (A, B, H, D), funções de transferências nulas, descrições internas e externas, entre outros.

A classificação geral de um processo estocástico, em termos da sua representação estado-espço está representada na figura 2.1. Os termos a negrito são as premissas assumidas nesta tese.

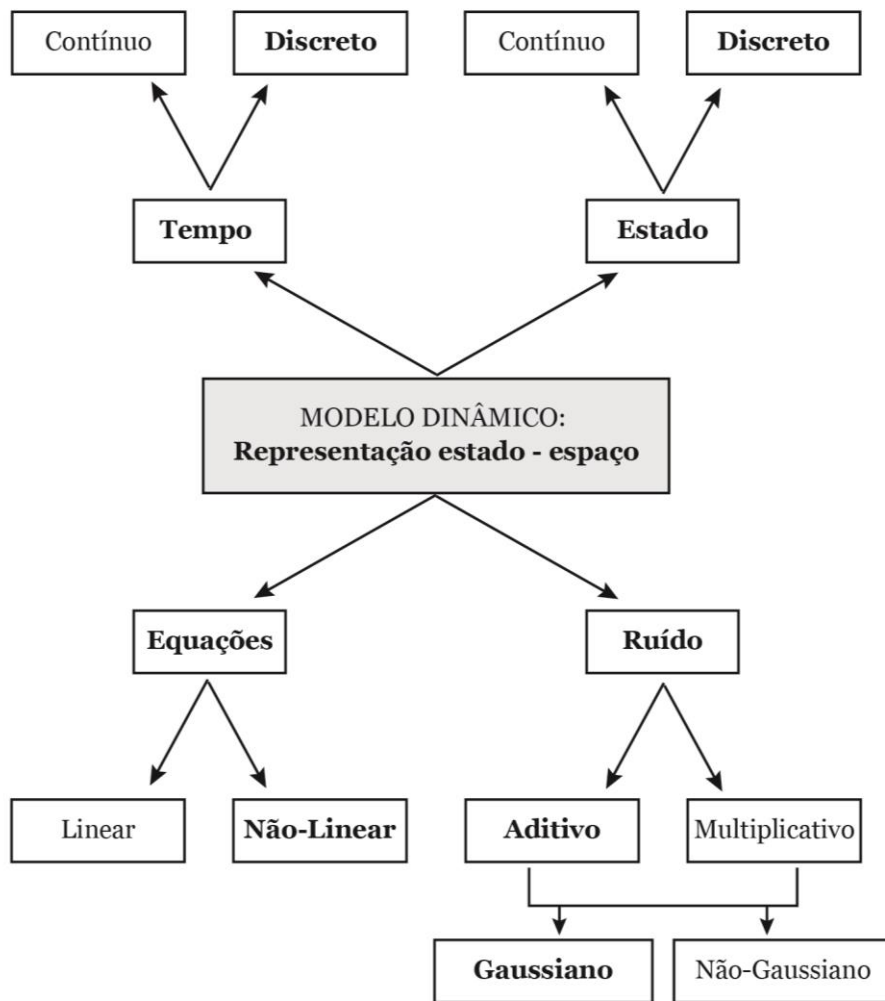


Figura 2.1 –Classificação de um processo estocástico.



### 2.1.1.2 Observabilidade

Observabilidade é um conceito base na teoria da estimação, pois só é possível estimar e prever os estados de um sistema se estes forem observáveis [2, 4, 139].

O conceito de observabilidade foi inicialmente introduzido por Kalman [147-149] e refere-se às propriedades específicas da representação estado-espço, ou seja, não é propriedade do próprio sistema, mas sim da sua representação estado-espço.

Um sistema (contínuo ou discreto) diz-se observável se, para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}_0$  e para qualquer tempo final finito  $t > 0$ , o estado inicial pode ser determinado (ou estimado), exclusivamente, a partir do conhecimento das entradas de controlo,  $\mathbf{u}(t)$ , e as observações/saídas,  $\mathbf{y}(t)$  [6, 138, 150].

Considerando um sistema linear (ou linearizado) de ordem  $n$ , a sua matriz de observabilidade é dada por:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

O sistema é observável se e somente se:

$$\text{rank}(\mathcal{G}) = n \quad (2.10)$$

A observabilidade é a propriedade mais importante para o problema de estimação de estados, pois permite-nos saber se é possível “observar” os estados de um sistema através das suas entradas e saídas, ou seja, se um sistema for não-observável, não é possível, de forma alguma, estimar e prever os seus estados.

É importante notar que o problema da observabilidade é o mesmo, tanto para sistemas lineares como para sistemas não-lineares. Contudo, a sua formulação matemática não é a mesma. Os autores [150-157] analisam mais detalhes sobre estas propriedades em sistemas não-lineares.

### 2.1.1.3 Processos de Markov

O conceito de processo de Markov é importante pois os modelos utilizados no problema da estimação de estados são de facto processos de Markov, isto é, sistemas lineares ou não-lineares com ruído branco: estacionário ou não estacionário, variantes ou invariantes no tempo [93].

O processo de Markov é fundamental para a análise de muitos algoritmos estocásticos, tais como, métodos heurísticos, isto é, métodos que resolvem de uma forma genérica os problemas de otimização, aproximações estocásticas, pesquisas aleatórias, computações evolutivas e muitos outros [158]. Assim sendo, um processo estocástico é dito ser um processo de Markov se [1, 12, 93]:

$$\begin{aligned} p\{X(t_{k+1}) \leq \mathbf{x}_{k+1} | X(t_k) = \mathbf{x}_k, X(t_{k-1}) = \mathbf{x}_{k-1}, \dots, X(t_1) = \mathbf{x}_1, X(t_0) = \mathbf{x}_0\} \\ = p\{X(t_{k+1}) \leq \mathbf{x}_{k+1} | X(t_k) = \mathbf{x}_k\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} = 0, 1, 2, \dots$  e toda a sequência  $k_0, k_1, \dots, k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$ .

A expressão (2.11) significa que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente  $X(t_k) = \mathbf{x}_k$ , é independente do evento passado e depende somente do estado presente. Por outras palavras, um processo estocástico é dito ser um processo de Markov se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos seus estados passados. “*O futuro é independente do passado, se o presente é conhecido*” [93].

A probabilidade condicional  $p\{X(t_{k+1}) = \mathbf{x}_{k+1} | X(t_k) = \mathbf{x}_k\}$  é denominada por probabilidade de transição e representa a probabilidade do estado  $X(t_{k+1})$  ser  $\mathbf{x}_{k+1}$  no instante  $t_{k+1}$  dado que o estado  $X(t_k)$  é  $\mathbf{x}_k$  no instante  $t_k$ .

### 2.1.1.3.1 Cadeias de Markov

Um caso especial dos processos de Markov são as cadeias de Markov discretas, onde o processo  $X(k)$  apenas pode assumir valores discretos. Estes valores podem ter infinitas ou finitas possibilidades.

É importante notar que na literatura vários autores usam de formas diferentes a terminologia “cadeias de Markov”. Por exemplo, Parzen [159] e Ross [160] restringem o termo a apenas processos com valores-discretos, enquanto, Meyn e Tweedie [161] utilizam o termo tanto para processos discretos como para contínuos. Para evitar ambiguidade, esta secção refere-se apenas a casos discretos.

Assim sendo, um processo de Markov diz-se cadeia de Markov se as variáveis de  $X(t)$  são definidas num espaço de estados discreto [1, 12, 93]. Assumindo que,  $\{X_1, X_2, \dots\}$  representam os valores possíveis da cadeia de Markov que  $X_k$  pode assumir, então, neste caso tem-se:

$$p\{X(k+1) = \mathbf{x}_{k+1} | X(k) = \mathbf{x}_k, X(k-1) = \mathbf{x}_{k-1}, \dots, X(1) = \mathbf{x}_1, X(0) = \mathbf{x}_0\} \quad (2.12)$$

$$= p\{X(k+1) = \mathbf{x}_{k+1} | X(k) = \mathbf{x}_k\}$$

Para qualquer sequência  $0, 1, 2, \dots, k-1, k, k+1$ . A equação (2.12) representa a probabilidade de transição, ou seja,  $p\{X(k+1) = \mathbf{x}_{k+1} | X(k) = \mathbf{x}_k\}$  representa a probabilidade do estado  $X(k+1)$  ser  $\mathbf{x}_{k+1}$  no instante  $k+1$  dado que o estado  $X(k)$  é  $\mathbf{x}_k$  no instante  $k$ .

Se esta probabilidade for escrita sob a forma de uma matriz de transição e assumindo que existem  $m$  possíveis estados, então tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Sendo que  $P_{ij} \geq 0$  para todos  $i, j$  e  $\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$  para todos os  $i$ , por outras palavras, o somatório

de todos os elementos de uma linha da matriz  $P$ , é igual a um. Isto significa que em cada transição, o processo deve passar do seu estado atual, para um dos possíveis estados no espaço de estados.

A matriz (2.13) também é útil para determinar a probabilidade marginal de alcançar cada estado numa determinada etapa do processo (ou várias etapas). Sendo,  $p_k$  o vetor de probabilidades de cada um dos  $m$  estados, então:

$$p_{k+1}^T = p_k^T P \quad (2.14)$$

Em muitos casos, é preciso determinar o vetor da probabilidade estacionária,  $\bar{p}$ . Se o processo começar com uma distribuição deste tipo, irá mantê-la até ao final. Assim sendo, tem-se:

$$\bar{p}^T = \bar{p}^T P \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Conceitos de Probabilidade e Estatística

Esta secção apresenta, de uma forma sucinta, alguns conceitos<sup>9</sup> de probabilidade e estatística, essenciais para a compreensão dos algoritmos de estimação, nomeadamente os filtros de Kalman, pois a base do seu funcionamento assenta nesta temática.

---

<sup>9</sup> Na literatura existe uma vasta opção de autores que aprofundam estes conceitos, por exemplo: [162-164].

### 2.1.2.1 Variável Aleatória

Na teoria da probabilidade, uma variável aleatória é uma variável cujo valor varia aleatoriamente, dentro de um intervalo geralmente conhecido e sujeito a alterações. Pode também ser definida como a função que mapeia todos os pontos de um determinado espaço e converte-os para números reais. Por exemplo, se uma variável aleatória  $X(t)$ , mapear tempo/posição, então, a qualquer instante no tempo,  $X(t)$  é possível obter a posição expectável. Uma variável aleatória, ou sinal aleatório, não pode ser definido explicitamente por uma função matemática e conseqüentemente, os seus valores futuros também não podem ser previstos com precisão. Contudo, pode-se inferir estes valores através da análise dos seus comportamentos, que por sua vez, são analisados através das propriedades da probabilidade e estatística, nomeadamente, a média, variância e covariância.

### 2.1.2.2 Esperança Matemática

A esperança matemática (ou média) de uma variável aleatória descreve o valor “central” dessa variável, ou seja, representa o valor que mais concentra os dados da distribuição. Este valor não revela a informação completa da distribuição de probabilidade (no caso discreto) ou da função densidade de probabilidade (no caso contínuo), isto porque duas variáveis aleatórias com distribuições diferentes podem ter a mesma média, contudo permite-nos ter uma vaga ideia sobre esta variável [5, 19].

Se  $X$  representar uma variável aleatória contínua com uma função densidade de probabilidade  $f(x)$ , então a média,  $\mu$ , (ou valor esperado,  $E[X]$ ) desta variável é dada por [5, 23]:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (2.16)$$

Da mesma forma, se  $X$  representar uma variável aleatória discreta com possíveis valores  $x_i$ , sendo  $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , de probabilidade  $p(x_i)$  dada por  $P(X = x_i)$ , então a sua média (ou valor esperado) é definido por:

$$\mu = E[X] = \sum x_i P(X = x_i) \quad (2.17)$$

As equações (2.16) e (2.17) também podem ser aplicadas às funções de variáveis aleatórias  $g(X)$ , respetivamente, para o caso contínuo e discreto:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \quad (2.18)$$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n P g(x_i) \quad (2.19)$$

O valor esperado de uma variável aleatória também é conhecido como o *primeiro momento estatístico*.

### 2.1.2.3 Variância

Na teoria da probabilidade e estatística, a variância é uma medida de dispersão, ou seja, mostra o quão distantes os valores de um determinado conjunto de dados estão da sua média (valor central da amostra). Quanto maior a variância, mais dispersas estão as observações, em relação ao valor médio. Por outras palavras, a variância de uma variável aleatória mostra a extensão dos seus possíveis valores [5, 23].

A variância de uma variável aleatória contínua  $X$ , normalmente é denotada por  $\sigma^2$  ou  $V(x)$  e é definida por [5, 23]:

$$\sigma^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx \quad (2.20)$$

A raiz quadrada da variância é conhecida como desvio padrão, ( $\sigma$ ):

$$\sigma = \sqrt{(\text{variância de } X)} \quad (2.21)$$

Se a variável  $X$  for discreta, então a  $Var[X]$  é definida por:

$$Var[X] = E[(X - \mu)^2] \quad (2.22)$$

A variância e o desvio padrão de uma variável aleatória são sempre não-negativos. A magnitude da variância dá-nos uma noção da quantidade de ruído que há no sinal.

### 2.1.2.4 Covariância

Em probabilidade, a covariância é uma medida que representa o grau de interdependência ou inter-relação entre variáveis. Por exemplo, se duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  mudam na mesma direção, isto é, quando  $X$  cresce (ou decresce), os valores da variável  $Y$  também crescem (ou decrescem, respetivamente), então a covariância destas variáveis é positiva. Se cenários opostos ocorrem, então a covariância toma valores negativos. Por outras palavras, se a covariância é positiva significa que as variáveis tendem a mostrar comportamentos semelhantes, em caso contrário, se a covariância é negativa, as variáveis tendem a mostrar comportamentos

opostos. Por isso diz-se que o sinal da covariância demonstra a tendência na relação linear entre variáveis, neste caso, entre  $X$  e  $Y$  [5, 23] e é dada por:

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (2.23)$$

### 2.1.2.5 Correlação

Em probabilidade e estatística, a correlação, entre duas ou mais variáveis, representa a dependência ou associação estatística entre elas, ou seja, a correlação é um parâmetro que mostra a relação entre variáveis.

A correlação linear, também conhecida por correlação de Pearson, determina em que medida duas variáveis são linearmente relacionadas (ou proporcionais) entre si. Assim sendo, o coeficiente de correlação,  $\zeta$ , indica o grau em que duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , estão linearmente relacionadas [5, 23]. Sendo, a média e o desvio padrão das variáveis  $X$  e  $Y$  dados por,  $(\mu_X, \sigma_X)$  e  $(\mu_Y, \sigma_Y)$ , respetivamente, então o coeficiente de correlação de  $X$  e  $Y$  é definido por,  $\zeta_{X,Y}$ :

$$\zeta_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.24)$$

Se as duas variáveis são independentes, então  $\zeta_{X,Y} = 0$ . Se uma variável, por exemplo  $Y$ , é uma função linear da outra variável,  $X$ , então  $\zeta_{X,Y} = 1$  ou  $\zeta_{X,Y} = -1$ .

É importante notar que a correlação ou o coeficiente de correlação indica o grau de dependência apenas entre relações lineares. No caso de uma relação não-linear, o coeficiente de correlação não demonstra a influência de uma variável na outra.

### 2.1.2.6 Distribuição Gaussiana (ou Normal)

A distribuição Gaussiana, também conhecida por distribuição normal, é uma classe de distribuição estatística muito popular e importante na modelação de sistemas aleatórios, uma vez que, muitos dos processos aleatórios existentes na natureza, possuem uma distribuição normal ou uma distribuição muito próxima à normal. De facto, o teorema do limite central, prova que, a soma de várias variáveis aleatórias (independentemente das suas distribuições individuais) tende para uma distribuição normal [12, 165]. Este tipo de distribuição tem uma curva de densidade parecida com a forma de um sino e com apenas um pico, por outras palavras, esta distribuição é simétrica em relação ao valor da média  $\mu$ , como representado na figura 2.2. Qualquer distribuição normal pode ser descrita por apenas dois parâmetros: a média,

$\mu$ , que representa o pico da densidade, e o desvio padrão,  $\sigma$ , que representa a dispersão da distribuição [5].

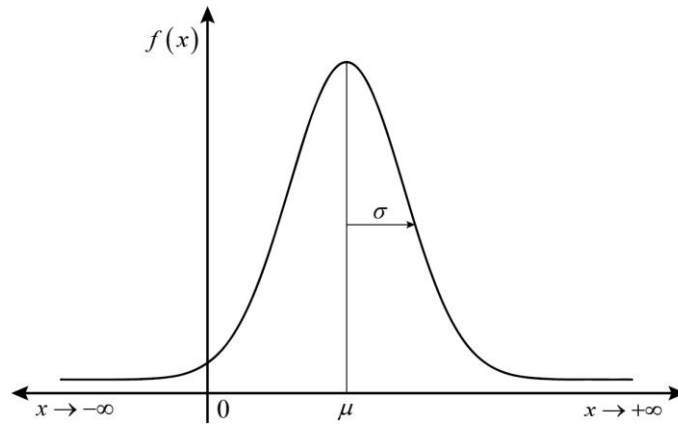


Figura 2.2 – Função generalizada da distribuição de probabilidade normal (Gaussiana).

Se uma determinada variável aleatória  $X$ , possui uma distribuição normal com média,  $\mu$ , e variância,  $\sigma^2$ , sendo  $\sigma \geq 0$ , então diz-se que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . A função densidade de probabilidade normal de um valor escalar é dada, analiticamente, por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (2.25)$$

Sendo que  $-\infty < x < +\infty$  e o expoente de  $e$  é dado por:  $-\frac{1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ .

Qualquer função linear, de uma variável aleatória (ou processo aleatório) com uma distribuição normal, assume também uma distribuição normal, ou seja, se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Y = aX + b$  então:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \quad (2.26)$$

Em que a função densidade de probabilidade de  $Y$  é dada por:

$$f(y) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{1(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}\right]} \quad (2.27)$$

Sendo o expoente de  $e$  dado por  $-\frac{1}{2} \frac{(y - (a\mu + b))^2}{a^2\sigma^2}$ .

Se duas variáveis aleatórias,  $X_1$  e  $X_2$  são independentes, com uma distribuição de  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , então tem-se:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (2.28)$$

E a função densidade é definida por:

$$f(x_1 + x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{\left[ \frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right]} \quad (2.29)$$

Em que o expoente de  $e$  é dado por:  $-\frac{1}{2} \frac{(x - (\mu_1 + \mu_2))^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$ .

### 2.1.2.7 Distribuição Gaussiana Multivariada

Uma distribuição Gaussiana/normal multivariada é também denominada por distribuição Gaussiana/normal multidimensional e representa uma generalização da distribuição normal (univariada) para dimensões superiores. Ou seja, é um vetor com múltiplas variáveis (normalmente distribuídas), de tal modo que, qualquer combinação linear entre elas possui uma distribuição Gaussiana normal. Esta distribuição, para além de ser útil na expansão do teorema limite central para casos de múltiplas variáveis, é também útil para aplicações de inferência Bayesiana e aprendizagem automática (*machine learning*), onde a distribuição multivariada pode ser utilizada para aproximar algumas características das propriedades do sistema [5, 165].

Se a distribuição normal for expandida para um caso de duas variáveis, isto é, uma distribuição normal bi-variada tem-se:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\zeta}} e^{\left[ -\frac{\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\zeta \frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}}{2(1-\zeta^2)} \right]} \quad (2.30)$$



Sendo,  $\zeta$  a função de correlação entre as variáveis aleatórias e o expoente de  $e$  dado por:

$$\frac{\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\zeta \frac{x_1 x_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}}{2(1 - \zeta^2)}.$$

De forma similar, para o caso em que há  $n$  variáveis aleatórias, a função da distribuição normal multivariada é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \|P\|^{1/2}} e^{\left[ -\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T P^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2\sigma^2} \right]} \quad (2.31)$$

Sendo,  $\mathbf{x}$  composto por  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ; o vetor  $\boldsymbol{\mu} := E[\mathbf{x}]$  representa a média de  $\mathbf{x}$ ; a matriz  $P := E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T]$  representa a covariância de  $\mathbf{x}$ .

### 2.1.2.8 Ruído Branco

Matematicamente, diz-se que um sinal aleatório,  $w$  é um sinal (ruído) branco, se este possuir as seguintes propriedades:

1.  $\mu_w = E[w] = 0$
2.  $E[ww^T] = \sigma^2 I$
3.  $E[w(t)w^T(t+h)] = 0 \quad \forall h \neq 0$

Um ruído branco é um caso particular de um sinal (ou processo) aleatório que ocorre quando a função de autocorrelação<sup>10</sup> é uma função *dirac delta*,  $\Delta(\tau)$ , por outras palavras, quando a função de autocorrelação é uma função nula em todos os pontos, exceto em  $\tau = 0$  [5, 23]:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} A & \text{para } \tau = 0 \\ 0 & \end{cases} \quad (2.32)$$

Sendo,  $A$  a magnitude de valor constante.

Neste caso, em que a função de autocorrelação é um pico, as transformadas de Fourier resultam num espectro de frequência constante, tal como representado na figura 2.3. Esta é a definição de

---

<sup>10</sup> A autocorrelação é uma característica da variável (ou sinal) em relação ao tempo, ou seja, é a correlação da própria variável em função do tempo. Este parâmetro é fundamental para encontrar padrões repetitivos que possam existir num determinado processo ou variável e que muitas vezes é disperso no ruído que o sinal apresenta.

ruído branco, ou seja, um sinal aleatório não-correlacionado, que possui a mesma potência em todas as frequências, num intervalo de  $]-\infty, +\infty[$  [12, 121, 166, 167].

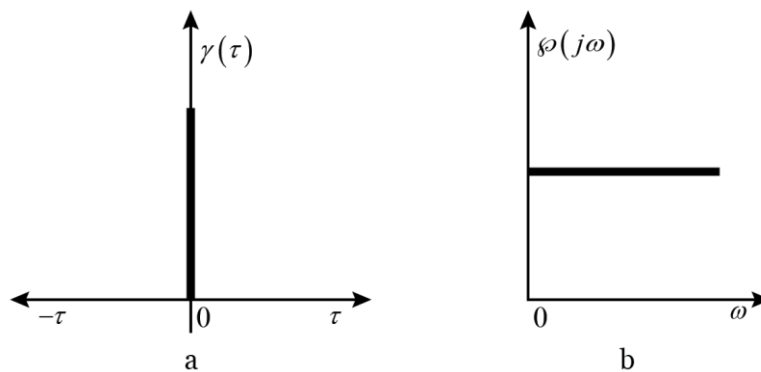


Figura 2.3 – Representação do ruído branco em função do tempo (gráfico a) e da frequência (gráfico b).

Na figura 2.3, é possível observar que as funções  $\gamma(\tau)$  e  $\phi(j\omega)$  não se correlacionam consigo próprias ao longo do tempo, exceto no momento presente, isto é,  $\tau = 0$ . Assim sendo, diz-se que o ruído é independente (não-correlacionado), porque uma amostra do sinal num determinado instante do tempo, é completamente independente de uma outra amostra em outro instante do tempo.

É importante notar que o conceito de ruído branco é apenas teórico e impossível de ser reproduzido no mundo real. Pois, conceber um sinal que possua a mesma potência em todas as frequências num intervalo de tempo infinito, é o equivalente a afirmar que é possível gerar um sinal com potência infinita, o que no mundo real, é simplesmente impossível.

Contudo, assumir o conceito de ruído branco não é de todo errado. Isto porque, qualquer sistema físico possui um determinado intervalo de frequências, denominado por *bandpass*, no qual reage. Ou seja, o sistema responde às entradas nesta gama de frequências. Acima deste intervalo, ou as entradas não provocam reação no sistema, ou o sistema atenua seriamente os seus efeitos, ao ponto de se considerar que não existem. Assim sendo, diz-se que um sistema é impulsionado por ruído de banda-larga. Isto implica que o sistema possua uma potência constante para todas as frequências que estão dentro do intervalo *bandpass* e uma potência variada para as frequências fora deste intervalo. Uma vez que, não se considera estas últimas por não provocarem reações no sistema, o uso de ruído branco faz sentido porque, do ponto de vista do sistema, este é idêntico ao ruído (real) de banda-larga [12].

Assim sendo, na prática e para um intervalo de frequência finito é possível assumir o ruído como sendo branco com um espectro plano [5].

### 2.1.2.9 Probabilidade Condicionada / Função Densidade de Probabilidade Condicionada

A probabilidade condicionada de um evento  $A$  dado  $B$  é definida por [93]:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A,B\}}{P\{B\}} \quad (2.33)$$

Se os eventos forem independentes, a equação (2.33) denomina-se por probabilidade incondicional. Semelhantemente, a função densidade de probabilidade condicionada de uma variável aleatória  $X$  dado outra variável aleatória  $Y$  é definida por:

$$p(X|Y) = \frac{p(X,Y)}{p(Y)} \quad (2.34)$$

Sendo que,  $P\{\cdot\}$  define a probabilidade de um evento;  $p(\cdot)$  define uma função densidade de probabilidade [93].

O conceito de função densidade de probabilidade condicionada (DPC) é importante para a filtragem, principalmente para os filtros de Kalman, pois se adotarmos uma perspectiva Bayesiana, diz-se que o filtro propaga a média e a covariância das variáveis de estado, de forma a determinar recursivamente a sua função densidade de probabilidade condicionada [130, 167]. Ou seja, considerando uma função (aleatória) de densidade de uma certa quantidade escalar  $\mathbf{x}$  no instante  $k$ , isto é,  $\mathbf{x}(k)$ , condicionada ao conhecimento que se tem do vetor de medições  $\mathbf{y}$  no instante  $k$ , isto é,  $\mathbf{y}(k)$  e se o valor de  $\mathbf{x}$  representar a posição de um veículo aeroespacial no tempo  $k$  e  $\mathbf{y}$  representar as medições feitas por um radar sobre essa posição no instante  $k$ , então a função DPC contém toda a informação disponível sobre  $\mathbf{x}(k)$ , ou seja, para um dado valor de  $\mathbf{y}(k)$ , a função DPC indica qual o valor de  $\mathbf{x}(k)$  mais provável, de um intervalo possível de valores.

Os gráficos destas funções também são importantes, pois permitem-nos saber o grau de certeza no conhecimento de  $\mathbf{x}(k)$ . Por outras palavras, se o gráfico da densidade for um pico estreito, significa que o “peso” da probabilidade está concentrado num intervalo estreito de valores, logo tem-se mais certeza no valor de  $\mathbf{x}$ . Se o gráfico possuir uma forma mais gradual, significa que o “peso” da probabilidade está distribuído por um intervalo mais amplo de valores, logo tem-se menos certeza no valor, a figura 2.4 ilustra esta situação. Esta figura permite-nos também extrair alguns conhecimentos sobre os valores da média, moda e mediana, uma vez que, a média corresponde ao centro de massa da probabilidade da estimativa, a moda corresponde ao valor de  $\mathbf{x}$  com a maior probabilidade, ou seja, corresponde ao pico da densidade, e por fim, a

mediana corresponde ao valor de  $x$  que separa igualmente o peso da distribuição da probabilidade [8, 21]. Se o modelo dinâmico for linear, em que o ruído associado é gaussiano e branco, então a média, moda e mediana coincidem, ou seja, existe apenas uma única estimativa ótima para o valor de  $x$ . Sob estas três condições, o filtro de Kalman é a melhor ferramenta de estimação, pois o resultado é absoluto e ótimo.

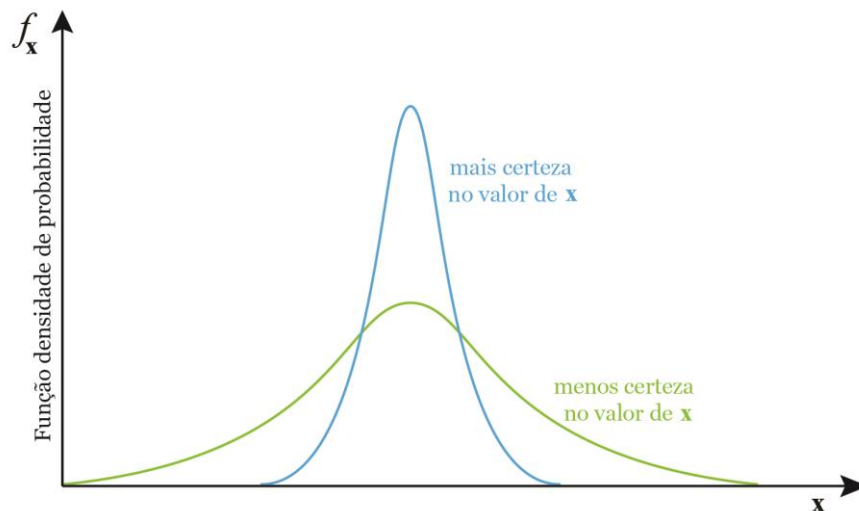


Figura 2.4 – Função densidade de probabilidade condicionada.

### 2.1.2.10 Teorema de Bayes

Para um evento  $B_i$  em que  $i = 1, \dots, n$ , a sua probabilidade condicionada, dado o evento  $A$ , pode ser definida através do condicionamento inverso, ou seja [93]:

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{P\{A\}} \quad (2.35)$$

A equação (2.35) é conhecida como a teorema de Bayes. Na literatura também é muitas vezes denominada por fórmula de Bayes ou mesmo por regra de Bayes.

A probabilidade condicionada de  $B_i$  pode ser designada por probabilidade *a posteriori*, enquanto a probabilidade incondicional é muitas vezes designada por probabilidade *a priori*. Ao considerar que  $B_j$  onde  $j = 1, \dots, n$  é mutuamente exclusivo e exaustivo de  $B_i$ , ou seja, se respetivamente:

$$P\{B_i, B_j\} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.36)$$

$$\sum_{i=1}^n P\{B_i\} = 1 \quad (2.37)$$

Ao utilizarmos o teorema da probabilidade total tem-se:

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{\sum_{j=1}^n P\{A|B_j\}P\{B_j\}} = \frac{1}{c} P\{A|B_i\}P\{B_i\} \quad (2.38)$$

Sendo  $c$  a constante de normalização que garante:

$$\sum_{i=1}^n P\{B_i|A\} = 1 \quad (2.39)$$

No caso de duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ , o teorema de Bayes é dado por:

$$p(X|Y) = \frac{p(Y|X)p(X)}{p(Y)} = \frac{p(Y|X)p(X)}{\int p(Y|X)p(X)dX} \quad (2.40)$$

Neste caso, a função densidade de probabilidade incondicional,  $p(X)$ , denomina-se por função densidade de probabilidade *a priori*. A função densidade de probabilidade condicionada,  $p(X|Y)$ , denomina-se por função densidade de probabilidade *a posteriori* [93]. Para um caso misto tem-se:

$$P\{B_i|X\} = \frac{p(X|B_i)P\{B_i\}}{p(X)} = \frac{p(X|B_i)P\{B_i\}}{\sum_{j=1}^n p(X|B_j)P\{B_j\}} \quad (2.41)$$

No caso de a probabilidade ser condicionada a vários eventos ou variáveis aleatórias, o teorema de Bayes pode ser aplicada da seguinte forma:

$$P\{B_i|X, Y\} = \frac{p(X|B_i, Y)P\{B_i|Y\}}{p(X|Y)} = \frac{p(X|B_i, Y)P\{B_i|Y\}}{\sum_{j=1}^n p(X|B_j, Y)P\{B_j|Y\}} \quad (2.42)$$

As equações presentes nesta secção são ferramentas essenciais para a estimação de estados, principalmente para lidar com sistemas híbridos, ou seja, sistemas que possuem incertezas contínuas e discretas simultaneamente.

Apesar do filtro de Kalman ter sido desenvolvido com base no teorema dos mínimos quadrados, as mesmas equações podem ser derivadas a partir da análise probabilística de Bayes e daí a importância destas equações. Consequentemente, diz-se que os filtros de Kalman pertencem à classe de filtro Bayesianos, facto já bem documentado por: [1, 12, 91, 93].

As equações anteriormente descritas representam o teorema explícito de Bayes. Contudo, o seu uso explícito não é prático para aplicações cruciais no tempo, isto porque, o número de computações por cada passo (*time-step*) aumenta a cada vez que uma nova observação/medição é realizada, consequentemente, há um aumento da complexidade e tempo computacional.

## 2.2. Métodos da Filtragem de Kalman Clássica

O objetivo de qualquer filtro é obter uma estimação ótima das variáveis de interesse a partir de observações com ruído. Para tal, é necessário o uso de métodos capazes de extrair corretamente toda a informação desejada.

Atualmente, o método mais utilizado para lidar com esta problemática é o Filtro de Kalman (FK). Este possui o nome do seu inventor, Rudolf E. Kalman [17], que em 1960 propôs uma solução online recursiva para o problema da filtragem linear a partir de dados discretos. É composto por um conjunto de equações matemáticas que formam uma estrutura de previsão-correção. O FK é considerado um estimador ótimo no sentido em que minimiza a covariância do erro da estimação [12]. Esta sua estrutura e características permite que possua desempenhos superiores aos demais filtros e por isso, é tão popular nas mais diversas áreas e razão pelo qual é o tema principal desta tese [12, 127].

O filtro de Kalman foi inicialmente desenvolvido para sistemas lineares pois, estes apresentam uma simplicidade matemática superior aos sistemas não-lineares. Por conseguinte, é definido como um estimador de estados de sistemas lineares perturbados por ruído branco e gaussiano, com base em medições também estas lineares corrompidas por ruído branco, gaussiano e aditivo [11].

De uma forma simples e sucinta, o filtro de Kalman pode ser definido como um *algoritmo ótimo recursivo de processamento de dados* [11, 12]:

- É considerado ótimo, pois para além de possuir a capacidade de minimizar estatisticamente o erro, também possui a capacidade de incorporar toda a informação que lhe é fornecida, ou seja, utiliza todas as medições disponíveis pelos sensores, independentemente da sua precisão.
- É considerado recursivo, pois não requer que os dados anteriores sejam mantidos e reprocessados em cada instante em que uma nova medição é feita. A sua estrutura recursiva, para além de facilitar computacionalmente as implementações do algoritmo,

também facilita a sua utilização em situações online, como no caso das aplicações de seguimento radar.

Por outras palavras, o FK tem a capacidade de incorporar todo o conhecimento prévio disponível, tanto do sistema como dos instrumentos de medição, de modo a obter uma estimativa ótima das variáveis de estado, de tal forma que, o erro é estatisticamente minimizado.

É importante ter em consideração que a formulação do filtro é outro aspeto relevante. Ou seja, a escolha entre uma formulação em tempo-discreto ou tempo-contínuo. Esta tese segue uma formulação discreta devido às suas múltiplas vantagens operacionais, primeiro a implementação computacional é mais fácil quando comparada à implementação em tempo-contínuo. E segundo porque o filtro de Kalman possui equações de Riccati que se resolvem mais facilmente quando formuladas por equações discretas [12, 127].

Assim sendo e de uma forma sucinta, a utilização do filtro de Kalman segue os seguintes passos [4, 130]:

1. Descrever matematicamente o sistema dinâmico, cujo estados queremos determinar.
2. Implementar as equações que descrevem a propagação da média e covariância ao longo do tempo:
  - a. A média do estado corresponde à estimativa calculada pelo filtro de Kalman.
  - b. A covariância do estado corresponde à covariância do próprio filtro de Kalman.
3. Atualizar os estados a todo o instante que uma nova medição é efetuada. O filtro atualiza a sua média e a sua covariância, ou seja, atualiza recursivamente a estimativa já realizada.

Nas subsecções seguintes, o filtro de Kalman e as suas variações mais conhecidas são expostas e analisadas de uma forma clara e sucinta.

### **2.2.1 Filtragem de Kalman Linear**

O filtro de Kalman foi inicialmente elaborado com base nas seguintes premissas<sup>11</sup> [12, 23]:

1. **Linearidade dos modelos**, ou seja, inicialmente o algoritmo foi desenvolvido para modelos lineares, não só por apresentarem maior simplicidade matemática, mas também por serem mais facilmente manipuláveis.

---

<sup>11</sup> Sob estas 3 premissas (linearidade, ruído branco e gaussiano), o FK é a melhor ferramenta disponível. Contudo, em aplicações reais, raramente se encontra sistemas com estas características, mas mesmo assim o filtro de Kalman consegue resultados superiores aos demais filtros [23].

2. **Ruído branco.** Este pressuposto impõe que o ruído seja não-correlacionado ao longo do tempo, ou seja, o conhecimento do ruído atual, não ajuda a prevê-lo em outro instante do tempo.
3. **Ruído gaussiano,** significa que a qualquer instante do tempo a densidade de probabilidade possui a forma de uma distribuição normal. Esta característica está relacionada com a amplitude do sinal, ao contrário da anterior (ruído branco) que está relacionada com a frequência do sinal. Ou seja, a premissa de ruído gaussiano é fisicamente justificável pelo facto de que o ruído, tanto do sistema como das medições, é causado por um conjunto de pequenas fontes. Está matematicamente provado que as somas de várias fontes independentes possuem a tendência de formar uma densidade gaussiana (ou obter uma muito próxima a esta), independentemente da forma das suas densidades individuais [12].

O pressuposto de ruído branco e gaussiano também é útil matematicamente, pois permite saber de uma forma bastante simples o primeiro e o segundo momento estatístico, isto é, a média e a variância (ou o desvio padrão). Estes momentos definem completamente a densidade gaussiana, ao contrário do que acontece com outras densidades, que precisam de momentos de ordens superiores para definirem as suas formas.

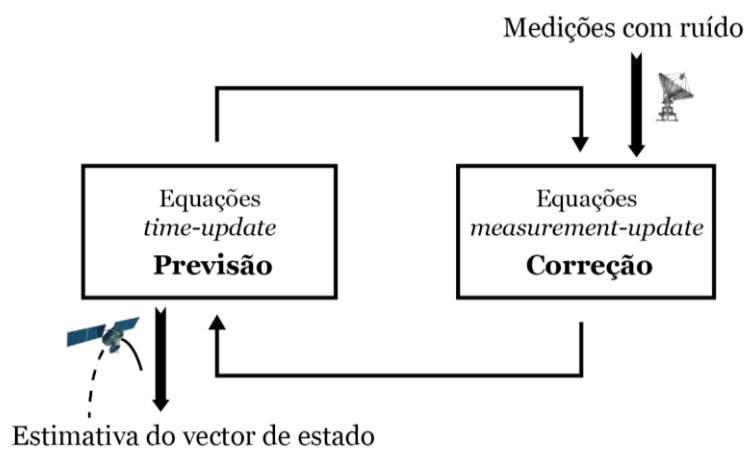


Figura 2.5 – Representação genérica dos grupos de equações que compõem o filtro de Kalman.

O FK é composto por um conjunto de equações matemáticas que tornam a sua estrutura num algoritmo de previsão-correção, tal como representada na figura 2.5. Estes grupos de equações são compostos por [6, 168]:

1. *Equações time-update:*  
São as equações de previsão - responsáveis por projetarem (estimarem) antecipadamente o estado “atual” e a covariância, de forma a obter uma estimativa *a priori* do vetor de estado que será utilizada no passo seguinte.



## 2. Equações *measurement-update*:

São as equações de correção - responsáveis pelo feedback, ou seja, são responsáveis por incorporar as medições, sejam elas obtidas por sensores, radares ou outros meios, na estimativa *a priori*, realizada no passo anterior, de modo a obter uma estimativa atualizada e corrigida, ao qual chamamos de estimativa *a posteriori*.

### 2.2.1.1 Algoritmo do FK Linear

Dado um determinado processo discreto, movido por equações lineares e estocásticas, o seu modelo dinâmico é dado por [5, 6, 23, 124]:

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} + B\mathbf{u}_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.43)$$

Em que,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado no instante  $k$ ;  $A$  representa a matriz de dimensão  $(n \times n)$  que relaciona o estado no instante  $k-1$  com o estado atual, isto é, o estado no instante  $k$ ;  $B$  é a matriz de dimensão  $(n \times r)$  responsável por relacionar as entradas de controlo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ , com o estado,  $\mathbf{x}_k$ ;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero, cuja matriz de covariância,  $Q_k$ , é dada por:

$$w_k \sim N(0, Q_k) \quad (2.44)$$

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_k \quad (2.45)$$

Onde,  $E$  é o  $k^{\text{th}}$  momento estatístico (valor esperado) e  $\delta_k$  é a função delta-Kronecker. Se  $k = j$  então  $\delta_k = 1$ , se  $k \neq j$  então  $\delta_k = 0$  [4].

O modelo das medições é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k + v_k \quad (2.46)$$

Em que,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor das medições;  $H$  é a matriz de dimensão  $(m \times n)$  responsável por relacionar o estado  $\mathbf{x}_k$ , com as medições;  $v_k$  representa o ruído relacionado com medições e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero, cuja matriz de covariância,  $R_k$ , é dada por:

$$v_k \sim N(0, R_k) \quad (2.47)$$

$$E[v_k v_j^T] = R_k \delta_k \quad (2.48)$$

$$E[v_k w_j^T] = 0 \quad (2.49)$$

Após ter definido o modelo dinâmico linear (equação 2.43) e o modelo das medições lineares (equação 2.46), aplica-se o filtro de Kalman linear [11, 23, 127], tal como representado na tabela 2.1.

#### Inicialização do **Filtro de Kalman Linear**:

Assumir o vetor de estado inicial:  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$

Assumir a covariância inicial:  $P_0 = P_{inicial}$

#### Equações *time-update*:

Calcular a estimativa *a priori* (previsão) do vetor de estado:  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = A\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + B\mathbf{u}_{k-1}$

Calcular a estimativa *a priori* (previsão) da covariância:  $P_{k|k-1} = AP_{k-1}A^T + Q_{k-1}$

#### Equações *measurement-update*:

Calcular o ganho do filtro de Kalman:  $K_k = P_{k|k-1}H^T (HP_{k|k-1}H^T + R_k)^{-1}$

Calcular o vetor de estado *a posteriori* (estimativa atualizada):  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - H\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$

Calcular a covariância *a posteriori* (estimativa atualizada):  $P_k = (I - K_k H)P_{k|k-1}$

Tabela 2.1 – Algoritmo do Filtro de Kalman Linear

Em relação às equações *time-update* da tabela (2.1),  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  representa a estimativa *a priori* do vetor de estado;  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  é a estimativa do vetor de estado no instante  $k-1$ ;  $P_{k|k-1}$  é a matriz de covariância *a priori*, ou seja, a previsão da estimativa da covariância no instante  $k$  dado a estimativa em  $k-1$ ;  $P_{k-1}$  é a matriz de covariância, no instante  $k-1$  e  $(.)^T$  representa a transposta do vetor. A estimativa da covariância *a priori* e as equações de *time-update* resultam de uma equação de Riccati [93].

Em relação ao grupo de equações *measurement-update*,  $K_k$  representa o ganho do filtro de Kalman no instante  $k$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado, ou seja, é a estimativa atualizada pelo filtro após ter conhecimento das medições,  $\mathbf{y}_k$ ;  $I$  é uma matriz identidade; o termo  $(\mathbf{y}_k - H\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$  representa o residual, isto é, a diferença entre as medições previstas,  $H\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , e as medições reais,  $\mathbf{y}_k$ .

O ganho do filtro de Kalman,  $K_k$ , reflete a precisão relativa entre a estimativa do vetor de estado e as medições realizadas, ou seja, se a nova medição for considerada “mais precisa” do que a estimativa *a priori* do vetor de estado, então o ganho do filtro será relativamente alto. Caso contrário, isto é, se a estimativa do vetor de estado for considerada mais precisa que as novas medições, então o valor do ganho do filtro será baixo [93].

Em suma, o filtro de Kalman permite estimar o estado de um sistema linear com perturbações gaussianas, brancas e de média zero. Estas condições podem parecer restritas, contudo, através de um conjunto de extensões é perfeitamente possível aplicar o filtro de Kalman em problemas nos quais as perturbações não seguem estas características. O objetivo principal das extensões é moldar o problema em causa, para que se adapte a estas condições, ou pelo menos, que se aproxime delas.

### 2.2.2 Filtragem de Kalman Estendida

O filtro de Kalman estendido (*EKF - Extended Kalman Filter*) é provavelmente a ferramenta de estimação não-linear mais utilizada em engenharia nas últimas décadas, especialmente para lidar com problemas de processamento de sinal, controlo, navegação e otimização. O EKF assenta no pressuposto de que uma linearização local é suficiente para descrever e solucionar as não-linearidades do sistema dinâmico, por conseguinte, o algoritmo lineariza a estimativa atual através das séries de Taylor de primeira<sup>12</sup> ordem. Por outras palavras, o EKF lineariza a média e a covariância correntes através de derivadas parciais das funções de processo e de medições. Assim sendo, o novo modelo linearizado é utilizado pelo algoritmo para estimar o vetor de estado do sistema [6, 23, 169, 170].

#### 2.2.2.1 Algoritmo do EKF

Dado um determinado modelo dinâmico, cuja função é descrever a evolução dos estados do sistema ao longo do tempo, definido por: [3, 5, 23, 115]:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (2.50)$$

Em que,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado no instante  $k$ ;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  representa o vetor das entradas de controlo;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco,

---

<sup>12</sup> Em alguns casos, o uso de graus superiores não significa propriamente um aumento da precisão na estimativa. Muitas vezes, apenas significa um aumento na carga/complexidade computacional do algoritmo, comprometendo assim, também o seu tempo computacional [121]. Por exemplo, a ideia de usar o EKF de segunda-ordem é aumentar a precisão do algoritmo, contudo isto implica o uso, tanto de matrizes Jacobianas como de matrizes Hessianas, o que torna o processo, em geral, muito mais instável e computacionalmente intenso. Para além de que, em muitos sistemas, estas matrizes simplesmente não existem, por exemplo, em modelos que possuam mudanças drásticas no seu comportamento. Por esta razão, graus superiores não são muito populares.

gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e covariância  $Q_k$  dada pelas equações (2.44) e (2.45).

O modelo das medições, cuja função é relacionar os estados do sistema com as medições, é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k \quad (2.51)$$

Em que,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor das medições;  $h(\cdot)$  representa a função que descreve o modelo das medições;  $v_k$  representa o ruído relacionado com medições e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e de covariância  $R_k$  dada pelas equações (2.47), (2.48) e (2.49).

A tabela 2.2 representa de uma forma sucinta os grupos de equações *time-update* e *measurement-update* do algoritmo EKF.

#### Inicialização do **Filtro de Kalman Estendido**:

Assumir o vetor de estado inicial:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$$

Assumir a covariância inicial:

$$P_0 = P_{inicial}$$

#### Equações *time-update*:

Calcular a estimativa *a priori* (previsão) do vetor de estado:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$$

Calcular a estimativa *a priori* (previsão) da covariância:

$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1}$$

#### Equações *measurement-update*:

Calcular o ganho do filtro de Kalman:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

Calcular o vetor de estado *a posteriori* (estimativa atualizada):

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))$$

Calcular a covariância *a posteriori* (estimativa atualizada):

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Tabela 2.2 – Algoritmo do Filtro de Kalman Estendido.

As equações para o grupo *time-update* são dadas por [3, 121, 130, 171]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (2.52)$$

$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1} \quad (2.53)$$

Sendo que,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  representa a estimativa *a priori* do vetor de estado, ou seja, a previsão da estimativa do estado para o instante  $k$  dado a estimativa em  $k-1$ ;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  é a estimativa do vetor de estado, no instante  $k-1$ ;  $\mathbf{u}_{k-1}$  é o vetor das entradas/controlado, no instante  $k-1$ ;  $P_{k|k-1}$  é a matriz de covariância *a priori*, ou seja, a previsão da estimativa da covariância no instante  $k$  dado a estimativa em  $k-1$ ;  $P_{k-1}$  representa a matriz de covariância *a posteriori*, no instante  $k-1$ ;  $Q_{k-1}$  representa a covariância do ruído associado ao processo e é dada pelas equações (2.44) e (2.45);  $(\cdot)^T$  representa a transposta do vetor;  $A_k$  representa a matriz Jacobiana de derivadas parciais da função  $f(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{x}$  e é definida por:

$$A_k = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ u=u_{k-1}}} \quad (2.54)$$

Em relação ao grupo de equações *measurement-update*, estas são dadas por:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T \left( H_k^T P_{k|k-1} H_k^T + R_k \right)^{-1} \quad (2.55)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \left( \mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right) \quad (2.56)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (2.57)$$

Sendo que,  $K_k$  representa o ganho do filtro de Kalman no instante  $k$ ;  $R_k$  representa a covariância do ruído associado às medições e é dada pelas equações (2.47), (2.48) e (2.49);  $\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado, ou seja, é a estimativa atualizada pelo filtro após ter conhecimento das medições  $\mathbf{y}_k$ ;  $I$  representa a matriz identidade;  $P_k$  é a estimativa *a posteriori* da matriz de covariância, isto é, a matriz atualizada com base nas medições  $\mathbf{y}_k$ ;  $H_k$  representa a matriz Jacobiana de derivadas parciais da função  $h(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{x}$  e é definida por:

$$H_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \quad (2.58)$$

O EKF baseia-se no pressuposto que uma linearização local é suficiente para lidar com as não-linearidades de um sistema dinâmico. Assim sendo, o modelo linearizado é utilizado em substituição das funções não-lineares originais [3, 23, 121, 130].

### 2.2.2.2 Vantagens e Limitações do EKF

A escolha de um filtro é um fator importante e deve adequar-se:

- Às características do sistema dinâmico;
- À eficiência final que se pretende;
- Ao tempo/complexidade computacional que a situação exige.

Desta forma, todos os métodos terão vantagens e limitações quando aplicados em ambientes específicos. Esta secção nomeia alguns em relação ao EKF.

A popularidade do EKF deve-se em grande parte à sua simplicidade, uma vez que, a linearização é um processo comum, fácil de compreender e aplicar. Quando aplicado em sistemas *quasi-linear*, isto é, em sistemas pouco não-lineares, o EKF tem a capacidade de manter a eficiência do filtro de Kalman linear, possuindo um desempenho geral bastante satisfatório, sem comprometer o tempo computacional. [26, 172, 173, 174].

Contudo, ao lidar com sistemas altamente não-lineares, o EKF tende a apresentar um comportamento instável e divergente. Não-linearidades muito severas correspondem, na sua maioria a densidades/distribuições muito mais pronunciadas (bimodais ou distorcidas), o que degrada significativamente o desempenho do EKF [130].

Uma outra limitação deste filtro é ser restrito a problemas Gaussianos, ou pelo menos apresenta desempenhos superiores nestas condições. Esta restrição impede, por exemplo, o uso de modelos hierárquicos ou mesmo de modelos definidos por distribuições muito não-gaussianas [175]. Em adição, o EKF requer que as funções, tanto do modelo dinâmico como do modelo das medições, sejam diferenciáveis, o que em alguns casos é uma limitação.

Em alguns sistemas dinâmicos a computação das matrizes Jacobianas é simplesmente impossível, por exemplo, em modelos que possuam mudanças bruscas no seu comportamento. Mesmo nos casos em que as matrizes existem e podem ser calculadas, a sua computação pode ser propensa a erros, com um *debug* difícil e demoroso, o que é uma limitação para aplicações em tempo-real, ou seja, aplicações em que o tempo é um fator crítico, por exemplo, o seguimento radar e problemas de navegação, em que se pretende algoritmos rápidos e eficientes [6, 176].

Um outro ponto a mencionar é a suscetibilidade do EKF às condições iniciais assumidas. Se esta escolha for significativamente diferente dos valores reais, o filtro apresenta comportamentos erráticos e divergentes [177].

Por fim, é de referir que após as transformações não-lineares, a distribuição das variáveis (ou densidade, para o caso contínuo) já não segue uma distribuição normal. Assim, o EKF passa a atuar como um estimador *ad hoc* que apenas aproxima por linearização, a regra de Bayes [23].

### 2.2.3 Filtragem de Kalman *Unscented*

O filtro de Kalman *Unscented*<sup>13</sup> (UKF – *Unscented Kalman Filter*) foi inicialmente proposto por Julier e Uhlmann [64] como alternativa ao EKF. O intuito era propor um novo método com capacidade para solucionar algumas das limitações presentes na linearização e, conseqüentemente, obter maior precisão nas estimativas [65-67]. O UKF define-se como um método numérico livre de derivadas, que utiliza a transformação *unscented* (UT - *Unscented Transform*) como mecanismo mais direto e explícito para transformar a média e a covariância.

A propagação das variáveis aleatórias é uma operação crítica na filtragem de Kalman. Enquanto, no EKF este processo é realizado através da linearização de primeira-ordem, no UKF é realizado através da propagação de amostras determinísticas, ou seja, a distribuição de estado também é representada por variáveis aleatórias gaussianas que se propagam através de um conjunto de pontos determinísticos, mais conhecidos como os pontos-sigma. Estes pontos capturam a verdadeira média e covariância do sistema com uma precisão até à terceira-ordem das séries de Taylor, independentemente, do sistema ser muito ou pouco não-linear [67].

#### 2.2.3.1 Transformação no âmbito da Filtragem *Unscented*

A transformação *unscented*<sup>14</sup> foi desenvolvida com o intuito de colmatar as limitações da linearização e é um método que permite calcular as propriedades estatísticas de uma variável aleatória que passa por uma transformação não-linear. A ideia é utilizar um conjunto de pontos, denominados por pontos-sigma, selecionados de forma determinística e que são propagados pela não-linearidade do sistema. Estes pontos permitem parametrizar a média e a covariância da distribuição da probabilidade da variável transformada [68, 178].

Embora, a transformação *unscented* se equipare à estimação Monte-Carlo, estas são significativamente diferentes. Na estimação Monte-Carlo os pontos são selecionados aleatoriamente, enquanto, na transformação UT são selecionados deterministicamente, o que permite reter informações específicas sobre a distribuição [66]. Em regra geral, a transformação UT permite reter qualquer tipo de informação, sobre qualquer tipo de distribuição (gaussiana ou não) [178, 179]. Contudo, nesta tese, considera-se o caso da distribuição gaussiana e as informações a reter são da média e da covariância.

Considerando que uma variável aleatória  $X$ , com dimensão  $n$ , propaga-se ao longo de uma função não linear  $S = g(X)$ . A média desta variável aleatória é dada por  $\bar{X}$  e a sua covariância é dada por  $P_X$ . Assim sendo, a variável  $X$  pode ser aproximada por  $(2n + 1)$  pontos-sigma, definidos por [3, 6, 64, 68]:

$$\chi_0 = \bar{X} \tag{2.59}$$

---

<sup>13</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

<sup>14</sup> Terminologia utilizada na literatura portuguesa.

$$\chi_i = \bar{X} + \left( \sqrt{(n+\lambda)P_X} \right)_i, \quad i=1, \dots, n \quad (2.60)$$

$$\chi_i = \bar{X} - \left( \sqrt{(n+\lambda)P_X} \right)_{i-n}, \quad i=n+1, \dots, 2n \quad (2.61)$$

Sendo que,  $(\cdot)_i$  indica a coluna da matriz que está na posição  $i$ ;  $n$  representa o número total de estados;  $\lambda \in \mathbb{R}$  e representa um parâmetro escalar definido por:

$$\lambda = \alpha^2 (n + \kappa) - n \quad (2.62)$$

Este parâmetro, para além de fornecer um grau de liberdade extra para “ajustar” os momentos de aproximação de ordem superior, também pode ser usado para reduzir, de uma forma geral, os erros da previsão. Para distribuições gaussianas é aconselhável escolher o valor de  $\lambda$ , de tal forma que,  $\lambda = 3 - n$ . Esta escolha minimiza a diferença entre o momento padrão gaussiano e os pontos-sigma até à 4<sup>a</sup>-ordem [66]. Contudo, se uma distribuição não-gaussiana é assumida, a escolha de  $\lambda$  deve ser feita através da equação (2.62), de forma a evitar que esta tome valores negativos, porque se este for o caso, existe uma grande possibilidade da matriz de covariância também assumir valores não-positivos e semi-definidos [66, 85].

O parâmetro  $\alpha$  determina a propagação dos pontos-sigma ao redor da média, por outras palavras, controla o tamanho da distribuição e idealmente assume valores pequenos, isto é,  $0 < \alpha \leq 1$ , sendo que, geralmente o valor padrão é  $\alpha = 10^{-4}$ . O parâmetro  $\kappa$  é um escalar secundário e normalmente assume o valor de zero. Deve assumir valores  $\kappa \geq 0$  de modo a garantir que a matriz de covariância é semi-positiva [3, 68].

Os pesos da média,  $W_i^m$ , e da covariância,  $W_i^c$ , associados ao ponto da posição  $i$  são definidos por [3, 6, 65, 68]:

$$W_0^m = \frac{\lambda}{(n+\lambda)} \quad (2.63)$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{(n+\lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (2.64)$$

$$W_i^m = \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i=1, \dots, 2n \quad (2.65)$$

$$W_i^c = \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i=1, \dots, 2n \quad (2.66)$$

O parâmetro  $\beta$  é utilizado para introduzir o conhecimento *a priori* da distribuição de  $X$ . Para distribuições gaussianas assume-se que  $\beta = 2$  [68, 180]. É importante ter em conta que,  $W_0$



controla o reposicionamento dos outros pontos-sigma, ou seja, se  $W_0 \geq 0$ , os pontos tendem a afastar-se da origem. Porém, se  $W_0 \leq 0$  os pontos tendem a reposicionar-se perto da origem.  $W_0 \leq 0$  é uma condição válida porque, na transformação UT, os pontos não são uma função de densidade de probabilidade, logo não requerem restrições de não-negatividade [67].

Para calcular as propriedades estatísticas de  $S$  é necessário:

1. Propagar os pontos-sigma pela função não-linear  $g$  através da seguinte equação:

$$S_i = g(\chi_i), i = 0, \dots, 2n \quad (2.67)$$

2. Calcular a média de  $S$ , que é dada pela média ponderada dos pontos transformados a partir da equação (2.63), ou seja:

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m S_i \quad (2.68)$$

3. Calcular a covariância de  $S$  através do produto externo dos pontos transformados:

$$P_S = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (S_i - \bar{S}_i)(S_i - \bar{S}_i)^T \quad (2.69)$$

Como é possível verificar pelas equações (2.68) e (2.69), a média e a covariância possuem a forma de vetores e são calculadas através de simples operações matemáticas, o que torna o uso deste algoritmo acessível, mesmo para modelos mais complexos.

### 2.2.3.2 Algoritmo do UKF

O algoritmo do UKF pode ser implementado de duas formas diferentes: “*non-augmented*” ou “*augmented*”. Independentemente da escolha, a previsão de estados resulta em duas transformações UT concatenadas: uma realizada para a função do processo, e outra para função das medições. A diferença na implementação está na segunda UT [181].

No caso do UKF “*augmented*” com ruído aditivo, os pontos-sigma calculados na primeira UT, isto é, calculados para a propagação da função de processo, podem ser utilizados na segunda UT, para a propagação da função das medições [67]. Assim sendo, os pontos são projetados apenas uma vez, e conseqüentemente, diminui-se a carga computacional do algoritmo. Apesar desta aparente redução na carga computacional, é necessário ter em conta que, no caso do UKF “*augmented*”, as matrizes de estado e da covariância aumentam à medida que os componentes do ruído (tanto do processo como das medições) aumentam, conseqüentemente, há um acréscimo na carga computacional [181]. No caso do UKF “*non-augmented*” com ruído aditivo,

os pontos sigma calculados na primeira UT, simplesmente refletem as informações estatísticas, ou seja, não têm em conta os efeitos do ruído [85, 182, 183]. Por isso, logo antes da segunda UT, o algoritmo projeta novamente um segundo conjunto de pontos-sigma<sup>15</sup>, de forma a incorporar a presença do ruído. Apesar desta aparente “maior carga computacional”, muitos autores, por exemplo, [181, 182] verificaram que a segunda propagação de pontos-sigma requer menos carga computacional do que os cálculos que envolvem as matrizes do algoritmo “*augmented*”. Assim sendo, verifica-se que no geral, para ruído aditivo, o UKF “*non-augmented*” requer menos carga computacional.

O algoritmo apresentado nesta tese é o UKF “*non-augmented*” com ruído aditivo (branco, gaussiano, independente, não-correlacionado de média zero). Tendo em conta, o modelo dinâmico dado pela equação (2.43) e o modelo das medições dado pela equação (2.46), as equações do UKF são dadas pela seguinte tabela [3, 67, 68, 182]:

#### Inicialização do **Filtro de Kalman Unscented**:

Considerar o vetor de estado inicial:  $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$

Considerar a covariância inicial:  $P_{\mathbf{x}, 0} = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$

#### Equações *time-update*:

##### Primeira transformação *Unscented*.

Calcular a estimativa *a priori* do vetor de estado:  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \hat{\chi}_{i, k|k-1}$

Calcular a estimativa *a priori* da covariância:  $P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\hat{\chi}_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\hat{\chi}_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + Q_{k-1}$

#### Equações *measurement-update*:

##### Segunda transformação *Unscented*.

Calcular o ganho de Kalman:  $K_k = P_{\mathbf{xy}, k|k-1} P_{\mathbf{y}, k|k-1}^{-1}$

Calcular o vetor de estado *a posteriori*:  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\Upsilon_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$

Calcular a covariância *a posteriori*:  $P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{\mathbf{y}, k|k-1} K_k^T$

Tabela 2.3 – Algoritmo do Filtro de Kalman *Unscented*

<sup>15</sup> Em muitas aplicações reais, esta nova projeção é negligenciada, isto porque, não compromete os resultados finais [85, 183].

A primeira projeção dos pontos-sigma é obtida através:

$$\chi_{0, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (2.70)$$

$$\chi_{i, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \left( \sqrt{(n+\lambda) P_{\mathbf{x}, k-1|k-1}} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.71)$$

$$\chi_{i, k-1|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} - \left( \sqrt{(n+\lambda) P_{\mathbf{x}, k-1|k-1}} \right)_{i-n}, \quad i = n+1, \dots, 2n \quad (2.72)$$

Sendo que,  $n$  representa a dimensão do vetor estado;  $\lambda$  é obtido através da equação (2.62) e  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;

É preciso ter em conta que as raízes quadradas não possuem uma solução única. Contudo, as propriedades do algoritmo permitem que este seja válido independentemente da escolha. [64] recomendam a decomposição de Cholesky como um método robusto e eficiente para lidar com esta situação, especialmente em aplicações online.

Os pontos-sigma são propagados pelo modelo não-linear dinâmico através da equação:

$$\hat{\chi}_{i, k|k-1} = f \left( \chi_{i, k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1} \right), \quad i = 0, \dots, 2n \quad (2.73)$$

Sendo que,  $\mathbf{u}_{k-1}$  é o vetor das entradas/controlado, no instante  $k-1$ ;  $f(\cdot)$  corresponde à função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico do processo;

A previsão do estado, que neste caso é dado pela média,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , e a previsão da covariância,

$P_{k|k-1}$ , são calculadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \hat{\chi}_{i, k|k-1} \quad (2.74)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left( \hat{\chi}_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \hat{\chi}_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T + Q_{k-1} \quad (2.75)$$

Onde,  $W_i^m$  e  $W_i^c$  são obtidos através das equações (2.63 – 2.66);  $Q_{k-1}$  representa a covariância do ruído associado ao processo no passo  $k-1$ , dada pelas equações (2.44) e (2.45). A segunda projeção de pontos-sigma é obtida através [3, 67, 68, 182]:

$$\chi_{0, k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (2.76)$$

$$\chi_{i, k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \left( \sqrt{(n+\lambda) P_{\mathbf{x}, k|k-1}} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.77)$$

$$\chi_{i, k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \left( \sqrt{(n + \lambda) P_{\mathbf{x}, k|k-1}} \right)_{i-n}, \quad i = n + 1, \dots, 2n \quad (2.78)$$

É preciso ter em consideração que a matriz da raiz quadrada deve ser tal que:  $\sqrt{P} \sqrt{P}^T = P$ . Estes novos pontos são propagados através do modelo das medições:

$$\Upsilon_{i, k|k-1} = h(\chi_{i, k|k-1}), \quad i = 0, \dots, 2n \quad (2.79)$$

Em que,  $h(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo.

A previsão das medições, que neste caso são dadas pela média,  $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ , a covariância,  $P_{\mathbf{y}, k|k-1}$ , e a covariância-cruzada,  $P_{\mathbf{xy}, k|k-1}$  são calculadas através:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \Upsilon_{i, k|k-1} \quad (2.80)$$

$$P_{\mathbf{y}, k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left( \Upsilon_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right) \left( \Upsilon_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right)^T + R_k \quad (2.81)$$

$$P_{\mathbf{xy}, k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left( \hat{\chi}_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \Upsilon_{i, k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right)^T \quad (2.82)$$

Sendo que,  $W_i^m$  e  $W_i^c$  são obtidos através das equações (2.63 – 2.66);  $R_k$  representa a covariância do ruído associado às medições no passo  $k$  e é dada pelas equações (2.47 – 2.49).

Por fim, calcula-se o ganho de Kalman  $K_k$  e atualiza-se a média,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , e a covariância,  $P_{k|k}$ , de forma a obter o estado filtrado:

$$K_k = P_{\mathbf{xy}, k|k-1} P_{\mathbf{y}, k|k-1}^{-1} \quad (2.83)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \left( \Upsilon_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right) \quad (2.84)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{\mathbf{y}, k|k-1} K_k^T \quad (2.85)$$

### 2.2.3.3 Vantagens e Limitações do UKF

O UKF foi desenvolvido com o intuito de colmatar algumas limitações presentes no EKF, nomeadamente na linearização, através de mecanismos diretos e explícitos que transformam a média e covariância [67]. Por isso, é um filtro livre de derivadas [184] que utiliza um conjunto de pontos-sigma para aproximar as não-linearidades do modelo, consequentemente, captura

momentos de ordem superior, de uma forma mais eficiente do que as aproximações das séries de Taylor, presentes no EKF [68].

O UKF tem a habilidade de preservar a distribuição normal ao longo da transformação não-linear, o que permite uma propagação direta da média e da covariância [76]. Apesar da transformação *unscented* calcular o valor da média com muita precisão, tal não acontece com o valor da covariância, que é subestimado. Isto acontece porque, o conjunto de pontos-sigma são precisos apenas até à segunda-ordem [67]. Contudo, o UKF tende a apresentar uma precisão superior ao EKF.

Outra vantagem do algoritmo do UKF é que pode ser aplicado em problemas com funções não-diferenciais ou mesmo com ruído não-gaussiano, para além de que, não requer o cálculo das matrizes Jacobianas/Hessianas, ao contrário do que ocorre com a implementação do EKF [66, 85].

Uma limitação do UKF é a sua imprecisão nos momentos de ordem superior devido ao cálculo das raízes quadradas, uma vez que, estas têm um impacto direto na forma como os erros são distribuídos. A escolha das raízes quadradas pode gerar instabilidade numérica e um aumento na carga computacional, independentemente da ordem dos momentos [66].

Apesar de alguns autores defenderem que a complexidade computacional do UKF é idêntica ao do EKF, por exemplo, [67, 185], outros demonstram nas suas implementações que este não é o caso e que o UKF apresenta uma complexidade computacional superior [78, 186].

É preciso ter em conta que UKF é um algoritmo muito dependente dos seus parâmetros e a sua escolha tem um impacto direto na precisão das estimativas [5], o que tende a ser uma limitação em muitos casos.

#### **2.2.4 Filtragem de Kalman de Cubatura**

O filtro de Kalman de Cubatura (CKF – *Cubature Kalman Filter*) é conhecido pela sua matemática rigorosa, isto porque, baseia-se na regra de cubatura-esférica-radial de terceiro grau [89]. Foi desenvolvido por Arasaratnam com o intuito de transformar o problema do filtro Bayesiano ótimo, num problema em que o foco é resolver numericamente integrais com momentos multivariados [127, 187].

A regra de cubatura-esférica-radial permite obter, deterministicamente, um conjunto de pontos, denominados por pontos de cubatura, que são dimensionados linearmente com o vetor de estado. Desta forma, o CKF pode obter soluções sistemáticas para os problemas de filtragem não-linear de sistemas com elevada dimensão [187].

Sob a premissa gaussiana, este é o algoritmo mais próximo que há do filtro bayesiano [3]. Isto porque inicialmente, o CKF foi desenvolvido assumindo que a densidade *a priori*, ou seja, a

densidade prevista para o vetor estado-medições, é gaussiana [87]. Segundo os seus autores, esta é uma abordagem que promete ser numericamente mais estável e precisa, quando em comparação com os outros algoritmos.

#### 2.2.4.1 Algoritmo do CKF

Considerando um sistema não linear com ruído aditivo, em que os modelos de processo e medições são dados, respetivamente, por [3, 5, 88, 187]:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + v_k \quad (2.87)$$

Em que,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado no instante  $k$ ;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  representa o vetor das entradas de controlo;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e covariância  $Q_k$  dada pelas equações (2.44) e (2.45);  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor das medições;  $h(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve o modelo das medições;  $v_k$  representa o ruído relacionado com medições e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e de covariância  $R_k$  dada pelas equações (2.47 - 2.49).

O CKF assenta no pressuposto de que a previsão da densidade,  $p(\mathbf{x}_k | D_{k-1})$ , e a densidade de probabilidade do filtro,  $p(\mathbf{y}_k | D_k)$ , são ambas gaussianas. Consequentemente, a densidade posterior,  $p(\mathbf{x}_k | D_k)$  também é considerada como tal. Partindo deste pressuposto, a solução do CKF foca-se em apenas calcular a média e a covariância com maior precisão.  $D_{k-1}$  é dado por  $D_{k-1} = (\mathbf{u}_l, \mathbf{y}_l)_{l=1}^{k-1}$  e representa o histórico dos pares *inputs*-medições, até e incluindo  $k-1$ .

A fase de previsão do filtro CKF é composta pela computação da média,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ , e a respetiva previsão da covariância da densidade gaussiana,  $P_{k|k-1}$ . Assim sendo, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = E[f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + w_{k-1} | D_{k-1}] \quad (2.88)$$

Assumindo que  $w_{k-1}$  possui média zero e é não-correlacionado com a sequência de medições, então tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbb{E} \left[ f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) | D_{k-1} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | D_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

De forma similar, a matriz covariância é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T | \mathbf{y}_{k-1} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) f^T(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + Q_{k-1}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

A fase *measurement-update* do filtro CKF inicia-se com a computação da previsão da densidade das medições, dada por [3, 5, 88, 187]:

$$p(\mathbf{y}_k | D_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}, P_{\mathbf{y}\mathbf{y}, k|k-1}) \tag{2.91}$$

Sendo que, a previsão das medições  $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ , e a sua covariância  $P_{\mathbf{y}\mathbf{y}, k|k-1}$ , e covariância-cruzada

$P_{\mathbf{xy}, k|k-1}$ , são obtidas por:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \tag{2.92}$$

$$P_{\mathbf{y}\mathbf{y}, k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) h^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + R_k \tag{2.93}$$

$$P_{\mathbf{xy}, k|k-1} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x}_k h^T(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \tag{2.94}$$

Assim que uma nova medição é recebida, o CKF computa a densidade posterior,  $p(\mathbf{x}_k | D_k)$ :

$$p(\mathbf{x}_k | D_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, P_{k|k}) \tag{2.95}$$

Onde,

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \tag{2.96}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} + K_k P_{\mathbf{y}\mathbf{y}, k|k-1} K_k^T \tag{2.97}$$

O ganho de Kalman,  $K_k$ , é calculado através da expressão:

$$K_k = P_{\mathbf{xy}, k|k-1} P_{\mathbf{yy}, k|k-1}^{-1} \quad (2.98)$$

Por observação das equações anteriores, é possível verificar que a solução do filtro Bayesiano é reduzida à computação de integrais multidimensionais, cujo integrantes estão na forma (*função não linear*  $\times$  *gaussiana*).

#### 2.2.4.2 Regra de Cubatura

A regra de cubatura para aproximar uma integral com  $n$ -dimensões com pesos gaussianos é dada por [3, 5, 88, 188]:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, P) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(\mu + P^{1/2} \xi_i) \quad (2.99)$$

Sendo que,  $\mu$  representa a média;  $P^{1/2}$  representa a raiz quadrada da covariância  $P$  que satisfaz a relação  $P = P^{1/2} P^{T/2}$ . O conjunto de pontos de cubatura ( $2n$ ) é dado por  $\xi_i$ , em que  $i$  representa o elemento na posição  $i$  do seguinte conjunto:

$$\sqrt{n} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.100)$$

A regra de cubatura é importante para avaliar numericamente as integrais multidimensionais presentes na fase de previsão e na fase de correção do CKF. [189-191] demonstraram que uma regra de cubatura ótima possui duas propriedades: (i) todos os pontos de cubatura estão dentro da região de integração, (ii) todos os pesos de cubatura são positivos. Ao garantir estas propriedades, garante-se também que o CKF possui desempenhos ótimos.

Os pontos de cubatura para a fase de previsão são obtidos através da seguinte expressão matemática [3, 5, 88]:

$$\mathcal{X}_{i, k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{1/2} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (2.101)$$

Sendo,  $i = 1, 2, \dots, 2n$  em que  $n$  representa o tamanho do vetor de estado. A propagação dos pontos obtidos anteriormente é dada por:

$$\mathcal{X}_{i, k|k-1}^* = f(\mathcal{X}_{i, k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (2.102)$$

A média prevista e a matriz de covariância presentes nas equações (2.89) e (2.90) são dados por:



$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i, k|k-1}^* \quad (2.103)$$

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i, k|k-1}^* \chi_{i, k|k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (2.104)$$

Ao utilizar as equações (2.92), (2.94) e (2.99), a previsão das medições e as suas respectivas covariâncias são dadas por:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{y}_{i, k|k-1} \quad (2.105)$$

$$P_{\mathbf{y}\mathbf{y}, k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{y}_{i, k|k-1} \mathbf{y}_{i, k|k-1}^T - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T + R_k \quad (2.106)$$

$$P_{\mathbf{y}\mathbf{x}, k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i, k|k-1} \mathbf{y}_{i, k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}^T \quad (2.107)$$

Onde,

$$\mathbf{y}_{i, k|k-1} = h(\chi_{i, k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad (2.108)$$

$$\chi_{i, k|k-1} = P_{k|k-1}^{1/2} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (2.109)$$

O estado atualizado e a sua covariância podem ser obtidos através das equações (2.96) e (2.97).

A tabela seguinte ilustra o algoritmo do CKF de uma forma sucinta [3, 5, 88, 187]:

#### Inicialização do **Filtro de Kalman Cubatura**:

Considerar o vetor de estado inicial:  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$

Considerar a covariância inicial:  $P_{0|0}$

#### Equações *time-update*:

Fatorizar a matriz de covariância:  $P_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{1/2} P_{k-1|k-1}^{T/2}$

Calcular os pontos de cubatura:  $\chi_{i, k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{1/2} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$

Propagar os pontos obtidos anteriormente:  $\chi_{i, k|k-1}^* = f(\chi_{i, k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$

Calcular a estimativa *a priori* do vetor de estado:  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i, k|k-1}^*$

Calcular a estimativa *a priori* da covariância:

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \chi_{i, k|k-1}^* \chi_{i, k|k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + Q_{k-1}$$

Equações *measurement-update*:

Fatorizar a matriz de covariância:

$$P_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{1/2} P_{k|k-1}^{T/2}$$

Avaliar os pontos de cubatura:

$$\chi_{i, k|k-1} = P_{k|k-1}^{1/2} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

Propagar os pontos através do modelo não-linear das medições:

$$\mathbf{y}_{i, k|k-1} = h(\chi_{i, k|k-1}, \mathbf{u}_k)$$

Calcular o ganho de Kalman:

$$K_k = P_{\mathbf{xy}, k|k-1} P_{\mathbf{yy}, k|k-1}^{-1}$$

Calcular o vetor de estado *a posteriori*:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

Calcular a covariância *a posteriori*:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{\mathbf{yy}, k|k-1} K_k^T$$

Tabela 2.4 – Algoritmo do Filtro de Kalman de Cubatura.

### 2.2.4.3 Transformação no âmbito da Filtragem de Cubatura

Ao considerar uma função não-linear [3, 5, 88, 188]:

$$s = h(X) \tag{2.110}$$

Em que,  $\bar{X}$  e  $P_X$  representam a média e covariância de  $X \in \mathbb{R}^n$ , respetivamente. Tal como  $\bar{s}$  e  $P_s$  representam a média e covariância da função  $s$ , respetivamente. Estes parâmetros podem ser obtidos através da transformação de cubatura, dada pelos seguintes passos:

1. Calcular  $2n$  pontos de cubatura:

$$\chi_i = \bar{X} + P_X^{1/2} \xi_i \quad i = 1, \dots, 2n \tag{2.111}$$

Sendo,  $P^{1/2}$  a raiz quadrada de  $P$  e  $\xi_i$ , a coluna  $i$  da seguinte matriz:

$$\sqrt{n} \left[ \begin{array}{c} (1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} (0) \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} (-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} (0) \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \tag{2.112}$$

Os respetivos pesos são obtidos por:

$$W_i = \frac{1}{2n} \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.113)$$

2. Propagar os pontos de cubatura através da função não-linear:

$$\mathbf{s}_i = h(\chi_i) \quad i = 1, \dots, 2n \quad (2.114)$$

3. Calcular a média e covariância de  $\mathbf{s}$  :

$$\bar{\mathbf{s}} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathbf{s}_i \quad i = 0, \dots, 2n \quad (2.115)$$

$$P_s \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T - \bar{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{s}}^T) \quad i = 0, \dots, 2n \quad (2.116)$$

#### 2.2.4.4 Vantagens e Limitações do CKF

O CKF é um algoritmo que depende da regra de cubatura esférica-radial para computar numericamente integrais multivariados, presentes na estimação/filtragem não-linear Bayesiana [127, 187]. Esta regra permite a determinação de pontos de cubatura, que são propagados linearmente em relação ao vetor de estado de um determinado sistema dinâmico. O CKF permite assim, obter soluções para sistemas de elevada dimensão.

Algumas das suas vantagens mais notáveis são: a ausência de derivadas no seu algoritmo e o facto do CKF ser a aproximação mais semelhante que há do filtro Bayesiano para lidar com problemas de filtragem gaussiana não-linear [3, 5, 88].

Na maioria das aplicações, especialmente de navegação, o CKF apresenta uma implementação mais exigente e conseqüentemente, uma complexidade computacional superior, quando comparado, por exemplo, ao EKF. Por isso, este último é a escolha preferencial e atualmente mais utilizada para lidar com este tipo de sistemas, mesmo sabendo que os resultados do CKF são superiores [102].

Se compararmos o CKF e o EKF quando aplicados em sistemas de navegação integrados e estabelecendo uma relação com a observabilidade do sistema, verifica-se que quanto menor for o grau de observabilidade, melhor é o desempenho do CKF em relação ao EKF [102]. Em relação a sistemas fortemente acoplados, verifica-se que o desempenho destes dois algoritmos é bastante semelhante. Por sua vez, em situações de grandes desalinhamentos ou mesmo de interrupção do sinal GPS (nos casos em que as medições são realizadas via GPS), o CKF possui desempenhos superiores ao EKF [102].

O CKF tal como o UKF evitam a linearização através da propagação de pontos [3, 5, 88, 192]. Conseqüentemente evitam os cálculos das matrizes Jacobianas e desta forma evitam os

problemas causados pelo truncamento linear, como a baixa precisão de posicionamento e erros de divergência [88, 192].

Enquanto, no UKF os pontos sigma facilmente possuem pesos negativos, especialmente se o sistema for multidimensional, no CKF os pontos de cubatura são obtidos através de regras de derivação e princípios matemáticos bastante exigentes que garantem pesos iguais e positivos para todos os pontos, o que permite que o filtro possua uma maior estabilidade e precisão [192, 193, 194].

Uma semelhança entre o CKF e o UKF é que estes possuem um número fixo de pontos. Na maioria dos sistemas, esta característica significa um aumento na precisão dos resultados. Porém e dependendo dos casos, pode também significar um aumento na complexidade computacional [5, 88].

Uma limitação do CKF é que este requer um conhecimento exato de toda a informação estatística do ruído, caso contrário, a sua estimativa será precária [192]. Outra limitação é que, em alguns casos, a densidade posterior é inacessível. Isto acontece principalmente quando o CKF é aplicado em sistemas multidimensionais, uma vez que, é também necessário a computação de integrais multidimensionais. Mesmo quando este cálculo é possível, torna-se exigente propagar a densidade posterior nos passos seguintes do algoritmo. Para além de que, não há nenhuma garantia que a nova densidade posterior se mantenha na sua forma fechada e finita (estatisticamente), em termos de *quasi*-momentos.

O CKF é um algoritmo dependente do hardware digital, e se este possuir alguma imprecisão numérica, o CKF apresentará um comportamento altamente divergente ou mesmo uma falha total nos seus resultados.

Em regra geral, a precisão do CKF é superior ao EKF ou mesmo ao UKF [3, 88, 187, 193]. Contudo, muitos autores defendem que esta elevada precisão está associada a um maior tempo e complexidade computacional [97, 195]. Porém, há autores que defendem que a complexidade computacional é muito semelhante aos restantes filtros [96, 187, 196].

### **2.2.5 Filtragem de Kalman *Ensemble***

O filtro de Kalman de *Ensemble* (EnKF – *Ensemble Kalman Filter*) é um método baseado na implementação Monte-Carlo e foi inicialmente proposto para campo da geofísica por Evensen [50, 197] com o objetivo de proporcionar uma solução aproximada para os problemas cujo vetores de estados são definidos por grandes dimensões.

O filtro de Kalman padrão utiliza explicitamente toda a distribuição de estado, ou seja, calcula algebricamente a média e a covariância [17]. Contudo, em sistemas de elevada dimensão, não é de todo fiável utilizar toda a distribuição de estado. O EnKF surge com o intuito de resolver esta limitação [198]. Este algoritmo representa a distribuição do sistema através de uma amostra

aleatória, denominada por *ensemble*, reduzindo assim a dimensão real do problema. Quando novas observações/medições estão disponíveis, o algoritmo atualiza os elementos do *ensemble* através de um deslocamento linear, em oposição à reponderação dos seus pesos, como ocorre em outros algoritmos da filtragem de Kalman. Esta abordagem só é possível partindo do pressuposto de que o modelo estado-espço é linear e Gaussiano, quando este não é caso, novas aproximações são introduzidas no algoritmo [50, 51, 57].

### 2.2.5.1 Algoritmo do EnKF

O EnKF é um estimador sub-ótimo que obtém as estatísticas do erro através de soluções baseadas no método de Monte-Carlo ou na integração por *ensemble*, de forma a resolver as equações de Fokker-Planck presente no seu algoritmo.

A implementação do EnKF pode ser sintetizada pelos seguintes pontos:

1. Representar estatisticamente o erro e calcular os pontos do *ensemble*.
2. Propagar estes pontos através do modelo de processo e medições. Evensen denominou esta fase como “*forecast*”, contudo na engenharia é mais conhecida como “previsão”, *time-update* [50].
3. Atualizar os pontos do *ensemble* através da filtragem de Kalman, com base nas estatísticas do erro e à medida que novas medições são realizadas. Os cientistas meteorológicos denominam esta fase como a “fase de análise”. Em contrapartida, na engenharia é denominada por “correção”, *measurement-update*.

Inicialmente, para representar a estatística do erro, é assumido que no passo  $k$  existe um *ensemble* de  $N$  estimativas com erros (aleatórios) associados. Este *ensemble*,  $\chi_k^f \in \mathbb{R}^{n \times N}$ , é representado por:

$$\chi_k^f \triangleq (\mathbf{x}_k^{f_1}, \dots, \mathbf{x}_k^{f_N}) \quad (2.117)$$

Sendo que o subscrito  $f_i$  representa o membro  $i$  do “*forecast ensemble*”, ou seja, o subscrito  $f$  representa a fase previsão. A média do *ensemble*,  $\bar{\mathbf{x}}_k^f \in \mathbb{R}^n$ , é definida:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^f \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{f_i} \quad (2.118)$$

A matriz do erro da covariância do *ensemble*,  $E_k^f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é dada por:

$$E_k^f \triangleq \left[ \mathbf{x}_k^{f_1} - \bar{\mathbf{x}}_k^f \quad \dots \quad \mathbf{x}_k^{f_N} - \bar{\mathbf{x}}_k^f \right] \quad (2.119)$$

É importante notar que neste método,  $\bar{\mathbf{x}}_k^f$ , isto é, a média do *ensemble* na fase *forecast*, é considerada a melhor previsão do estado. Sendo que, o erro é obtido pela diferença entre a melhor estimativa e o estado atual.

O erro do *output* do *ensemble* é dado por,  $E_{y_k}^a \in \mathbb{R}^{p \times N}$ :

$$E_{y_k}^a = \left[ \mathbf{y}_k^{f_1} - \bar{\mathbf{y}}_k^f \quad \dots \quad \mathbf{y}_k^{f_N} - \bar{\mathbf{y}}_k^f \right] \quad (2.120)$$

O subscrito *a* representa a fase *analysis* e *y* representa o vetor das medições.

As matrizes de covariância são aproximadas da respetiva forma:  $P_k^f$  é aproximado por  $\hat{P}_k^f$ ,  $P_{\mathbf{x}\mathbf{y}_k}^f$  é aproximado por  $\hat{P}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_k}^f$  e finalmente  $P_{\mathbf{y}\mathbf{y}_k}^f$  é aproximado por  $\hat{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}_k}^f$ . Assim tem-se:

$$\hat{P}_k^f \triangleq \frac{1}{N-1} E_k^f (E_k^f)^T \quad (2.121)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{x}\mathbf{y}_k}^f = \frac{1}{N-1} E_k^f (E_{y_k}^f)^T \quad (2.122)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}_k}^f = \frac{1}{N-1} E_{y_k}^f (E_{y_k}^f)^T \quad (2.123)$$

O vetor de estado da fase *forecast* é dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{f_i} = f(\mathbf{x}_k^{f_i}, \mathbf{u}_k) + w_k^i \quad (2.124)$$

Em que,  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  representa o vetor das entradas de controlo;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e covariância  $Q_k$  dada pelas equações (2.44) e (2.45).

A matriz de covariância do erro é calculada com base em  $w_k^i$  e converge para  $Q_k$  à medida que  $N \rightarrow \infty$  [63].

Ao iniciar a fase *measurement-update*, calcula-se o ganho de Kalman,  $\hat{K}_k$ , da seguinte forma:

$$\hat{K}_k = \hat{P}_{xy_k}^f \left( \hat{P}_{yy_k}^f \right)^{-1} \quad (2.125)$$

Posteriormente, calcula-se o vetor de estado atualizado:

$$\mathbf{x}_k^{a_i} = \mathbf{x}_k^{f_i} + \hat{K}_k \left( \mathbf{y}_k - h \left( \mathbf{x}_k^{f_i} \right) \right) \quad (2.126)$$

A função  $h(\cdot)$  descreve o modelo das medições.

O EnKF realiza um *ensemble* de assimilação de dados em paralelo, em que  $i = 1, \dots, N$ . Sendo que:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{a_i} \quad (2.127)$$

O *ensemble* pode ser formado apenas com os estados quando o modelo do processo é não-linear e o modelo de medições é linear. Neste caso, as equações apresentadas anteriormente terão ligeiras modificações.

É importante também realçar que neste algoritmo o cálculo da variância possui uma divisão por  $(N-1)$  em vez do expectável  $N$ . Isto ocorre como fator de correção à média da população desconhecida, mais conhecido como correção de Bessel. O objetivo é reduzir o *bias* presente nos cálculos da variância [199].

A tabela 2.5 representa de uma forma sucinta o algoritmo EnKF. As equações desta tabela seguem [63].

### Filtro de Kalman de *Ensemble*:

Equações *time-update (forecast)*:

Calcular o membro do *ensemble*:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{f_i} = f \left( \mathbf{x}_k^{a_i}, \mathbf{u}_k \right) + w_k^i$$

Calcular a média do *ensemble*:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^f \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{f_i}$$

Calcular a matriz do erro da covariância do *ensemble*:

$$E_k^f \triangleq \left[ \mathbf{x}_k^{f_1} - \bar{\mathbf{x}}_k^f \quad \dots \quad \mathbf{x}_k^{f_N} - \bar{\mathbf{x}}_k^f \right]$$

Calcular o erro do *output* do *ensemble*

$$E_{y_k}^a = \left[ \mathbf{y}_k^{f_1} - \bar{\mathbf{y}}_k^f \quad \dots \quad \mathbf{y}_k^{f_N} - \bar{\mathbf{y}}_k^f \right]$$

Calcular as matrizes de covariância:

$$\hat{P}_{xy_k}^f = \frac{1}{N-1} E_k^f \left( E_{y_k}^f \right)^T, \quad \hat{P}_{yy_k}^f = \frac{1}{N-1} E_{y_k}^f \left( E_{y_k}^f \right)^T$$

Equações *measurement-update (analysis)*:

Calcular o ganho de Kalman:

$$\hat{K}_k = \hat{P}_{\mathbf{xy}_k}^f \left( \hat{P}_{\mathbf{yy}_k}^f \right)^{-1}$$

Calcular o vetor de estado atualizado:

$$\mathbf{x}_k^{a_i} = \mathbf{x}_k^{f_i} + \hat{K}_k \left( \mathbf{y}_k - h \left( \mathbf{x}_k^{f_i} \right) \right)$$

Calcular a média do estado:

$$\bar{\mathbf{x}}_k^a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{a_i}$$

---

Tabela 2.5 – Algoritmo do Filtro de Kalman de *Ensemble*.

### 2.2.5.2 Vantagens e Limitações do EnKF

O EnKF pode ser definido como uma aproximação do filtro de Kalman que utiliza tanto amostras estocásticas [54, 57] como determinísticas [59, 200], mais conhecidas por *ensemble*, para representar a distribuição de estado.

O sucesso do EnKF deve-se em grande parte a sua simplicidade e capacidade de adaptação mesmo em sistemas de elevadas dimensões [51, 63]. Ao contrário do EKF, este é um método que não necessita da linearização e conseqüentemente, é livre de derivadas, uma vez que, utiliza o modelo não-linear diretamente. O EnKF foi projetado para solucionar algumas limitações do EKF quando este é aplicado a sistemas de elevadas dimensões. Estas limitações são por exemplo, os enormes requisitos computacionais que estão associados ao armazenamento e integração direta da matriz de covariância do erro [198].

Uma das vantagens do EnKF é a propagação dinâmica e a transformação dos membros do *ensemble*, que são fáceis de implementar e possuem um custo computacional relativamente baixo.

Para um dado *ensemble*, independentemente do seu tamanho, o EnKF tem a capacidade de fornecer um estado inicial ótimo, o que facilita na obtenção de bons resultados. Em regra geral, os seus resultados são superiores aos restantes filtros (EKF, UKF e CKF), mesmo para tamanhos de *ensemble* pequenos, isto é, tamanhos na ordem dos 50 a 100 elementos [63]. Em alguns casos, possuir um número limitado de membros do *ensemble* pode ser uma limitação no sentido em que mais facilmente são introduzidos erros na amostra da covariância. Normalmente esta limitação é mais acentuada em problemas de maiores dimensões, ou seja, com maiores janelas de cálculos.

O EnKF computa as perturbações assumindo que estas evoluem linearmente, isto significa que as perturbações são consideradas como gaussianas e assim permanecem em toda a janela de assimilação. Esta característica pode influenciar negativamente o desempenho do filtro, pois se



o modelo e suas as perturbações forem (muito) não-lineares ou mesmo se as janelas de análise forem muitos longas, a condição gaussiana já não é adequada nem se verifica [53].

Uma vantagem do EnKF é que este atualiza os seus membros (*ensemble*) através de uma deslocação linear dos seus pontos, ao invés de recalculá-los os seus pesos, como ocorre nos restantes algoritmos de Monte-Carlo. Esta característica permite que o algoritmo se mantenha estável mesmo em problemas de elevada dimensão e evite a degeneração dos seus dados [51].

É importante ter em consideração que mesmo perante um modelo perfeito, existe não-linearidades que provocam uma discrepância entre os valores reais e os valores obtidos, tanto no EnKF como nos restantes algoritmos. Na maioria das vezes, isto acontece devido a uma subestimação da covariância do erro durante a fase de previsão.

### **2.2.6 Outras Variações do Filtro de Kalman**

É importante referir que as variações dos métodos de filtragem têm como objetivo colmatar alguma insuficiência existente nos métodos desenvolvidos até o momento. Mas é preciso ter consciência que nem todas elas terão desempenhos satisfatórios em todas aplicações, pois cada sistema/modelo tem características próprias que terão de ser adequadas às capacidades dos algoritmos. Ou seja, os métodos de filtragem terão vantagens e limitações, desempenhos mais favoráveis ou menos favoráveis, consoante as suas características, as características do sistema, bem como, do desempenho final que se pretenda e do objetivo da missão.

Posto isto, nas últimas décadas, verificou-se um aumento acentuado no aparecimento de novas estratégias e métodos com o intuito de melhorar o desempenho da filtragem de Kalman. Por exemplo, [201] propuseram uma versão robusta e iterativa do EKF baseado no método de máxima verosimilhança. [202] incorporaram um algoritmo genético no EKF com o intuito de otimizar as matrizes de covariância e assim aumentar a estabilidade e precisão em estimativas rápidas. [203] apresentaram uma técnica que combina a informação da função de densidade de probabilidade *a priori* com a informação *a posteriori*, de tal forma que aumenta a eficiência do EKF. Esta proposta foi validada num problema de localização (2D) em que os ângulos são a única informação emitida. [204] implementaram um EKF intervalado de modo a aumentar a eficiência do clássico EKF, numa situação de seguimento de mísseis balísticos.

[205] propuseram um UKF condicionado com o objetivo de obterem maior precisão em testes híbridos, ao modelar numericamente subestruturas. [206] implementaram um filtro UKF robusto e adaptativo como solução para um problema de deteção e diagnóstico de falhas em modelos não-lineares de veículos aéreos supersónicos. [207] também desenvolveram um método adaptativo baseado no UKF, com o intuito de estimar o estado de carregamento de baterias (lítio-íon) em veículos tanto elétricos como híbridos. [208] propuseram um método UKF sequencial para solucionar o problema de seguimento radar, quando as medições de alcance e taxa de alcance estão correlacionadas. [209] desenvolveram um filtro UKF adaptativo

para detetar mudanças repentinas na rigidez de sistemas estruturais quando estes são expostos a excitações induzidas por terremotos. [210] implementaram um filtro UKF robusto e adaptativo capaz de reduzir simultaneamente o efeito do erro do modelo dinâmico e o efeito do erro do modelo das medições. Este método foi testado no seguimento de um veículo durante uma manobra orbital. [211] propuseram um filtro UKF modificado para sistemas não-lineares estocásticos e aplicaram-no na estimação de uma órbita autónoma de satélites.

[212] implementaram um filtro CKF adaptativo para um sistema de navegação ultra rígido acoplado de um veículo hipersónico. [213] propuseram um CKF adaptativo de raiz-quadrada para estimar a atitude de um veículo aeroespacial. Os autores demonstraram que este método melhora a estabilidade numérica do clássico CKF, possui taxas de convergência superiores e erros inferiores nas estimativas. [214] desenvolveram um filtro CKF melhorado em que a taxa de convergência e a precisão do filtro é superior ao clássico CKF e ao EKF. Com o objetivo de melhorar a precisão e rápida resposta em problemas de seguimento de manobras de alvos [215] propuseram um filtro CKF com 5 graus de liberdade em que há a interação de múltiplos modelos em simultâneo.

Estes são apenas alguns dos muitos exemplos existentes na literatura.

### **2.2.7 Conclusão**

Neste capítulo foram introduzidos conceitos relevantes à compreensão dos processos estocásticos bem como conceitos de probabilidade e estatística que são fundamentais para o domínio da filtragem. Este capítulo também apresenta a filtragem de Kalman e os seus métodos mais conhecidos, sendo estes: o Filtro de Kalman Estendido, o Filtro de Kalman *Unscented*, o Filtro de Kalman de Cubatura e Filtro de Kalman de *Ensemble*, onde os respetivos algoritmos, vantagens e limitações são analisados.

# Capítulo 3

## 3. Filtragem Não Linear Adaptativa

As técnicas de filtragem são muito populares em engenharia devido às inúmeras situações em que há a necessidade de estimar o estado de um sistema com base em medições imperfeitas. Em sistemas dinâmicos lineares com modelos de observação também lineares, o filtro de Kalman é considerado a melhor ferramenta. Porém, a maioria dos sistemas reais são não-lineares, o que impulsionou o desenvolvimento de técnicas capazes de lidar com estas características. A mais popular, principalmente no seguimento radar é o EKF.

O EKF é uma extensão do filtro de Kalman baseado nas séries de Taylor de primeira-ordem. A ideia é substituir o modelo não-linear pelo seu equivalente linearizado, mantendo a estrutura clássica do filtro linear. Porém, em sistemas (altamente) não-lineares, esta solução tende a divergir. As razões estão maioritariamente relacionadas com erros inerentes à modelação do sistema e/ou às aproximações lineares utilizadas, bem como aos erros associados às matrizes de covariância. Assim sendo, o sucesso do EKF depende diretamente do pressuposto de que os parâmetros *a priori* do sistema, as matrizes de covariância e os momentos estatísticos do ruído são adequadamente calculados. Esta é a maior dificuldade, uma vez que, as equações (exatas) não-lineares são aproximadas por um modelo de estimação sub-ótimo. Por conseguinte, o desempenho do filtro é afetado, podendo demonstrar sinais de instabilidade e divergência nos seus resultados. Contudo, estes comportamentos podem ser atenuados por algoritmos de filtragem adaptativa ótima.

Deste modo, esta tese tem como principal objetivo propor um método de filtragem adaptativa ótimo baseado no EKF:

- **Adaptativo** porque pretende-se que o algoritmo ajuste os seus parâmetros iterativamente à medida que novas medições estão disponíveis, ou seja, pretende-se que os parâmetros sejam calculados *online* e que sejam atualizados em cada iteração. A adaptabilidade do filtro (proposto) tem como principal objetivo:
  1. Diminuir os erros inerentes à modelação do sistema e/ou às aproximações lineares. Este objetivo é alcançado através da recomendação de um novo ponto de linearização, que é atualizado (adaptado) a cada iteração do filtro;
  2. Diminuir os erros associados à matriz de covariância, sendo esta também atualizada (adaptada) a cada iteração do sistema. Este objetivo é alcançado através da implementação de um fator de correção;
  3. Diminuir os erros associados aos momentos estatísticos do ruído através de uma implementação adaptativa das matrizes correspondentes.

- **Ótimo** porque pretende-se minimizar o erro final das estimativas. O RMSE (*Root-Mean-Square-Error*) é o critério de validação utilizado.
- **Baseado no EKF** porque este é o método mais utilizado no seguimento radar.

Assim sendo, esta tese propõe um filtro de Kalman estendido melhorado, denominado por *improved Extended Kalman Filter (iEKF)*, onde a matriz de covariância assume uma expressão puramente estatística calculada online, isto é, durante a operação do sistema, de forma a que, os seus valores possam ser ajustados (adaptados) em cada iteração; e onde é proposto um novo ponto de linearização, que tal como a matriz de covariância, é atualizado online de forma a obter-se modelos de estimação que se aproximem do estado ótimo, para além da adaptabilidade clássica das matrizes de ruído.

Estes parâmetros são o maior foco do iEKF, porque qualquer erro associado ao seu cálculo é diretamente refletido num agravamento da estabilidade e convergência do filtro. Ao ser implementada uma estrutura adaptativa pretende-se que estes parâmetros sejam ajustados durante a atual operação do sistema e assim obter resultados finais superiores. O iEKF tem uma validação computacional em alternativa à validação matemática. Os resultados preliminares foram apresentados em [171] e publicados em [216].

### 3.1 Técnicas Adaptativas Propostas

Nesta secção são descritas as técnicas propostas nesta tese: adaptabilidade do ponto de linearização do modelo dinâmico e das medições, bem como ao cálculo *a priori* da matriz de covariância e a adaptabilidade das matrizes de ruído.

#### 3.1.1 Ponto de Linearização

A linearização é um passo muito importante na implementação do algoritmo, seja este o EKF ou o iEKF, primeiro porque é muito suscetível a erros e, segundo, porque permite que o filtro beneficie ao máximo de toda a informação *a priori* disponível. Daí ser um passo que exija cautela.

Se várias linearizações consecutivas não representarem uma boa aproximação do modelo, o filtro apresentará um comportamento divergente e errático.

Uma das limitações do EKF são os erros de truncamento oriundos da linearização, ou seja, provenientes das aproximações baseadas nas series de Taylor de primeira-ordem. Estes erros terão maior magnitude dependendo:

1. do nível de não-linearidade do sistema, ou seja, quanto mais não-linear for um sistema, maior a probabilidade de haver erros nas suas aproximações.

2. da discrepância entre o ponto de linearização utilizado e o seu valor real.
3. das próprias matrizes Jacobianas que em alguns casos são difíceis de calcular.

Desta forma, esta tese propõe um novo ponto de linearização com o intuito de atenuar alguns destes erros e as suas consequências.

No que se refere a sistemas dinâmicos, a abordagem clássica é efetuar a linearização em torno da última estimativa do estado, ou seja, o ponto de expansão é dado pela estimativa mais recente do vetor de estado<sup>16</sup>, a estimativa *a posteriori*. O problema está quando este ponto não é igual ou próximo do valor “real”, pois a utilização de um ponto inadequado introduz erros nas equações do filtro.

De acordo com a teoria de análise matemática [217, 218], matrizes Jacobianas de ordem-*i* visam transformar funções de um espaço não-linear de ordem-*i* em um espaço linearizado. Neste procedimento as matrizes Jacobianas são calculadas em relação ao ponto de expansão matemático. Mas tal como anteriormente, em casos altamente não-lineares este ponto apresenta uma discrepância do valor “real”.

De forma a reduzir a diferença entre o ponto de linearização escolhido e o seu valor correto, esta tese propõe utilizar como ponto de expansão o valor entre a última estimativa do estado e o ponto de linearização matemático do modelo, ou seja, utilizar a média entre a estimativa *a posteriori* e o ponto de linearização obtido matematicamente. Assim sendo, as matrizes Jacobianas são calculadas através das seguintes expressões:

- A matriz Jacobiana  $A_k$  de derivadas parciais da função  $f(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{x}$  é dada por:

$$A_k = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \frac{(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-1}^{linear})}{2} \\ u = u_{k-1}}} \quad (3.1)$$

Sendo que,  $\mathbf{x}_k^{linear}$  é o ponto de linearização do modelo obtido por:

$$\mathbf{x}_k^{linear} \approx \tilde{\mathbf{x}}_k + A_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (3.2)$$

Em que,  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  representa o vetor de aproximação dado por:

---

<sup>16</sup> Há autores que defendem o uso da estimativa *a priori* do vetor de estado. Contudo, o uso da estimativa *a posteriori* fornece resultados mais precisos pelas razões óbvias: este ponto está atualizado, filtrado e teve em conta as medições mais recentes.

$$\tilde{\mathbf{x}}_k \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (3.3)$$

$f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  representa o vetor das entradas de controle;  $\mathbf{x}_k$  representa o vetor atual do estado do sistema;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e covariância  $Q_k$  dada pelas equações (4.44) e (4.45);  $\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado, no instante  $k$  e é definida por:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k \left( \mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right) \quad (3.4)$$

A equação (3.4) resulta das equações *measurement-update* do filtro.  $K_k$  representa o ganho do filtro de Kalman no instante  $k$ ;  $\mathbf{y}_k$  representa o valor atual do vetor de medições no instante  $k$ ;  $h(\cdot)$  representa a função que descreve o modelo das medições.

- A segunda matriz Jacobiana  $H_k$  de derivadas parciais da função  $h(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{x}$  dada por:

$$H_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \frac{(\tilde{\mathbf{x}}_k + h(\tilde{\mathbf{x}}_k, 0))}{2}} \quad (3.5)$$

Sendo que,

$$\tilde{\mathbf{y}}_k \approx h(\tilde{\mathbf{x}}_k, 0) \quad (3.6)$$

Desta forma, as matrizes Jacobianas,  $A_k$  e  $H_k$  possuem um caracter adaptativo, sendo atualizadas a cada iteração do filtro. Estas matrizes dependem diretamente das medições  $\mathbf{y}_k$  e estimativas  $\hat{\mathbf{x}}_k$  mais recentes e por isso, têm de ser calculadas no momento atual (*online*), isto é, não podem ser calculadas *off-line*.

Perante uma situação em que o cálculo *online* não é uma opção, a única alternativa é efetuar uma linearização em torno da trajetória nominal, pois esta pode ser conhecida antecipadamente. Esta solução representa uma redução na carga computacional, mas também menor precisão nos resultados. Outro aspeto a ter em consideração, é que, se as funções  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  forem descontínuas, não se pode aplicar nem o EKF nem o iEKF.

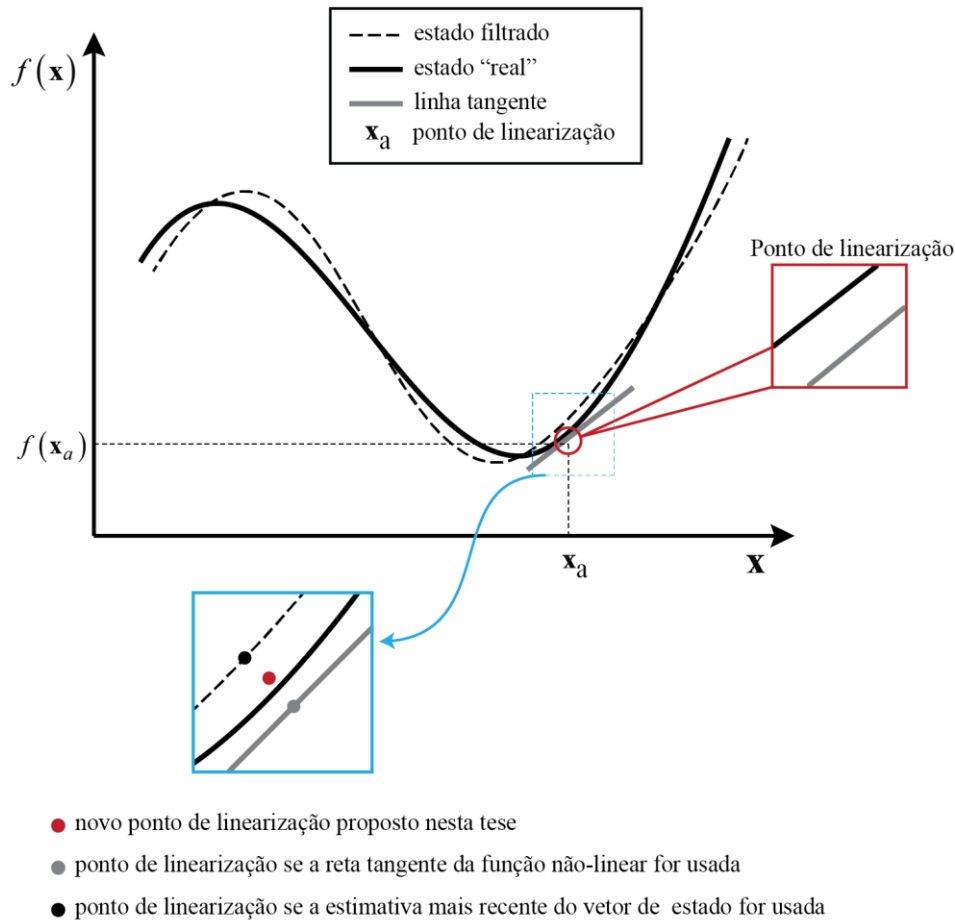


Figura 3.1 – Ilustração dos pontos de linearização.

A figura 3.1 ilustra a escolha do ponto de linearização proposto nesta tese (o ponto a vermelho). O ponto marcado a preto representa o ponto utilizado quando a estimativa mais recente do vetor de estado é usada. O que se verifica é que, na maioria dos casos, este valor difere do valor real, logo o uso único deste valor não é a escolha mais pertinente. O mesmo ocorre com o ponto representado a cinzento. Este ponto é obtido pela reta tangente à função não-linear, ou seja, é o ponto do modelo matematicamente linearizado, mas tal como o anterior, em situações muito não-lineares, verifica-se que este também difere do valor real. Por isso, o uso único deste ponto também não representa a melhor solução. Assim sendo propõe-se a média entre estes dois pontos (ponto representado a vermelho) como ponto de expansão da linearização em sistemas (muito) não-lineares, de forma a obter um ponto mais próximo do valor real e assim minimizar os erros da aproximação e aumentar a estabilidade do filtro.

### 3.1.2 Matriz de Covariância

Um outro parâmetro que esta tese propõe melhorar é a matriz de covariância *a priori*. Isto porque, uma propagação errática da matriz de covariância compromete o desempenho geral do filtro, principalmente a sua convergência.

A preocupação com as matrizes de covariância deve começar logo na estimativa inicial  $P_0$ , que é assumida e possui um papel fundamental, pois um início errático, dificilmente é corrigido.

A covariância é responsável por refletir o grau de confiança que se tem nos resultados da filtragem, ou seja, valores de  $P$  baixos, indicam maior confiança nas estimativas e assim sendo a estimativa atual possui um maior peso na atualização do estado seguinte. Enquanto, valores de  $P$  altos demonstram menor confiança nas estimativas, logo, as medições têm um maior peso na atualização do estado seguinte.

A matriz de covariância é dada pelo segundo momento estatístico do estado, ou seja:

$$\begin{aligned}
P &= E\left(\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T\right) \\
&= E\left(\left[A\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right] + w\right]\left[A\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right] + w\right]^T\right) \\
&= E\left(A\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T A^T + \right. \\
&\quad \left. A\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]w^T + \right. \\
&\quad \left. w\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T A^T + ww^T\right) \tag{3.7} \\
&= AE\left(\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T\right)A^T + \\
&\quad AE\left(\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]w^T\right) + \\
&\quad E\left(w\left[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\right]^T\right)A^T + E\left(ww^T\right) \\
&= APA^T + Q
\end{aligned}$$

A equação (3.7) possui índice, ou seja, os seus parâmetros variam com  $k$ , mas esta notação não foi denotada de modo a simplificar a equação.

De forma a melhorar eficientemente a matriz de covariância *a priori*, esta tese propõe um cálculo adaptativo, em que a matriz é estimada e ajustada com base na última estimativa da matriz de covariância e através da análise dos residuais (ou inovações) à medida que novas medições são realizadas. Por outras palavras, é proposto o uso da norma de *Frobenius* da matriz de covariância (cruzada) como fator de correção. Isto porque, a norma de uma matriz possui a capacidade de quantificar os erros e perturbações do sistema, e neste caso, comportar-se como um fator de correção.

Assim sendo, a matriz de covariância *a priori* proposta é definida por:

$$P_{k|k-1} = \frac{P_{k-1}}{\|P_{xy}\|_F} \tag{3.8}$$

Sendo que,  $P_{k-1}$  é o resultado atualizado da matriz de covariância obtido no passo anterior:



$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (3.9)$$

$\|\cdot\|_F$  representa a norma de *Frobenius* da matriz e  $P_{xy}$  representa a matriz de covariância cruzada dada por:

$$P_{xy} = E \left[ e_{xx} e_{yy}^T \right] \quad (3.10)$$

Onde,

$$e_{xx} = \left[ \mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \quad (3.11)$$

$$e_{yy} = \left[ \mathbf{y}_k - h \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \right] \quad (3.12)$$

$e_{xx}$  e  $e_{yy}$  representam os residuais do modelo dinâmico do processo e das medições, respetivamente;  $\mathbf{x}_{k-1}$  representa o vetor de estado no passo  $(k-1)$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  representa a estimativa do vetor de estado;  $\mathbf{y}_{k-1}$  representa o vetor das medições também no passo  $(k-1)$ . O uso do termo  $h \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)$  permite que haja um mapeamento direto entre as medições e o estado, consequentemente, proporciona uma convergência mais rápida do filtro.

Ao utilizar a equação (3.10) evita-se o envolvimento direto das matrizes Jacobianas e os erros a elas associados, assim sendo, obtém-se resultados mais precisos.

Nos casos em que o vetor de estado e o vetor de medições possuem a mesma dimensão, diz-se que ocorre uma normalização perfeita, caso contrário ocorre uma extensão da normalização sem impacto negativo nos resultados.

É importante ter em conta que:

- Se, em alguma situação  $\|P_{xy}\|_F$  for igual a zero, deve-se utilizar o último valor não nulo da covariância, ou seja, utiliza-se o último valor de  $P_{k|k-1}$  não nulo. Contudo, este será um caso extremamente raro, uma vez que,  $\|P_{xy}\|_F$  é baseado em residuais e estes não serão nulos em sistemas reais.
- $\|P_{xy}\|_F$  toma valores nulos em sistemas determinísticos com ruído inexistente, e neste caso a equação (3.10) não será apropriada.

### 3.1.3 Matrizes de Ruído

As incertezas presentes nas matrizes de ruído, tanto do processo (matriz  $Q$ ) como das observações (matriz  $R$ ), possuem um impacto significativo no desempenho do filtro. Por exemplo, a solução do EKF tende a divergir quando estas matrizes são inadequadas, ou seja, quando os seus valores (assumidos) não são os mais corretos. Isto porque,  $Q$  e  $R$  influenciam o peso que o filtro aplica nas informações mais recentes do processo e das medições.

Convencionalmente, a matriz  $R$  é assumida com base no conhecimento *a priori* dos instrumentos de medição e a matriz  $Q$  é definida através de um processo de tentativa-e-erro ou através da experiência do utilizador ou mesmo através de uma análise empírica intensiva.

Na prática, estes valores são geralmente fixos e iguais durante todo o processo de estimação. Esta inflexibilidade influencia o desempenho do sistema negativamente, principalmente em dois aspetos:

- Primeiro, os valores das matrizes  $Q$  e  $R$  dependem do meio envolvente do sistema e da sua própria dinâmica. Ou seja, obter uma análise fiável *a priori*, mesmo que intensiva, é muito improvável;
- Segundo, o ajuste (*tuning*) *a priori* do filtro é complicado e exige vários anos de experiência do utilizador, o que dificulta a sua aplicação bem-sucedida em campos mais amplos.

De forma a combater estas limitações e com o objetivo de aumentar a robustez do iEKF, esta tese propõe o uso da estimação adaptativa baseada na inovação, inicialmente proposta por [219]. Assim sendo tem-se [8]:

$$R_k = C_{vk} - H_k P_{k|k-1} H_k^T \quad (3.13)$$

$$Q_k = K_k C_{vk} K_k^T \quad (3.14)$$

Onde,  $H_k$  representa a matriz Jacobiana de derivadas parciais da função  $h(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{x}$  definida pela equação (3.5);  $P_{k|k-1}$  é a matriz de covariância *a priori*;  $K_k$  representa o ganho do filtro de Kalman no instante  $k$ ;  $C_{vk}$  é a matriz de inovação dada por:

$$C_{vk} = \frac{1}{N} \sum \nu \nu^T \quad (3.15)$$

Sendo,  $\nu = \left[ \mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right]$  representa a discrepância entre as medições e a estimativa mais recente.

### 3.2 Algoritmo Proposto - iEKF

Para um determinado sistema dinâmico não-linear dado por:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (3.16)$$

Em que,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado no instante  $k$ ;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  representa o vetor das entradas de controle;  $w_k$  representa o ruído relacionado com processo e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e covariância  $Q_k$  dada pelas equações (3.14).

O modelo de medições é dado por:

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k \quad (3.17)$$

Em que,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor das medições;  $h(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve o modelo das medições;  $v_k$  representa o ruído relacionado com medições e é definido como sendo branco, gaussiano, independente, não-correlacionado, de média zero e de covariância  $R_k$  dada pelas equações (3.13).

O primeiro passo do algoritmo iEKF é a linearização do modelo do sistema e das medições, de modo a substituir as funções não-lineares por funções linearizadas. Assim sendo tem-se:

$$\mathbf{x}_k \approx \tilde{\mathbf{x}}_k + A_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{y}_k \approx \tilde{\mathbf{y}}_k + H_k (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + v_k \quad (3.19)$$

Sendo que,  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{y}_k$  representam, respetivamente, o valor atual dos vetores de estado e das medições no instante  $k$ ;  $\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado, no instante  $k$ ;  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  e  $\tilde{\mathbf{y}}_k$  representam, respetivamente, os vetores de aproximação do estado e das medições definidos por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (3.20)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k \approx h(\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (3.21)$$

$\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado, no instante  $k$ ;  $A_k$  corresponde à matriz Jacobiana dada pela equação (3.1);  $H_k$  corresponde à matriz Jacobiana dada pela

equação (3.5). Ao utilizar as expressões (3.1) e (3.5), a linearização é feita em torno de um ponto mais próximo do seu valor real. E assim sendo, o filtro possui uma maior capacidade para lidar com as não-linearidades dos modelos. Para além de que, terá um comportamento mais estável e estimativas mais precisas.

As equações *time-update* do iEKF são dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (3.22)$$

$$P_{k|k-1} = \frac{P_{k-1}}{\|P_{xy}\|_F} \quad (3.23)$$

Onde,  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  representa a estimativa *a priori* do vetor de estado;  $f(\cdot)$  representa a função não-linear que descreve a evolução do modelo dinâmico;  $\mathbf{u}_{k-1}$  é o vetor das entradas/controlado, no instante  $k-1$ ;  $P_{k|k-1}$  é a matriz de covariância *a priori*;  $P_{k-1}$  representa a matriz de covariância *a posteriori*, no instante  $k-1$ ;  $P_{xy}$  representa a matriz de covariância-cruzada dada pela equação (3.10);  $\|\cdot\|_F$  representa a norma de *Frobenius*.

Em relação ao grupo de equações *measurement-update*, estas mantêm-se iguais ao EKF e são dadas por:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \quad (3.25)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (3.26)$$

Sendo que,  $K_k$  representa o ganho do filtro de Kalman no instante  $k$ ;  $H_k$  representa a matriz Jacobiana dada pela nova equação (3.5);  $R_k$  é a covariância do ruído associado às medições e é dada pelas equações (3.13);  $\hat{\mathbf{x}}_k$  representa a estimativa *a posteriori* do vetor de estado;  $I$  é uma matriz identidade;  $P_k$  é a estimativa *a posteriori* da matriz de covariância.

É necessário ter em conta que apesar das expressões matemáticas do grupo *measurement-update* serem as idênticas ao EKF, estas terão valores e resultados diferentes, pois o novo ponto de linearização tem um impacto direto na matriz  $H_k$  que consequentemente influencia os valores do ganho de Kalman e da matriz de covariância *a posteriori*. O mesmo ocorre em relação à nova expressão de  $P_{k|k-1}$  e  $R_k$ , que possuem uma influência direta no ganho de Kalman e na

matriz de covariância *a posteriori*. Ou seja, apesar das expressões serem idênticas, todas elas terão valores diferentes do clássico EKF.

A tabela 3.1 descreve o algoritmo do iEKF de uma forma sucinta. O iEKF é um algoritmo mais robusto, com parâmetros adaptativos eficientes e fáceis de implementar. A sua estrutura adaptativa permite que filtro tenha capacidade de melhorar e adaptar os seus resultados de uma forma autónoma e ideal, sem parâmetros artificiais nem empíricos.

Inicialização do iEKF:	
Assumir o vetor de estado inicial:	$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$
Assumir a covariância inicial:	$P_0 = P_{inicial}$
Assumir uma matriz $R_0$ inicial:	$R_0 = R_{inicial}$
Assumir uma matriz $Q_0$ inicial:	$Q_0 = Q_{inicial}$
Equações <i>time-update</i> :	
Calcular a estimativa <i>a priori</i> (previsão) do vetor de estado:	$\hat{\mathbf{x}}_{k k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$
Calcular a estimativa <i>a priori</i> (previsão) da covariância:	$P_{k k-1} = \frac{P_{k-1}}{\ P_{xy}\ _F}$
Equações <i>measurement-update</i> :	
Calcular o ganho do filtro de Kalman:	$K_k = P_{k k-1} H_k^T (H_k P_{k k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$
Calcular o vetor de estado <i>a posteriori</i> (estimativa atualizada):	$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + K_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}))$
Calcular a covariância <i>a posteriori</i> (estimativa atualizada):	$P_k = (I - K_k H_k) P_{k k-1}$
Atualizar a matriz de ruído $R_k$ :	$R_k = C_{vk} - H_k P_{k k-1} H_k^T$
Atualizar a matriz de ruído $Q_k$ :	$Q_k = K_k C_{vk} K_k^T$

Tabela 3.1 – Algoritmo do iEKF.

### 3.3 Conclusão

Este capítulo apresenta um algoritmo de filtragem robusto e adaptativo denominado por iEKF, isto é, *improved Extended Kalman Filter*, onde para além da adaptabilidade clássica das informações estatísticas, também é proposto uma matriz de covariância adaptativa e um novo ponto de expansão das matrizes Jacobianas que confere adaptabilidade às matrizes de transição.



# Capítulo 4

## 4. Simulações Numéricas

Este capítulo tem como principal objetivo validar os parâmetros adaptativos propostos no capítulo 3 em problemas de estimação de seguimento radar. Os casos de estudo são a estimação de órbitas de satélites artificiais, transferências orbitais, reentradas na atmosfera de veículos aeroespaciais e a estimação de trajetórias de aeronaves comerciais.

Assume-se que o radar/sensor<sup>17</sup> está num ponto fixo da superfície terrestre e que este fornece observações em relação à distância radar-alvo e aos ângulos de azimute e elevação, ou seja, fornece as coordenadas esféricas do alvo. A finalidade é possuir informações precisas sobre a posição e velocidade dos veículos aeroespaciais.

Nos casos de estudo são implementados tanto o algoritmo do EKF, descrito na secção 2.2.2, como também o algoritmo do iEKF, proposto no capítulo 3. Estes métodos são analisados e comparados.

### 4.1 Caso 1: Órbita de um Satélite Artificial

Geralmente, a estimação de órbitas tem como propósito estimar os parâmetros que definem a dinâmica orbital. Por outras palavras, o processo de estimação de órbitas tem como principal objetivo estimar e prever o estado de um satélite artificial a partir de observações feitas através de um radar.

A dinâmica do satélite é descrita por um conjunto de equações aproximadas, em que o grau de aproximação pode ser ajustado consoante a missão. Isto porque, as órbitas são influenciadas por um conjunto de forças externas (força gravitacional terrestre, resistência atmosférica, pressão da radiação solar, marés, gravitação de múltiplos corpos celestes, os próprios propulsores, entre outros) que são difíceis de modelar e prever.

A modelação de todas estas forças é um processo de elevada complexidade, que resulta num conjunto de equações dinâmicas muito não-lineares. Semelhantemente, as observações/medições também são não-lineares em relação à dinâmica do objeto e às várias influências que muitas vezes não estão incluídas nos modelos de observação.

A secção seguinte apresenta os modelos matemáticos utilizados para calcular a posição e velocidade do satélite, bem como os modelos matemáticos utilizados na observação dos dados.

---

<sup>17</sup> Casos reais de estimação de órbitas em torno da Terra requerem mais do que um sensor, distribuídos geograficamente, de forma a obter-se uma cobertura total da trajetória. Contudo nesta tese, é assumido apenas um sensor. Assume-se que este é capaz de fornecer uma cobertura total, mesmo que fisicamente impossível, pois o objetivo da tese é validar o método proposto.

### 4.1.1 Localização do Radar

Assume-se que o radar está situado em Lisboa e possui as seguintes coordenadas:

$$lat_{radar} = 0,67676 \text{ rad} \quad (4.1)$$

$$long_{radar} = -0.15944 \text{ rad} \quad (4.2)$$

$$h_{radar} = 45 \text{ m} \quad (4.3)$$

Que correspondem à latitude, longitude e altitude (em relação ao nível do mar). Estas coordenadas são convertidas em coordenadas cartesianas:

$$x_{radar} = 4915855,810164245 \text{ m} \quad (4.4)$$

$$y_{radar} = -790499,2027175036 \text{ m} \quad (4.5)$$

$$z_{radar} = 3972946,110957089 \text{ m} \quad (4.6)$$

As equações (4.4 - 4.6) representam a posição do radar num referencial que possui o centro da Terra como origem.

Os parâmetros universais referentes ao planeta Terra utilizados durante a computação são definidos por:

$$r_{Terra} = 6378 \times 10^3 \text{ m} \quad (4.7)$$

$$G_{Terra} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2 \quad (4.8)$$

$$M_{Terra} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (4.9)$$

$$\mu_{Terra} = G_{Terra} \cdot M_{Terra} \quad (4.10)$$

Em que,  $r_{Terra}$  corresponde ao raio da Terra,  $G_{Terra}$  é a sua constante gravitacional,  $M_{Terra}$  representa a sua massa e  $\mu_{Terra}$  corresponde ao seu parâmetro (constante) universal.

### 4.1.2 Modelo Dinâmico

As equações da dinâmica de um satélite em torno do campo gravitacional da Terra podem ser descritas por coordenadas esféricas [220]:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi_i + r\dot{\phi}_i^2 - \frac{\mu_{Terra}}{r^2} + u_r \quad (4.11)$$



$$r\ddot{\theta} \sin \phi_i = -2\dot{r}\dot{\theta} \sin \phi_i - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}_i \cos \phi_i + u_\theta \quad (4.12)$$

$$r\ddot{\phi}_i = -2\dot{r}\dot{\phi}_i + r\dot{\theta}^2 \sin \phi_i \cos \phi_i + u_\phi \quad (4.13)$$

Onde,  $\mu_{Terra}$  é o parâmetro da Terra dado pela equação (4.10);  $r$  é a distância radial entre o satélite artificial e o centro da Terra;  $\theta$  é o ângulo entre o eixo X e a projeção de  $r$  no plano XY;  $\phi_i$  é o ângulo entre o eixo Z e o vetor  $r$ , tal como mostra a figura 4.1;  $(u_r, u_\theta, u_\phi)$  representam os componentes da aceleração na direção de  $(\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\phi)$  respectivamente.

Neste caso, a dinâmica do satélite é modelada como um ponto de massa.

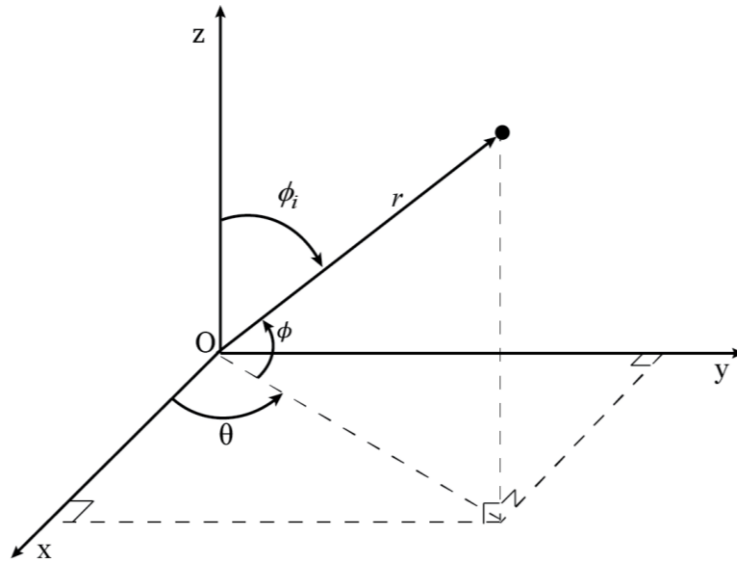


Figura 4.1 – Ilustração do referencial que define as equações da dinâmica de um satélite artificial.

As equações (4.11 - 4.13) podem ser reescritas tendo em conta as perturbações na aceleração que o satélite sofre devido aos potenciais gravitacionais da Terra. Geralmente, estes são suficientes para determinar as principais acelerações causadas pelo segundo harmónico zonal,  $J_2$ . Assim sendo, tem-se [220]:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi_i + r\dot{\phi}_i^2 - \frac{\mu_{Terra}}{r^2} + \frac{3}{2} \mu_{Terra} \cdot J_2 \cdot r_{Terra} \cdot \frac{3 \cos^2 \phi - 1}{r^4} + u_r \quad (4.14)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - 2\dot{\theta}\dot{\phi}_i \cot \phi_i + \frac{u_\theta}{r \sin \phi_i} \quad (4.15)$$

$$\ddot{\phi}_i = \frac{-2\dot{r}\dot{\phi}_i}{r} + \dot{\theta}^2 \sin \phi_i \cos \phi_i + 3\mu_{Terra} \cdot J_2 \cdot \frac{r_{Terra}^2}{r^5} \cdot \cos \phi_i \sin \phi_i + \frac{u_\phi}{r} \quad (4.16)$$

Em que,  $J_2 = 1,0826 \times 10^{-3}$ .

Para além das equações da dinâmica é necessário definir os parâmetros orbitais, representados na figura 4.2.

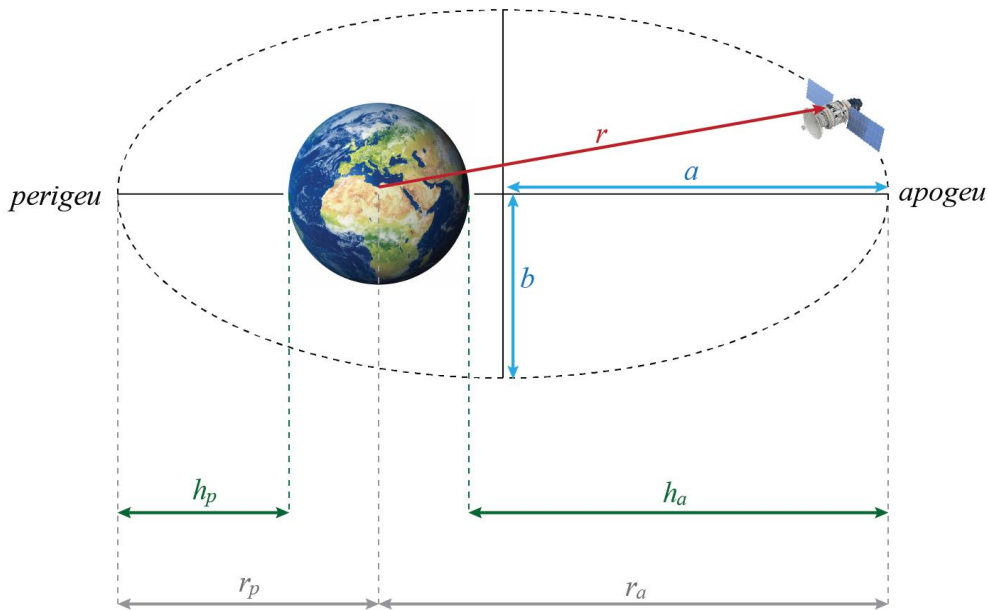


Figura 4.2 – Representação dos parâmetros orbitais de uma elipse.

Sendo que,  $h_p$  representa a altura desde a superfície da Terra até o perigeu;  $h_a$  representa a altura desde a superfície da Terra até o apogeu;  $r_p$  representa a distância do centro da Terra até ao perigeu;  $r_a$  representa a distância do centro da Terra até o apogeu e finalmente  $a$  e  $b$  representam o semieixo maior e menor da elipse, respetivamente.

### 4.1.3 Simulações e Resultados

A órbita elíptica é inicialmente projetada com as seguintes dimensões:

$$h_a = 400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$h_p = 200 \times 10^3 \text{ m}$$

Sendo que os restantes parâmetros são obtidos através [221, 222]:

$$r_p = r_{Terra} + h_p \quad (4.17)$$

$$r_a = r_{Terra} + h_a \quad (4.18)$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (4.19)$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (4.20)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{Terra}}} \quad (4.21)$$

Em que  $h_p$ ,  $h_a$ ,  $r_p$  e  $r_a$  são os parâmetros definidos na figura 4.2;  $r_{Terra}$  corresponde ao raio da Terra dado pela equação (4.7);  $e$  corresponde à excentricidade da órbita e em órbitas elípticas o seu valor é  $0 < e < 1$ ;  $a$  corresponde ao semieixo maior da elipse;  $T$  corresponde ao período de uma trajetória completa;  $\mu_{Terra}$  corresponde ao parâmetro universal da Terra dado pela equação (4.10).

A tabela 4.1 apresenta os valores destes parâmetros orbitais.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Altitude do Perigeu	$h_p$	200 km
Altitude do Apogeu	$h_a$	400 km
Raio do Perigeu	$r_p$	6578 km
Raio do Apogeu	$r_a$	6778 km
Semieixo Maior	$a$	6678 km
Excentricidade da Órbita	$e$	0.01497
Inclinação da Órbita	$i$	10° deg
Período da Órbita	$T$	5433.74693sec $\approx$ 90.56 min

Tabela 4.1 – Caso de Estudo 1: Elementos Orbitais.

As equações (4.14 - 4.16) são implementadas de forma a obter-se uma trajetória de referência. Esta órbita é simulada em Python e com o auxílio do método de Runge-Kutta de quarta ordem - RK4 (anexo E). Para tal, considerou-se as seguintes condições iniciais:

$$\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,57800e+06 & -1,29764e-01 & 1,15633e-03 & 1,15633e-03 & 1,48353e+00 & 0,00000e+00 \end{bmatrix}$$

O resultado está representado na figura 4.3.

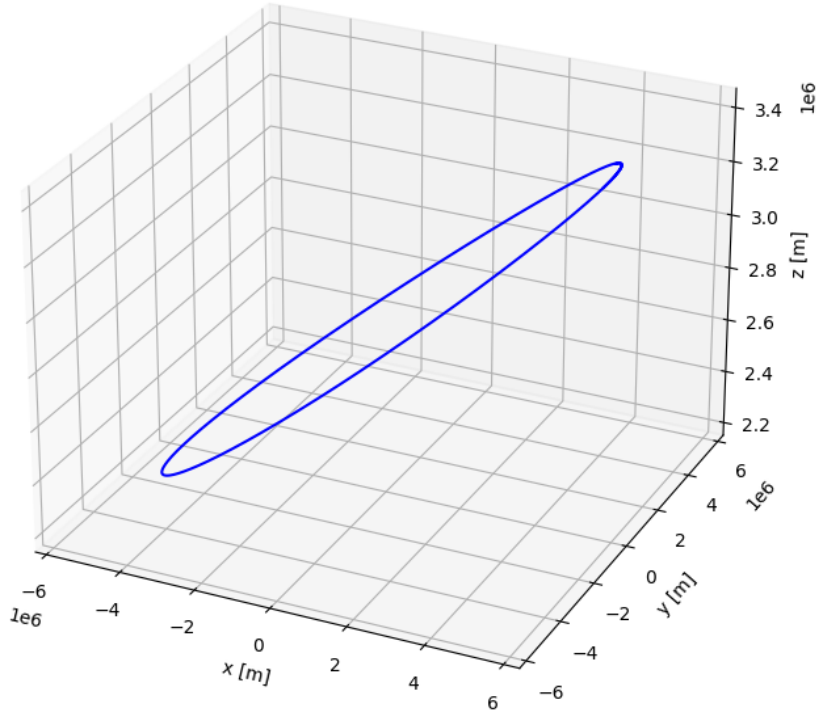


Figura 4.3 – Caso de Estudo 1: Representação 3D da órbita de referência.

O radar posicionado em Lisboa, com as coordenadas descritas em (4.4 – 4.6), fornece as medições desta trajetória através da expressão:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + v_{1,k} \\ \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) + v_{2,k} \\ \sin^{-1}\left(\frac{z_k}{r_k}\right) + v_{3,k} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Considerou-se os seguintes valores para o desvio padrão do erro:

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \sqrt{0.01} & \sigma_R &= \sqrt{0.1} \\ \sigma_r &= \sqrt{10} & \sigma_\theta &= \sqrt{2} & \sigma_\phi &= \sqrt{2} \\ \sigma_w &= \sqrt{90} & \sigma_v &= \sqrt{90} \end{aligned}$$

Em que  $\sigma_Q$  e  $\sigma_R$  representam o desvio padrão utilizado nas matrizes de covariância  $Q_k$  e  $R_k$  respetivamente;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\phi$  representam, respetivamente, o desvio padrão utilizado no ruído

associado às medições feitas pelo radar, ou seja, associado a cada coordenada  $(r, \theta, \phi)$ ;  $\sigma_w$  e  $\sigma_v$  representam o desvio padrão associado às matrizes do ruído  $w_k$  e  $v_k$ , respectivamente.

As medições obtidas pelo radar estão representadas na figura 4.4. Ainda em relação a esta figura, é importante notar que, a coordenada  $r$  também possui ruído, da mesma forma que  $\theta$  e  $\phi$ , mas como a escala desta coordenada é bastante grande, o seu gráfico aparenta ser uma linha.

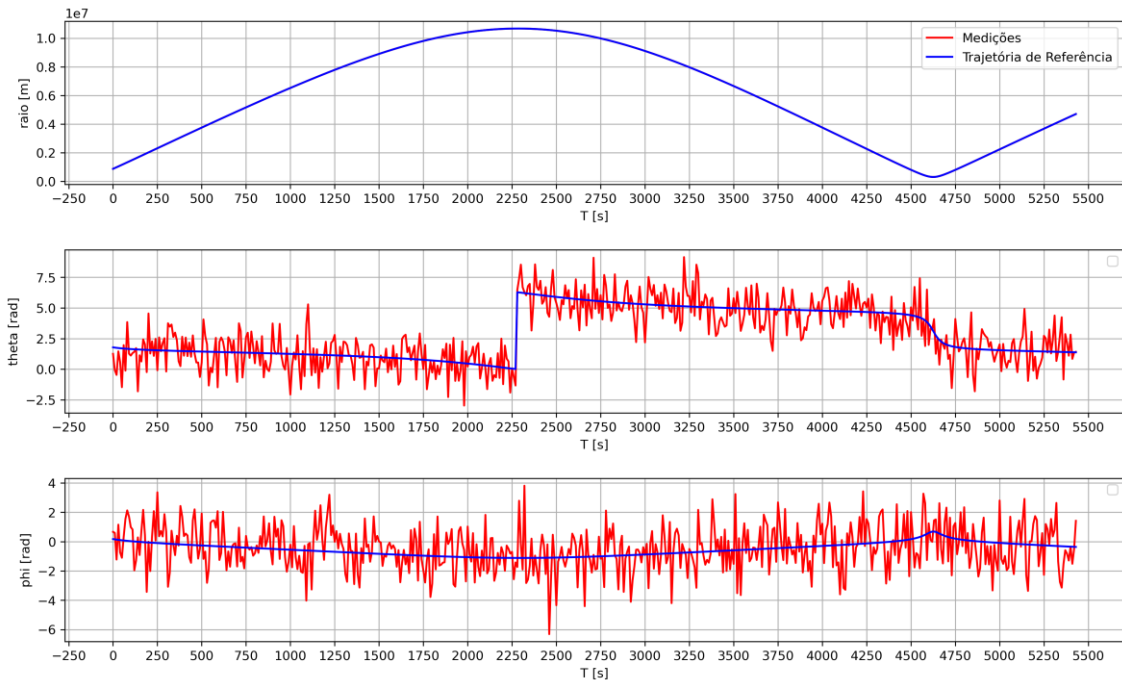


Figura 4.4 – Caso de Estudo 1: Medições realizadas pelo radar.

O vetor de estado é composto pelas coordenadas cartesianas do satélite e assim sendo é dado por:

$$\mathbf{x}_k = [x_k \quad y_k \quad z_k] \quad (4.23)$$

Para inicializar os algoritmos (EKF e iEKF) foi assumido os seguintes valores:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [5279549,85228 \quad 6104,90287 \quad 3923823,12641]$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7,124789 & 7,124789 & 7,124789 \\ 7,124789 & 7,124789 & 7,124789 \\ 7,124789 & 7,124789 & 7,124789 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a matriz de covariância é uma matriz de  $(3 \times 3)$ . É importante referir que todos os valores e condições aqui descritos são exatamente iguais para ambos os filtros, ou seja, são

exatamente iguais para o EKF e iEKF. Pois, ao manter-se todas as condições iniciais iguais, garante-se que a diferença nos resultados se deve única e exclusivamente às alterações propostas nesta tese. Este princípio é aplicado a todos os casos de estudo.

As matrizes Jacobianas são obtidas através das seguintes expressões:

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_k}{\partial x} & \frac{\partial r_k}{\partial y} & \frac{\partial r_k}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial x} & \frac{\partial \theta_k}{\partial y} & \frac{\partial \theta_k}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x} & \frac{\partial \phi_k}{\partial y} & \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial r} & \frac{\partial x_k}{\partial \theta} & \frac{\partial x_k}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y_k}{\partial r} & \frac{\partial y_k}{\partial \theta} & \frac{\partial y_k}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z_k}{\partial r} & \frac{\partial z_k}{\partial \theta} & \frac{\partial z_k}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sendo que, as coordenadas esféricas são dadas por:  $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$ ,  $\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)$ ,

$\phi_k = \sin^{-1}\left(\frac{z_k}{r_k}\right)$  e as coordenadas cartesianas são dadas por:  $x_k = r_k \cos \theta_k \cos \phi_k$ ,

$y_k = r_k \sin \theta_k \cos \phi_k$ ,  $z_k = r_k \sin \phi_k$ .

Para comparar ambos os métodos (EKF e iEKF) de uma forma justa e direta, utilizou-se o RMSE (*Root Mean Square Error*), isto é, o índice de desempenho definido pela raiz quadrada do erro da estimação, sendo  $T_s$  o número total de passos utilizados na simulação, ou seja, o número de *time-steps*. O RMSE foi calculado tanto para a posição como a velocidade:

$$RMSE_{Posição_k} = \left( \frac{\sum_{k=1}^{T_s} \left[ (x_k - \hat{x}_{k|k})^2 + (y_k - \hat{y}_{k|k})^2 + (z_k - \hat{z}_{k|k})^2 \right]}{T_s} \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

$$RMSE_{Velocidade_k} = \left( \frac{\sum_{k=1}^{T_s} \left[ (V_k - \hat{V}_k)^2 \right]}{T_s} \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

Sendo que,  $V_k$  é a velocidade de referência obtida por:  $V_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}$  e  $\hat{V}_k$  é a velocidade estimada obtida por  $\hat{V}_k = \sqrt{\hat{\dot{x}}_k^2 + \hat{\dot{y}}_k^2 + \hat{\dot{z}}_k^2}$ .

As figuras 4.5 até 4.8 demonstram os resultados do RMSE obtidos para a posição e velocidade, onde a linha azul representa o RMSE do EKF e a linha a vermelho o RMSE do iEKF. A figura 4.5 e 4.7 ilustram uma comparação entre os dois filtros. As figuras 4.6 e 4.8 apresentam apenas os resultados do iEKF, de modo a permitir uma análise mais detalhada sobre este.

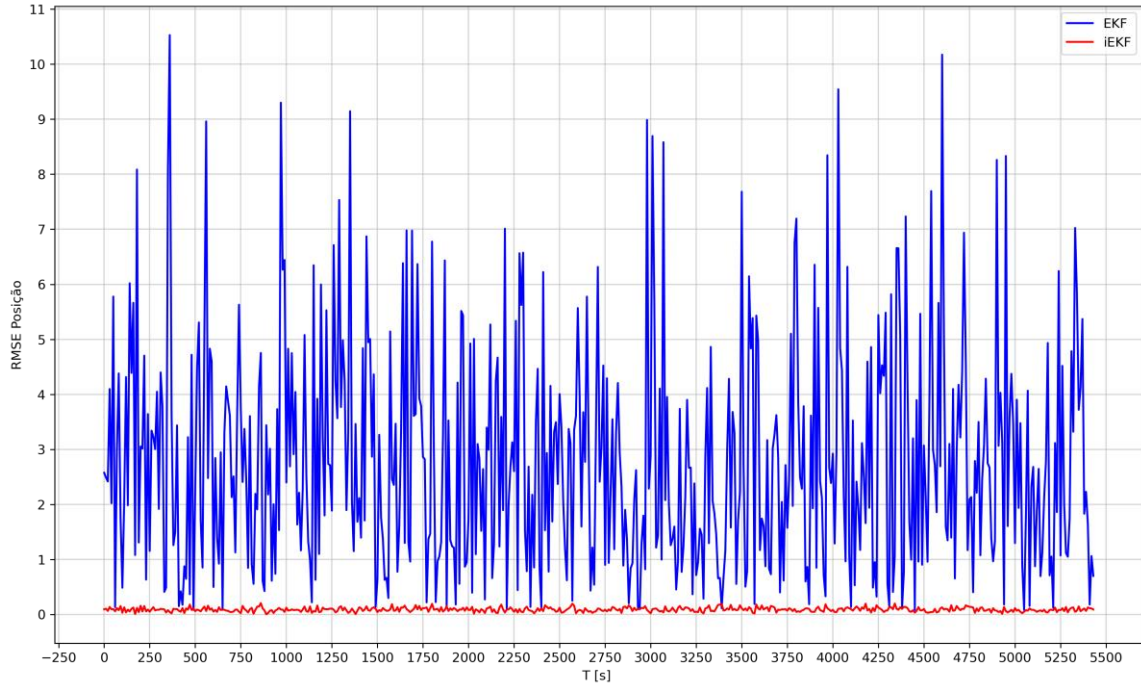


Figura 4.5 – Caso de Estudo 1: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição.

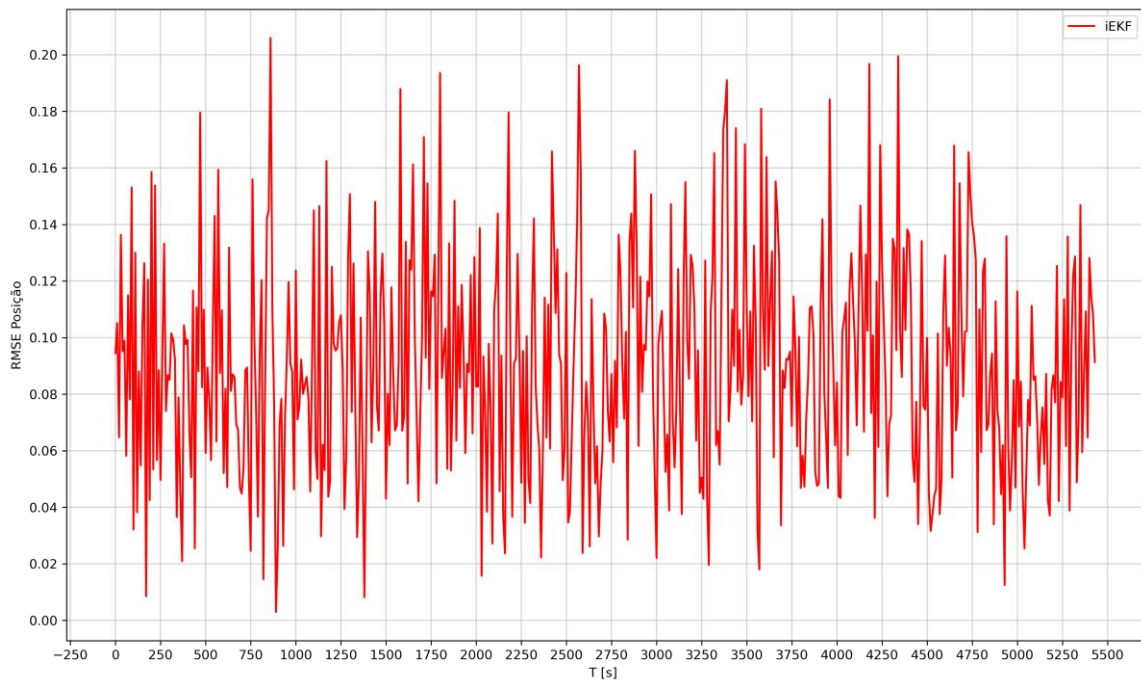


Figura 4.6 – Caso de Estudo 1: RMSE do iEKF para a posição.

Ao analisar os gráficos verifica-se que o uso das técnicas propostas, permitem resultados mais precisos, sendo que o iEKF apresenta um erro inferior a 0,21 m e o EKF um erro inferior a 11 m aproximadamente, para a posição. Em relação à velocidade, figuras 4.8 e 4.9, o iEKF apresenta um erro inferior a 0,42 m/s e o EKF um erro inferior a 23 m/s, aproximadamente.

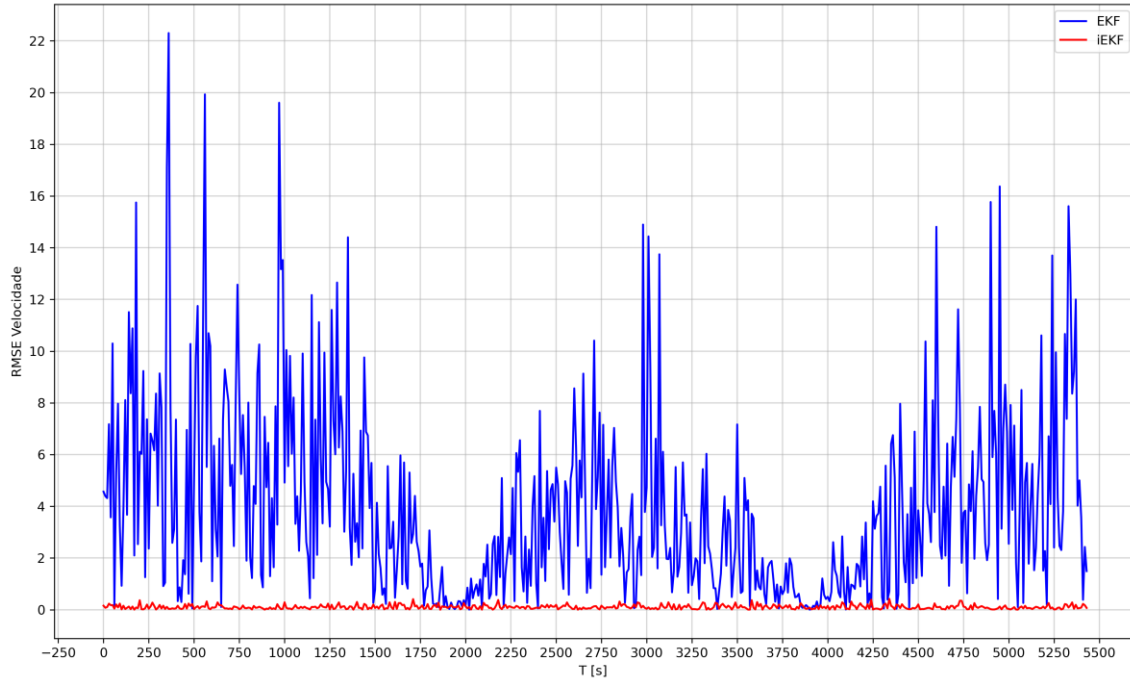


Figura 4.7 – Caso de Estudo 1: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade.

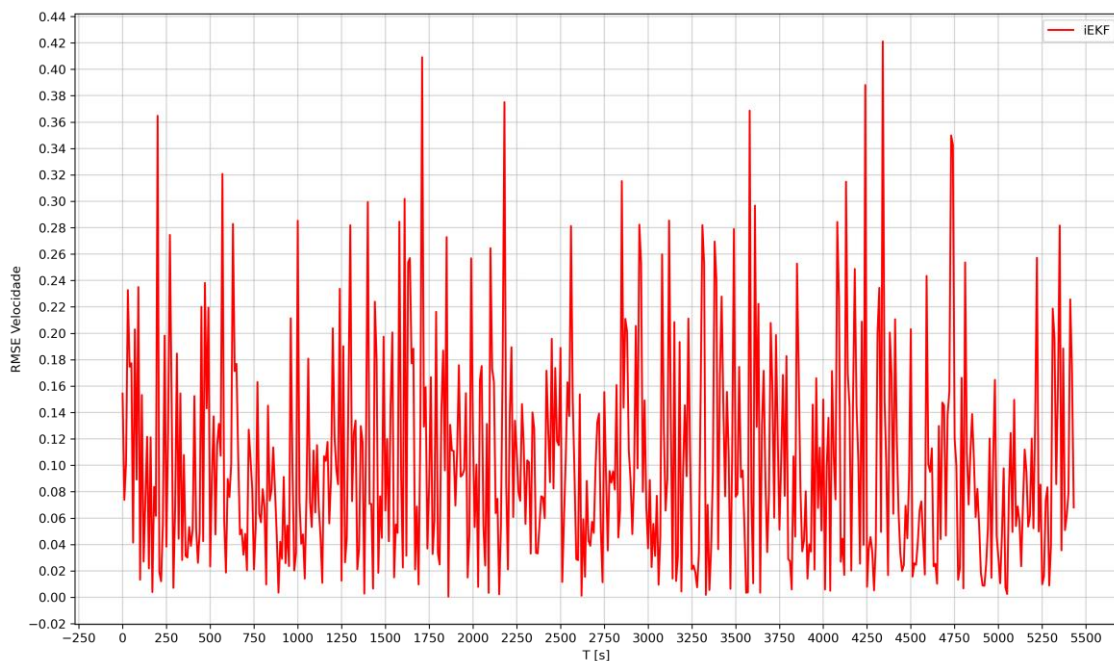


Figura 4.8 – Caso de Estudo 1: RMSE do iEKF para a velocidade.

É possível observar pela figura 4.7 que o EKF possui oscilações mais acentuadas que o iEKF (figura 4.8), este comportamento é derivado da instabilidade típica e já bem conhecida do EKF



ao lidar com sistemas muito não-lineares. Em contrapartida, o iEKF possui uma maior estabilidade e uma menor oscilação dos seus picos, ou seja, os resultados são mais constantes, o que significa que este algoritmo lida melhor com as não-linearidades dos modelos.

Outro fator importante de ser mencionado é a complexidade computacional: o iEKF e o EKF possuem o mesmo grau de complexidade e conseqüentemente o mesmo tempo computacional. Ou seja, as novas alterações não influenciam negativamente o tempo computacional do iEKF.

Em suma, para condições de inicialização e ruído idênticas, verifica-se que o iEKF possui um desempenho superior.

## **4.2 Caso 2: Transferência Orbital**

As transferências orbitais ocorrem quando um veículo aeroespacial se desloca de uma órbita para outra. Estas transferências podem ser dramáticas (por exemplo, no caso de uma mudança de uma órbita baixa de estacionamento terrestre para uma órbita interplanetária) ou suaves (por exemplo, nas fases finais de uma operação de *rendezvous*).

Neste caso de estudo, é considerado uma transferência orbital de Hohmann para um satélite artificial. Normalmente, os satélites possuem órbitas específicas dependendo dos seus objetivos de missão. Contudo, na maioria dos casos, esta órbita não é alcançada diretamente a partir do lançamento, seja devido ao tipo de veículo lançador, ou devido ao local de lançamento ou simplesmente porque o custo de combustível necessário para atingir a órbita final logo no início é demasiado dispendioso. Independentemente do motivo, são necessárias manobras orbitais que provoquem mudanças ou transferências orbitais para que o objetivo de missão seja alcançado.

As manobras são realizadas através de propulsores que estão a bordo. Normalmente, embora nem sempre, são realizadas numa sequência de rajadas de curta duração e muitas vezes em mais de um ponto da órbita. Isto porque, o ajuste orbital com apenas um impulso implica que a órbita inicial e final tenham pelo menos um ponto em comum. A razão física é que após o impulso ser aplicado numa determinada localização da órbita, esta altera-se e repete-se a si mesma passando sempre no ponto em que foi aplicado o impulso. A única forma de obter uma órbita final que não intersecte com a órbita inicial, é aplicar múltiplos impulsos. Este é o caso de estudo seguinte, em que é considerado uma transferência de Hohmann coplanar.

### **4.2.1 Modelo Dinâmico**

A transferência de Hohmann foi inicialmente criada para solucionar o problema de transferência orbital entre duas órbitas circulares, sendo que a órbita de transferência possui a forma elíptica. Esta transferência tem como principal objetivo identificar a mudança orbital de menor consumo de combustível, o que é equivalente a identificar a transferência com o menor

$\Delta v_{total}$ . Neste caso de estudo, assume-se que os propulsores reagem de uma forma impulsiva, ou seja, todas as mudanças na velocidade são instantâneas.

De acordo com o princípio de transferência orbital de Hohmann, a mudança de uma órbita circular de raio  $r_1$  para uma órbita coplanar e concêntrica também circular de raio  $r_2$ , requer uma órbita de transferência elíptica em que o seu perigeu corresponde a  $r_1$ , ou seja,  $r_p = r_1$  e o seu apogeu corresponde a  $r_2$ , ou seja,  $r_a = r_2$ , tal como representado na figura 4.9

Num determinado ponto da órbita 1 é aplicado um impulso na direção de voo para incrementar a velocidade  $\Delta v_1$ , de forma a que, o veículo aeroespacial transite da órbita 1 para a órbita de transferência (órbita elíptica). Posteriormente, é feito outro incremento de velocidade  $\Delta v_2$ , de modo a que o veículo transite para a segunda órbita circular (órbita 2). Se  $\Delta v_2$  não for efetuado, o veículo permanece na órbita de transferência.

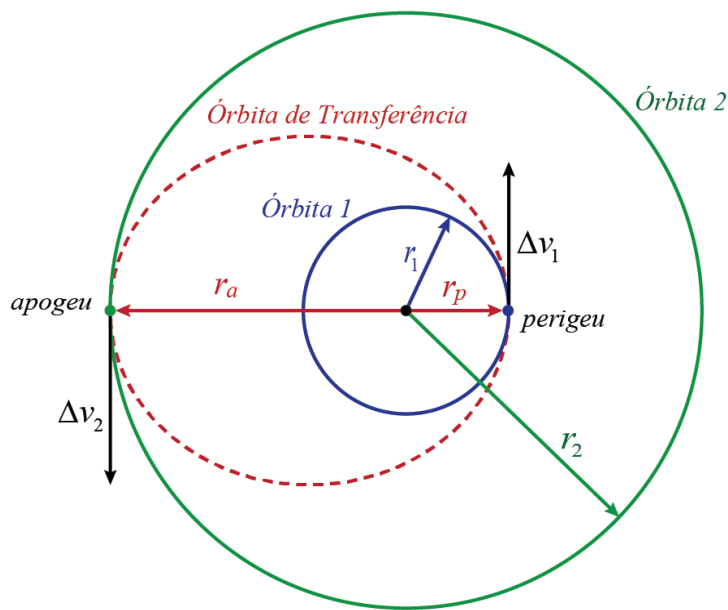


Figura 4.9 – Representação de uma transferência de Hohmann.

O semieixo maior,  $a$ , da órbita de transferência é dado por [221-224]:

$$a_{trans} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (4.27)$$

Em que  $r_1$  corresponde ao raio da órbita circular inicial (órbita 1 da figura 4.9) e  $r_2$  corresponde ao raio da órbita circular final (órbita 2 da figura 4.9).

As respectivas velocidades são dadas por [221-224]:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_{Terra}}{r_1}} \quad (4.28)$$

$$V_{trans_1} = \sqrt{\frac{2\mu_{Terra}}{r_p} - \frac{\mu_{Terra}}{a_{trans}}} \quad (4.29)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu_{Terra}}{r_2}} \quad (4.30)$$

$$V_{trans_2} = \sqrt{\frac{2\mu_{Terra}}{r_a} - \frac{\mu_{Terra}}{a_{trans}}} \quad (4.31)$$

Sendo que,  $V_1$  corresponde à velocidade da órbita inicial (órbita 1);  $V_{trans_1}$  corresponde à velocidade no perigeu da órbita de transferência, ou seja, corresponde à velocidade necessária para o satélite transitar da órbita inicial para a órbita de transferência;  $V_2$  corresponde à velocidade da órbita final (órbita 2);  $V_{trans_2}$  corresponde à velocidade no apogeu da órbita de transferência, ou seja, corresponde à velocidade necessária para o satélite transitar da órbita de transferência para a órbita final;  $\mu_{Terra}$  corresponde à constante universal da Terra dada pela expressão (4.10);  $r_p$  corresponde ao raio do perigeu da órbita de transferência;  $r_a$  corresponde ao raio do apogeu também da órbita de transferência.

Assim sendo, os  $\Delta v$  são obtidos através:

$$\Delta V_1 = V_{trans_1} - V_1 \quad (4.32)$$

$$\Delta V_2 = V_2 - V_{trans_2} \quad (4.33)$$

$$\Delta V_{total} = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (4.34)$$

A transferência de Hohmann também pode ser aplicada entre órbitas elípticas coplanares desde que possuam a mesma linha de apsides. Contudo, neste caso de estudo, a transferência é realizada entre duas órbitas circulares coplanares.

#### 4.2.2 Simulações e Resultados

As órbitas são implementadas através das equações (4.14- 4.16), com a ajuda do algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

Escolheu-se aleatoriamente duas órbitas coplanar e circulares, em que a transferência entre estas é realizada através de uma órbita elíptica. Os dados considerados foram:

$$r_1 = 11878000 \text{ m}$$

$$r_2 = 15878000 \text{ m}$$

Sendo que  $r_1$  representa o raio da órbita inicial e  $r_2$  representa o raio da órbita final. Neste caso os incrementos de velocidade são positivos porque transita-se para uma órbita superior.

A tabela 4.2 representa de uma forma sucinta os parâmetros orbitais assumidos.

Parâmetros	Símbolos	Valor
<b>Órbita Inicial - 1</b>		
Raio	$r_1$	11878 km
Excentricidade da Órbita	$e$	0
Inclinação da Órbita	$i$	0° deg
<b>Órbita de Transferência</b>		
Raio do Perigeu	$r_p$	11878 km
Raio do Apogeu	$r_a$	15878 km
Semieixo Maior	$a$	13878 km
Excentricidade da Órbita	$e$	0.14411
Inclinação da Órbita	$i$	0° deg
Período da Órbita	$T$	19921.56635 sec $\approx$ 332.03 min
<b>Órbita Final - 2</b>		
Raio	$r_2$	15878 km
Excentricidade da Órbita	$e$	0
Inclinação da Órbita	$i$	0° deg

Tabela 4.2 – Caso de Estudo 2: Elementos Orbitais.

As condições de inicialização do algoritmo RK4 são:

- Órbita 1 (inicial):

$$\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix} = [1,18780e+07 \quad 2,38267e+02 \quad 4,87456e-04 \quad 4,87456e-04 \quad 1,57079e+00 \quad 8,91438e-19]$$

- Órbita de transferência:

$$\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix} = \\ [1,18780e+07 \quad -1,48829e-01 \quad 3,15396e-04 \quad 3,15396e-04 \quad 1,48353e+00 \quad 0,00000e+00]$$

- Órbita 2 (final):

$$\begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix} = \\ [1,58780e+07 \quad -1,66660e+01 \quad 3,15396e-04 \quad 3,15396e-04 \quad 1,57079e+00 \quad 1,22385e-19]$$

Os resultados obtidos pelo algoritmo de RK4 estão representados nas figuras 4.10 e 4.11, sendo que a figura 4.10 corresponde ao gráfico de coordenadas polares, isto é, ao gráfico de  $r$  em função de  $\theta$  e a figura 4.11 ilustra a mesma trajetória, mas em 3D, ou seja, em função das coordenadas  $(x, y, z)$ .

Na figura 4.10, a trajetória a azul representa a órbita inicial, a trajetória a vermelho representa a transferência de Hohmann e a trajetória a verde representa a órbita final.

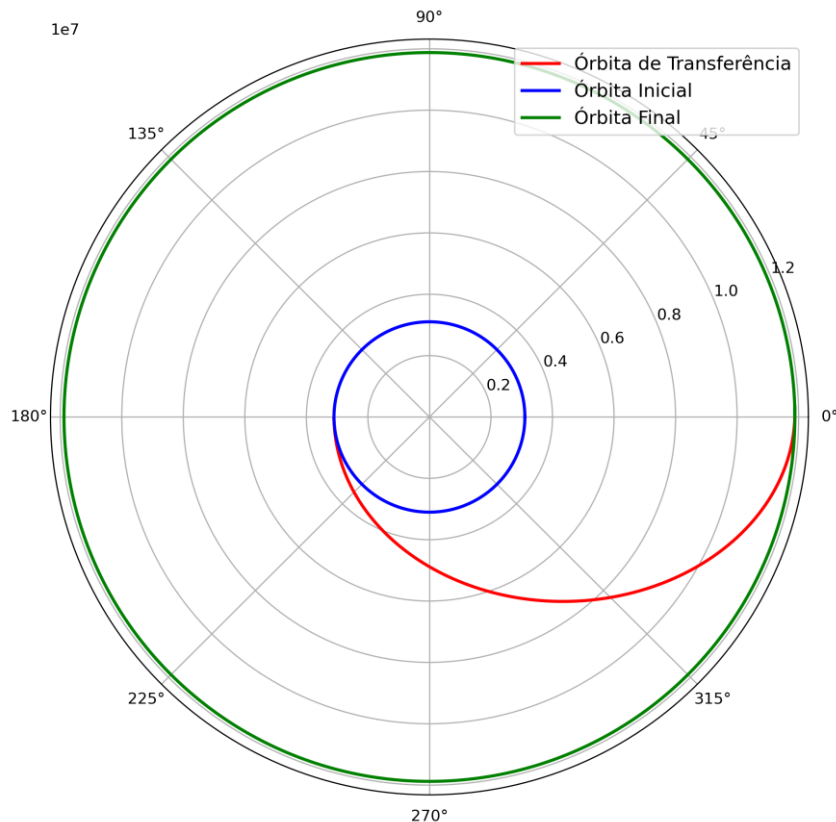


Figura 4.10 – Representação polar da transferência orbital de Hohmann, obtida através do algoritmo de RK4.

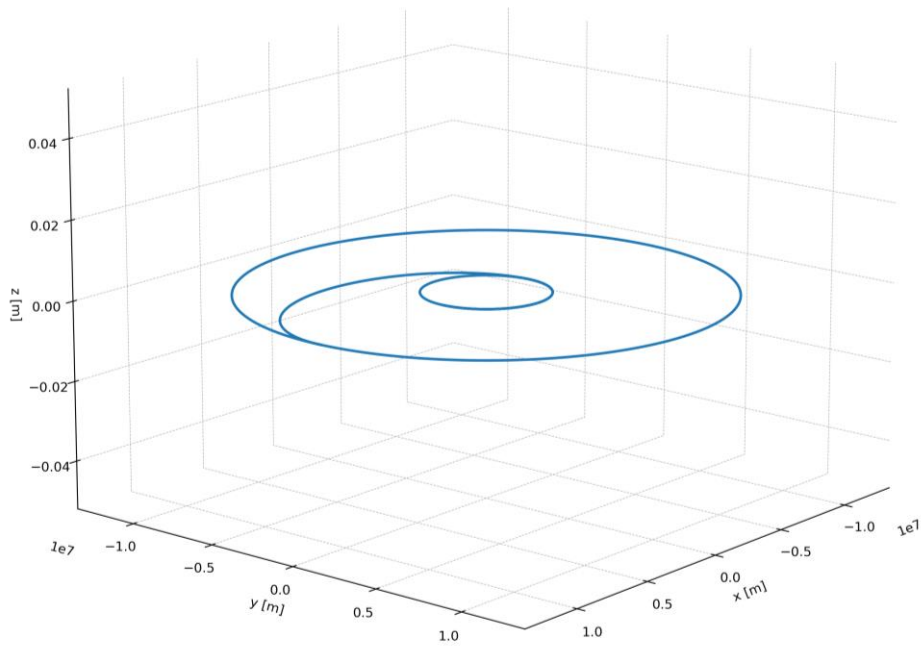


Figura 4.11 – Caso de Estudo 2: Representação 3D da trajetória de referência.

Considera-se que o radar está posicionado em Lisboa, com as coordenadas sendo dadas pelas equações (4.4 – 4.6). Este mede a trajetória representada na figura 4.11 através da equação (4.22).

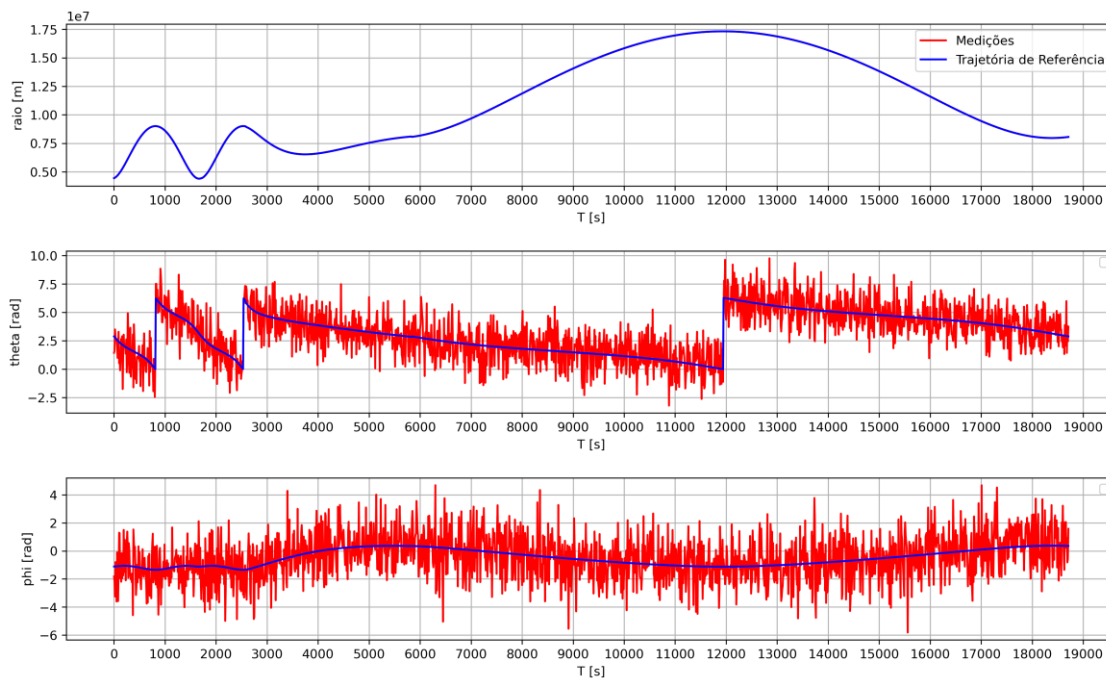


Figura 4.12 – Caso de Estudo 2: Medições realizadas pelo radar.

A figura 4.12 ilustra as medições obtidas pelo a radar em comparação com a trajetória de referência, isto é, a trajetória sem ruído. Tal como anteriormente mencionado, a coordenada  $r$  também possui ruído tal como  $\theta$  e  $\phi$ , mas como a sua escala é demasiado elevada, esta aparenta ser uma linha.

O desvio padrão possui os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\sigma_Q &= \sqrt{0.01} & \sigma_R &= \sqrt{0.1} \\ \sigma_r &= \sqrt{10} & \sigma_\theta &= \sqrt{2} & \sigma_\phi &= \sqrt{2} \\ \sigma_w &= \sqrt{90} & \sigma_v &= \sqrt{90}\end{aligned}$$

Sendo que  $\sigma_Q$  e  $\sigma_R$  representam, respetivamente, o desvio padrão utilizado das matrizes de covariância  $Q_k$  e  $R_k$ ;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\phi$  representam, respetivamente, o desvio padrão associado ao ruído de cada coordenada  $(r, \theta, \phi)$ ;  $\sigma_w$  e  $\sigma_v$  representam o desvio padrão associado às matrizes do ruído  $w_k$  e  $v_k$ , respetivamente.

O vetor de estado é dado pela equação (4.23) e as matrizes Jacobianas são dadas pela equação (4.24). As condições de inicialização dos filtros (EKF e iEKF) são assumidas e dadas por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [3,10261e+06 \quad -5,68979e-01 \quad 1,53794e+00]$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7,46356 & 7,46356 & 7,46356 \\ 7,46356 & 7,46356 & 7,46356 \\ 7,46356 & 7,46356 & 7,46356 \end{bmatrix}$$

Todos os valores são exatamente iguais para ambos os filtros, só assim é possível garantir que a diferença nos resultados é consequência única e exclusiva das alterações propostas nesta tese.

O desempenho dos filtros é comparado e avaliado através do RMSE da posição e velocidade dado pelas equações (4.25) e (4.26), respetivamente.

Os resultados estão representados nas figuras 4.13 - 4.16, sendo que a linha a azul representa o erro do EKF e a linha a vermelho representa o erro do iEKF. É possível verificar, que tal como acontece com o caso de estudo 1, o EKF possui um erro muito superior ao iEKF. Para a posição, o EKF apresenta um erro máximo de 6,5 m (figura 4.13) e o iEKF apresenta um erro máximo de 0,11 m (figura 4.14).

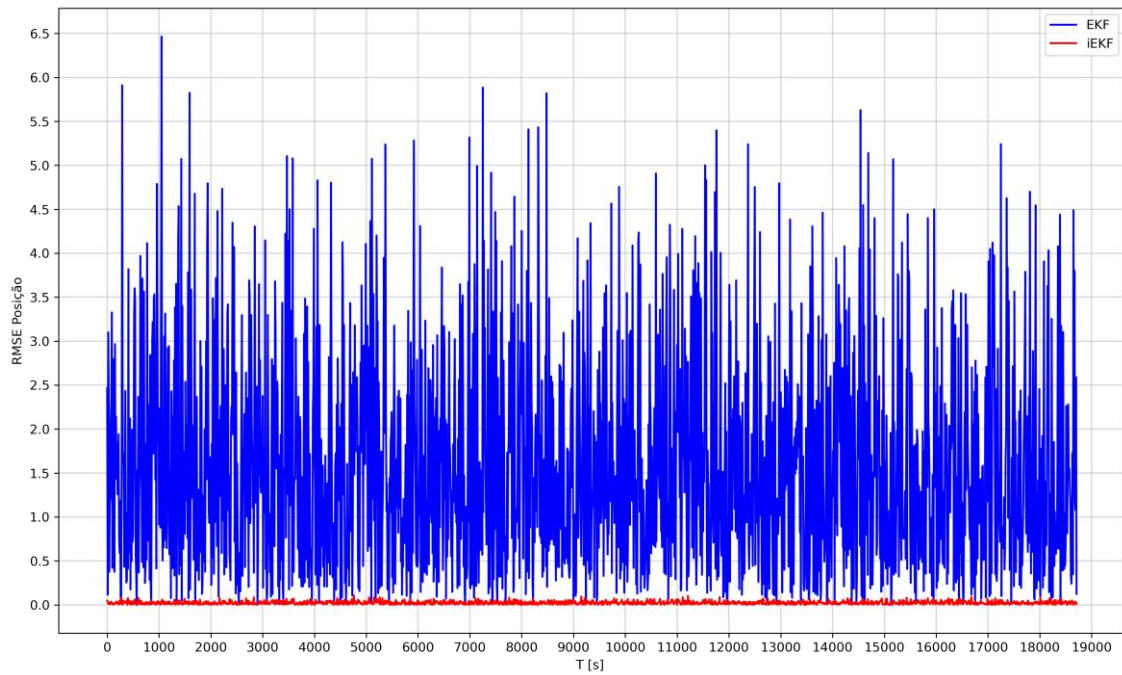


Figura 4.13 – Caso de Estudo 2: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição.

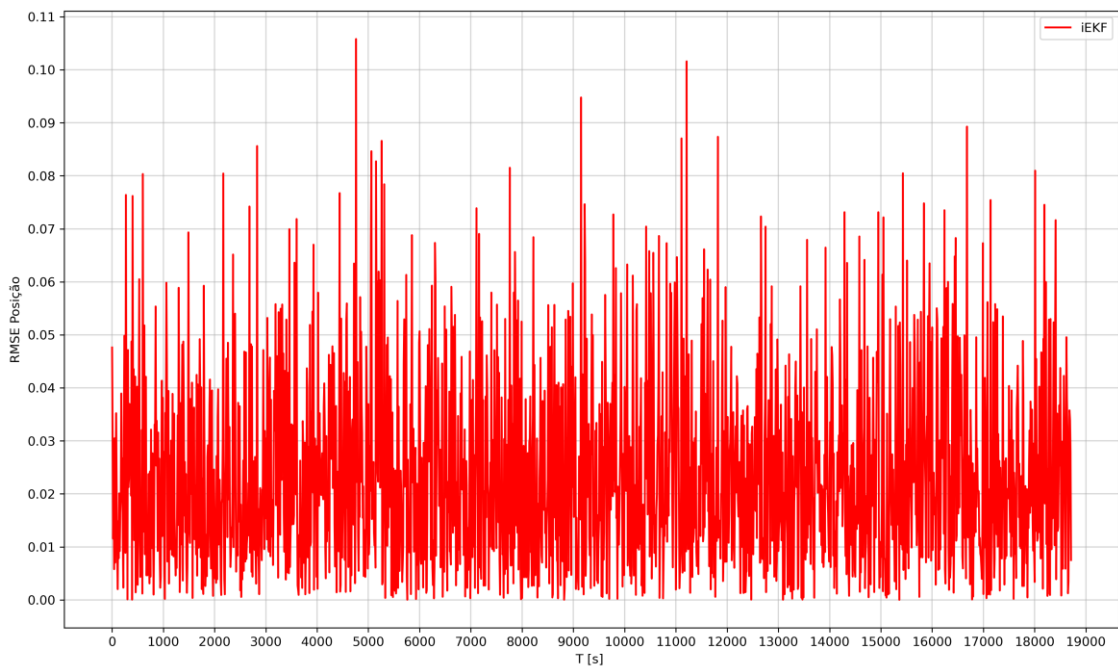


Figura 4.14 – Caso de Estudo 2: RMSE do iEKF para a posição.

As figuras 4.15 e 4.16 ilustram o RMSE da velocidade. Verifica-se que os resultados do EKF (a azul), apresentam um comportamento de maior instabilidade, com flutuações muito mais acentuadas do que o iEKF. Este comportamento é derivado da instabilidade típica e já bem conhecida do algoritmo do EKF ao lidar com sistemas muito não-lineares.



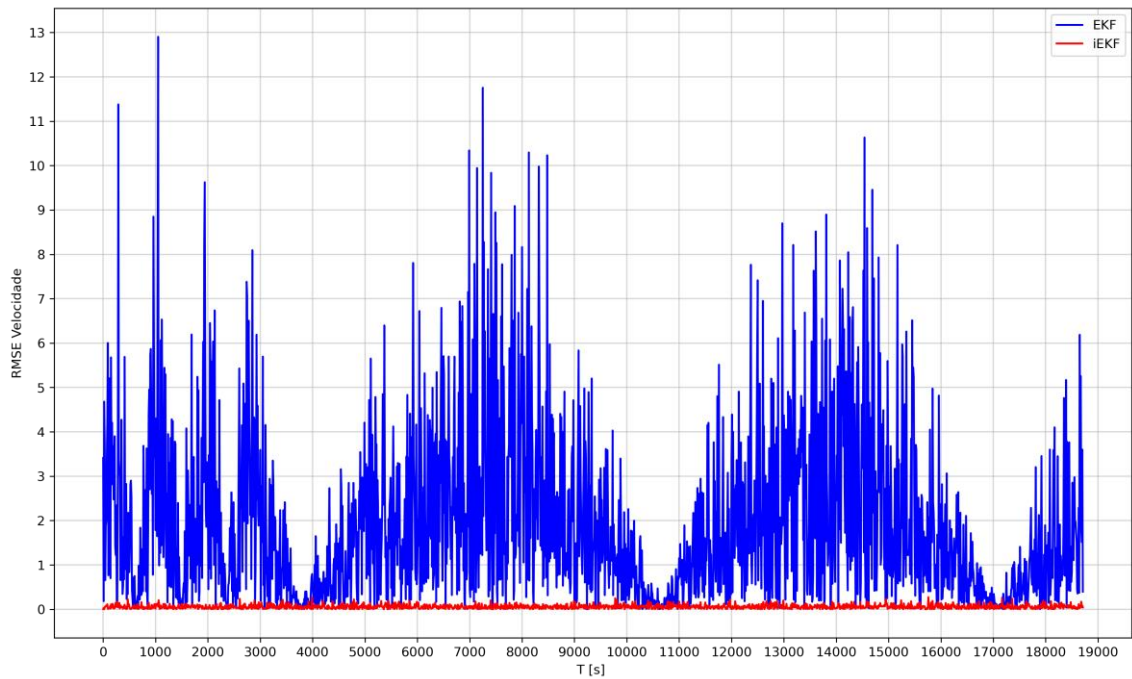


Figura 4.15 – Caso de Estudo 2: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade.

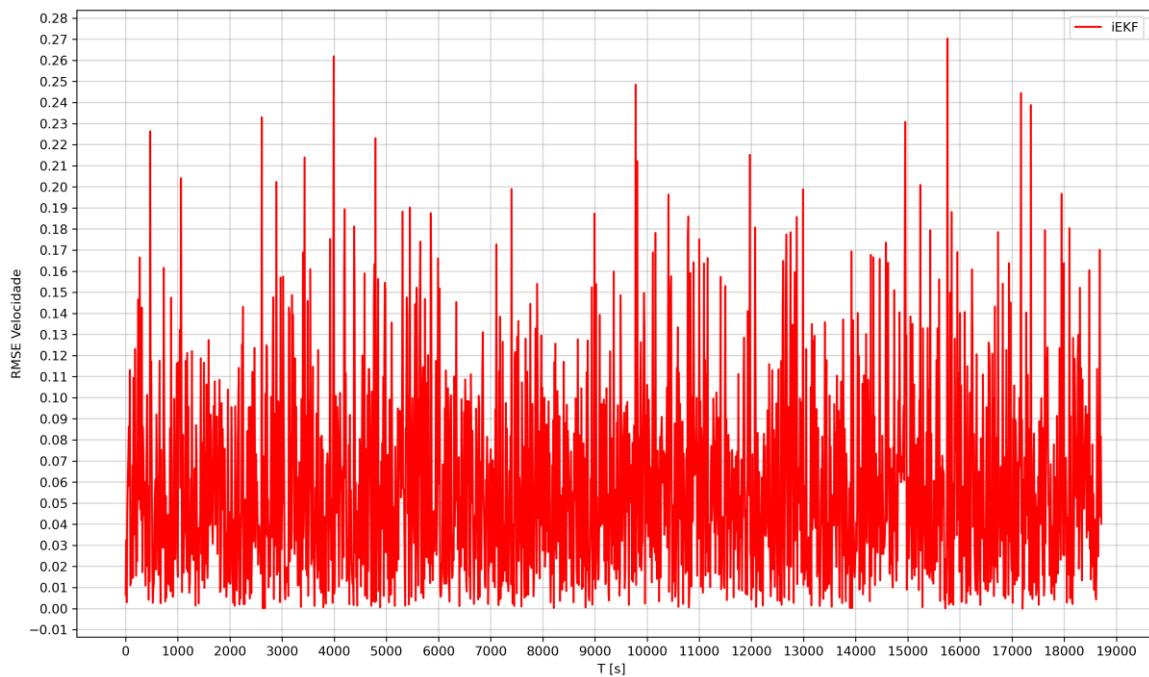


Figura 4.16 – Caso de Estudo 2: RMSE do iEKF para a velocidade.

Através da figura 4.15 e 4.16 verifica-se que o EKF possui um erro máximo de 13 m/s, em oposição ao iEKF que possui um erro máximo de 0,27 m/s.

É também possível verificar que o iEKF apresenta resultados muito mais estáveis que o EKF. Desta forma pode-se concluir que, o iEKF apresenta estimativas superiores: mais precisos, estáveis e confiáveis.

### 4.3 Caso 3: Reentrada na Atmosfera

Uma das maiores preocupações da exploração espacial sempre foi a entrada controlada na atmosfera. Mesmo nos dias de hoje, em que há acesso a uma tecnologia bastante amadurecida, a entrada atmosférica continua a ser uma grande preocupação, seja para missões em órbitas terrestres em que o *payload* necessita de retornar, seja para missões interplanetárias que visam a aterragem em outros planetas com atmosfera, mas principalmente em missões tripuladas.

A tecnologia envolvente numa entrada atmosférica típica é bastante interdisciplinar, isto porque o sistema deve estar apto a satisfazer inúmeras funções associadas à ampla gama de regimes de voos e condições atmosféricas presentes nesta fase. Basicamente, o sistema tem de estar habilitado a fornecer uma dissipação controlada e combinada de energia cinética e potencial, associadas a uma determinada velocidade e altitude do veículo aeroespacial durante toda a fase de entrada. Uma dissipação controlada significa que o veículo mantém as suas cargas dinâmicas e térmicas dentro dos limites aceitáveis. Para tal, é necessário que a trajetória seja cuidadosamente projetada e que os sistemas de navegação/orientação sejam altamente precisos [224, 225]. Esta precisão também é necessária para o contacto com a superfície, que normalmente possui restrições tanto do local de repouso como da atitude do veículo.

As subsecções seguintes implementam uma reentrada balística na atmosfera com motor inativo (*“idle thrust”*). As reentradas balísticas são caracterizadas por uma sustentação e tração nulas.

#### 4.3.1 Modelo Dinâmico

As equações da dinâmica de um veículo aeroespacial na reentrada da atmosfera com motor inativo são [225, 226]:

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (4.35)$$

$$\dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r_c \cos \theta} \quad (4.36)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V}{r_c} \cos \gamma \cos \psi \quad (4.37)$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \quad (4.38)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L}{mV} \cos \beta + \cos \gamma \left( \frac{V}{r_c} - \frac{g}{V} \right) \quad (4.39)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{mV \cos \gamma} L \sin \beta + \frac{V}{r_c \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \quad (4.40)$$

Sendo,  $h$  a altitude,  $\phi$  a longitude,  $\theta$  a latitude,  $V$  a velocidade,  $\gamma$  o ângulo da trajetória de voo,  $\psi$  o ângulo de azimute do veículo,  $\beta$  o ângulo de inclinação do veículo,  $D$  a resistência (arrasto) do veículo,  $L$  a sustentação do veículo,  $g$  a aceleração gravítica,  $r_c$  a distância entre o centro da Terra e o veículo,  $m$  a massa do veículo aeroespacial.

Os parâmetros aerodinâmicos e atmosféricos são dados por:

$$D = \frac{1}{2} C_D S \rho V^2 \quad (4.41)$$

$$L = \frac{1}{2} C_L S \rho V^2 \quad (4.42)$$

$$g = g_0 \left( \frac{r_{Terra}}{r_{Terra} + h} \right)^2 \quad (4.43)$$

$$\rho = \rho_0 e^{-Bh} \quad (4.44)$$

Em que,  $C_D$  é o coeficiente de resistência,  $C_L$  é o coeficiente de sustentação,  $\rho$  é a densidade atmosférica,  $\rho_0$  é a densidade atmosférica à superfície terrestre,  $S$  é a área de referência do veículo aeroespacial para a sustentação e a resistência,  $r_{Terra}$  é o raio da Terra e  $B$  é o coeficiente inverso da altitude.

A figura 4.17 ilustra uma reentrada típica na atmosfera.

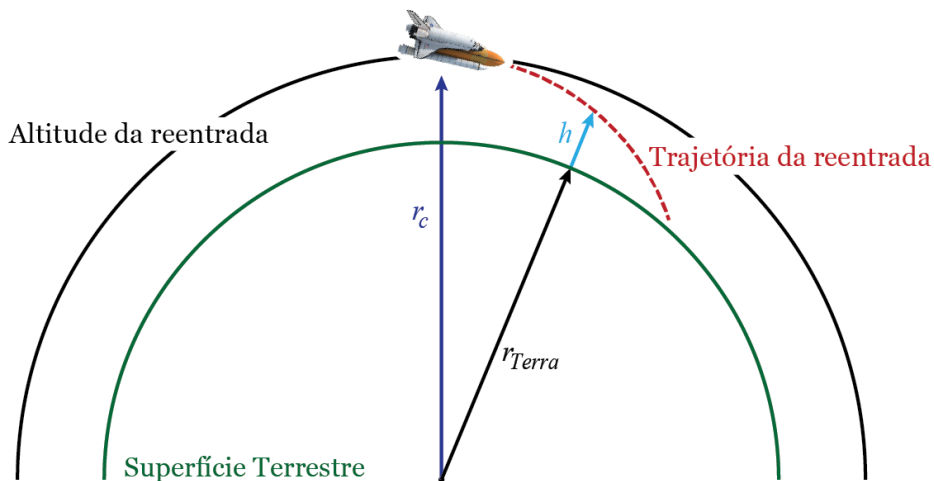


Figura 4.17 – Representação de uma reentrada na atmosfera.

### 4.3.2 Simulações e Resultados

A trajetória de reentrada foi projetada com base nas equações (4.35 - 4.40) e com a ajuda do algoritmo de RK4. Os parâmetros considerados foram:

- Veículo Aeroespacial:

$$m = 1350 \text{ kg} \qquad \beta = 60^\circ \qquad S = 2,8 \text{ m}^2 \qquad C_D = 2,0$$

Sendo,  $m$  a massa do veículo aeroespacial,  $\beta$  o seu ângulo de inclinação,  $S$  a área de referência para a sustentação e a resistência e  $C_D$  o coeficiente de resistência. Normalmente, numa reentrada balística considera-se a sustentação nula, logo não há necessidade de definir o coeficiente de sustentação,  $C_L$ . Os parâmetros terrestres e universais são dados pelas equações (4.7 - 4.10) e  $B = 0,1354 \times 10^{-3}$ . As condições de inicialização do algoritmo de RK4 são:

$$[h \ \phi \ \theta \ V \ \gamma \ \psi] = [1,22000e+05 \ 0,00000e+00 \ 0,00000e+00 \ 7,50000e+03 \ -3,49066e-02 \ 6,98132e-01]$$

O resultado obtido está representado na figura 4.18. Esta é a trajetória de reentrada na atmosfera efetuada pelo veículo aeroespacial.

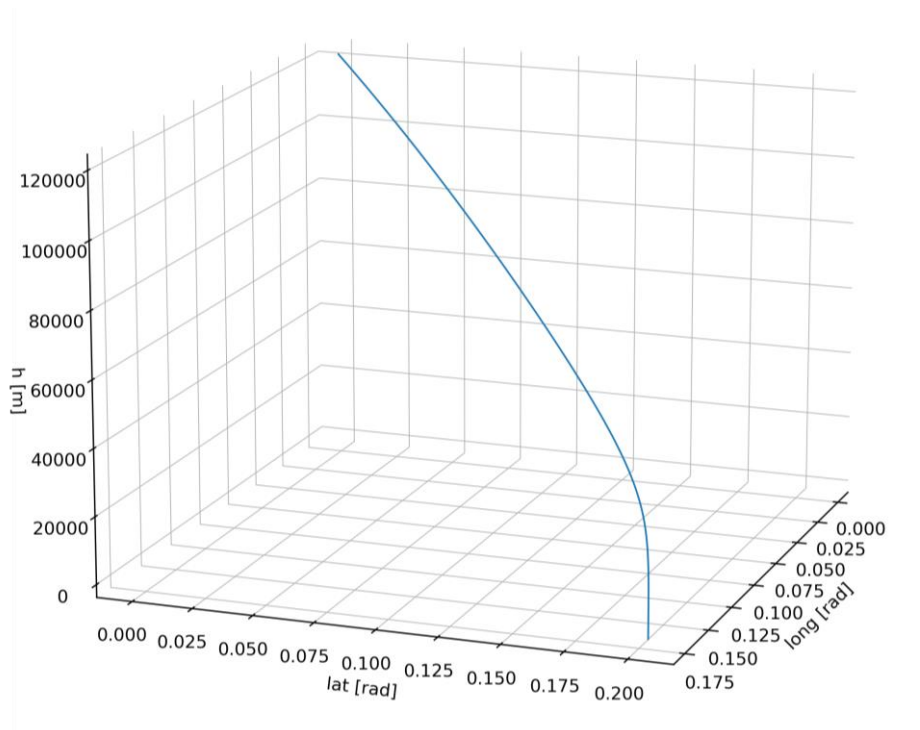


Figura 4.18 – Caso de Estudo 3: Representação 3D da trajetória de reentrada.

O radar, de coordenadas dadas pelas equações (4.4 - 4.6) rastreia a trajetória da figura 4.18 através da equação (4.22). O resultado destas medições está ilustrado na figura 4.19.

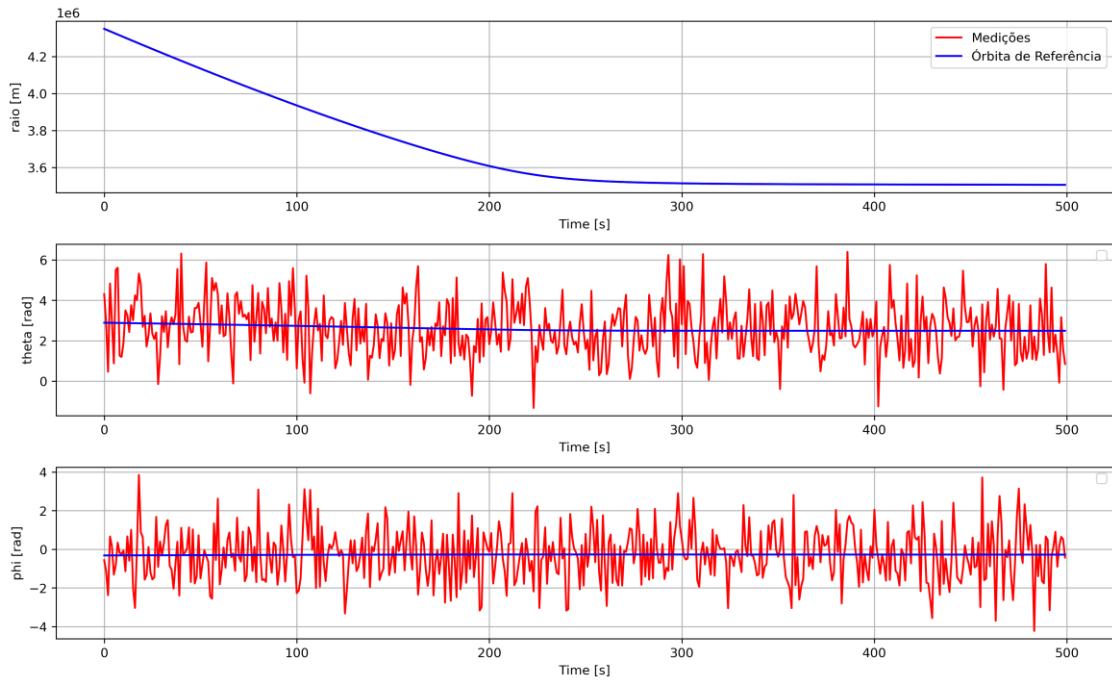


Figura 4.19 – Caso de Estudo 3: Medições realizadas pelo radar.

O desvio padrão de cada parâmetro é:

$$\begin{aligned} \sigma_Q &= \sqrt{0.01} & \sigma_R &= \sqrt{0.1} \\ \sigma_r &= \sqrt{10} & \sigma_\theta &= \sqrt{2} & \sigma_\phi &= \sqrt{2} \\ \sigma_w &= \sqrt{90} & \sigma_v &= \sqrt{90} \end{aligned}$$

Sendo que  $\sigma_Q$  e  $\sigma_R$  representam o desvio padrão utilizado nas matrizes de covariância  $Q_k$  e  $R_k$ , respetivamente;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\phi$  representam o desvio padrão associado a cada coordenada  $(r, \theta, \phi)$ , respetivamente;  $\sigma_w$  e  $\sigma_v$  representam o desvio padrão associado às matrizes do ruído  $w_k$  e  $v_k$ , respetivamente.

O vetor de estado é dado pela equação (4.23) e as matrizes Jacobinas são obtidas através da equação (4.24). As condições de inicialização dos filtros (EKF e iEKF) são:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [6,50014e+06 \quad -3,03361e-01 \quad 2,42702e-01]$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 6,21956 & 6,21956 & 6,21956 \\ 6,21956 & 6,21956 & 6,21956 \\ 6,21956 & 6,21956 & 6,21956 \end{bmatrix}$$

O desempenho dos filtros é comparado e avaliado através do RMSE da posição e velocidade dado pelas equações (4.25) e (4.26), respetivamente. Os resultados estão representados nas figuras 4.20 - 4.23, onde a linha azul reflete o desempenho do EKF e a linha vermelha reflete o desempenho do iEKF.

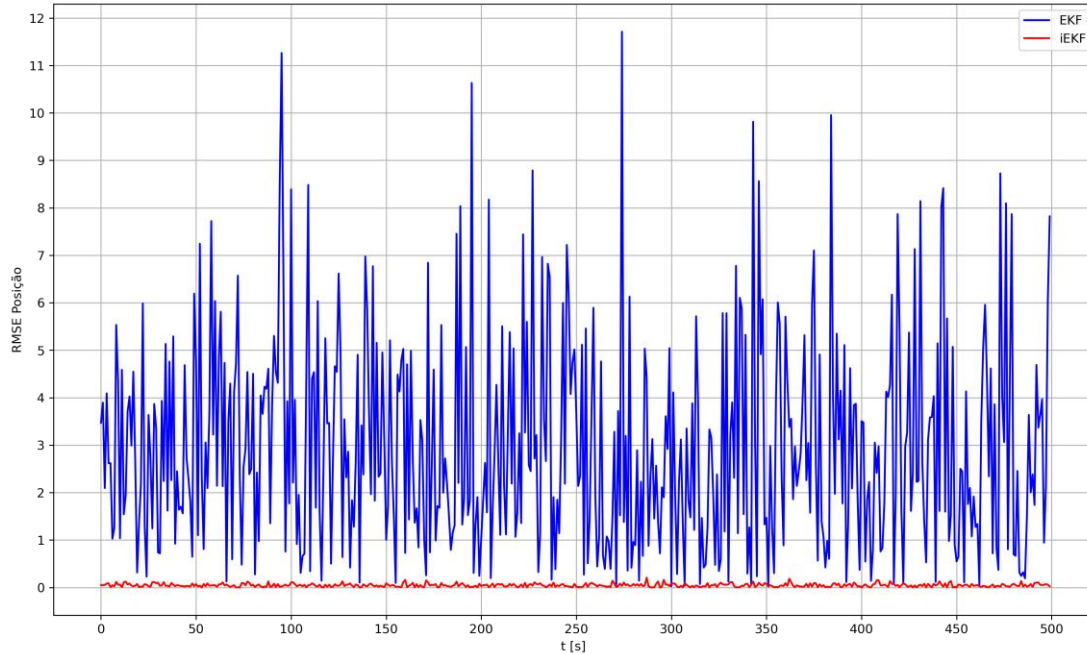


Figura 4.20 – Caso de Estudo 3: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição.

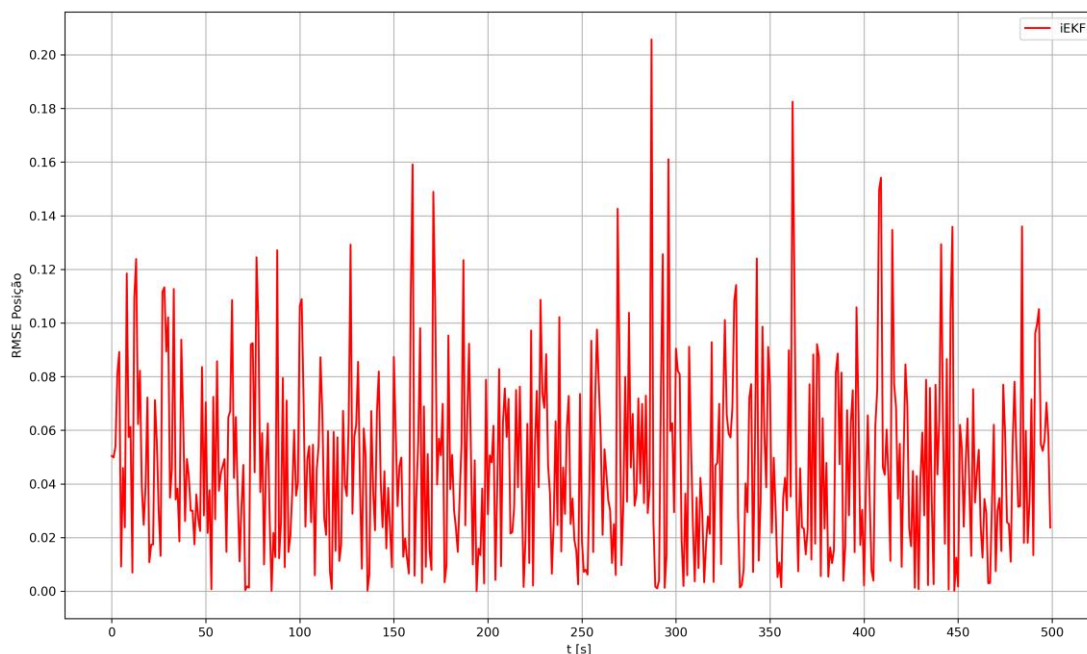


Figura 4.21 – Caso de Estudo 3: RMSE do iEKF para a posição.

É possível observar através da figura 4.20 e 4.21 que o EKF, tal como nos casos anteriores, apresenta um erro superior que o iEKF, sendo que este último apresenta um erro máximo de

aproximadamente 0,21 m, tal como constatado pela figura 4.21, enquanto o EKF apresenta um erro máximo de aproximadamente 12 m.

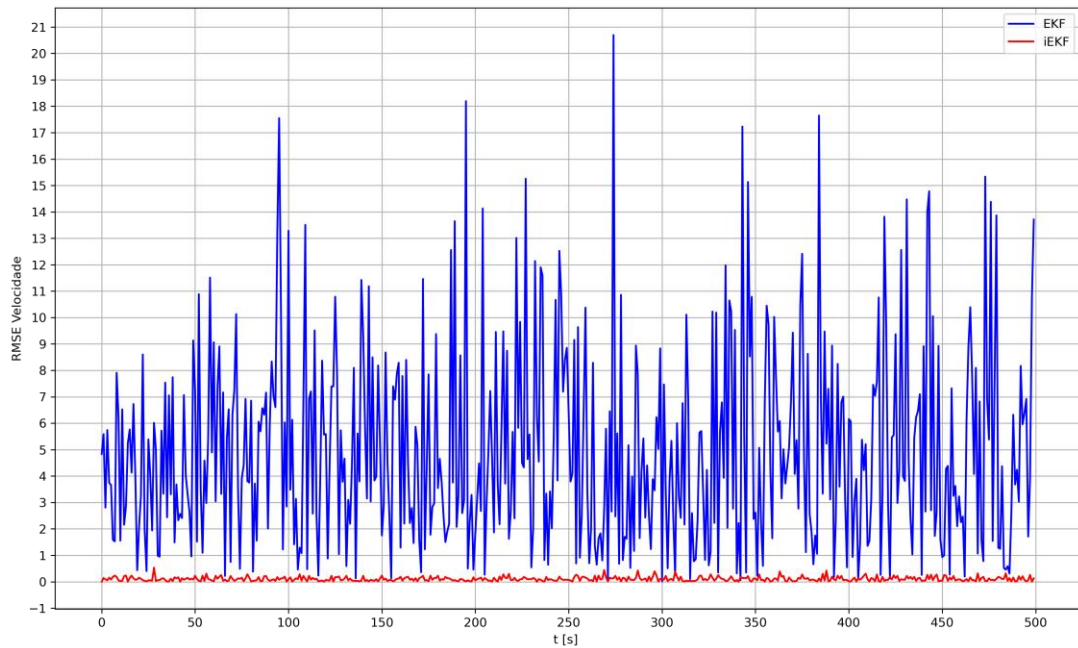


Figura 4.22– Caso de Estudo 3: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade.

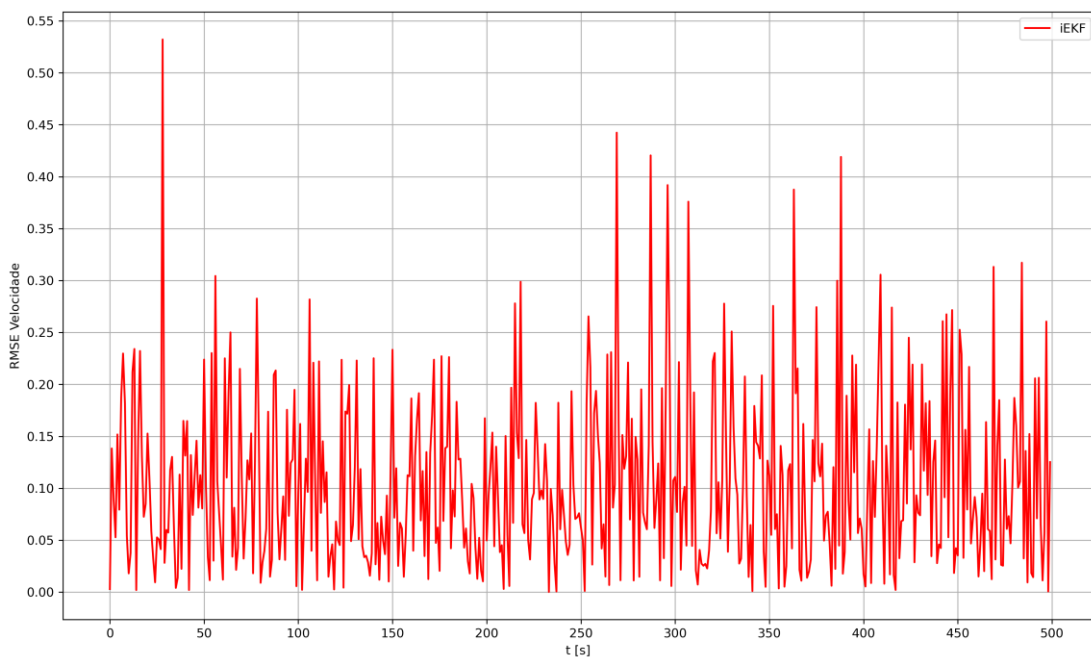


Figura 4.23 – Caso de Estudo 3: RMSE do iEKF para a velocidade.

Em relação às figuras 4.22 e 4.23 referentes ao erro da velocidade, verifica-se que, tal como acontece anteriormente, o desempenho do iEKF é mais preciso sendo que, este apresenta um erro máximo de aproximadamente 0.55 m/s e o EKF apresenta um erro máximo de 21 m/s, aproximadamente.

## 4.4 Caso 4: Trajetória de uma Aeronave Comercial

Nas últimas décadas houve um grande desenvolvimento na indústria da aviação e conseqüentemente, um espaço aéreo progressivamente mais lotado, em que todos os dias há cada vez mais aeronaves a voarem em simultâneo. Este crescimento expõe várias questões de segurança e gestão de espaço, onde é exigido o desenvolvimento de sistemas de navegação aptos a lidar com esta nova realidade, isto é, sistemas precisos e eficientes [227, 228].

Atualmente, os sistemas de navegação operam em “tempo-real” de modo a que eventuais correções na trajetória sejam efetuadas no imediato. O objetivo é manter a aeronave o mais próximo possível do plano de voo, ou seja, da trajetória planeada. Pois, na maioria das vezes, esta já é uma trajetória ótima e por isso mais conveniente. Outro objetivo é garantir que todas as normas de segurança de voo são executadas, e assim evitar, por exemplo, possíveis colisões entre aeronaves. Tudo isto só é possível com métodos de estimação precisos e eficientes.

Nas subsecções seguintes, a estimação de uma trajetória comercial é analisada.

### 4.4.1 Modelo Dinâmico

As equações da dinâmica de voo com 3 graus de liberdade são dadas por [229]:

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \psi \quad (4.45)$$

$$\dot{y} = V \cos \gamma \sin \psi \quad (4.46)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (4.47)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{m}(T \cos \varepsilon - D - W \sin \gamma) \quad (4.48)$$

$$\dot{\psi} = \left( \frac{1}{mV \cos \gamma} \right) (T \sin \varepsilon + L) \sin \beta \quad (4.49)$$

$$\dot{\gamma} = \left( \frac{1}{mV} \right) ((T \sin \varepsilon + L) \cos \beta - W \cos \gamma) \quad (4.50)$$

Sendo,  $x$  a coordenada do eixo X,  $y$  a coordenada do eixo Y,  $h$  a altitude,  $V$  a velocidade,  $\psi$  o ângulo de azimute do veículo,  $\gamma$  o ângulo da trajetória de voo,  $\beta$  o ângulo de inclinação do veículo,  $D$  a resistência (arrasto) do veículo dada pela equação (4.41),  $L$  a sustentação do veículo dada pela equação (4.42),  $\varepsilon$  o ângulo de ataque referente à tração,  $g$  a aceleração gravítica,  $W$  o peso do veículo dado por  $W = mg$ , onde  $m$  é a sua massa.

A figura 4.24 ilustra uma trajetória típica de uma aeronave comercial. É importante notar que a figura não está representada à escala real, mas o intuito é ilustrar as principais fases de voo.



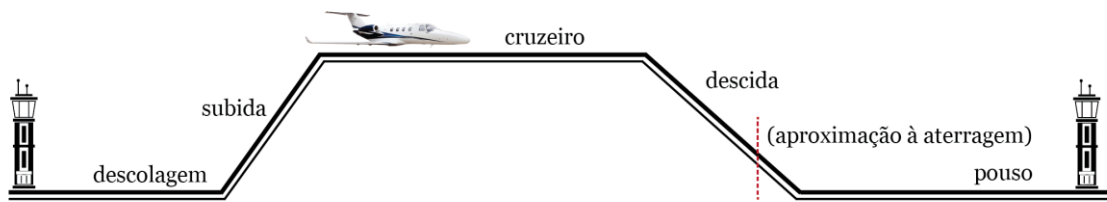
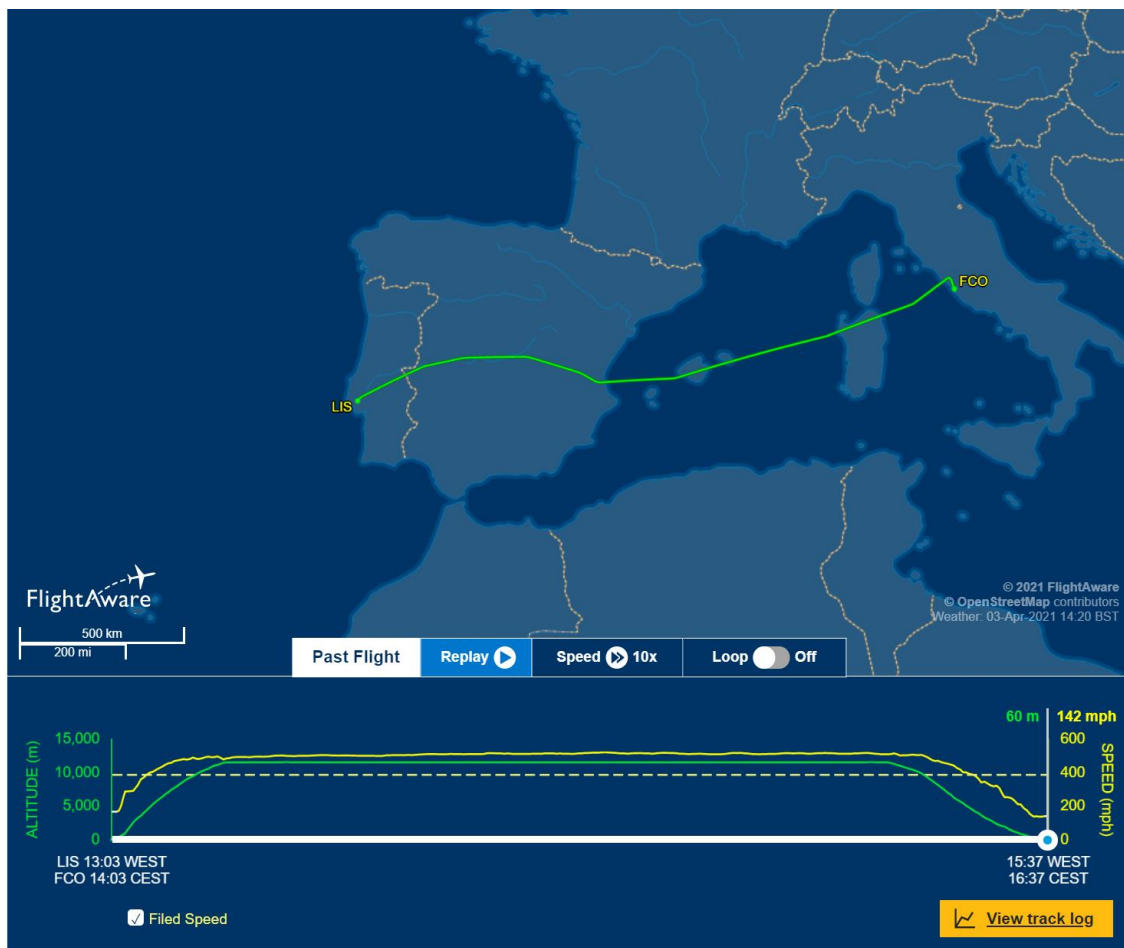


Figura 4.24 – Fases de voo.

#### 4.4.2 Simulações e Resultados

Neste caso de estudo, a trajetória de referência foi projetada com dados reais, ou seja, esta trajetória foi voada por uma aeronave comercial que efetuou um voo entre Lisboa e Roma. Os dados foram obtidos pelo site: <https://uk.flightaware.com/>, que permite rastrear aeronaves em tempo-real e obter os dados de voo de forma gratuita. Alguns dos dados disponíveis são: o tipo de aeronave, a sua posição, altitude, velocidade e tempo. A figura 4.25 ilustra a trajetória escolhida, tal como apresentada no site Flightware.



Fonte: <https://uk.flightaware.com/>

Figura 4.25 – Trajetória de uma aeronave comercial (entre Lisboa e Roma).

A trajetória da figura 4.25 pode ser representada em coordenadas cartesianas  $(x, y)$  juntamente com a altitude,  $h$ , ou seja, em relação a  $(x, y, h)$ , tal como representado na figura 4.26.

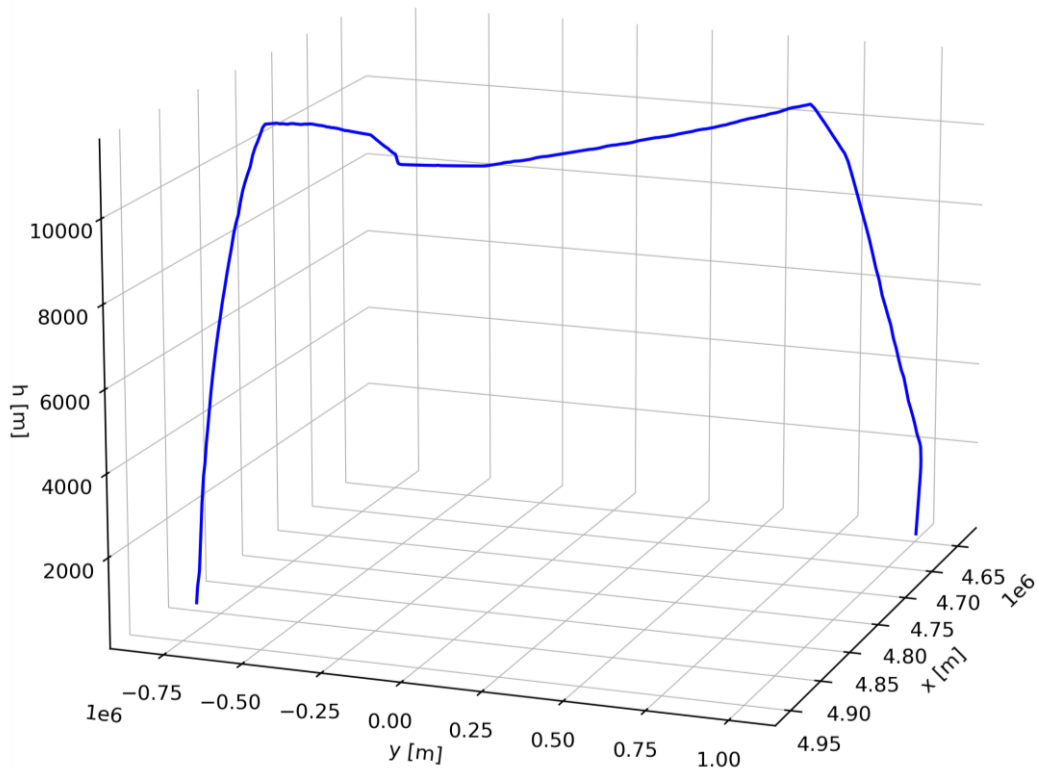


Figura 4.26 – Caso de Estudo 4: Representação 3D da trajetória de referência.

O radar de coordenadas dadas pelas equações (4.4 – 4.6) rastreia a trajetória da figura 4.26 através da equação (4.22). A figura 4.27 ilustra este seguimento. O desvio padrão utilizado em cada parâmetro é:

$$\begin{aligned}\sigma_Q &= \sqrt{0.01} & \sigma_R &= \sqrt{0.1} \\ \sigma_r &= \sqrt{10} & \sigma_\theta &= \sqrt{2} & \sigma_\phi &= \sqrt{2} \\ \sigma_w &= \sqrt{90} & \sigma_v &= \sqrt{90}\end{aligned}$$

Sendo que  $\sigma_Q$  e  $\sigma_R$  representam, respetivamente, o desvio padrão utilizado nas matrizes de covariância  $Q_k$  e  $R_k$ ;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\phi$  representam, respetivamente, o desvio padrão associado a cada coordenada  $(r, \theta, \phi)$ ;  $\sigma_w$  e  $\sigma_v$  representam o desvio padrão associado às matrizes do ruído  $w_k$  e  $v_k$ , respetivamente.

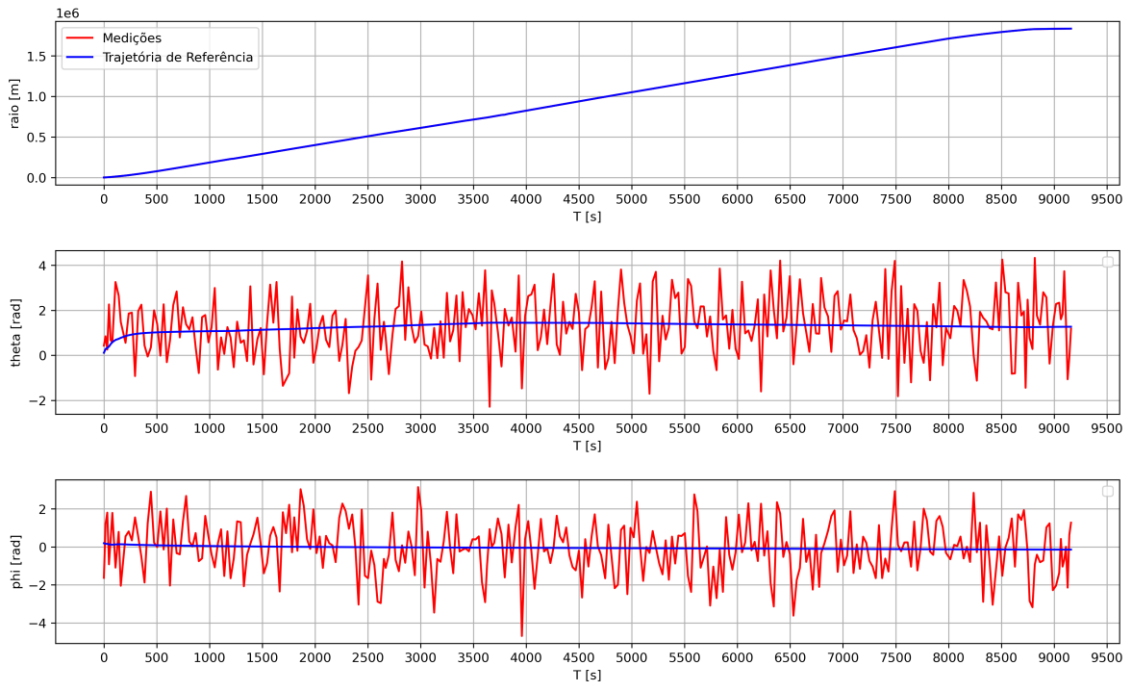


Figura 4.27 – Caso de Estudo 4: Medições realizadas pelo radar.

A figura 4.27 ilustra o resultado do seguimento radar, ou seja, ilustra as medições do radar sobre a trajetória comercial entre Lisboa e Roma. É importante mencionar que a coordenada  $r$  também possui ruído, mas como a sua escala é elevada, o seu gráfico aparenta ser uma linha.

O vetor de estado é dado pela equação (4.23) e as matrizes Jacobianas pela equação (4.24). Para inicializar os algoritmos (EKF e iEKF) foi considerado os seguintes valores:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [4915393,87294 \quad -790309,17542 \quad 3973868,64073]$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 13,02144 & 13,02144 & 13,02144 \\ 13,02144 & 13,02144 & 13,02144 \\ 13,02144 & 13,02144 & 13,02144 \end{bmatrix}$$

Todas as condições são exatamente iguais para ambos os filtros, de modo a garantir que as diferenças nos resultados são única e exclusivamente devido às alterações propostas nesta tese.

O desempenho dos filtros é avaliado através do RMSE da posição e velocidade dado pelas equações (4.25) e (4.26), respetivamente. Os resultados estão representados nas figuras 4.28 - 4.31, sendo que a linha a azul representa o erro do EKF e a linha a vermelho representa o erro do iEKF.

A figura 4.28 e 4.29 representam o RMSE da posição. É possível observar que o EKF possui um erro máximo de 23 m e o iEKF possui um erro máximo de 0,21 m.

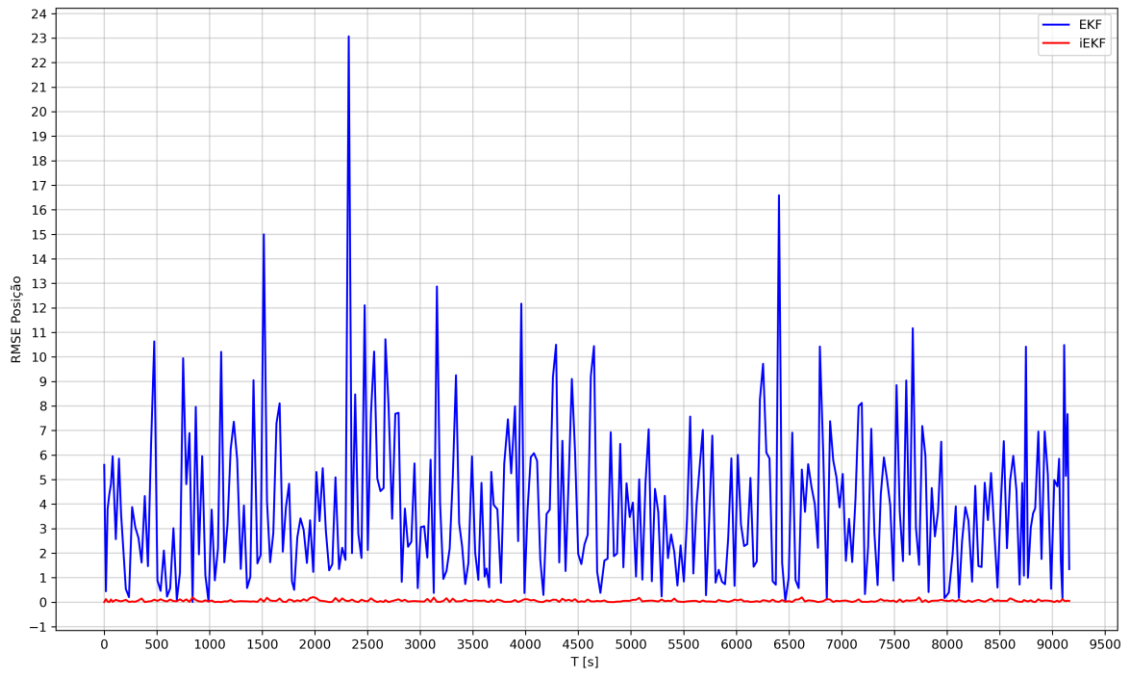


Figura 4.28 – Caso de Estudo 4: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a posição.

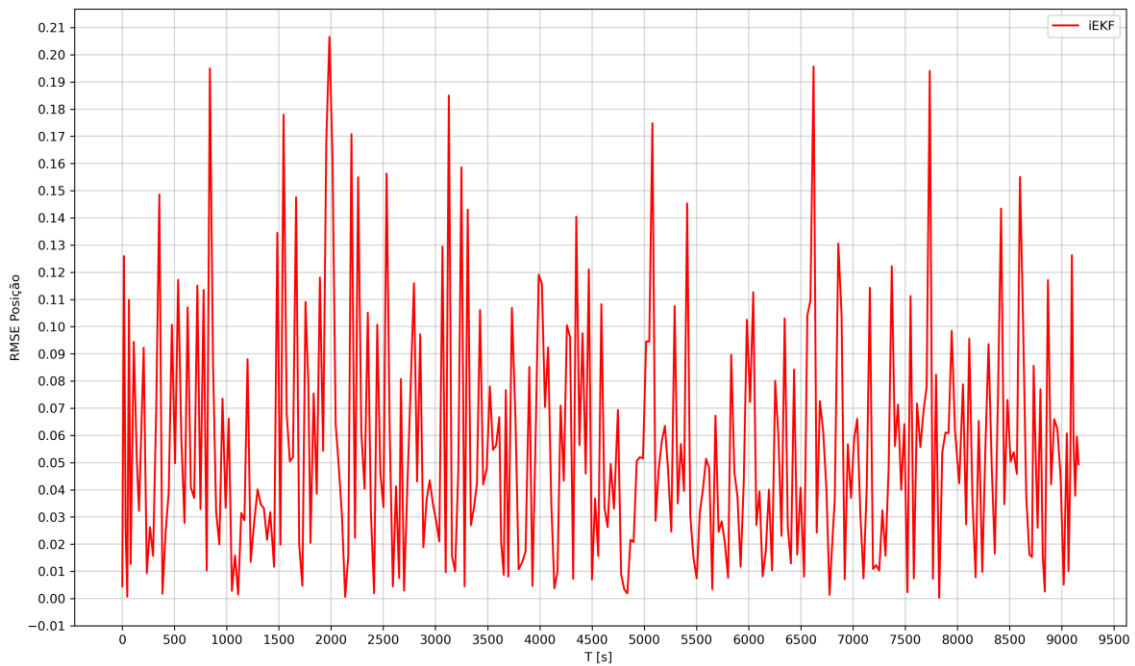


Figura 4.29 – Caso de Estudo 4: RMSE do iEKF para a posição.

As figuras 4.30 e 4.31 ilustram o RMSE da velocidade. O EKF possui um erro máximo de 38 m/s enquanto, o iEKF possui um erro máximo de 0,48 m/s.

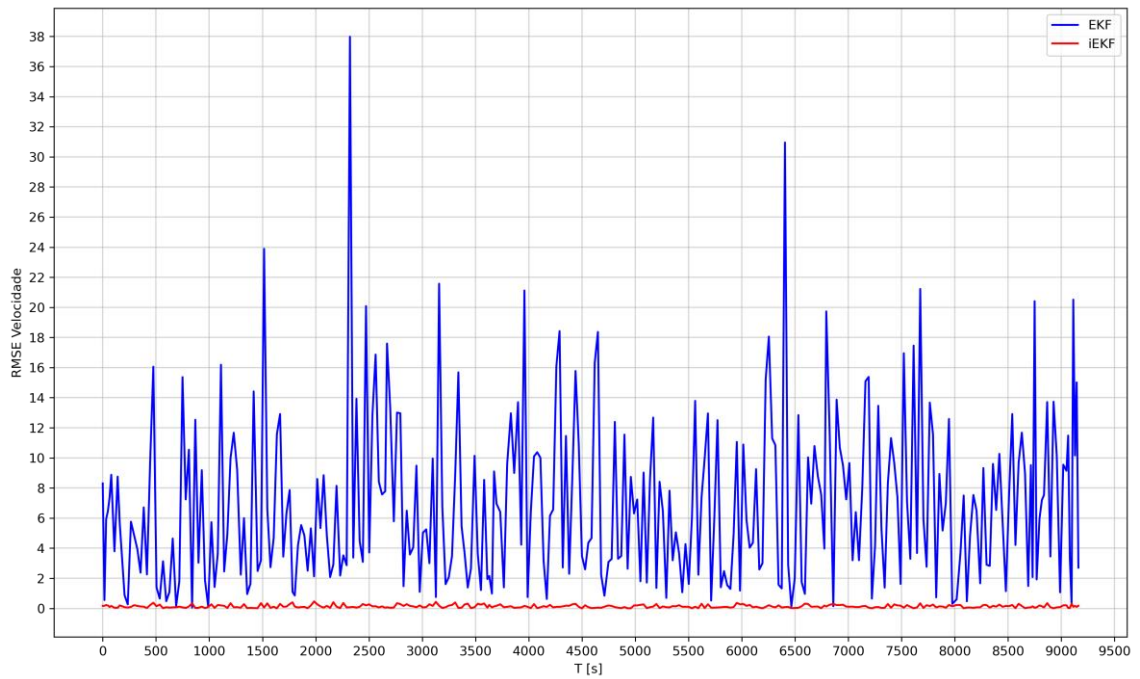


Figura 4.30 – Caso de Estudo 4: Comparação do RMSE do EKF e iEKF para a velocidade.

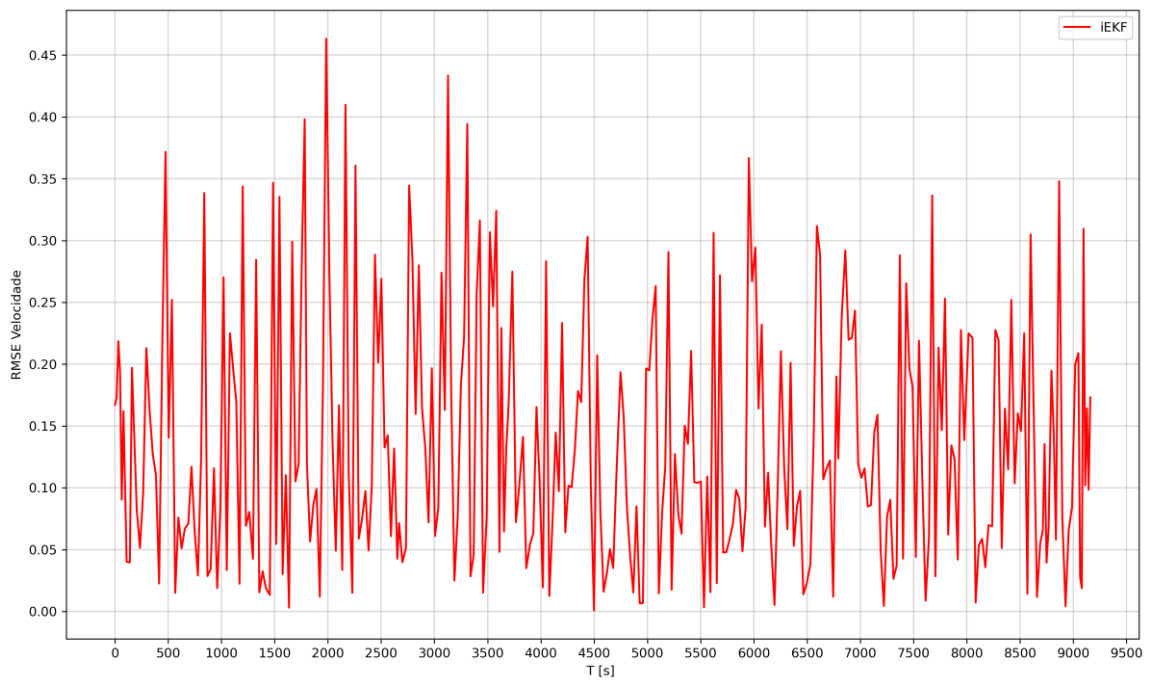


Figura 4.31 – Caso de Estudo 4: RMSE do iEKF para a velocidade.

É possível observar que os picos da figura 4.31, referentes ao iEKF possuem uma tendência a diminuir ao longo do tempo, ou seja, a convergir, o que pode ser interpretado como: o algoritmo do iEKF possui uma maior capacidade de adaptar-se às não-linearidades do modelo.

## **4.5 Conclusão**

Este capítulo tem como principal objetivo validar o algoritmo do iEKF. Os casos de estudo analisados foram: a estimação de órbitas de satélites artificiais, transferências orbitais, reentradas na atmosfera de veículos aeroespaciais e a estimação de trajetórias de aeronaves comerciais, onde o desempenho do EKF e iEKF é comparado através do RMSE.

# Capítulo 5

## 5. Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusão

O processo de estimar os parâmetros que descrevem o comportamento de um sistema dinâmico a partir de medições com ruído denomina-se por filtragem ou estimação. No campo aeroespacial esta é uma temática de elevada relevância, pois a natureza dos sistemas e aplicações exige métodos excepcionalmente rápidos, eficazes e precisos. Principalmente em áreas como o seguimento radar, navegação inercial e aviso de colisão. A maior dificuldade está em desenvolver métodos de filtragem que sejam capazes de lidar não só com as incertezas e perturbações do meio envolvente, mas também com a complexidade dos sistemas não-lineares e com as imprecisões inerentes aos instrumentos de aquisição de dados.

Nas últimas décadas, os filtros de Kalman foram a ferramenta mais utilizada para solucionar esta problemática, em especial o filtro de Kalman estendido (EKF). Os métodos correntes ou são baseados em aproximações locais e lineares do sistema, ou são baseados em métodos derivados dos algoritmos de Monte-Carlo, que por sua vez, requerem cálculos intensivos e tempos computacionais elevados que podem limitar o desempenho do próprio sistema. O EKF é baseado no pressuposto de que uma linearização local do sistema é suficiente para lidar com as suas não-linearidades. A sua acessível abordagem contribuiu para a sua popularidade, especialmente na engenharia. Porém, perante sistemas altamente não-lineares, este apresenta diversas limitações, tais como, estimativas erráticas, comportamentos instáveis e divergentes.

De modo a colmatar algumas destas limitações esta tese propôs um algoritmo ótimo e adaptativo baseado no EKF. Para alcançar este objetivo foi necessário completar uma série de outros objetivos de igual importância. Primeiro, foi realizada uma análise ao problema do seguimento radar. Segundo, foi feita uma análise aos métodos de filtragem de Kalman não-linear: EKF, UKF, CKF e EnKF em que são analisados os algoritmos, vantagens e limitações. De seguida, é proposto um filtro de Kalman estendido melhorado, ótimo e adaptativo, denominado por *improved Extended Kalman Filter* (iEKF).

O iEKF é considerado ótimo porque minimiza o erro final das estimativas, adaptativo porque ajusta os seus parâmetros iterativamente sempre que uma nova medição está disponível e é baseado no EKF porque este é o filtro mais popular. A adaptabilidade do iEKF permite que este:

1. Diminua os erros inerentes à modelação do sistema através do ponto de linearização proposto, pois este é atualizado (adaptado) em cada iteração do filtro.

2. Diminua os erros associados à matriz de covariância através do uso da norma de Frobenius como fator de correção.
3. Diminua os erros associados aos momentos estatísticos do ruído através de uma implementação adaptativa das matrizes Q e R.

O iEKF foi validado em quatro casos de estudo, sendo eles:

- Estimção de uma órbita de um satélite artificial;
- Estimção de uma transferência orbital de um veículo aeroespacial;
- Estimção de uma reentrada balística na atmosfera;
- Estimção de uma trajetória de uma aeronave comercial.

Em que, o principal objetivo era estimar a posição e a velocidade dos veículos aeroespaciais da forma mais precisa possível. O EKF e o iEKF foram ambos implementados e comparados. Todas as condições iniciais foram idênticas para ambos os métodos, de forma a garantir que as diferenças nos resultados são única e exclusivamente devido às alterações propostas. O critério de comparação utilizado foi o RMSE (*Root Mean Square Error*).

Os resultados demonstram que ao otimizar e adaptar as matrizes de covariância, as matrizes Jacobianas e as matrizes associadas ao ruído obtém-se estimativas mais precisas, confiáveis e estáveis. Verificou-se que o iEKF apresenta valores de RMSE substancialmente mais pequenos, quando em comparação com o EKF, o que permite afirmar que este possui uma maior capacidade para lidar com sistemas não-lineares.

As simulações demonstraram que o iEKF apresenta um erro máximo de 0,21 m em contraste ao EKF que apresenta um erro máximo de 23 m para a estimção da posição. Em relação à estimção da velocidade, o iEKF apresenta um erro máximo de 0,55 m/s e o EKF apresenta um erro máximo de 38 m/s, o que é uma diferença relativamente grande.

É importante referir que as alterações propostas não alteram a complexidade computacional, ou seja, o iEKF e o EKF possuem a mesma complexidade e consequentemente o mesmo tempo computacional. Porém, a estrutura adaptativa do iEKF exige que este seja implementado em situações *online*, isto porque as matrizes Jacobianas, as matrizes de covariância e o ganho de Kalman dependem diretamente das medições.

Em suma, o iEKF é um método promissor para a estimção de estados, com potencial para substituir o clássico EKF, especialmente para aplicações aeroespaciais com uma vertente online. O iEKF é um algoritmo robusto, com parâmetros adaptativos eficientes e fáceis de implementar. Desde as novas matrizes Jacobianas, ao fator de correção da matriz de covariância *a priori*, até ao processo de inovação das matrizes de ruído, o iEKF é um algoritmo sem parâmetros artificiais nem empíricos. A sua estrutura adaptativa permite que filtro tenha capacidade de



melhorar e adaptar os seus resultados de uma forma autónoma e ideal. Nos casos de estudo analisados foram observadas melhorias significativas na estimação com o uso do iEKF.

## **5.2 Trabalhos Futuros**

Com os avanços da tecnologia, os sistemas de navegação estão cada vez mais presentes no nosso dia-a-dia e este desenvolvimento continua a exigir métodos de filtragem cada vez mais flexíveis, robustos e precisos. E apesar da grande pesquisa científica neste campo, ainda há margem para progressos.

Esta tese pretende contribuir para a filtragem não-linear adaptativa propondo o filtro de Kalman estendido melhorado e adaptativo (iEKF). As aplicações consideradas assumem condições de ruído branco e Gaussiano. Porém, seria importante alargar esta análise a sistemas/aplicações com outras condições de ruído, por exemplo, ruído não-Gaussiano e/ou não-branco.

Apesar de todas as simulações desta tese terem sido implementadas de uma forma realística, é importante validar o iEKF com dados reais. O caso de estudo 4 foi simulado com dados reais, contudo é importante expandir esta validação a outros casos, em que os modelos de perturbações sejam incluídos.

Seria também interessante analisar o desempenho do iEKF em aplicações fora do sector aeroespacial, por exemplo em sistemas de posicionamento de acústica subaquática.



# Referências Bibliográficas

- [1] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press Inc., New York, USA and London, UK, 1970.
- [2] Y. Bulut, "Applied Kalman Filter Theory," PhD Thesis, Northeastern University, Massachusetts, USA, 2011.
- [3] B. C. K. Pakki, "Nonlinear State Estimation Algorithms and Their Applications," PhD Thesis, University of Leicester, Leicester, UK, 2012.
- [4] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H infinity, and Nonlinear Approaches*, John Wiley & Sons Inc, Hoboken, New Jersey, USA, 2006.
- [5] K. P. B. Chandra, and D. W. Gu, *Nonlinear Filtering: Methods and Applications*, Springer, Cham, Switzerland, 2019.
- [6] M. Doumiati, A. Charara, A. Victorino, and D. Lechner, *Vehicle Dynamics Estimation using Kalman Filtering*, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, UK and USA, 2013.
- [7] D. J. Jwo, F. C. Chung, T. P. Weng, *Adaptive Kalman Filter for Navigation Sensor Fusion, Sensor Fusion, and its Applications*, Ciza Thomas, IntechOpen, 2010, DOI: 10.5772/9957.
- [8] A. Mohamed, K. Schwarz, Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS, *Journal of Geodesy*, vol. 73, pp. 193–203, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1007/s001900050236>.
- [9] Y. Yang, W. Gao, An Optimal Adaptive Kalman Filter, *Journal of Geodesy*, vol. 80, pp. 177–183, 2006. DOI <https://doi.org/10.1007/s00190-006-0041-0>
- [10] W. Ding, J. Wang, C. Rizos, Improving Covariance Based Adaptive Estimation for GPS / INS Integration, *The Journal of Navigation*, vol. 60, pp. 517–529, 2007. DOI: doi:10.1017/S0373463307004316.
- [11] M. S. Grewal, and A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2001.
- [12] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, Volume 1, Academic Press Inc., New York, USA, 1979.
- [13] H. W. Sorenson, "Least-Squares estimation: from Gauss to Kalman," *IEEE Spectrum*, vol. 7, no.7, pp. 63-68, 1970. DOI: 10.1109/MSPEC.1970.5213471.

- [14] N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, UK, 1949.
- [15] A. Kolmogorov, "Interpolation and Extrapolation of Stationary Random Sequences," *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 5, pp. 3–14, 1941.
- [16] T. Kailath, "An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part I: Linear Filtering in Additive White Noise," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, no. 6, pp. 646–655, 1968. DOI: 10.1109/TAC.1968.1099025.
- [17] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3662552>.
- [18] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear Estimation*, 1<sup>st</sup> edition, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2000.
- [19] K. Bousson, N. Maia, and A. Lebres, "Model Uncertainty Approach to Aircraft Angular Rate Estimation Using Kalman-Bucy Filtering," *International Review of Aerospace Engineering (IREASE)*, vol. 4, no. 6, pp. 307-314, 2011.
- [20] L. A. McGee, and S. F. Schmidt, "Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry," *NASA Technical report*, NASA-TM-86847, pp. 1-25, 1985.
- [21] M. S. Grewal, and A. P. Andrews, "Applications of Kalman Filtering in Aerospace: 1960 to the Present," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 30, no. 3, pp. 69-78, 2010. DOI: 10.1109/MCS.2010.936465
- [22] Nasa, "Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry," Ames - Research Center, Moffett Field, California, 2019. Available: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19860003843.pdf>
- [23] G. Welch, and G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, Chapel Hill, NC 27599-3175, Siggraph, 2001.
- [24] M. Coelho, K. Bousson, and K. Ahmed, "Survey of Nonlinear State Estimation in Aerospace Systems with Gaussian Priors," *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, vol. 7, no. 6, pp. 495-516, 2020. DOI: 10.12989/aas.2020.7.6.495.

- [25] T. Lefebvre, H. Bruyninckx, and J. Schutter, "Kalman Filters for Non-Linear Systems: A Comparison of Performance," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 7, pp. 639-653, 2004. DOI: 10.1080/00207170410001704998.
- [26] R. Mehra, "A Comparison of Several Nonlinear Filters for Reentry Vehicle Tracking," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 4, pp. 307-319, 1971. DOI: 10.1109/TAC.1971.1099744.
- [27] M. Coelho, and K. Bousson, "Adaptive Nonlinear Filter and Optimal Radar Tracking of Aerospace Vehicles," *2nd Doctoral Congress of Engineering (DCE)*, Porto, Portugal, 8<sup>th</sup> June 2017.
- [28] M. Coelho, and K. Ahmed, "Survey of Nonlinear State Estimation Based on Kalman Filtering," *International Congress on Engineering (ICEUBI)*, 5-7 December, Covilhã, Portugal, 2017.
- [29] Y. Yang, and Z. Zhou, "Attitude determination: with or without spacecraft dynamics," *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, vol. 4, no. 3, pp. 335-351, 2017. DOI: <https://doi.org/10.12989/aas.2017.4.3.335>.
- [30] X. Jiang, S. Li, T. Tao, and B. Wang, "Multi-information Fusion-based Localization Algorithm for Mars Rover," *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, vol. 1, no. 4, pp. 455-469, 2014. DOI: <https://doi.org/10.12989/aas.2014.1.4.455>.
- [31] R. H. Bishop, and A. C. Antoulas, "Nonlinear approach to aircraft tracking problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 17, no. 5, pp. 1124-1130, 1994. DOI: 10.2514/3.21319.
- [32] M. Coelho, and K. Bousson, "Nonlinear Estimation of Orbital Trajectories from Radar Measurements," *Mechanical Engineering Conference (CEM)*, Porto, Portugal, 1-3 June, 59, 2016.
- [33] M. Coelho, and K. Bousson, "Radar Based Nonlinear Orbital Trajectory Estimation," *International Journal of Research in Aeronautical and Mechanical Engineering*, vol. 5, no. 4, pp. 12-25, 2017. ISSN: 2321-3051
- [34] G. Rigatos, and S. Tzafestas, "Extended Kalman filtering for fuzzy modelling and multi-sensor fusion," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 251-266, 2007. DOI: 10.1080/01443610500212468.

- [35] L. C. Zhai, C. L. DeMarco, and T. A. Lipo, "An Extended Kalman Filter Approach to Rotor Time Constant Measurement in PWM Induction Motor Drives," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, no. 1, pp. 96-104, 1992. DOI: 10.1109/28.120217.
- [36] M. Coelho, K. Ahmed, and K. Bousson, "Nonlinear Filtering of Stochastic Systems with Gaussian Uncertainties," *4<sup>o</sup> Encontro de Jovens Investigadores do LAETA (4EJIL)*, Covilhã, Portugal, 9-10 November 2017.
- [37] S. Kluge, K. Reif, and M. Brokate, "Stochastic Stability of the Extended Kalman Filter with Intermittent Observations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 2, pp. 514-518, 2010. DOI: 10.1109/TAC.2009.2037467.
- [38] K. K. Ahn, and D. Q. Truong, "Online Tuning Fuzzy PID Controller using Robust Extended Kalman Filter," *Journal of Process Control*, vol. 19, no. 6, pp. 1011-1023, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2009.01.005>.
- [39] L. Ljung, "Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 1, pp. 36-50, 1979. DOI: 10.1109/TAC.1979.1101943.
- [40] S. F. Schmidt, "The Kalman Filter – Its Recognitions and Development for Aerospace Applications," *Journal of Guidance and Control*, vol. 4, no. 1, pp. 4-7, 1981. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.19713>.
- [41] K. Reif, S. Gunther, E. Yaz, and R. Unbehauen, "Stochastic Stability of the Discrete-Time Extended Kalman Filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, 1999. DOI: 10.1109/9.754809.
- [42] Y. R. Kim, S. K. Sul, and M. H. Park, "Speed Sensorless Vector Control of Induction Motor using Extended Kalman Filter," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 30, no. 5, pp. 1225-1233, 1994. DOI: 10.1109/28.315233.
- [43] Y. Song, and J. W. Grizzle, "The Extended Kalman Filter as a Local Asymptotic Observer for Nonlinear Discrete-Time Systems," *1992 American Control Conference (IEEE)*, Chicago, USA, 24-26 June 1992, pp. 3365-3369. DOI: 10.23919/ACC.1992.4792775.

- [44] J. H. Lee, and N. L. Ricker, "Extended Kalman Filter Based Nonlinear Model Predictive Control," *1993 American Control Conference (IEEE)*, San Francisco, USA, 2-4 June 1993, pp. 1895-1899. DOI: 10.23919/ACC.1993.4793207.
- [45] R. P. Wishner, J. A. Tabaczynski, and M. Athans, "A Comparison of Three Non-linear Filters," *Automatica (Journal of IFAC)*, vol. 5, no. 4, pp. 487-496, 1969. DOI: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(69\)90110-1](https://doi.org/10.1016/0005-1098(69)90110-1).
- [46] R. Mehra, C. Rago, and S. Seereeram, "Autonomous Failure Detection, Identification and Fault-Tolerant Estimation with Aerospace Applications," *1998 IEEE Aerospace Conference Proceedings*, Snowmass at Aspen, CO, 28 March 1998, pp. 133-138. DOI: 10.1109/AERO.1998.687904.
- [47] Y. R. Lin, and Z. L. Deng, "Extended Kalman Filtering for Satellite Orbital Attitude Estimation Based on Gibbs Vector," *Journal of Guidance, Navigation and Control*, vol. 27, no. 3, pp. 509-511, 2004. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.10338>.
- [48] R. Dhaouadi, N. Mohan, and L. Norum, "Design and implementation of an Extended Kalman Filter for the State Estimation of a Permanent Magnet Synchronous Motor," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 6, no. 3, pp. 491-497, 1991. DOI: 10.1109/63.85891.
- [49] M. Di, E. M. Joo, and L. H. Beng, "A Comprehensive Study of Kalman Filter and Extended Kalman Filter for Target Tracking in Wireless Sensor Networks," *2008 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Singapore, Singapore, 12-15 October 2008. DOI: 10.1109/ICSMC.2008.4811719.
- [50] G. Evensen, "Sequential Data Assimilation with a Nonlinear Quasi-Geostrophic Model using Monte Carlo Methods to Forecast Error Statistics," *Journal of Geophysical Research*, vol. 99, pp. 10143-10162, 1994. DOI:10.1029/94JC00572.
- [51] M. Katzfuss, J. R. Stroud, and C. K. Wikle, "Understanding the Ensemble Kalman Filter," *The American Statistician*, vol. 70, no. 4, pp. 350-357, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1080/00031305.2016.1141709>.
- [52] M. K. Tippett, J. L. Anderson, C. H. Bishop, T. M. Hamill, and J. S. Whitaker, "Ensemble Square-Root Filter," *Monthly Weather Review*, vol. 131, no. 7, pp. 1485-1490, 2003. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2003\)131<1485:ESRF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2003)131<1485:ESRF>2.0.CO;2).

- [53] R. J. Lorentzen, and G. Naevdal, "An Iterative Ensemble Kalman Filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 8, pp. 1990-1995, 2011. DOI: 10.1109/TAC.2011.2154430.
- [54] G. Burger, J. Van Leeuwen, and G. Evensen, "Analysis Scheme in the Ensemble Kalman Filter," *Monthly Weather Review*, vol. 126, no. 6, pp. 1719-1724, 1998. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1998\)126<1719:ASITEK>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1998)126<1719:ASITEK>2.0.CO;2).
- [55] J. L. Anderson, "Ensemble Kalman Filters for Large Geophysical Applications," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 29, no. 3, pp. 66-82, 2009. DOI: 10.1109/MCS.2009.932222.
- [56] E. Ott, B. R. Hunt, I. Szunyogh, and A. V. Zimim, "A Local Ensemble Kalman Filter for Atmospheric Data Assimilation," *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, vol. 56, pp. 415-428, 2004. DOI: <https://doi.org/10.3402/tellusa.v56i5.14462>.
- [57] P. L. Houtekamer, and H. L. Mitchell, "Data Assimilation Using an Ensemble Kalman Filter Technique," *Monthly Weather Review*, vol. 126, no. 3, pp. 796-811, 1998. DOI: 10.1175/1520-0493(1998)126<0796:DAUAEK>2.0.CO;2.
- [58] P. L. Houtekamer, and H. L. Mitchell, "Ensemble Kalman Filtering," *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 131, pp. 3269-3289, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1256/qj.05.135>.
- [59] C. H. Bishop, B. J. Etherton, and S. J. Majumdar, "Adaptive Sampling with the Ensemble Transform Kalman Filter. Part I: Theoretical Aspects," *Monthly Weather Review*, vol. 129, no. 3, pp. 420-436, 2001. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2001\)129<0420:ASWTET>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2001)129<0420:ASWTET>2.0.CO;2).
- [60] H. L. Mitchell, P. L. Houtekamer, and G. Pellerin, "Ensemble Size, Balance, and Model-Error Representation in an Ensemble Kalman Filter," *Monthly Weather Review*, vol. 130, no. 11, pp. 2791-2808, 2002. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2002\)130<2791:ESBAME>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2002)130<2791:ESBAME>2.0.CO;2).
- [61] C. Snyder, and F. Zhang, "Assimilation of Simulated Doppler Radar Observations with an Ensemble Kalman Filter," *Monthly Weather Review*, vol. 131, no. 8, pp. 1663-1677, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1175//2555.1>.



- [62] B. Cui, and J. Zhang, "The Improved Ensemble Kalman Filter for Multisensor Target Tracking," *2008 International Symposium on Information Science and Engineering – IEEE*, Shanghai, China, 20-22 December 2008. DOI: 10.1109/ISISE.2008.272.
- [63] S. Gillijns, O. B. Mendoza, J. Chandrasekar, B. L. R. De Moor, D. S. Bernstein, and A. Ridley, "What is the Ensemble Kalman Filter and how well does it work?," *2006 American Control Conference – IEEE*, Minneapolis, USA, 14-16, June 2006. DOI: 10.1109/ACC.2006.1657419.
- [64] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A New Approach for Filtering Nonlinear Systems," *Proceedings of 1995 American Control Conference – ACC95*, Seattle, Washington, USA, 21-23 June 1995. pp. 1628-1632, DOI: 10.1109/ACC.1995.529783.
- [65] S. Julier, and J. K. Uhlmann, *A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions*, Robotics Research Group, Department of Engineering Science, University of Oxford: Oxford, UK, 1996.
- [66] S. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477–482, 2000. DOI: 10.1109/9.847726.
- [67] S. Julier, and J. K. Uhlmann, "Unscented Filtering and Nonlinear Estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401-422, 2004. DOI: 10.1109/JPROC.2003.823141.
- [68] E. A. Wan, and R. Merwe, "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation," *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, Lake Louise, Alberta, Canada, 4 October 2000. DOI: 10.1109/ASSPCC.2000.882463.
- [69] B. Akin, U. Orguner, and A. Ersak, "State Estimation of Induction Motor Using Unscented Kalman Filter," *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications – CCA2003*, Istanbul, Turkey, 25 June 2003, pp 915-919, DOI: 10.1109/CCA.2003.1223132.
- [70] J. Choi, T. H. Yeap, and M. Bouchard, "Online State–Space Modeling Using Recurrent Multilayer Perceptron's with Unscented Kalman Filter," *Neural Processing Letters*, vol. 22, pp. 69–84, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11063-005-2157-2>.

- [71] J. L. Crassidis, "Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 2, pp. 750-756, 2006. DOI: 10.1109/TAES.2006.1642588.
- [72] S. Haykin, *Kalman Filtering and Neural Networks*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2001.
- [73] G. E. Hovland, T. P. Hoff, and E. A. Gallestey, "Nonlinear estimation methods for parameter tracking in power plants," *Control Engineering Practice*, vol. 13, no. 11, pp. 1341-1355, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2004.11.010>
- [74] W. Li, and H. Leung, "Simultaneous Registration and Fusion of Multiple Dissimilar Sensors for Cooperative Driving," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 5, no. 2, pp. 84-98, 2004. DOI: 10.1109/TITS.2004.828169.
- [75] X. Ning, and J. Fang, "An Autonomous Celestial Navigation Method for LEO Satellites Based on Unscented Kalman Filter and Information Fusion," *Aerospace Science and Technology*, vol. 11, no. 2, pp. 222-228, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2006.12.003>.
- [76] A. Romanenko, and J. A. A. M. Castro, "The Unscented Filter as an Alternative to the EKF for Nonlinear State Estimation: A Simulation Case Study," *Computer and Chemical Engineering*, vol. 28, no. 3, pp. 347-355, 2004. DOI: 10.1016/S0098-1354(03)00193-5.
- [77] R. Merwe, E. A. Wan, and S. I. Julier, "Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion – Applications to Integrated Navigation," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Providence, Rhode Island, 16 August 2004. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2004-5120>.
- [78] M. St-Pierre, and D. Gingras, "Comparison between the unscented Kalman filter and the extended Kalman filter for the position estimation module of an integrated navigation information system," *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, Parma, Italy, 14-17 June 2004, pp. 831-835, DOI: 10.1109/IVS.2004.1336492.
- [79] F. Gustafsson, and G. Hendeby, "Some Relations Between Extended and unscented Kalman Filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, pp. 545-555, 2011. DOI: 10.1109/TSP.2011.2172431.

- [80] S. Särkkä, "On Unscented Kalman Filtering for State Estimation of Continuous-Time Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1631-1641, 2007. DOI: 10.1109/TAC.2007.904453.
- [81] R. Zhan, and J. Wan, "Iterated Unscented Kalman for Passive Target Tracking," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, no. 3, pp. 1155-1163, 2007. DOI: 10.1109/TAES.2007.4383605.
- [82] R. Kandepu, B. Foss, and L. Imsland, "Applying the Unscented Kalman Filter for Nonlinear State Estimation," *Journal of Process Control*, vol. 18, no. 7, pp. 753-768, 2008. DOI: 10.1016/j.jprocont.2007.11.004.
- [83] W. F. Leven, and A. D. Lanterman, "Unscented Kalman Filters for Multiple Target Tracking with Symmetric Measurement Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 2, pp. 370-375, 2009. DOI: 10.1109/TAC.2008.2008327.
- [84] T. F. Chan, P. Borsje, and W. Wang, "Application of Unscented Kalman Filter to Sensorless Permanent-Magnet Synchronous Motor Drive," *2009 IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, Miami, Florida, USA, 3-6 May 2009. DOI: 10.1109/IEMDC.2009.5075272.
- [85] J. L. Crassidis, and F. L. Markley, "Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, no. 4, pp. 536-542, 2003. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.5102>.
- [86] H. Zhan, G. Dai, J. Sun, and Y. Zhao, "Unscented Kalman Filter and its Nonlinear Application for Tracking a Moving Target," *Optik – Elsevier*, vol. 124, no. 20, pp. 4468-4471, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2013.03.013>.
- [87] T. Zhu, and H. Zheng, "Application of Unscented Kalman Filter to Vehicle State Estimation," *2008 ISECS – International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management*, Guangzhou, China, 3-4 August 2008. DOI: 10.1109/CCCM.2008.124.
- [88] I. Arasaratnam, "Cubature Kalman Filtering: Theory & Applications," PhD Thesis, McMaster University, Ontario, Canada, 2009.
- [89] I. Arasaratnam, and S. Haykin, "Cubature Kalman Filtering for Continuous-Discrete Systems: Theory and Simulations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 10, pp. 4977-4993, 2010. DOI: 10.1109/TSP.2010.2056923.

- [90] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith, "Novel Approach to Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation," *IEEE Proceedings F Radar and Signal Processing*, vol. 140, no. 2, pp. 107-113, 1993. DOI: 10.1049/ip-f-2.1993.0015.
- [91] Y. Ho, and R. Lee, "A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 9, no. 4, pp. 333-339, 1964.
- [92] D. J. Lee, "Nonlinear Bayesian Filtering with Applications to Estimation and Navigation", PhD Thesis, A&M University, Texas, USA, 2005.
- [93] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2001.
- [94] K. V. Yuen, P. F. Liang, and S. C. Kuok, "Online estimation of noise parameters for Kalman filter," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 47, no. 3, pp. 361-380, 2013. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2013.47.3.361>.
- [95] S. Särkkä, and A. Nummenmaa, "Recursive Noise Adaptive Kalman Filtering by Variational Bayesian Approximations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 3, pp. 596-600, 2009. DOI: 10.1109/TAC.2008.2008348.
- [96] I. Arasaratnam, and S. Haykin, "Cubature Kalman Filtering: A Powerful Tool for Aerospace Applications," *International Radar Conference*, Bordeaux, France, October 2009.
- [97] H. Pesonen, and R. Piché, "Cubature-based Kalman Filters for Positioning," *7<sup>th</sup> Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2010*, Dresden, Germany, 11-12 March 2010. DOI: 10.1109/WPNC.2010.5653829.
- [98] B. C. K. Pakki, D. W. Gu, and I. Postlethwaite, "Cubature Kalman Filter based Localization and Mapping," *IFAC Proceedings Volumes – Elsevier*, vol. 44, no. 1, pp. 2121-2125, 2011. DOI: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03104>.
- [99] J. Mu, and Y. L. Cai, "Iterated Cubature Kalman Filter and its Application," *IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems*, Kunming, China, 20-23 March 2011. DOI: 10.1109/CYBER.2011.6011759.
- [100] W. Huang, H. Xie, C. Shen, and J. Li, "A Robust Strong Tracking Cubature Kalman Filter for Spacecraft Attitude Estimation with Quaternion Constraint," *Acta*

- Astronautica Elsevier*, vol. 121, pp. 153-163, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.01.009>.
- [101] H. Liu, and W. Wu, "Strong Tracking Spherical Simplex-Radial Cubature Kalman Filter for Maneuvering Target Tracking," *Sensors*, vol. 17, no. 4, pp. 741-754, 2017. DOI: <https://doi.org/10.3390/s17040741>.
- [102] Y. Zhao, "Performance evaluation of Cubature Kalman Filter in a GPS/IMU tightly-coupled Navigation System," *Signal Processing – Elsevier*, vol. 119, pp. 67-79, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.07.014>.
- [103] A. Sharma, S. C. Srivastava, and S. Chakrabarti, "A Cubature Kalman Filter based Power System Dynamic State Estimator," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 66, no. 8, pp. 2036-2045, 2017. DOI: [10.1109/TIM.2017.2677698](https://doi.org/10.1109/TIM.2017.2677698).
- [104] L. Zhang, H. Yang, H. Lu, S. Zhang, H. Cai, and S. Qian, "Cubature Kalman Filtering for Relative Spacecraft Attitude and Position Estimation," *Acta Astronautica - Elsevier*, vol. 105, no. 1, pp. 254-264, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.09.007>.
- [105] P.H. Leon, S. Arulampalam, T. A. Lamahewa, and T. D. Abhayapala, "A Gaussian-Sum based Cubature Kalman Filter for Bearings-Only Tracking," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 1161-1176, 2013. DOI: [10.1109/TAES.2013.6494405](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.6494405).
- [106] J. Zarei, and E. Shokri, "Convergence Analysis of Non-Linear Filtering based on Cubature Kalman Filter," *IET Science, Measurement & Technology*, vol. 9, no. 3, pp. 294-305, 2015. DOI: [10.1049/iet-smt.2014.0056](https://doi.org/10.1049/iet-smt.2014.0056).
- [107] R. Battin, *Astronautical Guidance*, McGraw-Hill, New York, USA, 1964.
- [108] R. C. K. Lee, *Optimal Estimation, Identification, and Control*, the MIT Press, Cambridge, Massachusetts, UK, 1964.
- [109] R. Deutsch, *Estimation Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1965.
- [110] M. Aoki, *Optimization of Stochastic Systems*, Academic Press, New York, USA, 1967.
- [111] P. Liebelt, *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA, 1967.

- [112] R. Bucy, and P. Joseph, *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1968.
- [113] J. Meditch, *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, New York, USA, 1969.
- [114] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [115] B. Anderson, and J. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1979.
- [116] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, Volume 2, Academic Press Inc., New York, USA, 1982.
- [117] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, Volume 3, Academic Press Inc., New York, USA, 1984.
- [118] Y. Bar-Shalom, and X. R. Li, *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*, YBS Publishing, Storrs, Connecticut, USA, 1995.
- [119] Y. Bar-Shalom, and X. R. Li, *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*, YBS Publishing, Storrs, Connecticut, USA, 1998.
- [120] E. Brookner, *Tracking and Kalman Filtering Made Easy*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1998.
- [121] P. Zarchan, and H. Musoff, *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*, 3<sup>rd</sup> Edition, Progress in Astronautics and Aeronautics, Virginia, USA, 2009.
- [122] F. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [123] T. McGarty, *Stochastic Systems and State Estimation*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1974.
- [124] T. Kailath, *Lectures on Wiener and Kalman Filtering*, Springer-Verlag, New York, USA, 1981.
- [125] P. Ruymgaart, T. Soong, *Mathematics of Kalman-Bucy Filtering*, Springer-Verlag, New York, USA, 1985.
- [126] R. Stengel, *Optimal Control and Estimation*, Dover, New York, USA, 1994.
- [127] J. R. Raol, G. Gopalratnam, and B. Twala, *Nonlinear Filtering: Concepts and Engineering Applications*, Taylor & Francis Group LLC, Boca Raton, USA, 2017.

- [128] O. Montenbruck, and E. Gill, *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*, Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, German, 2000.
- [129] K. Punithakumar, "Nonlinear Filtering Algorithms for Multitarget Tracking," PhD Thesis, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, 2007.
- [130] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon, *Beyond the Kalman Filter – Particle Filters for Tracking Applications*, Artech House, Boston, USA, 2004.
- [131] S. Stergiopoulos, *Advanced Signal Processing Handbook: Theory and Implementation for Radar, Sonar and Imaging Real-Time Systems*, CRC Press LCL, Boca Raton, Florida, USA, 2000.
- [132] B. C. Wang, *Digital Signal Processing Techniques and Applications in Radar Image Processing*, John Wiley & Sons Inc., New Jersey, USA, 2008.
- [133] F. Carravetta, A. Germani, and M. Raimondi, "Polynomial Filtering for Linear Discrete Time Non-Gaussian Systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34, no. 5, pp. 1666-1690, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0363012993252899>.
- [134] R. E. Kalman, R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, no. 1, pp. 95-108, 1961. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3658902>.
- [135] P. Aditya, E. Apriliani, D. K. Arif, and K. Baihaqui, "Estimation of Three-Dimensional Radar Tracking using Modified Extended Kalman Filter," *International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation*, vol. 974, no. 1, pp. 1-9, 2018. DOI: 10.1088/1742-6596/974/ 1/012071.
- [136] W. M. Kuala, *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Toronto, USA, 1966.
- [137] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5<sup>th</sup> edition, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 2010.
- [138] J. L. Crassidis, and J. L. Junkins, *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series, New York, USA, 2004.
- [139] R. C. Dorf, and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13<sup>th</sup> edition, Pearson Education Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2017.
- [140] W. J. Palm, *Modeling, Analysis, and Control of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1999.

- [141] G. F. Franklin, J.D. Powell, and M. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3<sup>rd</sup> edition, Addison-Wesley Longman Inc, Menlo Park, Canada, 1998.
- [142] P. R. Bélanger, *Control Engineering: A modern approach*, Saunders College Publishing, Florida, USA, 1995.
- [143] S. M. Shinnars, *Modern Control System Theory and Design*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New York, USA, 1999.
- [144] C. L. Phillips, and R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.
- [145] F. Golnaraghi, and B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 9<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2010.
- [146] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2015.
- [147] R. E. Kalman, and R. W. Koepcke, "Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems using Generalized Performance Indexes", *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, vol. 80, pp. 1820–1826, 1958.
- [148] R. E. Kalman, and J. E. Bertram, "A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 267, no. 5, pp. 405–436, 1959. DOI: [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(59\)90093-6](https://doi.org/10.1016/0016-0032(59)90093-6).
- [149] R. E. Kalman, Y. C. Ho, and K. Narendra, "Controllability of Linear Dynamical Systems," *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, pp. 189–213, 1963.
- [150] G. Besançon, *Nonlinear Observers and Applications*, Springer, Berlin, Germany, 2007.
- [151] G. W. Haynes, and H. Hemes, "Nonlinear Controllability via Lie Theory," *SIAM Journal on Control*, vol. 8, no. 4, pp. 450-460, 1970. DOI: <https://doi.org/10.1137/0308033>.
- [152] R. Hermann, "On the accessibility problem in control theory," *International Syq. on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, New York: Academic Press, pp. 325-332, 1963.
- [153] E. W. Griffith, and K. S. Kumar, "On the Observability of Nonlinear Systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 35, no. 1, pp. 135-147, 1971. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(71\)90241-1](https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90241-1).



- [154] M. Hwang, and J. H. Seinfeld, "Observability of nonlinear systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 10, pp. 67–77, 1972 DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00934972>.
- [155] R. Hermann, and A. J. Krener, "Nonlinear controllability and Observability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pp. 728-740, 1977. DOI: 10.1109/TAC.1977.1101601.
- [156] S. R. Kou, D. L. Elliot, and T. J. Tarn, "Observability of nonlinear systems," *Information and Control*, vol. 22, no. 1, pp. 89-99, 1973. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(73\)90508-1](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(73)90508-1).
- [157] H. J. Sussmann, and V. Jurdjevic, "Controllability of nonlinear systems," *Journal of Differential Equations*, vol. 12, no. 1, pp. 95-116, 1972. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(72\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90007-1)
- [158] J. C. Spall, *Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2003.
- [159] E. Parzen, *Stochastic Processes*, Holden-Day, New York, USA, 1962.
- [160] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 6<sup>th</sup> edition, Academic Press, New York, USA, 1997.
- [161] S. P. Meyn, and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, New York, USA, 1993.
- [162] K. L. Chung, *A course in probability theory*, 3<sup>rd</sup> Edition, Academic Press, London, UK, 2001.
- [163] M. Loève, *Probability Theory I*, 4<sup>th</sup> Edition, Springer-Verlag, New York, USA, 1977.
- [164] A. Papoulis, and S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*, 4<sup>th</sup> Edition, McGraw – Hill Higher Education, New York, USA, 2002.
- [165] R. G. Brown, and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2012.
- [166] J. Mikles, and M. Fikar, *Process Modelling, Identification, and Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, 2007.
- [167] S. V. Vaseghi, *Advanced digital signal processing and noise reduction*, 4<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons Ltd, New Jersey, USA, 2008.

- [168] H. Durrant-White, *Multisensor data Fusion*, Australian Center for Field Robotics, University of Sidney, Australia, 2001.
- [169] H. Fourati, and D. E. C. Belkhiat, *Multisensor Attitude Estimation: Fundamental Concepts and Applications*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, USA, 2017.
- [170] H. Tanizaki, *Nonlinear Filters: Estimation and Applications*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1996.
- [171] M. Coelho, K. Bousson, and K. Ahmed, "An Improved Extended Kalman Filter for Nonlinear State Estimation," *AEC 2020 – Aerospace Europe Conference 2020*, Bordeaux, France, 25-28 February 2020.
- [172] L. Loron, and G. Laliberte, "Application of the Extended Kalman Filter to Parameters Estimation of Induction Motors," *Fifth European Conference on Power Electronics and Applications*, Brighton, UK, 13-16 September 1993.
- [173] J. V. Rao, U. Dinesh, S. K. Rao, and B. L. Jagan, "Active Sonar Target Tracking Using Extended Kalman Filter," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 117, no. 21, pp. 301-309, 2017.
- [174] E. Cortina, D. Otero, and C. E. D'Attellis, "Maneuvering Target Tracking using Extended Kalman Filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 27, no. 1, pp. 155-158, 1991. DOI: 10.1109/7.68158.
- [175] L. Liang-Qun, J. Hong-Bing, and L. Jun-Hui, "The Iterated Extended Kalman Particle Filter," *IEEE International Symposium on Communications and Information Technology*, Beijing, China, 12-14 October 2006. DOI: 10.1109/ISCIT.2005.1567087.
- [176] J. Shen, Y. Liu, S. Wang, and Z. Sun, "Evaluation of Unscented Kalman Filter and Extended Kalman Filter for Radar Tracking Data Filtering," *2014 European Modelling Symposium (IEEE)*, Pisa, Italy, 21-23 October 2014. DOI: 10.1109/EMS.2014.49.
- [177] A. E. Nordsjo, "A Constrained Extended Kalman Filter for Target Tracking," *Proceedings of the 2004 IEEE Radar Conference*, Philadelphia, USA, 29 April 2004. DOI: 10.1109/NRC.2004.1316407.
- [178] S. Julier, and J. K. Uhlmann, "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems," *Proceedings AeroSense: 11<sup>th</sup> International Symposium of Aerospace/Defense: Sensing, Simulation and Controls*, Orlando, Florida, USA, 1997.

- [179] S. Julier, "A skewed approach to filtering," *Proceedings AeroSense: 12<sup>th</sup> International Symposium of Aerospace/Defense: Sensing, Simulation and Controls*, Orlando, Florida, USA, 1998.
- [180] G. Chowdhary, and R. Jategaonkar, "Aerodynamic Parameter Estimation from Flight Data Applying Extended and Unscented Kalman Filter," *Aerospace Science and Technology Elsevier*, vol. 14, no. 2, pp. 106-117, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2009.10.003>.
- [181] Y. Wu, D. Hu, M. Wu, and X. Hu, "Unscented Kalman Filtering for Additive Noise Case: Augmented versus Nonaugmented," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 5, pp. 357-360, 2005. DOI: 10.1109/LSP.2005.845592.
- [182] E. A. Wan, and R. Merwe, "The Unscented Kalman Filter," chapter in *Kalman Filtering and Neural Networks*, Haykin S., John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2001.
- [183] A. Farina, B. Ristic, and D. Benvenuti, "Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 3, pp. 854-867, 2002. DOI: 10.1109/TAES.2002.1039404.
- [184] K. György, A. Kelemen, and L. Dávid, "Unscented Kalman Filters and Particle Filter Methods for Nonlinear State Estimation," *Procedia Technology – Elsevier*, vol. 12, pp. 65-74, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.protcy.2013.12.457>.
- [185] E. Kraft, "A Quaternion-based Unscented Kalman Filter for Orientation Tracking," *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference of Information Fusion (IEEE)*, Cairns, Queensland, Australia, 8-11 July 2003. DOI: 10.1109/ICIF.2003.177425.
- [186] J. J. LaViola, "A Comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion," *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, Denver, CO, USA, 4-6 June 2003. DOI: 10.1109/ACC.2003.1243440.
- [187] I. Arasaratnam, and S. Haykin, "Cubature Kalman Filters," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1254-1269, 2009. DOI: 10.1109/TAC.2009.2019800.
- [188] A. H. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1971.

- [189] P. Rabinowitz, and N. Richter, "Perfectly Symmetric Two-Dimensional Integration Formulas with Minimal Numbers of Points," *Mathematics of Computation*, vol. 23, no. 108, pp. 765-779, 1969. DOI: 10.2307/2004962.
- [190] T. S. Schei, "A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms," *Automatica – Elsevier*, vol. 33, no. 11, pp. 2053-2058, 1997. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00127-1](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00127-1).
- [191] P. C. P. M. Pardal, R. V. Garcia, H. K. Kuga, and W. R. Silva, "An Investigation on Cubature Kalman Filter Performance for Orbit Determination Application," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 41, no. 10, pp. 1-11, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1909-2>.
- [192] Z. Gao, D. Mu, Y. Zhong, C. Gu, and C. Ren, "Adaptively Random Weighted Cubature Kalman Filter for Nonlinear Systems," *Mathematical Problems in Engineering*, ID 4160847, 2019 DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/4160847>.
- [193] B. Jia, M. Xin, and Y. Cheng, "High-degree Cubature Kalman Filter," *Automatica – Elsevier*, vol. 49, no. 2, pp. 510-518, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.11.014>.
- [194] K. P. B. Chandra, D. W. Gu, and I. Postlethwaite, "Cubature Kalman Filter based Localization and Mapping," *IFAC Proceedings Volumes – Elsevier*, vol. 44, no. 1, pp. 2121-2125, 2011. DOI: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.03104>.
- [195] Z. Xin-Chun, and G. Cheng-Jun, "Cubature Kalman Filters: Derivation and Extension," *Chinese Physics B*, vol. 22, no. 12, pp. 128401 – 128406, 2013. DOI: 10.1088/1674-1056/22/12/128401.
- [196] R. V. Garcia, P. C. P. M. Pardal, H. K. Kuga, and M. C. Zanardi, "Nonlinear Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation with Real Data: Cubature Kalman Filter, Unscented Kalman Filter and Extended Kalman Filter," *Advances in Space Research – Elsevier*, vol. 63, no. 2, pp. 1038-1050, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.10.003>.
- [197] G. Evensen, "The Ensemble Kalman Filter: Theoretical Formulation and Practical Implementation," *Ocean Dynamics*, vol. 53, pp. 343–367, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10236-003-0036-9>.

- [198] G. Evensen, *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter*, 1<sup>st</sup> edition, Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, Germany, 2007.
- [199] B. R. Hunt, E. J. Kostelich, and I. Szunyogh, "Efficient Data Assimilation for Spatiotemporal Chaos: A Local Ensemble Transform Kalman Filter," *Physica D: Nonlinear Phenomena – Elsevier*, vol. 230 no.1-2, pp. 112-126, 2007 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.11.008>.
- [200] J. L. Anderson, "An Ensemble Adjustment Kalman Filter for Data Assimilation," *Monthly Weather Review*, vol. 129, no. 12, pp. 2884-2903, 2001. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(2001\)129<2884:AEAKFF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(2001)129<2884:AEAKFF>2.0.CO;2).
- [201] J. Zhao, M. Netto, and L. Mili, "A Robust Iterated Extended Kalman Filter for Power System Dynamic State Estimation," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 3205–3216, 2017. DOI: 10.1109/TPWRS.2016.2628344.
- [202] K. L. Shi, Y. K. Wong, and S. L. Ho, "Speed Estimation of an Induction Motor Drive using an Optimized Extended Kalman Filter," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, no. 1, pp. 124-133, 2002. DOI: 10.1109/41.982256.
- [203] J. R. Guercia, R. A. Goetz, and J. DiModica, "A Method for Improving Extended Kalman Filter Performance for Angle-Only Passive Ranging," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 30, no. 4, pp. 1090-1093, 1994. DOI: 10.1109/7.328754.
- [204] G. M. Siouris, G. Chen, and J. Wang, "Tracking an incoming Ballistic Missile Using an Extended Interval Kalman Filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 33, no. 1, pp. 232-240, 1997. DOI: 10.1109/7.570753.
- [205] B. Wu, and T. Wang, "Model updating with constrained unscented Kalman filter for hybrid testing," *Smart Structures and Systems*, vol. 14, no. 6, pp. 1105-1129, 2014. DOI: <https://doi.org/10.12989/sss.2014.14.6.1105>.
- [206] A. Ashrafifar, and M. F. Jegarkandi, "Fin failure diagnosis for non-linear supersonic air vehicle based on inertial sensors," *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 7, 1, 1-17, 2020. DOI: <https://doi.org/10.12989/aas.2020.7.1.001>.
- [207] F. Sun, X. Hu, Y. Zou, and S. Li, "Adaptive Unscented Kalman Filtering for State of Charge Estimation of a Lithium-Ion Battery for Electric Vehicles," *Energy – Elsevier*,

vol. 36, no. 5, pp. 3531-3540, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2011.03.059>.

- [208] Z. Duan, X. R. Li, C. Han, and H. Zhu, "Sequential Unscented Kalman Filter for Radar Target Tracking with Range Rate Measurements," *7<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion 2005 - IEEE*, Philadelphia, USA, 25-28 July 2005. DOI: 10.1109/ICIF.2005.1591846.
- [209] S. Bisht, and M. P. Singh, "An Adaptive Unscented Kalman Filter for Tracking Sudden Stiffness Changes," *Mechanical Systems and Signal Processing – Elsevier*, vol. 49, no. 1-2, pp. 181-195, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.04.009>.
- [210] Y. Wan, S. Sun, and L. Li, "Adaptively Robust Unscented Kalman Filter for Tracking a Maneuvering Vehicle," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 37, no. 5, pp. 1696-1701, 2014. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G000257>.
- [211] K. Xiong, L. D. Liu, and H. Y. Zhang, "Modified Unscented Kalman Filtering and its Application in Autonomous Satellite Navigation," *Aerospace Science and Technology – Elsevier*, vol. 13, no. 4-5, pp. 238-246, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2009.04.001>.
- [212] X. Zhao, J. Li, X. Yan, and S. Ji, "Robust Adaptive Cubature Kalman Filter and Its Application to Ultra-Tightly Coupled SINS/GPS Navigation System," *Sensors*, vol. 18, no. 7, pp. 2352, 2018. DOI: <https://doi.org/10.3390/s18072352>.
- [213] X. Tang, J. Wei, and K. Chen, "Square-Root Adaptive Cubature Kalman Filter with Application to Spacecraft Attitude Estimation," *15<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion 2012 – IEEE*, Singapore, 9-12 July 2012.
- [214] B. Cui, X. Chen, and X. Tang, "Improved Cubature Kalman Filter for GNSS/INS Based on Transformation of Posterior Sigma-Points Error," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 11, pp. 2975-2987, 2017. DOI: 10.1109/TSP.2017.2679685.
- [215] W. Zhu, W. Wang, and G. Yuan, "An Improved Interacting Multiple Model Filtering Algorithm Based on the Cubature Kalman Filter for Maneuvering Target Tracking," *Sensors*, vol. 16, no. 6, pp. 805-817, 2016. DOI: 10.3390/s16060805.
- [216] M. Coelho, K. Bousson, and K. Ahmed, "An Improved Extended Kalman Filter for Radar Tracking of Satellite Trajectories", *Designs (Unmanned Aerial System (UAS))*

*Modeling, Simulation and Control*), vol. 5, no. 3, 54, 2021 DOI: <https://doi.org/10.3390/designs5030054>.

- [217] A. M. Mathai, *Jacobians of Matrix Transformations and Functions of Matrix Argument*, World Scientific Publishing Co., London, UK, 1997.
- [218] V. S. Pugachev, *Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers*, Pergamon Press, Oxford, England, 1984.
- [219] R. Mehra, "On the identification of variances and adaptive Kalman filtering", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no. 2, pp. 175-184, 1970, DOI: 10.1109/TAC.1970.1099422.
- [220] J. U. Park, K. H. Choi, and S. Lee, "Orbital Rendezvous using two-step Sliding Mode Control," *Aerospace Science and Technology – Elsevier*, vol. 3, no. 4, pp. 239-245, 1999. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(99\)80046-7](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(99)80046-7).
- [221] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 4<sup>th</sup> Edition, Microcosm Press, Hawthorne, CA, 2013.
- [222] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 4<sup>th</sup> Edition, Butterworth-Heinemann – Elsevier, Oxford, UK, 2020.
- [223] A. H. J. Ruiter, C. J. Damaren, and J. R. Forbes, *Spacecraft Dynamics and Control – An Introduction*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, United Kingdom, 2013.
- [224] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control – A practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, New York, USA, 1997.
- [225] M. D. Griffin, and J. R. French, *Space Vehicle Design*, 2<sup>nd</sup> Edition, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Virginia, USA, 2004.
- [226] J. T. Betts, *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*, 2<sup>nd</sup> Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2010.
- [227] H. Bouadi, and F. M. Camino, "Aircraft Trajectory Tracking by Nonlinear Spatial Inversion," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Minnesota, USA, 13-16 August 2012. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2012-4613>
- [228] L. Xi, Z. Jun, Z. Yanbo, and L. Wie, "Simulation Study of Algorithms for Aircraft Trajectory Prediction Based on ADS-B Technology," *Asia Simulation Conference – 7<sup>th</sup>*

*International Conference on System Simulation and Scientific Computing*, Beijing, China, 12-13 October 2008, pp. 322 – 327. DOI: 10.1109/ASC-ICSC.2008.4675378.

- [229] D. G. Hull, *Fundamentals of Airplane Flight Mechanics*, Springer, Berlin, Germany, 2007.



# Anexos

## Anexo A – Publicações Relevantes

O desenvolvimento desta tese resultou nas seguintes publicações:

1. Coelho, M., Bousson, K., and Ahmed, K. (2021). "An Improved Extended Kalman Filter for Radar Tracking of Satellite Trajectories", *Designs (Unmanned Aerial System (UAS) Modeling, Simulation and Control)*, 5(3), 54, DOI: <https://doi.org/10.3390/designs5030054>.
2. Coelho M., Bousson K., Ahmed K. (2020), "Survey of Nonlinear State Estimation in Aerospace Systems with Gaussian Priors", *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 7 (6), 495-516, DOI:10.12989/aas.2020.7.6.495.
3. Coelho M., Bousson K., Ahmed K. (2020), "An Improved Extended Kalman Filter for Nonlinear State Estimation", *Aerospace Europe Conference (AEC)*, 25 - 28 February, Bordeaux, France.
4. Coelho M., Ahmed K., Bousson K. (2017), "Nonlinear Time-Varying Parameter Estimation from Noisy Measurements", *International Congress on Engineering (ICEUBI)*, 5-7 December 2017, Covilhã, Portugal.
5. Coelho M., Ahmed K. (2017), "Survey of Nonlinear State Estimation Based on Kalman Filtering", *International Congress on Engineering (ICEUBI)*, 5-7 December, Covilhã, Portugal.
6. Coelho M., Ahmed K., Bousson, K. (2017), "Nonlinear Filtering of Stochastic Systems with Gaussian Uncertainties", *4<sup>o</sup> Encontro de Jovens Investigadores do LAETA (4EJIL)*, 9-10 November, Covilhã, Portugal.
7. Coelho M., Bousson, K. (2017), "Adaptive Nonlinear Filter and Optimal Radar Tracking of Aerospace Vehicles", *2nd Doctoral Congress of Engineering (DCE)*, Porto, Portugal, 8th June.
8. Coelho M., Bousson K. (2017), "Radar Based Nonlinear Orbital Trajectory Estimation", *International Journal of Research in Aeronautical and Mechanical Engineering*, ISSN 2321-3051, 5 (4), 12-25.
9. Coelho M., Bousson K. (2016), "Nonlinear Estimation of Orbital Trajectories from Radar Measurements", *Mechanical Engineering Conference (CEM)*, Porto, Portugal, 1-3 June, 59.



## Anexo B – Função Dirac Delta

A função Dirac Delta,  $\delta(x)$  é uma construção matemática denominada por função ou distribuição generalizada. Esta função possui valor zero em todos os pontos exceto em  $x=0$ , cujo valor é infinitamente grande, de tal forma que a integral total da função é 1. Assim é definida por:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Onde, obrigatoriamente satisfaz a identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{B.2})$$

Formalmente, uma função *Dirac Delta* é definida como o limite de uma sequência *Delta* convergente. O exemplo de uma sequência *Delta* convergente é a função Gaussiana, definida por:

$$F_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-x^2/4\alpha} \quad (\text{B.3})$$

Esta função satisfaz as propriedades de uma sequência *Delta* convergente para  $\alpha \rightarrow 0$ , ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}(x) dx = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} F_{\alpha}(x) \rightarrow 0 & \text{quando } x \neq 0 \\ F_{\alpha}(x) \rightarrow \infty & \text{quando } x = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A função *Dirac Delta* possui uma propriedade fundamental dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (\text{B.6})$$

para todo  $f(x)$ , cuja representação é considerada como uma função de teste adequada.

Uma função de teste adequada é toda a função que é diferenciável (um número qualquer de vezes) e que todas as suas derivadas podem ser colocadas fora de um qualquer intervalo finito, ou seja:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (\text{B.7})$$

Para  $\varepsilon > 0$ .

Matematicamente a função *Dirac Delta* não é considerada uma função, isto porque é demasiado singular. Assim sendo, os matemáticos denominam-na por distribuição *Delta*, ou seja, é uma ideia generalizada de função que pode ser usada apenas em integrais. Na verdade, a função *Dirac Delta* pode ser considerada com um operador que “puxa” o valor de uma função para zero.

## Anexo C – Linearização

Uma aproximação linear de uma função não-linear pode ser obtida através do uso das series de Taylor. Esta nova aproximação é denominada por modelo linearizado. Uma vantagem em utilizar modelos linearizados é a sua simplicidade matemática e o grande potencial em gerar resultados analíticos.

Assumindo que  $a, x$  são números diferentes,  $k \geq 0$ ,  $J$  é um intervalo entre  $a, x$  e  $f$  é uma função com  $k$  derivadas contínuas no intervalo  $J$ , sendo que a derivada  $k+1$  também pertence a este intervalo, então existe um ponto  $\zeta$  no intervalo  $J$  tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{\dot{f}(a)}{1!}(x-a) + \frac{\ddot{f}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + R_k(x) \quad (\text{C.1})$$

Onde,  $R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\zeta)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$  representa a função  $f$  depois do termo  $k$  do polinómio de Taylor.

Considerando um processo descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$\frac{dx'_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}', \mathbf{u}') = f_i(x'_1, \dots, x'_n, u'_1, \dots, u'_m) \quad (\text{C.2})$$

Para  $i=1, \dots, n$ , sendo que  $\mathbf{x}'$  representa o vetor das variáveis de estado,  $x'_1, \dots, x'_n$  e  $\mathbf{u}'$  representa o vetor das variáveis manipuláveis,  $u'_1, \dots, u'_m$ .

Se o processo das variáveis de estado  $x'_i$  mudar numa vizinhança de um estado estável (*steady-state*)  $x'^s_i$  sob a influência das variáveis  $u'_i$ , então é possível aproximar as não-linearidades. Assim sendo, tem-se:

$$0 = f_i(\mathbf{x}'^s, \mathbf{u}'^s) = f_i^s \quad (\text{C.3})$$

É assumido que algumas variáveis de  $u'^s_j$  para  $j=1, \dots, m$  são conhecidas.

A função  $f_i(\bullet)$  é aproximada pela expansão das series de Taylor truncadas apenas para os termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
f_i(\mathbf{x}', \mathbf{u}') &\doteq f_i(\mathbf{x}'^s, \mathbf{u}'^s) + \\
&\left( \frac{\partial f_i}{\partial x'_1} \right)^s (x'_1 - x'_{1^s}) + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial x'_n} \right)^s (x'_n - x'_{n^s}) + \\
&\left( \frac{\partial f_i}{\partial u'_1} \right)^s (u'_1 - u'_{1^s}) + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial u'_m} \right)^s (u'_m - u'_{m^s})
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Sendo que,  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x'_l} \right)^s$  com  $l=1, \dots, n$  e  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial u'_j} \right)^s$  com  $j=1, \dots, m$  representam as derivadas parciais

de  $x'_l = x'_{l^s}$  e  $u'_j = u'_{j^s}$ , respetivamente. Estas derivadas parciais são constantes e dadas por:

$$a_{il} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x'_l} \right)^s \quad \text{com } l=1, \dots, n \tag{C.5}$$

$$b_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial u'_j} \right)^s \quad \text{com } j=1, \dots, m \tag{C.6}$$

É possível observar a partir da equação (C.3) que o primeiro termo da equação (B.4) é zero.

Sabendo que,

$$x_i = x'_i - x'_{i^s} \tag{C.7}$$

$$u_j = u'_j - u'_{j^s} \tag{C.8}$$

Então,

$$\frac{dx'_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \tag{C.9}$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \tag{C.10}$$

⋮

$$\frac{dx'_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \tag{C.11}$$

Em que,  $\mathbf{x}$  representa o vetor do desvio das variáveis de estado e  $\mathbf{u}$  representa o vetor do desvio das variáveis manipuláveis.

A equação (C.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (\text{C.12})$$

Onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

A equação (C.12) representa a equação diferencial linearizada. Sendo que esta equação e a equação (C.2) descrevem a dinâmica do modelo. As diferenças entre elas são:

1. A equação (C.12) é apenas uma aproximação.
2. A equação (C.12) utiliza o desvio das variáveis
3. A equação (C.12) é linear com coeficientes constantes.

Para além da linearização do modelo do processo também é necessário linearizar o modelo dos *outputs* (também denominado por modelo das saídas ou medições). Considerando a seguinte equação de saída:

$$y'_k = g_k(x', u') \quad (\text{C.15})$$

Onde,  $k=1, \dots, r$  e  $y'_k$  representa as variáveis de saída. O estado estável (*steady-state*) é representado por:

$$y_k{}^{s} = g_k(x'^s, u'^s) \quad (\text{C.16})$$

O desvio das variáveis de saída é obtido por:

$$y_k = y'_k - y_k{}^{s} \quad (\text{C.17})$$

Consequentemente, tem-se:

$$y_k = g_k(x'^s + x, u'^s + u) - g_k(x'^s, u'^s) \quad (\text{C.18})$$

Se usarmos as series de Taylor, apenas com os termos lineares, obtém-se a seguinte aproximação:

$$g_k(x', u') \doteq g_k(x'^s, u'^s) + \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial g_k}{\partial x'_l} \right)^s (x'_l - x'_l{}^s) + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial g_k}{\partial u'_j} \right)^s (x'_j - x'_j{}^s) \quad (\text{C.19})$$

E tal como anteriormente, as derivadas parciais são contantes dadas por:

$$c_{kl} = \left( \frac{\partial g_k}{\partial x'_l} \right)^s \quad \text{com } l = 1, \dots, n \quad (\text{C.20})$$

$$d_{kj} = \left( \frac{\partial g_k}{\partial u'_j} \right)^s \quad \text{com } j = 1, \dots, m \quad (\text{C.21})$$

O desvio das variáveis de saída é definido por:

$$y_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1m}u_m \quad (\text{C.22})$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \dots + d_{2m}u_m \quad (\text{C.23})$$

⋮

$$y_r = c_{r1}x_1 + \dots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + \dots + d_{rm}u_m \quad (\text{C.24})$$

Se  $\mathbf{y}$  representa o vetor do desvio das variáveis de saídas, então as equações (C.22 – C.24) podem ser representadas de uma forma mais compacta:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (\text{C.25})$$

Onde,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \quad (\text{C.27})$$

As equações (C.12) e (C.25) representam os modelos linearizados do processo e das medições.



## Anexo D – Gradiente, Matrizes Jacobianas e Hessianas

O operador de gradiente de um vetor  $x$  de dimensão  $n$  é definido por:

$$\nabla_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right]' \quad (\text{D.1})$$

O vetor gradiente de uma função  $f(x)$  de dimensão  $m$  é dado por:

$$\nabla_x f(x)' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) & \dots & f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

A transposta da equação anterior (D.2) é a matriz Jacobiana ( $m \times n$ ):

$$f_x(x) \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} = [\nabla_x f(x)']' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

As dimensões  $m$  e  $n$  são, geralmente (mas não necessariamente), iguais. Facilmente é demonstrado que:

$$\nabla_x x' = I \quad (\text{D.4})$$

E se a matriz  $A$  for simétrica, então:

$$\nabla_x (x'Ax) = 2Ax \quad (\text{D.4})$$

A matriz Hessiana de uma função escalar  $\phi(x)$  em relação ao vetor  $x$  de dimensão  $n$  é dada por:

$$\phi_{xx}(x) \triangleq \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \nabla_x \nabla_x' \phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

A equação (D.5) é obviamente uma matriz simétrica de dimensão  $(n \times n)$ .

As equações apresentadas neste anexo são úteis para a estimação linear, ou seja, são úteis para linearização de sistemas não-lineares durante o processo de estimação.

## Anexo E – Algoritmo de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Dado um determinado sistema controlável descrito por:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{E.1})$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{E.2})$$

Sendo,  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado e  $u \in \mathbb{R}^r$  o vetor de controle.

Assumindo o valor  $x_0$  no instante  $t_0$ , os estados seguintes (para  $t_1, t_2, t_3, \dots$ ) são determinados por:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (\text{E.3})$$

Sendo,

$$K_1 = h.f(t_k, x_k) \quad (\text{E.4})$$

$$K_2 = h.f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}K_1\right) \quad (\text{E.5})$$

$$K_3 = h.f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{1}{2}K_2\right) \quad (\text{E.6})$$

$$K_4 = h.f(t_k + h, x_k + K_3) \quad (\text{E.7})$$

Em que,  $h$  representa o passo na simulação,  $x_k = x(t_k)$ ,  $u_k = u(t_k)$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $t_k$  representa o tempo no passo  $k$ .



## Anexo F – Norma de Frobenius

A norma de Frobenius é dada por:

$$\|A\|_F \triangleq \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{trace}(A'A))^{\frac{1}{2}} \quad (\text{F.1})$$

Por outras palavras, a norma de Frobenius é definida como a raiz quadrada da soma dos quadrados das entradas, ou seja, pode ser definida como a norma Euclidiana-2 de uma matriz quando esta é simplesmente considerada como um vetor  $\mathbb{C}^{mn}$ .