IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS POR NIÑOS DE CINCO AÑOS EN UNA TAREA QUE INVOLUCRA FUNCIONES LINEALES EN SUS FORMAS DIRECTA E INVERSA

Identification of structures by five-year-old students in their in a task which involves direct and indirect lineal functions

Anglada, M. L.[a], Cañadas, M. C.[b], Brizuela, B. M.[c]

[a] Centro Adscrito de Magisterio Mª Inmaculada de Antequera, [b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Tufts

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación sobre el pensamiento funcional en niños de cinco años. Nuestro objetivo de investigación es describir las estructuras que estos niños identifican en tareas que involucran funciones lineales, trabajando con casos particulares, tanto en su forma directa como inversa. Diseñamos y aplicamos una tarea que involucraba las funciones f(n) = n, f(n) = n + 2, f(n) = n – 1 y f(n) = 2n. Analizamos las respuestas de ocho niños de 5 años. En los resultados apreciamos que la mayoría de los niños identificaron una estructura adecuada tanto para la forma directa como para la inversa para las tres primeras funciones. Para f(n) = 2n dos estudiantes identificaron una estructura correcta tanto para la función directa como para la inversa.

Palabras clave: *estructuras, función inversa, pensamiento funcional, educación infantil.*

Abstract

This paper is part of a research about functional thinking in five years old children. Our main research goal is to describe the structures that these children identify in tasks that involve lineal functions, working with particular cases, both in their direct and inverse form. We designed and applied a task involving the functions f(n) = n, f(n) = n + 2, f(n) = n – 1 y f(n) = 2n. We analyzed the responses of eight 5 years old children. In the results we appreciate that the majority of the childrens identified adequate structures for both the direct and the inverse form for the first three functions. For f(n) = 2n two children identified an adequate structure for both the direct and inverse functions.

Keywords: structures, inverse function, functional thinking, early childhood education.

INTRODUCCIÓN

En educación infantil se fundamentan los primeros conocimientos matemáticos que forman la base de conocimientos posteriores. Además, resulta el momento adecuado para identificar debilidades y fortalezas que puedan dar luz a estrategias educativas eficaces que apunten a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Gardner, 2000).

Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.

Desde la propuesta curricular *early algebra* se recomienda introducir el pensamiento algebraico en las primeras edades para, entre otras cosas, mitigar las dificultades con el álgebra que se han identificado en educación secundaria. Se busca promover el pensamiento algebraico desde la educación infantil. Uno de los enfoques del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional, cuyo contenido matemático son las funciones. Algunos autores, como Carraher y Schliemann (2007), consideran este tipo de pensamiento como el punto de partida para avanzar hacia el álgebra. Desde la perspectiva funcional, nos centramos en las funciones lineales con dos variables y cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este estudio trabajamos tanto con la forma directa como con la inversa de estas funciones.

El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultanea (Blanton y Kaput, 2004). Establecer estas relaciones supone identificar la regularidad en el comportamiento entre variables (Torres et al., 2021). En este contexto funcional, la forma en que se organiza esta regularidad se conoce como estructura.

En nuestro trabajo partimos de que la capacidad de los niños para establecer relaciones funcionales puede comenzar en educación infantil (Anglada y Cañadas, 2021; Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Warren et al., 2013). Para educación infantil, aunque escasas, podemos encontrar investigaciones sobre pensamiento funcional en las que se trabaja la relación directa entre las variables (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Warren et al., 2013). Las investigaciones que incluyen el trabajo con la forma inversa de las funciones son muy escasas (Anglada y Cañadas, 2021; Warren et al., 2013; Willoughby, 1997). Respecto al estudio de estructuras encontramos trabajos en los primeros cursos de educación primaria (Pinto y Cañadas, 2017; Torres el al., 2021), pero no para educación infantil. Es por eso que, a la vista de los resultados obtenidos en este nivel educativo, nos planteamos extender el estudio de la identificación de estructuras a niños de cinco años.

Con este trabajo pretendemos contribuir a la investigación sobre el pensamiento funcional de niños de educación infantil. Nos centramos en analizar cómo los niños de último curso de educación infantil identifican estructuras al abordar tareas contextualizadas que involucran funciones lineales en sus formas directa e inversa.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico que se centra en las funciones, consideradas estas como la relación entre dos cantidades que varían conjuntamente. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables, la directa (de la variable dependiente con la variable independiente) y la inversa (en la que se intercambian los roles de las variables respecto a la relación directa), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultanea (Warren y Cooper, 2006). "Cuando hablamos de una función $y = f(x)$, en general, se está haciendo referencia a su forma directa, pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables en un contexto concreto. Esa función tiene una función inversa $y = g(x)$, tal que $g(f(x)) = x$" (Torres et al., 2021, p. 6).

Las investigaciones sobre pensamiento funcional en las que se considera la función inversa son escasas tanto en educación primaria como en educación infantil. Warren et al. (2013) trabajaron con niños de cinco años con una "máquina" que realizaba transformaciones cualitativas y cuantitativas; la transformación cuantitativa correspondía a la función $f(n) = n + 2$. De los seis niños que participaron en la investigación, cinco consiguieron establecer una relación tanto directa como inversa entre las variables. Estas máquinas, conocidas como *function machines* (máquinas de función) han sido utilizadas por otros investigadores para trabajar funciones con niños de los primeros cursos de educación primaria (Moss y McNab, 2011; Torres et al., 2018) y de educación infantil (e.g., Dienes, 1971; Willoughby, 1997). Con este material es muy intuitivo trabajar la función inversa. De hecho, los investigadores que la han utilizado suelen trabajar tanto la función directa como la inversa. La máquina tiene una entrada, una transformación y una salida. Para trabajar la función inversa se da el valor de la salida y se pregunta por la entrada.

Willoughby (1997) introdujo el concepto de *function machine* trabajando con niños de cinco años. Comenzó con la función $f(n) = n + 2$. Los niños a partir de dos ejemplos concretos predijeron qué ocurría en otros casos particulares y, más tarde, descubrieron y definieron verbalmente la regla que seguía la máquina. Análogamente, trabajaron con funciones de la forma $f(n) = n \pm a$, con $a = 0$, 1 y 3. A raíz de los resultados de la investigación concluye que "todos los niños participantes pudieron comprender conceptos abstractos pero importantes, como la función, si los conceptos se desarrollan primero a partir de actividades concretas y se abstraen gradualmente durante un largo período de tiempo" (Willoughby, 1997, p. 200).

Anglada y Cañadas (2021), en un estudio próximo al que presentamos en el actual trabajo, realizaron una investigación con niños de cinco años. Trabajaron en un contexto de resolución de problemas que involucraba la función $f(n) = n + 2$. Diez de los 15 niños establecieron correctamente una relación de correspondencia para la función directa y cinco identificaron la relación para la función inversa.

En el pensamiento funcional es fundamental el estudio de regularidades. Desde el marco del pensamiento funcional definimos como estructura, la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Kieran, 1989; Pinto y Cañadas, 2017).

No hemos encontrado estudios sobre cómo niños de cinco años identifican estructuras trabajando con funciones. Las investigaciones encontradas son de educación primaria. Pinto y Cañadas (2017) abordaron la noción de estructura con niños de tercero de educación primaria (8-9 años). Estos trabajaron con la función lineal $f(n) = 2n + 3$ y concluyeron que los niños identificaron 17 estructuras diferentes para esta función, seis de ellas correctas. Torres et al., (2018) realizaron un estudio con niños de segundo de educación primaria (7-8 años) con una tarea que involucraba la función lineal $f(n) = n + 3$. Estos niños descubrieron cuatro estructuras diferentes a partir de casos particulares dados. En una investigación similar a la anterior, Torres et al., (2021) identificaron estructuras en el trabajo con la función $f(n) = n + 4$ en su forma directa e inversa; de los seis niños participantes todos evidenciaron estructuras adecuadas para la forma directa y cuatro para la inversa.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de nuestra investigación es identificar las estructuras evidenciadas por niños del último curso de educación infantil en tareas que involucran funciones lineales en sus formas directa e inversa, cuando trabajan con casos particulares.

MÉTODO

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010).

Los participantes de este estudio son ocho niños del último año de educación infantil de un colegio concertado del sur de España. La elección del centro escolar fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro y de los docentes.

En la recogida de datos participaron una investigadora (primera autora de este trabajo) y dos alumnas del Grado de Educación Infantil quienes se encargaron de la parte técnica de la recogida de información. No hubo instrucción directa ni antes ni durante el desarrollo de las sesiones.

Para la recogida de información utilizamos una cámara fija ubicada al final del aula y otra cámara que registraba el trabajo de algunos niños en concreto. Además, tomamos fotos e hicimos anotaciones sobre algunos resultados.

Con base en nuestros antecedentes, decidimos trabajar con las funciones lineales f(n) = n (Blanton y Kaput, 2004; Castro et al.,2017); f(n) = n + 2 (Anglada y Cañadas, 2021 Warren et al., 2013; Willoughby, 1997); f(n) = n – 1 (Willoughby, 1997) y f(n) = 2n (Castro et al., 2017), con dominios y codominios en los números naturales. Además, decidimos hacerlo en este orden, según la dificultad que les atribuimos.

Diseñamos e implementamos una primera sesión en la que participó toda la clase a la que pertenecen los ocho estudiantes. A continuación, dividimos a los niños en pequeños grupos (cuatro o cinco niños por grupo) y realizamos una sesión con cada uno. En la tercera y última sesión, realizamos ocho entrevistas individuales. En la tabla 1 se recoge la organización de las sesiones.

Tabla 1. Organización de las sesiones.

Sesiones	**Agrupación**	**Duración**	**Función**	**Descripción**
1ª sesión	Toda la clase	90 min.	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa	Introducimos a los niños en la realización de las tareas y en el uso de los materiales.
2ª sesión	Grupos de cuatro y cinco alumnos	± 60 min/ grupo	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa	Repasamos la función identidad que vieron en la sesión 1, y nos centramos en el trabajo con f(n) = n + 2
3ª sesión	Entrevistas individuales	± 45 min	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa f(n) = n - 1 directa e inversa f(n) = 2n directa e inversa	Trabajamos con las funciones f(n) = n y f(n) = n + 2 que vieron en las sesiones anteriores, y las funciones f(n) = n – 1 y f(n) = 2n

Junto con la maestra, el equipo de investigación seleccionó a ocho estudiantes según su trabajo durante las dos primeras sesiones. Los niños debían ser verbalmente expresivos y dispuestos a participar, En este trabajo nos vamos a centrar en las entrevistas de estos ocho niños a los que simbolizaremos por An, n=1...8 para salvaguardar su identidad.

Trabajamos en un entorno de resolución de problemas contextualizados, mediante un juego en el que dramatizamos la situación usando una marioneta y un material manipulativo. Este fue un elemento motivador y dinamizante (Ahlcrona, 2012) las marionetas daban a los niños la posibilidad de proyectarse e identificarse con ellas, pues permiten situarse en un plano de intersección entre lo lúdico y lo real (Firnkel, 1984). Además, en nuestro caso, permite asignar roles distintos a diferentes marionetas, con lo que el niño asocia una acción a cada una de ellas, de forma que podrá identificarlas con distintas funciones.

En las tareas utilizamos dos marionetas, una a la que damos el nombre de “Lina”, con la que trabajamos la función identidad; y otra a la que llamamos “Sara” y que utilizamos para el resto de funciones. Además, utilizamos un tablero con una hilera de casillas que se pueden tapar y destapar y un recortable de un tesoro que se puede esconder en ellas. Este material se puede observar en la figura 1.


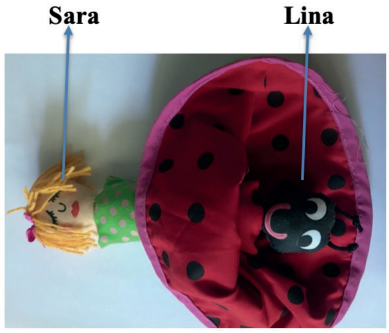

Figura 1. *Materiales: Tablero y marionetas.*

En la introducción de la tarea, la investigadora les dijo: Lina (o Sara, según el caso) ha escondido un tesoro. Estad atentos porque dice que nos va a dar una pista para que podáis encontrarlo. ¿Qué me dices Lina? (acercando la marioneta a su oído). Dice que la pista va a ser un número de palmadas, ella me las va a decir a mi y yo las voy a dar.

En este escenario, para cada una de las funciones se consideran las variables: (a) independiente (número de palmadas) y (b) dependiente (número de la casilla en la que está escondido el tesoro). Esta sería la forma directa de la función. Para la forma inversa, se invierten los roles de las variables (i.e., se conoce el número de la casilla y se desconoce el número de palmadas).

Comenzamos trabajando con la función identidad. La investigadora, sin explicar nada, pidió a los niños que cierren los ojos para que Lina escondiera el tesoro. Una vez escondido, pidió a los niños abrir los ojos, acercó a Lina a su oído y le preguntó: "Lina, por favor, danos la pista, ¿cuántas palmadas doy?". Una vez que dio un número de palmadas, los niños debían buscar el tesoro. Las primeras veces les dejamos levantar las casillas que necesiten, pero después de dos o tres ejemplos solo podían levantar una casilla.

En primer lugar, trabajamos con la forma directa y, a continuación, con la función inversa. Para trabajar con la función inversa, por turnos, un niño hizo el papel de profesor, imitando lo que había hecho la investigadora y la investigadora era entonces la que debía encontrar el tesoro. Simplemente dejamos que ellos escondieran el tesoro donde quisieran y decidieran el número de palmadas que debían dar como pista.

Para el resto de funciones trabajamos de la misma forma, pero utilizamos otra marioneta a la que llamamos Sara, la investigadora le decía a los niños que Sara daba las pistas de otra forma.

Trabajamos solo con casos particulares, dando a la variable independiente valores del uno al doce que son números con los que los alumnos estaban familiarizados y además son con los que podíamos trabajar con el tablero, permitiendo así la manipulación y la autocorrección.

Las tareas se presentaron de forma oral, utilizamos una narración, y se estableció un diálogo continuo basado en preguntas y respuestas. Consideramos que un niño identificaba una estructura cuando a partir de la primera vez que hallaba correctamente la solución para un caso concreto, tenía como máximo un error en los siguientes ejemplos; o bien, si daba verbalmente una expresión de la generalización.

El orden en que se trabajó durante la entrevista fue el siguiente: en primer lugar $f(n) = n$ directa y después inversa; a continuación $f(n) = n + 2$, primero directa y luego inversa; continuamos del mismo modo con $f(n) = n - 1$ y por último, con $f(n) = 2n$ directa e inversa. Este orden se estableció atendiendo al nivel de dificultad que se suponía a partir de los antecedentes. Decidimos no trabajar con la función $f(n) = 2n$ con los niños que no habían identificado estructuras para las funciones anteriores; así mismo para la forma inversa de esta función cuando no habían conseguido identificar una estructura para la forma directa.

ANÁLISIS DE DATOS

Transcribimos las grabaciones en video de las entrevistas y realizamos un análisis preliminar de los datos a partir de estas trascripciones para definir las categorías de análisis con base en el objetivo de investigación, el marco conceptual y los antecedentes. Partimos de las categorías definidas en Torres et al. (2021). Para las preguntas correspondientes tanto a la función directa como a la inversa, y con las distintas funciones, establecimos las siguientes categorías de análisis: (a) estructura identificada y si era correcta o incorrecta, (b) identifica una estructura correcta, ya que es capaz de mantener una regularidad, pero no podemos saber cuál es, (c) no identifica ninguna estructura.

Observamos la estructura identificada en la mayoría de los casos bien porque, de forma espontanea, expresaron verbalmente una generalización, bien por la observación de las acciones, gestos y lenguaje verbal utilizados en la manipulación. Por ejemplo, para $f(n)= n + 2$ dado un valor concreto de n, los niños contaban n sobre el tablero, se paran, y a continuación cuentan dos. Esto dificultó, en algunos casos, reconocer la estructura utilizada, aunque se podía ver que el niño seguía una regularidad y que era correcta.

RESULTADOS

Con base en las categorías definidas, en la tabla 2 presentamos las respuestas de los niños a los problemas que involucran las formas directa e inversa de cada una de las funciones. También recogemos el total de niños que identifican una estructura adecuada para cada función en su forma directa y en su forma inversa.

Tabla 2. Estructuras identificadas para las distintas funciones.

	f(n) = n		**f(n) = n + 2**		**f(n)= n -1**		**f(n)= 2n**	
	Directa	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**
A1	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	$f(n) = n+n$	IE
A2	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	NE	NP
A3	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	NE	NP
A4	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	$f(n) = n+n$	IE
A5	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	$f(n)= n+1$	NE	NP
A6	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	$f(n)= n+1$	NE	NP
A7	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	NE	NE	NP
A8	$f(n) = n$	$g(n) = n$	NE	NE	NE	NE	NP	NP
TEC	8	8	7	7	7	6	2	2

Nota. NE = no evidencia una estructura; NP = no se le ha preguntado; IE = identifica una estructura, que es correcta, pero no podemos saber cuál es; TEC= total de niños que identifican una estructura correcta

Lo primero que observamos en la tabla 2 es que en todos los casos en los que los niños identifican una estructura, esta es correcta.

Para la función $f(n) = n$, todos los niños identificaron la estructura, tanto en la forma directa como inversa. Esto lo veníamos observando desde el comienzo en gran grupo de la primera sesión, incluso entre todos llegaron a una expresión verbal de la generalización. De forma espontánea, identificaron que el número de palmadas y el de la casilla donde se escondía el tesoro eran el mismo.

Para la forma directa de la función, para $f(n) = n + 2$ y $f(n) = n - 1$, todos los niños salvo A8 identificaron correctamente la estructura subyacente. Los niños, rápidamente, a partir de un par de casos particulares, dieron la respuesta correcta para otros casos particulares.

Con $f(n) = 2n$, a A8 no le planteamos el trabajo con esta función a raíz de los resultados obtenidos en las anteriores. A1 y A4 identificaron una estructura aditiva, de la forma $f(n) = n + n$. Dado un valor concreto n, cuentan sobre el tablero n casillas, se paran y vuelven a contar n casillas.

Al trabajar con la forma inversa, para $f(n) = n + 2$ y $f(n) = n - 1$, siete de los ocho niños identificaron la estructura. En algunos casos no llegaron a expresar la estructura identificada verbalmente, pero se aprecia claramente como la identificaron en su acción con el material.

En el siguiente fragmento mostramos como A2 expresó la estructura identificada para la inversa de $f(n) = n - 1$.

> I (investigadora): A2, el tesoro está escondido en el uno, ¿cuántas palmadas te dirá Sara que tienes que dar?
>
> A2: Si está escondido en el uno, entonces tienes que dar dos palmadas y así te tienes que adelantar otro y allí estaría.

Además, este niño se acompañó de gestos que indicaban con claridad que identificaba la relación funcional subyacente y la expresaba.

Con $f(n) = 2n$, solo se ha planteado el problema a A1 y A4. Esto se debe, en el caso de A8, a los resultados obtenidos para las funciones anteriores y en el resto de casos a sus respuestas con la función directa.

En los siguientes fragmentos podemos observar la estructura identificada por A1 y A4 para $f(n) = 2n$.

> I: Sara me dice que de seis palmadas. ¿Dónde estará el tesoro?
>
> A1: Si das seis, cuento seis y otros seis.
>
> A1: Y si das cuatro, cuento cuatro y otros cuatro y son ocho.
>
> (.......)
>
> I: Sara me dice que de seis palmadas. ¿Dónde estará el tesoro?
>
> A4: Hay que sumarle el mismo número.

Observamos que A4 da una expresión general.

A1 y A4 con la función inversa descubren la regularidad, pero lo hacen sin hablar, solo manipulando, por lo que es complicado evidenciar la estructura que han identificado.

CONCLUSIONES

Este trabajo evidencia que los niños del último curso de educación infantil, a partir de casos particulares, son capaces de identificar estructuras, tanto para la forma directa como para la inversa de diferentes funciones lineales: $f(n) = n$, $f(n) = n + 2$, $f(n) = n - 1$, $f(n) = 2n$.

Encontramos unos resultados que difieren de los de nuestros antecedentes (Pinto y Cañadas, 2017; Torres et al., 2018; Torres et al., 2021). En estas investigaciones podemos observar que los niños utilizan distintas estructuras para una misma función, algunas de ellas incorrectas. En cambio, en nuestra investigación, destacamos que cuando identifican una estructura esta es correcta en todos los casos. Además, muestran una estabilidad ya que continúan identificando la misma estructura.

Los resultados obtenidos parecen evidenciar que el orden establecido para trabajar con las funciones es el adecuado porque es con las dos últimas con las cuales algunos niños no han conseguido identificar estructuras.

Los niños han estado motivados en todo momento, incluso pedían a su tutora volver a jugar con Lina y con Sara. Esto es de gran interés teniendo en cuenta lo complicado que es que los alumnos de estas edades mantengan el interés por una actividad durante tiempo y que estén atentos. Parece que la presentación de las tareas mediante la escenificación con las marionetas ha influido en los resultados obtenidos. Concretamente con la tarea planteada con la función inversa, ya que el hecho de tomar el rol de la profesora les ha motivado y podemos pensar que haya tenido mucho que ver en los resultados obtenidos.

Podría ser interesante que este tipo de investigación se llevara a cabo con problemas en otros contextos y situaciones como forma de complementar este estudio y así decidir si el contexto y las herramientas utilizadas influyen en las respuestas que los niños proporcionan.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Ahlcrona, M. F. (2012). The puppet's communicative potential as a mediating tool in preschool education. *International Journal of Early Childhood*, *44*(2), 171-184.

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de educación infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 121-128). SEIEM.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines y A. Fuglestad (Eds.*), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia, 6* (2) 1-13.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores*. Teide.

Finkel, B. (1984). El títere y lo titiritesco de la vida del niño. Plus Ultra

Gardner, H. E. (2000). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. Hachette.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of alg*ebra (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.

Moss, J. y McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). Springer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary *school*. En D., Thèrèse; G., Ghislaine (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). ERME

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M., Cañadas, M., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35*(2), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Warren, E., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 314-318.