

DOI: 10.24850/j-tyca-14-01-05

Artículos

Análisis de frecuencias comparativo con momentos L entre la distribución Kappa y seis de aplicación generalizada

Comparative frequency analysis with L moments between the Kappa distribution and six of general application

Daniel Francisco Campos-Aranda¹, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9876-3967>

¹Profesor jubilado de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México, campos_aranda@hotmail.com

Autor para correspondencia: Daniel Francisco Campos-Aranda, campos_aranda@hotmail.com

Resumen

El *análisis de frecuencias* (AF) permite estimar magnitudes de los datos máximos anuales de crecientes y lluvias diarias asociadas con bajas



probabilidades de ser excedidas. Tales estimaciones o *predicciones* permiten el diseño hidrológico de las obras hidráulicas de aprovechamiento o protección. El AF comprende cinco etapas: (1) verificación de la aleatoriedad de los datos; (2) adopción de una *función de distribución de probabilidades* (FDP); (3) ajuste de la FDP; (4) evaluación del ajuste logrado, y (5) selección de los resultados. En este estudio se exponen las bases teóricas de la distribución Kappa de cuatro parámetros de ajuste (u , a , k , h) obtenidos a través del método de los momentos L, que se describe con detalle. La distribución Kappa, cuando su segundo parámetro de forma h toma valores de -1, 0 y 1 reproduce a las distribuciones Logística Generalizada (LOG), General de Valores Extremos (GVE) y Pareto Generalizada (PAG). Se procesaron tres registros *conjuntos* de crecientes anuales de gasto pico (Qp) y volumen escurrido (Vol), dos registros anuales de Qp y tres de precipitación máxima diaria anual. A cada uno de los 11 registros procesados se les ajustaron cinco distribuciones: Kappa, la que reproduce según el valor de h (LOG, GVE o PAG); Log-Pearson tipo III; Log-Normal, y Wakeby. La calidad estadística de cada ajuste se cuantificó con el error estándar de ajuste y el error absoluto medio. Las conclusiones destacan la similitud de los resultados (errores y predicciones), en los 11 registros procesados y sugieren la aplicación sistemática de la distribución Kappa, para complementar las de aplicación bajo precepto y las de uso generalizado.

Palabras clave: distribución Kappa, momentos y cocientes L, error estándar de ajuste, error absoluto medio, gráficos Q-Q, predicciones.

Abstract

Frequency analysis (FA) allows estimating magnitudes for the maximum annual data of floods and daily rains associated with low exceedance probabilities. Such estimates or *predictions* allow the hydrological design of hydraulic works of exploitation or protection. The FA comprehends five stages: (1) verification of the randomness of the data; (2) adoption of a *probability distribution function* (PDF); (3) fitting the PDF; (4) evaluation of the goodness of fit, and (5) selection of the results. In this study, the theoretical bases of the Kappa distribution of four parameters (u, a, k, h), obtained through the L-moment method, which is described in detail, are exposed. The Kappa distribution, when its second shape parameter h takes values of -1, 0, and 1 reproduces the Generalized Logistics (GLO), Generalized Extreme Value (GEV), and Generalized Pareto (GPA) distributions. Three *joint* records of annual floods of peak flow (Qp) and runoff volume (Vol) were processed, and two yearly records of Qp and three of maximum annual daily precipitation. Five distributions were used to fit each of the eleven processed records: Kappa, the distribution reproduced according to the value of h (GLO, GEV o GPA); Log-Pearson type III; Log-Normal, and Wakeby. The statistical quality of each fit was quantified with the standard error of fit and the mean absolute error. The Conclusions highlight the similarity of the results (errors and predictions) in the eleven records processed and suggest the systematic application of the Kappa distribution, to complement those prescribed by government agencies and those of generalized use.

Keywords: Kappa distribution, L moments and ratios, standard error of fit, mean absolute error, Q-Q graphics, predictions.

Recibido: 12/05/2021

Aceptado: 18/09/2021

Introducción

El *análisis de frecuencias* (AF) es un procedimiento que busca definir magnitudes de una variable aleatoria asociadas con bajas probabilidades de ser excedidas; tales estimaciones se denominan *predicciones* y en ellas se basa el dimensionamiento hidrológico de todas las obras hidráulicas, como embalses, diques de contención, puentes, drenaje urbano, etcétera. Las variables aleatorias más comunes que se procesan con el AF son los llamados *datos hidrológicos extremos*, como las crecientes o avenidas, los niveles en ríos y mares, los vientos y las precipitaciones. Las tormentas máximas que ocurren en las cuencas originan las *crecientes*, cuyos datos básicos anuales son el gasto pico y el volumen de escurrimiento. Respecto a las tormentas y debido a la escasez de pluviógrafos, lo común es

procesar los datos de los pluviómetros a través de las precipitaciones máximas diarias anuales (Rao & Hamed, 2000; Meylan, Favre, & Musy, 2012; Stedinger, 2017; Johnson & Sharma, 2017).

El AF consta de las cinco etapas siguientes: (1) verificación de la aleatoriedad de los datos o muestra disponible; (2) adopción de un modelo probabilístico o *función de distribución de probabilidades* (FDP), con la cual se realizan las predicciones buscadas; (3) aplicación de un método de estimación de los parámetros de ajuste de la FDP probada; (4) cálculo de los indicadores de la calidad del ajuste logrado, entre la FDP y la muestra, y (5) selección de los resultados (Hosking & Wallis, 1997).

Este estudio, la primera etapa se realizó con base en el Test de Wald-Wolfowitz. Para la segunda etapa se aplicaron y contrastaron las siete FDP siguientes: Kappa de cuatro parámetros de ajuste; las tres distribuciones cuya aplicación ha sido sugerida bajo precepto o norma Log-Pearson tipo III (LP3), General de Valores Extremos (GVE) y Logística Generalizada (LOG); y tres de uso frecuente: la Log-Normal (LN3), la Pareto Generalizada (PAG) y la Wakeby (WAK); todas de tres parámetros de ajuste, excepto la última, con cinco (Gómez, Aparicio, & Patiño, 2010; Nguyen, El-Outayek, Lim, & Nguyen, 2017; Campos-Aranda, 2019).

Respecto a la etapa tres, se adoptó el método de los momentos L, el cual se ha establecido como un procedimiento simple, exacto y robusto para la estimación de los parámetros de ajuste de las FDP empleadas en los AF hidrológicos (Hosking & Wallis, 1997). Otra ventaja del método de los momentos L ha sido destacada por Kjeldsen, Ahn y Prosdociami (2017),

en relación con el uso del diagrama de cocientes L para seleccionar una FDP adecuada a los datos disponibles. Por último, en relación con la cuarta etapa del AF, se aplicaron los dos indicadores de uso más generalizado: el error estándar de ajuste y el error absoluto medio (Kite, 1977; Willmott & Matsuura, 2005; Chai & Draxler, 2014).

Los AF tienen implícitos dos retos. El primero busca distribuciones que mejor representen a los registros de datos hidrológicos extremos, que cada vez son más extensos. El segundo, fuera del alcance de este trabajo, está relacionado con el procesamiento de los datos no aleatorios: dependientes o no estacionarios (Khaliq, Ouarda, Ondo, Gachon, & Bobée, 2006; Meylan *et al.*, 2012; Katz, 2013).

Es importante destacar que el uso de las FDP de cuatro o más parámetros de ajuste, como los modelos Kappa y Wakeby, ha proliferado debido a su versatilidad y habilidad para representar muestras de datos cuya FDP de procedencia se desconoce (Singh & Deng, 2003; Asquith, 2011).

Por otra parte, Hosking y Wallis (1993) fueron los primeros en usar la distribución Kappa para generar datos sintéticos para buscar la mejor FDP en un AF regional de crecientes. Parida (1999) fue el primero en emplear la distribución Kappa en el AF de la lluvia ocurrida durante el monzón en la India de junio a septiembre.

Los *objetivos* básicos de este estudio fueron los tres siguientes: (1) exponer un resumen de la teoría de la distribución Kappa; (2) describir con detalle el método de los momentos L para la estimación de sus cuatro

parámetros de ajuste; y (3) realizar un contraste de bondad de ajuste y predicciones entre la distribución Kappa y seis de aplicación generalizada, tres de aplicación bajo precepto (LP3, GVE, LOG) y tres de uso común (LN3, PAG y WAK).

Métodos y materiales

Génesis de la distribución Kappa

Hosking (1994) expuso el desarrollo de la distribución Kappa de cuatro parámetros de ajuste, partiendo de las siguientes dos transformaciones que siguen tres FDP utilizadas actualmente en el AF de crecientes:

$$X = u + \alpha(1 - e^{-k \cdot Y})/k \text{ si } k \neq 0 \quad (1)$$

$$X = u + \alpha \cdot Y \text{ si } k = 0 \quad (2)$$

en las cuales X y Y son variables aleatorias reales, y u , a y k son parámetros de ajuste reales de ubicación, escala y forma. Si Y procede de una distribución exponencial, con FDP de la forma:

$$F(y) = 1 - e^{-y} \text{ con } y \geq 0 \quad (3)$$

entonces X tendrá una FDP Pareto Generalizada (PAG) con tres parámetros de ajuste. Si Y procede de una distribución Gumbel (valores extremos tipo I o doble exponencial), con FDP de la forma:

$$F(y) = \exp(-e^{-y}) \quad (4)$$

entonces X tendrá una FDP Generalizada de Valores Extremos (GVE), con tres parámetros de ajuste. Finalmente, si Y procede de una distribución Logística, con FDP de la forma:

$$F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}} \quad (5)$$

entonces X tendrá una FDP Logística Generalizada (LOG) con tres parámetros de ajuste. Por otra parte, las ecuaciones (3), (4) y (5) pueden ser obtenidas como casos especiales con $h = 1$, $h = 0$ y $h = -1$ de las siguientes FDP:

$$F(y) = (1 - h \cdot e^{-y})^{1/h} \text{ para } y \geq \ln h \text{ si } h \neq 0 \quad (6)$$

$$F(y) = \exp(-e^{-y}) \text{ si } h = 0 \quad (7)$$

h es un segundo parámetro de forma. La distribución Kappa de cuatro parámetros de ajuste (u, a, k, h) , que incluye como casos especiales a las distribuciones PAG, GVE y LOG, se obtiene para la variable aleatoria X aplicando las transformaciones (1) y (2) a la variable aleatoria Y , cuya FDP está definida por las ecuaciones (6) y (7). La FDP de la distribución Kappa es la siguiente (Hosking, 1994):

$$F(x, \theta) = \{1 - h[1 - k(x - u)/\alpha]_+^{1/k}\}^{1/h} \text{ si } k \neq 0, h \neq 0 \quad (8)$$

En esta ecuación, el signo + del paréntesis rectangular indica *positividad* para su expresión interna (Dupuis & Winchester, 2001). Coles (2001) aclara, para la distribución GVE, que cualquier combinación de parámetros de ajuste (θ) que viola la condición anterior de positividad implica que al menos uno de los puntos observados (x) está más allá de los puntos finales de la distribución, y entonces la función de verosimilitud es cero y su versión logarítmica $-\infty$.

La ecuación anterior incluye distribuciones de dos parámetros que se obtienen como expresiones o formas límite cuando k o h tienden a cero.

Bajo tal condición, las funciones de densidad de probabilidad [$f(x)$], y de cuantiles o solución inversa de la distribución Kappa son (Hosking, 1994; Asquith, 2011):

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} [1 - k(x - u)/\alpha]^{(\frac{1}{k})-1} [F(x)]^{1-k} \quad (9)$$

$$x(F) = u + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \left(\frac{1-F^h}{h} \right)^k \right] \quad (10)$$

en ambas expresiones, los parámetros de ajuste u , α , k y h son números reales; además, $\alpha > 0$. En la Ecuación (10), F es la probabilidad de no excedencia y el cociente $(1 - F^h)/h$ define los límites de la variable x , ya conocidos en las distribuciones LOG, GVE y PAG (Hosking & Wallis, 1997; Stedinger, 2017).

Hosking (1994) establece cuatro condiciones que definen el espacio de los parámetros de ajuste (Figura 1) para asegurar la existencia de los momentos L (condiciones a y b) y la *unicidad* de los cuatro parámetros de ajuste (condiciones c y d), dados los primeros cuatro momentos L, tales condiciones son: (a) $k > -1$; (b) si $h < 0$, entonces $h \cdot k > -1$; (c) $h > -1$ y (d) $k + 0.725 \cdot h > -1$.

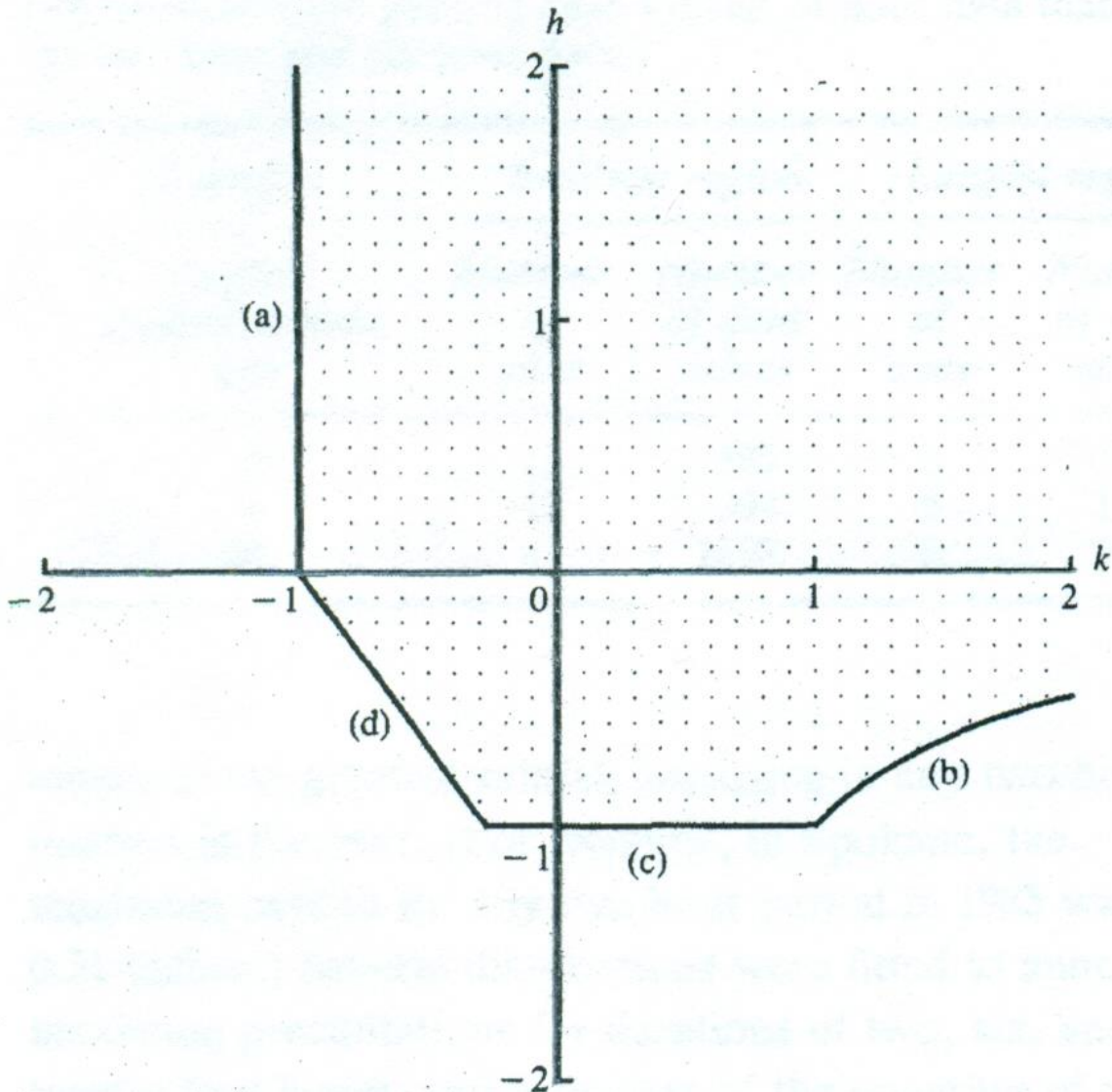


Figura 1. Espacio (área de puntos) de los parámetros de ajuste k y h de la distribución Kappa, que asegura existencia de los primeros cuatro momentos L y la unicidad de sus parámetros de ajuste (Hosking, 1994).

Momentos y cocientes L de la muestra

Los momentos L son combinaciones lineales de los momentos de probabilidad ponderada (b_r) desarrollados por Greenwood, Landwehr, Matalas y Wallis (1979), por ello son robustos ante los valores dispersos de muestra. Su cálculo comienza por ordenar la serie de datos hidrológicos anuales (x_i) de menor a mayor ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) y entonces se obtienen los momentos de probabilidad ponderada usando la siguiente expresión (Hosking & Wallis, 1997; Rao & Hamed, 2000; Asquith, 2011; Stedinger, 2017):

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{i=r+1}^n \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_i \quad (11)$$

En la expresión anterior, el número de orden r varía de 0 a 3 y n es el número de datos de la serie anual. Se deduce que b_0 es igual a la media aritmética. Los momentos L de la muestra (l) y sus respectivos cocientes (t) de similitud con los coeficientes de variación, asimetría y curtosis son:

$$l_1 = b_0 \quad (12)$$

$$l_2 = 2 \cdot b_1 - b_0 \quad (13)$$

$$l_3 = 6 \cdot b_2 - 6 \cdot b_1 + b_0 \quad (14)$$

$$l_4 = 20 \cdot b_3 - 30 \cdot b_2 + 12 \cdot b_1 - b_0 \quad (15)$$

$$t_2 = l_2/l_1 \quad (16)$$

$$t_3 = l_3/l_2 \quad (17)$$

$$t_4 = l_4/l_2 \quad (18)$$

El diagrama de cocientes de momentos L tiene en el eje de las abscisas a t_3 y en el de las ordenadas a t_4 . Las FDP de tres parámetros de ajuste son líneas curvas y las FDP de dos parámetros de ajuste son puntos.

En la Figura 2 se muestra en el diagrama de cocientes de momentos L el área de dominio de la distribución Kappa; los puntos L, G y E corresponden a las distribuciones Logística, Gumbel y Exponencial; su curva extrema inferior es el límite de los valores de t_4 como función de t_3 (Hosking & Wallis, 1997).

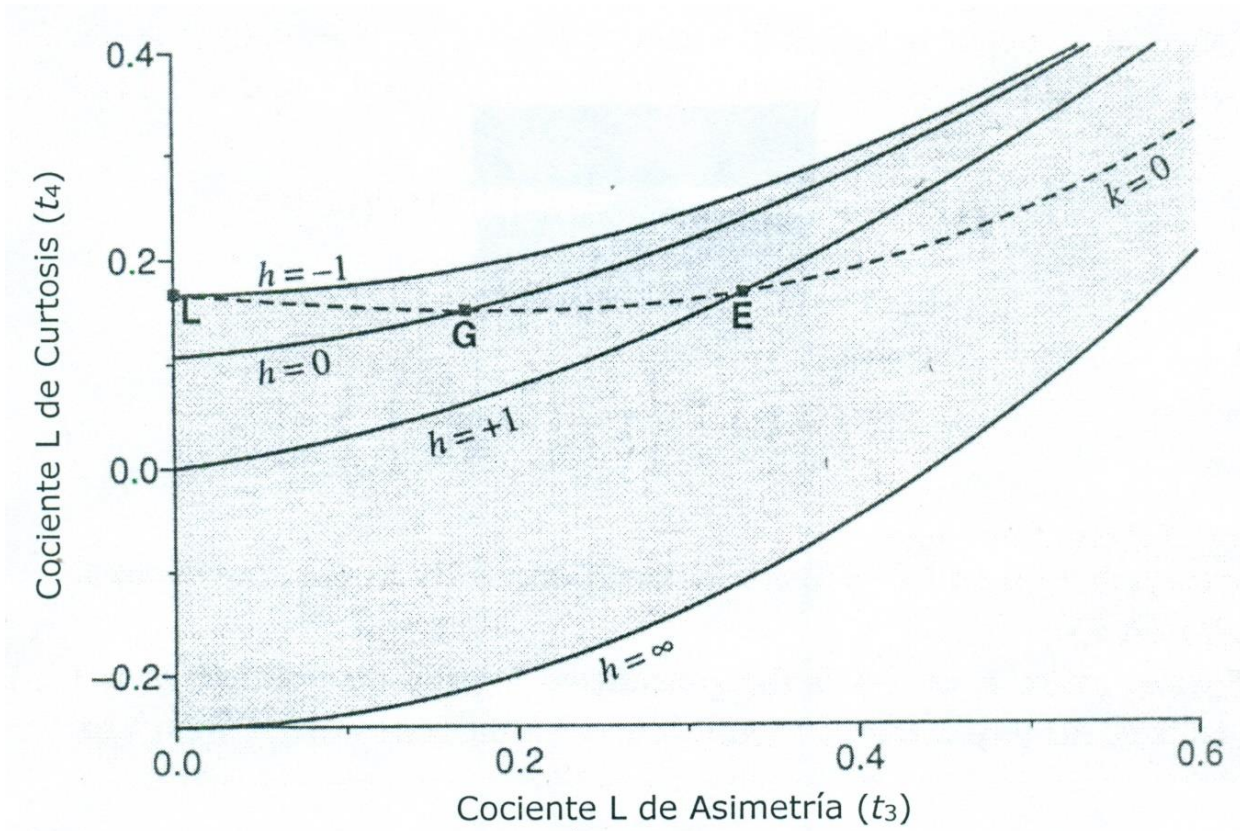


Figura 2. Área de dominio de la distribución Kappa en el diagrama de cocientes de momentos L (Hosking & Wallis, 1997).

Momentos y cocientes L de la distribución Kappa

Hosking y Wallis (1997) exponen las ecuaciones de los dos primeros momentos L y de los cocientes t_3 y t_4 , de la distribución Kappa, las cuales son:

$$l_i = u + \alpha(1 - g_1)/k \quad (19)$$

$$l_2 = \alpha(g_1 - g_2)/k \quad (20)$$

$$t_3 = (-g_1 + 3g_2 - 2g_3)/(g_1 - g_2) \quad (21)$$

$$t_4 = (-g_1 + 6g_2 - 10g_3 + 5g_4)/(g_1 - g_2) \quad (22)$$

en las cuales:

$$g_r = \frac{r\Gamma(1+k)\cdot\Gamma(-k-r/h)}{(-h)^{1+k}\Gamma(1-r/h)} \text{ si } h < 0 \quad (23)$$

$$g_r = \frac{r\Gamma(1+k)\cdot\Gamma(r/h)}{h^{1+k}\Gamma(1+k+r/h)} \text{ si } h > 0 \quad (24)$$

Para la estimación de la función Gamma $\Gamma(\omega)$ se utilizó la fórmula de Stirling (Davis, 1972):

$$\Gamma(\omega) \cong e^{-\omega} \cdot \omega^{\omega-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{1/2} \cdot F1 \quad (25)$$

siendo:

$$F1 = \left(1 + \frac{1}{12 \cdot \omega} + \frac{1}{288 \cdot \omega^2} - \frac{139}{51840 \cdot \omega^3} - \frac{571}{2488320 \cdot \omega^4} + \dots \right)$$

Estimación de los parámetros de ajuste

Kjeldsen *et al.* (2017) sugieren el siguiente procedimiento que inicia definiendo un valor fijo y aproximado de h en función de los cocientes t_3 y t_4 del registro de datos en el diagrama de cocientes de momentos L. Cuando se obtienen puntos por encima de la curva de la distribución LOG, implica que $h < -1$ y entonces h tomará su valor límite de -1 (condición c en la Figura 1), como fue propuesto por Hosking y Wallis (1993). Lo anterior equivale a ajustar la distribución LOG, que es lo que procede

cuando t_3 y t_4 definen puntos por arriba de su curva en el diagrama de cocientes de momentos L (Campos-Aranda, 2013).

Para definir el valor del parámetro de forma h cuando queda ubicado entre las curvas de las distribuciones LOG y GVE con un valor negativo o entre la curva de la GVE y de la PAG con un valor positivo se calculan los respectivos t_4 de cada curva para el dato t_3 de la muestra, con las ecuaciones siguientes (Hosking & Wallis, 1997):

$$t_4^{\text{LOG}} = 0.16667 + 0.83333 \cdot t_3^2 \quad (26)$$

$$t_4^{\text{GVE}} = 0.10701 + 0.1109 \cdot t_3 + 0.84838 \cdot t_3^2 - 0.06669 \cdot t_3^3 + \text{SUM1}$$

$$\text{SUM1} = 0.00567 \cdot t_3^4 - 0.04208 \cdot t_3^5 + 0.03763 \cdot t_3^6 \quad (27)$$

$$t_4^{\text{PAG}} = 0.20196 \cdot t_3 + 0.95924 \cdot t_3^2 - 0.20096 \cdot t_3^3 + 0.04061 \cdot t_3^4 \quad (28)$$

Como ya se indicó, si t_4 es mayor que t_4^{LOG} , entonces $h = -1$. Si t_4 es mayor que t_4^{GVE} , h será negativa y su valor se obtiene por interpolación lineal, con la expresión:

$$h = -(t_4 - t_4^{\text{GVE}})/(t_4^{\text{LOG}} - t_4^{\text{GVE}}) \quad (29)$$

Cuando t_4 es menor que t_4^{GVE} , h será positiva y su valor se obtiene por interpolación lineal con la ecuación:

$$h = (t_4^{\text{GVE}} - t_4) / (t_4^{\text{GVE}} - t_4^{\text{PAG}}) \quad (30)$$

La expresión anterior también se utiliza para los casos en los cuales t_4 resulta menor que t_4^{PAG} , y por lo tanto h será mayor que la unidad.

Enseguida se estima el parámetro de forma k por tanteos, en función de t_3 con la Ecuación (21), haciendo uso de las expresiones (23) o (24), según si h es negativo o positivo. Este cálculo numérico se resolvió con el método de bisección (Campos-Aranda, 2003), adoptando una tolerancia de 0.00001 para la diferencia entre el t_3 de la muestra y el estimado con la Ecuación (21). El inicio del método de bisección debe respetar los límites impuestos a k en la Figura 1, y por ello, cuando $h > 0$, k tomó valores iniciales de -1 y 2 . Pero cuando $h < 0$, su valor negativo inicial se definió con la expresión $k = -1 - 0.725 \cdot (h)$, y su valor positivo inicial con la ecuación $k = -(1/h)$. Estimado el valor de k con base en la Ecuación (20), el valor de l_2 se obtiene de a ; por último, con la Ecuación (19) y la magnitud l_1 se define el valor de u .

Otros métodos de ajuste de la distribución Kappa

Dupuis y Winchester (2001) han comentado que la estimación de los cuatro parámetros de ajuste de la distribución Kappa mediante el método de los momentos L no siempre es factible o calculable, y por ello exponen el método de máxima verosimilitud como opción viable. Estos autores destacan que el método de los momentos L presenta dificultades de cómputo cuando h es negativa y sobre todo si es menor que -1 . Para tales situaciones ($h < -1$), Park y Park (2002) han propuesto el método de máxima verosimilitud con penalizaciones.

Singh y Deng (2003) proponen el método de estimación designado POME (*principle of maximum entropy*) y lo comparan contra los existentes de momentos ordinarios, momentos L y máxima verosimilitud. Concluyen que los métodos POME y máxima verosimilitud son idénticos y el menos confiable es el de momentos ordinarios.

Distribuciones utilizadas en el contraste

Lógicamente, las distribuciones LOG, GVE y PAG son las tres primeras del contraste debido a que son las que engloba y reproduce el modelo Kappa. Después se incluyeron las dos de uso generalizado: la Log-Normal de tres parámetros de ajuste (LN3) y la Wakeby de cinco parámetros de ajuste (Houghton, 1978). Estas cinco distribuciones se aplicaron con el método de los momentos L (Hosking & Wallis, 1997). La distribución Log-Pearson tipo III (LP3) se ajustó con su método clásico, el de momentos, en el dominio logarítmico (WRC, 1977) y en el dominio real (Bobée, 1975), adoptando la de mejor ajuste; es decir, con errores de ajuste menores.

De las seis distribuciones citadas, tres han sido propuestas de aplicación por norma o precepto. La primera fue la LP3, en EUA desde el inicio de la década de 1970. Después, el Natural Environment Research Council (NERC, 1975) adoptó a la GVE para Inglaterra hasta finales del siglo pasado, en que cambió a la LOG (Shaw, Beven, Chappel, & Lamb, 2011). Las tres distribuciones de uso generalizado han sido la LN3, la PAG y la Wakeby.

Gráfico de diagnóstico Q-Q

Nguyen *et al.* (2017) han sugerido dos evaluaciones para seleccionar la FDP óptima a un registro de datos hidrológicos extremos: (1) la habilidad descriptiva y (2) la habilidad predictiva. La primera se refiere a la exactitud con la cual la FDP que se prueba reproduce los datos de la muestra y la segunda está asociada, lógicamente, con la variabilidad de sus predicciones en relación con la dispersión que tienen las predicciones de la muestra. Para probar la habilidad descriptiva se tienen tres técnicas: (1) los gráficos de diagnóstico; (2) las pruebas estadísticas, y (3) los índices de bondad de ajuste.

Los gráficos de diagnóstico *P-P* y *Q-Q* de *probabilidad* empírica contra calculada y de *cantidad* observada contra estimada se han popularizado (Coles, 2001; Wilks, 2011), y constituyen una manera simple y efectiva de comparar los resultados de una FDP contrastada. Para una muestra de datos x_i ordenados de menor a mayor se les asigna una probabilidad empírica (p), por ejemplo, con la fórmula de Cunnane, que de acuerdo con Stedinger (2017) conduce a valores insesgados en la mayoría de las FDP utilizadas en hidrología, la cual es:

$$p = \frac{m-0.40}{n+0.20} \quad (31)$$

donde m es el número de orden del dato y n es el número de datos. Para cada dato x_i se obtiene su probabilidad con la ecuación de la FDP probada. Para el caso de la distribución Kappa, con la Ecuación (8). El gráfico de P - P se define con los puntos de abscisas y ordenadas siguientes:

$$\left[\frac{m-0.40}{n+0.20}, F(x_i) \right] \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

El gráfico de Q - Q utiliza la Ecuación (10) o solución inversa de la FDP Kappa para definir puntos de las ordenadas y está integrado por los puntos siguientes:

$$\left[x_i, x \left(\frac{m-0.40}{n+0.20} \right) \right] \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

La desventaja de los gráficos de diagnóstico radica en la apreciación subjetiva que se hace al comparar diversas FDP, ya que no se dispone de un valor numérico (Nguyen *et al.*, 2017). Campos-Aranda (2019) visualiza más útil la gráfica de Q - Q para observar predicciones sobreestimadas (por quedar arriba de la recta a 45°) o subestimadas (por estar debajo).

Error estándar de ajuste (*EEA*)

Los índices de bondad de ajuste tienen la ventaja de ser de cálculo fácil y comúnmente involucran a la diferencia entre los valores observados x_i y los estimados \hat{x} con la FDP que se contrasta. El *EEA* es el más común (Chai & Draxler, 2014); se estableció a mediados de la década de 1970 (Kite, 1977) y se ha aplicado en México usando la fórmula empírica de Weibull (Benson, 1962); ahora se aplicará utilizando la Ecuación (31). La expresión del *EEA* es:

$$EEA = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{(n-np)} \right]^{1/2} \quad (34)$$

x_i son los n datos observados ordenados de menor a mayor; \hat{x}_i , los estimados para la probabilidad estimada con la Ecuación (31) y la FDP que se contrasta; np es el número de parámetros de ajuste de la FDP, con cuatro para la Kappa, cinco para la Wakeby y tres para el resto de las contrastadas; el *EEA* tiene las unidades de la variable x_i .

Error absoluto medio (*EAM*)

Sus ventajas radican en tener las unidades de la variable, al igual que el *EEA*, y evitar que el impacto de los valores dispersos sea elevado al cuadrado y por ello $EEA \geq EAM$ (Willmott & Matsuura, 2005). Su expresión es (Nguyen *et al.*, 2017):

$$EAM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{x}_i|}{n - np} \quad (35)$$

Registros de datos hidrológicos procesados

Aldama, Ramírez, Aparicio, Mejía-Zermeño y Ortega-Gil (2006) exponen los registros *conjuntos* de gasto pico (Q_p) en m^3/s y volumen (Vol) en millones de m^3 (Mm^3) anuales de las crecientes de entrada a 15 embalses importantes y uno en proyecto. De tales registros, se seleccionaron los dos de mayor amplitud. Los primeros corresponden a los 64 datos de ingreso a la presa La Boquilla en el río Conchos, afluente del río Bravo, que define la Región Hidrológica No. 24-1. Los siguientes registros por

procesar son los 61 datos de ingreso a la presa Adolfo Ruiz Cortines (Mocúzari), en el río Mayo, del estado de Sonora, México.

Gómez *et al.* (2010) exponen los registros *conjuntos* de Q_p y Vol con 55 datos de la estación de aforos La Cuña, que se ubica en el río Verde, en la Región Hidrológica No. 12-3 (río Santiago), México. Tales registros de crecientes también se procesaron.

Los siguientes dos registros de crecientes anuales se tomaron del contraste realizado por Campos-Aranda (2013) y pertenecen a muestras que definen su ubicación en el diagrama de cocientes L por debajo de la curva de la distribución PAG, por lo cual su valor de h será mayor de la unidad. Un registro contiene 53 crecientes de entrada a la presa Luis Donaldo Colosio (Huites), en el río Fuerte del estado de Sinaloa, México. El otro, 67 crecientes de entrada a la presa El Cuchillo, en el río San Juan, del estado de Nuevo León, México. Este registro fue procesado con anterioridad por Campos-Aranda (1998). Debido a la dificultad que implica obtener estos registros se exponen en la Tabla 1.

Tabla 1. Registros de las crecientes anuales (m^3/s) de las estaciones hidrométricas Huites del estado de Sinaloa, México, y El Cuchillo del estado de Nuevo León, México.

#	Huites*			El Cuchillo				#
	(1941-1993)			(1927-1993)				
1	2 085	1 908	1 119	1 817.0	3 358.0	603.0	396.0	19
2	2 531	15 000	6 178	54.4	526.4	348.2	210.0	20
3	14 376	1 396	4 443	34.2	1 393.9	1 274.0	366.9	21
4	2 580	1 620	1 474	994.0	1 173.1	726.8	183.9	22
5	1 499	2 702	2 508	332.5	381.8	5540.0	115.2	23
6	1 165	1 319	1 530	162.8	469.0	464.5	963.7	24
7	1 127	1 944	8 000	2 736.5	2 084.4	470.6	688.6	25
8	3 215	2 420	5 496	393.5	167.4	655.4	8 315.1	26
9	10 000	2 506	3 385	602.8	2 511.5	649.0	505.3	27
10	3 229	1 534	1 374	1 307.0	302.7	454.6	392.6	28
11	677	1 508	1 245	139.8	384.5	3 355.5	161.5	29
12	1 266	1 558	2 299	6 758.5	125.0	1 935.0	153.9	30
13	1 025	2 200	1 345	720.4	900.0	643.7	250.9	31
14	955	2 225	11 350	404.0	1 927.0	1 081.0	-	32
15	4 780	7 960	2 509	1 194.0	177.0	2 000.0	-	33
16	696	4 001	2 006	817.2	1 677.6	3 500.0	-	34
17	593	1 067	1 182	675.5	492.0	355.0	-	35
18	3 010	3 233	-	1 584.8	584.5	225.9	-	36

Por último, se procesaron tres registros de precipitación máxima diaria (*PMD*) anual de una estación pluviométrica de cada zona geográfica del estado de San Luis Potosí. Del Altiplano se procesó Mexquitic ($n = 72$); de la Zona Media, San Francisco ($n = 50$), y de la región Huasteca, Xilitla ($n = 51$). Estos registros fueron analizados por Campos-Aranda (2019) para obtener sus FDP óptimas e integrados con base en el archivo mensual en Excel de la Comisión Nacional del Agua (Conagua), proporcionado al autor; por ello se reproducen en la Tabla 2.

Tabla 2. Registros de *PMD* anual (milímetros) en las tres estaciones pluviométricas indicadas del estado de San Luis Potosí, México.

Núm.	Mexquitic (1943-2014)			San Francisco (1961-2013)		Xilitla (1964-2014)		Núm.
1	48.3	42.0	51.0	15.0	135.0	146.5	138.0	27
2	60.0	39.0	50.0	25.0	45.0	159.0	200.0	28
3	57.0	66.0	25.0	12.0	42.4	207.4	182.0	29
4	47.0	48.0	12.0	12.0	43.0	224.5	330.0	30
5	35.5	55.0	28.0	84.0	36.0	224.7	148.0	31
6	56.0	54.0	30.0	24.0	32.0	163.0	222.0	32
7	40.0	57.0	62.5	111.5	64.5	193.5	113.0	33
8	25.0	64.0	41.5	42.0	49.0	184.0	187.0	34

9	83.0	68.0	53.2	36.0	39.0	128.0	163.0	35
10	84.0	40.0	35.8	53.0	64.0	147.0	136.0	36
11	40.0	55.2	50.0	21.0	44.0	299.0	92.0	37
12	31.0	40.5	30.0	57.0	44.0	111.0	160.0	38
13	52.0	55.3	41.0	42.0	54.0	200.0	173.0	39
14	59.0	51.0	69.0	43.0	40.0	103.0	203.0	40
15	47.0	27.2	75.0	22.0	45.5	420.0	131.0	41
16	40.0	74.0	53.0	78.0	42.0	226.0	118.0	42
17	45.0	44.2	53.0	57.0	27.0	220.0	98.5	43
18	61.0	46.0	53.5	42.0	30.0	180.0	320.0	44
19	21.0	45.3	107.0	30.0	75.0	160.0	247.0	45
20	30.5	73.0	41.0	85.0	42.0	232.0	144.0	46
21	26.0	31.7	-	78.0	40.0	140.0	162.0	47
22	51.5	36.0	-	41.0	87.0	137.0	122.0	48
23	32.0	59.0	-	22.0	28.0	126.7	93.5	49
24	28.0	46.0	-	23.0	51.0	200.0	213.0	50
25	62.0	20.0	-	38.0	-	280.0	147.0	51
26	65.0	15.5	-	43.4	-	184.0	-	52

Test de Wald-Wolfowitz

Esta prueba no paramétrica fue desarrollada Abraham Wald y Jacob Wolfowitz basándose en el trabajo de Richard L. Anderson sobre el coeficiente de correlación serial. Ha sido utilizada por Bobée y Ashkar (1991), Rao y Hamed (2000), y Meylan *et al.* (2012) para probar *independencia* y *estacionariedad* en registros de gastos máximos anuales (X_i). Por lo anterior, se propuso aplicar la prueba a los registros de *Qp*, *Vol* y *PMD* anuales, que deben ser muestras de valores aleatorios. El estadístico de la prueba de Wald-Wolfowitz es:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_{i+1} + x_n \cdot x_1 \quad (36)$$

Cuando el tamaño (n) de la serie o muestra (x_i) no es pequeño y sus datos son independientes, R procede de una distribución Normal con media y varianza, dadas por las expresiones siguientes:

$$E[R] = \bar{R} = \frac{S_1^2 - S_2}{n-1} \quad (37)$$

$$Var[R] = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4 \cdot S_1^2 \cdot S_2 + 4 \cdot S_1 \cdot S_3 + S_2^2 - 2 \cdot S_4}{(n-1)(n-2)} - \bar{R}^2 \quad (38)$$

en las cuales:

$$S_w = \sum_{i=1}^n x_i^w \quad (39)$$

Finalmente, se calcula U con la ecuación:

$$U = \frac{R - \bar{R}}{\sqrt{\text{Var}[R]}} \quad (40)$$

El valor de U sigue una distribución Normal (0, 1) y se puede usar para probar la independencia de los datos de la serie con un nivel de significancia α , comúnmente del 5 %. En una prueba de dos colas, la variable normal estandarizada es $Z_{\alpha/2} \cong 1.96$; entonces, cuando el valor absoluto de U es menor que 1.96, la serie estará integrada por valores independientes (muestra aleatoria).

Diagrama de flujo del procedimiento

En la Figura 3 se muestra de modo esquemático el proceso seguido para el contraste de la distribución Kappa.

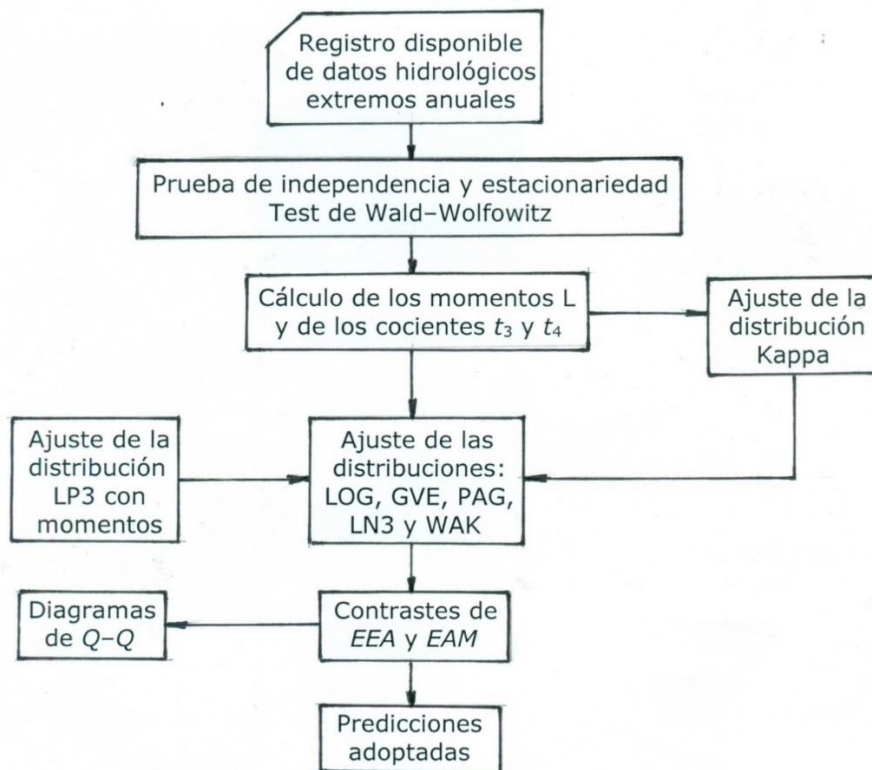


Figura 3. Diagrama de flujo que expone el proceso seguido para el contraste de la distribución Kappa con las seis de aplicación generalizada.

Resultados y su discusión

Prueba de aleatoriedad y momentos y cocientes L

En la cuarta columna de la Tabla 3 se exponen los valores de la estadística U (Ecuación (40)), definiendo que los 11 registros procesados son aleatorios. En el resto de las columnas se muestran las magnitudes de los momentos y cocientes L de cada registro (ecuaciones (12) a (18)).

Tabla 3. Datos generales y valores de los momentos y cocientes L de los 11 registros procesados.

Núm.	Registro	A y H	U	l_1	l_2	t_3	t_4
1	La Boquilla Qp	21003	-0.084	858.707	373.7957	0.30456	0.15338

2	La Boquilla <i>Vol</i>	21003	-0.251	292.896	128.3310	0.25226	0.12746
3	Mocúzari <i>Qp</i>	10719	0.147	1477.266	547.3816	0.34733	0.26482
4	Mocúzari <i>Vol</i>	10719	1.189	158.709	66.0485	0.26164	0.16069
5	La Cuña <i>Qp</i>	19097	0.284	499.875	205.4937	0.38716	0.25523
6	La Cuña <i>Vol</i>	19097	0.213	154.839	74.4854	0.43326	0.28467
7	Huites <i>Qp</i>	26020	-0.135	3176.464	1453.9170	0.50858	0.31947
8	El Cuchillo <i>Qp</i>	8794	-0.821	1139.560	651.0005	0.51895	0.32702
9	Mexquitic <i>PMD</i>	1749	1.307	47.794	9.5213	0.05475	0.15491
10	S. Francisco <i>PMD</i>	1066	-0.565	46.726	12.7573	0.23966	0.24363
11	Xilitla <i>PMD</i>	630	-0.278	181.163	34.6449	0.21794	0.18487

Simbología:

A = área de cuenca, en km^2 , en los primeros ocho registros.

H = altitud, en msnm, en los últimos tres registros.

U = estadístico del Test de Wald-Wolfowitz.

L_1 = momento L de primer orden, en m^3/s o Mm^3 .



L_2 = momento L de segundo orden.

T_3 = cociente de momentos L de asimetría.

t_4 = cociente de momentos L de curtosis.

Parámetros de ajuste de la distribución Kappa

Con base en los valores de la Tabla 3, las ecuaciones (19) a (30) y el procedimiento descrito de estimación de los cuatro parámetros de ajuste de la distribución Kappa, se obtuvieron los resultados mostrados en la Tabla 4, en la cual también se indica el número de iteraciones realizadas con el método de bisección para estimar el primer parámetro de forma k . En la cuarta columna se indica la primera FDP de contraste de la distribución Kappa, seleccionada entre la LOG, GVE o PAG, según proximidad del valor de h a -1 , 0 , 1 , respectivamente. Se observa en el registro de Xilitla, que aunque h es negativo está más próximo a cero que a -1 .

Tabla 4. Resultados del ajuste con momentos L de la distribución Kappa en los 11 registros procesados de datos hidrológicos extremos.

#	Registro	ITE	FDP	Parámetros de ajuste			
				<i>h</i>	<i>k</i>	<i>a</i>	<i>u</i>
1	La Boquilla <i>Qp</i>	22	PAG	0.8864	0.0546	789.107	132.918
2	La Boquilla <i>Vol</i>	18	PAG	0.7652	0.1076	276.658	65.128
3	Mocúzari <i>Qp</i>	16	LOG	-0.8928	-0.3431	453.746	1 166.899
4	Mocúzari <i>Vol</i>	14	GVE	0.4140	-0.0348	105.492	75.685
5	La Cuña <i>Qp</i>	16	GVE	0.2888	-0.2685	228.381	258.746
6	La Cuña <i>Vol</i>	13	GVE	0.4287	-0.3155	78.311	60.399
7	Huites <i>Qp</i>	14	PAG	1.1640	-0.3337	1 652.386	613.021
8	El Cuchillo <i>Qp</i>	17	PAG	1.2424	-0.3440	730.866	-33.717
9	Mexquitic <i>PMD</i>	12	LOG	-0.7337	-0.0215	10.363	46.070
10	San Fco. <i>PMD</i>	16	LOG	-1.0000	-0.2404	11.590	41.914
11	Xilitla <i>PMD</i>	17	GVE	-0.3970	-0.1523	38.453	159.906

Simbología:

ITE = número de iteraciones del método de bisección.

FDP = FDP cercana a la distribución Kappa, según valor de *h*.

Observaciones respecto al ajuste logrado

Con base en los resultados (errores y predicciones) concentrados en la Tabla 5 se observa en ocho de los once registros procesados que el *EEA* y *EAM* mínimos, indicados en cursivas, coinciden para definir el mejor ajuste. En los registros 2, 5 y 11, los menores *EEA* y *EAM* se obtuvieron para FDP diferentes. La selección (renglón sombreado) entre ambas distribuciones se basó en el contraste de las predicciones de los periodos de retorno mayores de 100 años, adoptando las intermedias o más representativas, según criterio del autor. Tal selección puede parecer subjetiva, pero debido a la similitud que presentan todas las predicciones, tal juicio de adopción no es del todo incorrecto.

Tabla 5. Contraste de indicadores de bondad de ajuste y predicciones entre las distribuciones Kappa, la que representa (LOG, GVE o PAG) y tres de uso generalizado (LP3, LN3 y WAK), en los 11 registros de datos hidrológicos procesados.

NR	FDP	EEA	EAM	Periodos de retorno, en años						
				25	50	100	500	1 000	5 000	10 000
1	KAP	79.5	62.9	2461	2912	3346	4292	4674	5508	5845
1	PAG	76.9	<i>58.1</i>	2474	2925	3355	4282	4652	5448	5765
1	LP3	86.1	62.8	2491	3015	3544	4784	5318	6547	7069

1	LN3	99.4	72.8	2462	3033	3650	5279	6074	8163	9174
1	WAK	78.3	59.0	2477	2938	3382	4351	4744	5601	5947
2	KAP	19.8	12.5	817	948	1070	1319	1414	1608	1682
2	PAG	22.2	12.9	816	933	1035	1225	1290	1412	1453
2	LP3	21.4	13.4	849	997	1135	1416	1521	1731	1808
2	LN3	23.3	17.7	818	985	1159	1598	1804	2324	2567
2	WAK	20.7	12.0	790	923	1067	1522	1808	2860	3571
3	KAP	153.2	87.7	3782	4873	6244	10991	13988	24420	31004
3	LOG	155.3	86.6	3765	4853	6223	10988	14010	24585	31302
3	LP3	148.9	94.6	3917	4878	5956	8978	10536	14855	17058
3	LN3	152.8	99.5	3910	4858	5911	8807	10270	14240	16219
3	WAK	152.0	82.1	3780	4902	6303	11051	13982	23917	30052
4	KAP	8.2	5.8	434	517	602	808	900	1122	1221
4	GVE	9.1	6.5	431	526	629	911	1053	1441	1636
4	LP3	11.4	8.5	423	505	588	783	868	1067	1152
4	LN3	8.3	6.0	431	520	613	849	960	1244	1377
4	WAK	8.9	6.0	435	515	595	773	847	1015	1086
5	KAP	59.1	38.2	1419	1835	2335	3920	4844	7786	9489
5	GVE	58.7	37.5	1406	1838	2372	4160	5254	8926	11172
5	LP3	72.1	42.2	1408	1762	2154	3228	3767	5219	5938
5	LN3	59.2	37.8	1441	1839	2293	3592	4270	6167	7139
5	WAK	59.1	36.6	1442	1844	2304	3646	4367	6469	7599
6	KAP	17.7	8.8	495	664	873	1576	2007	3459	4350

6	GVE	18.6	9.7	486	662	888	1702	2234	4156	5411
6	LP3	12.0	6.9	517	694	907	1574	1952	3101	3736
6	LN3	16.7	8.1	506	670	863	1439	1752	2661	3142
6	WAK	18.0	9.0	495	664	872	1561	1978	3358	4193
7	KAP	789.8	390.9	10173	13939	18689	35052	45301	80588	102652
7	PAG	799.5	393.9	10068	13834	18629	35436	46133	83632	107487
7	LP3	949.8	400.7	10492	15061	21301	45851	63053	129752	175998
7	LN3	784.3	376.8	10283	14164	18971	34551	43592	71547	87183
7	WAK	815.4	410.2	10070	13834	18626	35412	46091	83504	107304
8	KAP	237.0	101.1	4282	6010	8205	15865	20718	37637	48342
8	PAG	248.1	102.1	4218	5948	8178	16170	21357	39946	52007
8	LP3	217.7	95.9	4403	6209	8467	15903	20281	34031	41838
8	LN3	227.6	97.1	4333	6115	8338	15630	19901	33229	40742
8	WAK	253.5	106.3	4212	5946	8187	16245	21495	40376	52675
9	KAP	1.7	1.3	80	88	96	115	123	143	152
9	LOG	1.7	1.2	80	88	96	117	127	150	160
9	LP3	2.2	1.8	82	89	97	113	120	135	141
9	LN3	2.1	1.3	79	86	92	104	109	120	124
9	WAK	1.5	1.0	80	89	98	120	129	153	163
10	KAP	3.5	2.9	97	117	139	208	247	367	435
10	LOG	3.5	2.9	97	116	139	208	247	366	433
10	LP3	3.9	3.2	98	113	128	166	183	224	242
10	LN3	3.7	3.1	98	114	131	172	191	239	261

10	WAK	3.3	2.7	99	119	141	198	227	304	342
11	KAP	6.7	4.7	318	365	416	558	630	831	934
11	GVE	7.0	4.6	319	361	406	518	570	702	764
11	LP3	7.0	4.8	319	362	407	522	577	718	786
11	LN3	7.5	4.9	318	359	400	501	547	660	712
11	WAK	6.4	4.8	318	366	418	556	625	808	899

Simbología:

NR = número de registro, según la Tabla 3 o Tabla 4.

FDP = función de distribución de probabilidades probada.

EEA = error estándar de ajuste, en m^3/s , Mm^3 o mm , según datos.

EAM = error absoluto medio, en m^3/s , Mm^3 o mm , según datos.

En la Figura 4 y Figura 5 se muestran los gráficos de diagnóstico Q-Q de los dos mejores ajustes logrados con la distribución Kappa, los cuales se obtuvieron para los registros 2 y 4, respectivamente. Ambos registros corresponden al volumen escurrido anual de crecientes en Mm^3 . En la Figura 4, hasta el dato número 59 el modelo Kappa reproduce de manera exacta los datos de la muestra y a partir de ahí sobreestima tres valores y subestimada los dos últimos, relativos a los datos dispersos. En cambio, en la Figura 5, únicamente se detecta falta de exactitud en los dos últimos datos, pero poco severa.

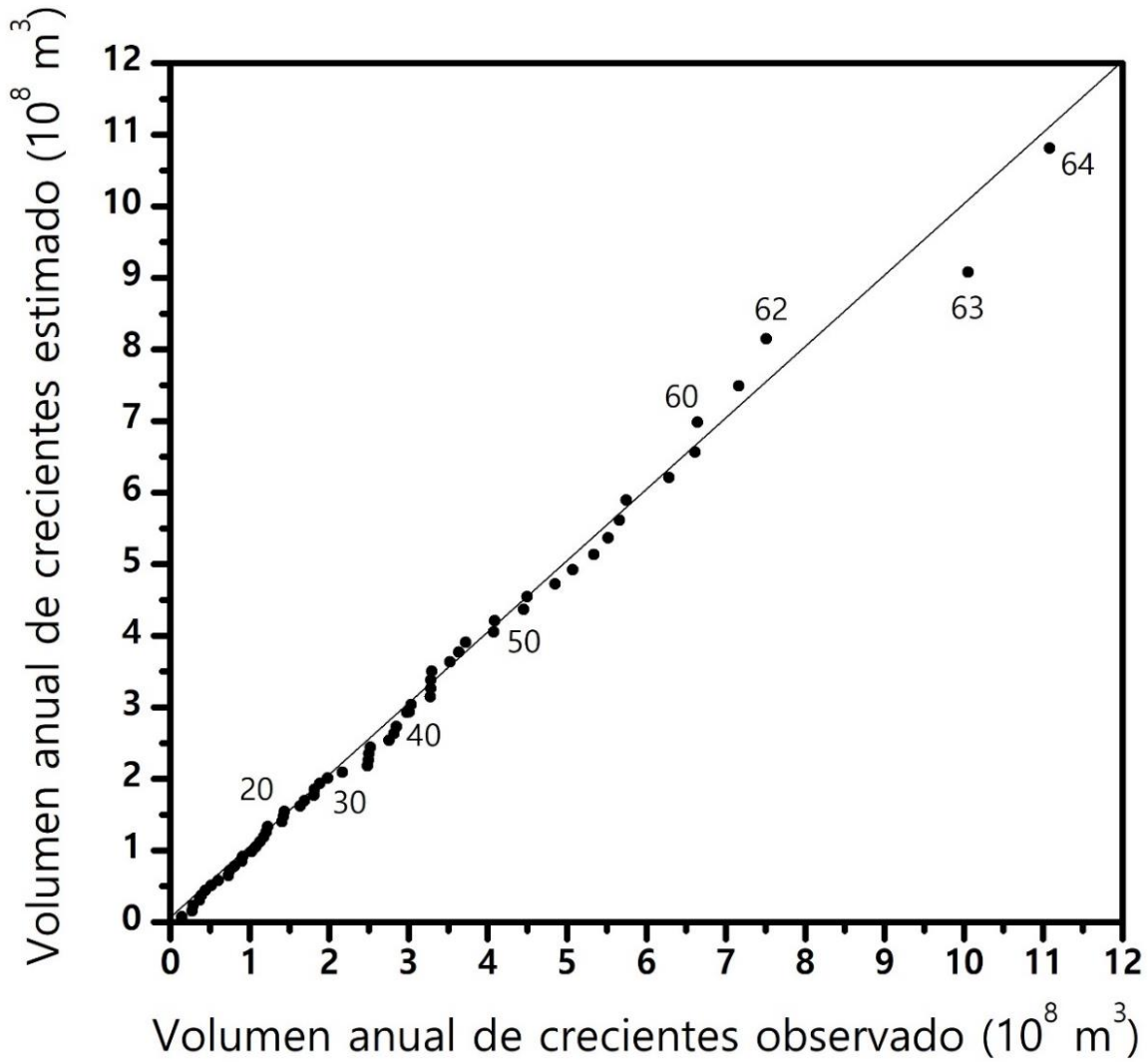


Figura 4. Gráfico Q-Q del registro 2 obtenido con la distribución Kappa.

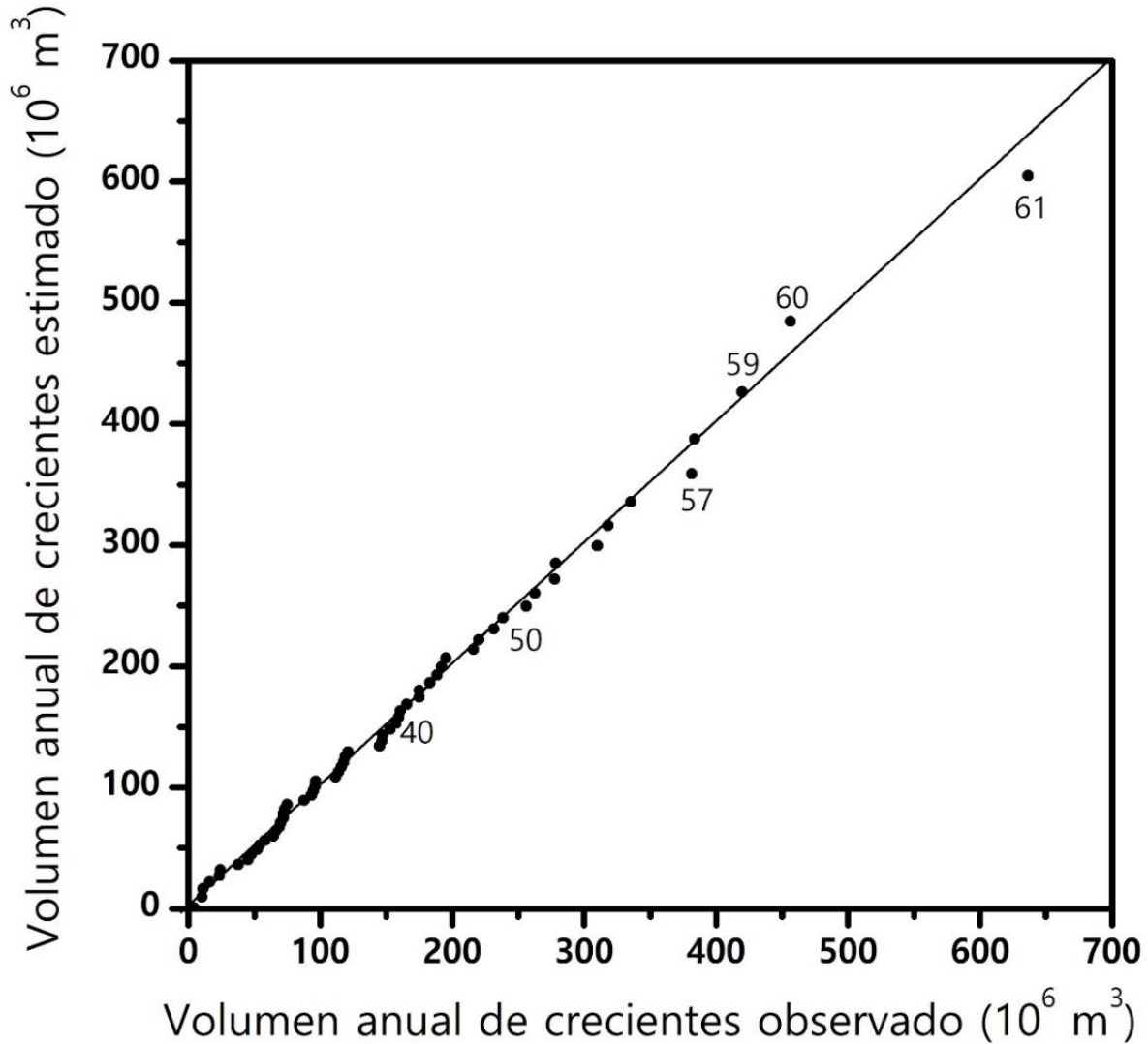


Figura 5. Gráfico Q-Q del registro 4 obtenido con la distribución Kappa.

Observaciones respecto a las predicciones

En los 11 registros procesados, las predicciones de las diferentes FDP correspondientes a los periodos de retorno (Tr) menores a 100 años son bastante similares. En general, la FDP adoptada por tener menor valor del *EEA* y del *EAM* conduce a predicciones representativas en los periodos de retorno altos ($Tr > 500$ años). Las dos condiciones anteriores originan confianza en todas las predicciones y en las adoptadas.

El contraste de resultados (errores y predicciones) entre las distribuciones Kappa y la que engloba o reproduce indica gran similitud de valores. Lo anterior es notable en los registros 1, 2, 3, 7 y 10. En los registros 2 y 4, la distribución Kappa fue la mejor opción y la función Wakeby condujo al mejor ajuste en los registros 3 y 5 de gasto pico y 9, 10 y 11 de *PMD* anual. En relación con lo anterior, Campos-Aranda (2019) la sugiere de aplicación bajo precepto en los registros de *PMD* anual.

Incertidumbres hidrológicas

El AF implica varias debilidades o incertidumbres hidrológicas, que se pueden resumir en las cuatro siguientes. La primera se refiere a la representatividad, en el futuro, del registro hidrológico disponible. La segunda está asociada con la extrapolación que se tiene que hacer para estimar periodos de retorno mayores de 100 años. La tercera radica en el propio AF, al tener que seleccionar una FDP para realizar las predicciones. Por último, se considera incertidumbre hidrológica la tendencia que tienen las distribuciones de más de tres parámetros de ajuste debido a su exceso de flexibilidad de modelar con demasiada exactitud el registro disponible y con ello perder capacidad de predicción; tal es el caso de las distribuciones Kappa, TCEV, Gumbel mixta y Wakeby.

Kjeldsen, Lamb y Blazkova (2014) exponen los aspectos generales relativos a la incertidumbre en los AF, y Botto, Ganora, Laio y Claps (2014) desarrollaron un procedimiento basado en el criterio de costo-beneficio mínimo que permite corregir las incertidumbres hidrológicas de los AF. La versión operativa simple de tal proceso la expusieron en Botto, Ganora, Claps y Laio (2017).

Conclusiones

Respetando los límites de los parámetros de forma (h y k) mostrados en la Figura 1 para la distribución Kappa, se garantiza la existencia de sus cuatro momentos L y la unicidad de sus parámetros de ajuste (u, a, k, h). Además, el procedimiento del método de los momentos L (ecuaciones (19) a (30)) para la obtención de los parámetros de ajuste es sencillo y sin complicaciones de cómputo.

En los 11 registros procesados, el contraste entre los resultados (errores y predicciones) de la distribución Kappa y la que engloba (LOG, GVE o PAG) mostró una gran similitud. Lo anterior implica que el modelo Kappa de cuatro parámetros de ajuste reproduce los resultados de las distribuciones citadas y quizás su ajuste sea más aproximado a los datos reales conforme su parámetro h varía entre -1 y un valor superior a la unidad, como se expuso para los registros 7 y 8.

La distribución Kappa, debido a su amplia área de valores de los cocientes L de asimetría (t_3) y curtosis (t_4) que abarca o reproduce, mostrada en la Figura 2, es un modelo probabilístico que conducirá a un excelente ajuste a los datos o muestra disponible de valores hidrológicos máximos anuales, y por ello debe ser incluida de manera sistemática en sus análisis de frecuencias.

Aunque en este trabajo la distribución Kappa se aplicó únicamente de manera local a 11 registros específicos, diversos autores han destacado que su mejor desempeño ocurre en los AF *regionales*. Lo anterior abre varias opciones para su contraste en tales estudios.

Además, las observaciones deducidas de la Tabla 5 de resultados (errores y predicciones) permiten sugerir la aplicación de la distribución Kappa de manera rutinaria para *complementar* a las de aplicación bajo precepto (LP3, GVE y LOG), así como las de uso generalizado (LN3, PAG y WAK); sobre todo en la *selección* de las predicciones por adoptar en los tres periodos de retorno extremos de 1 000, 5 000 y 10 000 años.

Agradecimientos

Se agradecen las observaciones y correcciones sugeridas por los árbitros anónimos A, B y D; las primeras ayudaron a mejorar la estructura y redacción del artículo y las segundas permitieron incluir aspectos relevantes de los análisis de frecuencias no abordados inicialmente, como retos e incertidumbre hidrológica.

Referencias

Aldama, A. A., Ramírez, A. I., Aparicio, J., Mejía-Zermeño, R., & Ortega-Gil, G. E. (2006). *Seguridad hidrológica de las presas en México*. Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

- Asquith, W. H. (2011). Chapter 9. L-moments of four and more parameter univariate distributions. In: *Distributional analysis with L-moment statistics using the R environment for statistical computing* (pp. 203-233). Lubbock, USA: edición del autor.
- Benson, M. A. (1962). Plotting positions and economics of engineering planning. *Journal of Hydraulics Division*, 88(6), 57-71. DOI: 10.1061/jYCEAj.0001293
- Bobée, B. (1975). The Log-Pearson type 3 distribution and its application to Hydrology. *Water Resources Research*, 11(5), 681-689. DOI: 10.1029/WR011i005p00681
- Bobée, B., & Ashkar, F. (1991). Chapter 1: Data requirements for hydrologic frequency analysis. In: *The Gamma Family and derived distributions applied in Hydrology* (pp. 1-12). Littleton, USA: Water Resources Publications.
- Botto, A., Ganora, D., Laio, F., & Claps, P. (2014). Uncertainty compliant design flood estimation. *Water Resources Research*, 50(5), 4242-4253. DOI: 10.1002/2013WR014981
- Botto, A., Ganora, D., Claps, P., & Laio, F. (2017). Technical note: Design flood under hydrological uncertainty. *Hydrology and Earth System Sciences*, 21(7), 3353-3358. DOI: 10.5194/hess-21-3353-2017
- Campos-Aranda, D. F. (1998). *Revisión de la creciente de diseño de la presa El Cuchillo, en el estado de Nuevo León, México (Enfoque probabilístico global)*. Tomo 1 (pp. 349-357). XVIII Congreso

Latinoamericano de Hidráulica, del 13 al 16 de octubre, Oaxaca, Oaxaca, México.

Campos-Aranda, D. F. (2003). Capítulo 3: Solución de ecuaciones no lineales. En: *Introducción a los métodos numéricos: Software en Basic y aplicaciones en hidrología superficial* (pp. 44-65). San Luis Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina.

Campos-Aranda, D. F. (2013). Contraste de la distribución logística generalizada en 31 registros históricos de eventos máximos anuales. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 14(1), 113-123.

Campos-Aranda, D. F. (2019). Mejores FDP en 19 series amplias de PMD anual del estado de San Luis Potosí, México. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 10(5), 34-74. DOI: 10.24850/j-tyca-2019-05-02

Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? - Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7(3), 1247-1250. DOI: 10.5194/gmd-7-1247-2014

Coles, S. (2001). Theme 2.6.7: Model diagnostics and Chapter 3: Classical Extreme Value Theory and Models. In: *An introduction to statistical modeling of extreme values* (pp. 36-44, 45-73) London, UK: Springer-Verlag.

Davis, P. J. (1972). Gamma Function and related functions. Chapter 6 (pp 253-296). In: Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (eds.). *Handbook of Mathematical Functions*. New York, USA: Dover Publications.

- Dupuis, D. J., & Winchester, C. (2001). More on the four-parameter Kappa distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 71(2), 99-113.
- Gómez, J. F., Aparicio, M., & Patiño, C. (2010). Capítulo 6: Análisis de frecuencias bivariado para la estimación de avenidas de diseño. En: *Manual de análisis de frecuencias en hidrología* (pp. 106-127). Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Greenwood, J. A., Landwehr, J. M., Matalas, N. C., & Wallis, J. R. (1979). Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15(5), 1049-1054. DOI: 10.1029/WR015i005p01049
- Hosking, J. R. M. (1994). The four-parameter Kappa distribution. *IBM Journal of Research and Development*, 38(3), 251-258.
- Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1993). Some statistics useful in regional frequency analysis. *Water Resources Research*, 29(2), 271-281.
- Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1997). Appendix: L-moments for some specific distributions. In: *Regional frequency analysis. An Approach based on L-moments* (pp. 191-209). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Houghton, J. C. (1978). Birth of a parent: The Wakeby distribution for modeling flood flows. *Water Resources Research*, 14(6), 1105-1109.

- Johnson, F., & Sharma, A. (2017). Design Rainfall. Chapter 125. In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of Applied Hydrology* (2nd ed.) (pp. 125.1-125.13). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- Katz, R. W. (2013). Statistical methods for nonstationary extremes (Chapter 2). In: Aghakouchak, A., Easterling, D., Hsu, K., Schubert, S., & Sorooshian, S. (eds.). *Extremes in a changing climate* (pp. 15-37). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Khaliq, M. N., Ouarda, T. B. M. J., Ondo, J. C., Gachon, P., & Bobée, B. (2006). Frequency analysis of a sequence of dependent and/or non-stationary hydro-meteorological observations: A review. *Journal of Hydrology*, 329(3-4), 534-552. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2006.03.004
- Kite, G. W. (1977). Chapter 12: Comparison of frequency distributions. In: *Frequency and risk analyses in hydrology* (pp. 156-168). Fort Collins, USA: Water Resources Publications.
- Kjeldsen, T. R., Lamb, R., & Blazkova, S. D. (2014). Chapter 8: Uncertainty in flood frequency analysis. In: Beven, K., & Hall, J. (eds.). *Applied Uncertainty Analysis for Flood Risk Management* (pp. 153-197). London, UK: Imperial College Press.
- Kjeldsen, T. R., Ahn, H., & Prosdocimi, L. (2017). On the use de a four-parameter kappa distribution in regional frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal*, 62(9), 1354-1363. DOI: 10.1080/02626667.2017.1335400

- Meylan, P., Favre, A. C. & Musy, A. (2012). Chapter 3: Selecting and checking data series and Theme 9.3: Frequency analysis in a non-stationarity context. In: *Predictive hydrology. A frequency analysis approach* (pp. 29-70, 176-179). Boca Raton, USA: CRC Press.
- NERC, Natural Environment Research Council. (1975). Volume I: Hydrological Studies, chapter 2: Statistical flood frequency analysis. In: *Flood Studies Report* (pp. 107-251). London, UK: Natural Environment Research Council.
- Nguyen, T. H., El-Outayek, S., Lim, S. H., & Nguyen, T. V. T. (2017). A systematic approach to selecting the best probability models for annual maximum rainfalls - A case study using data in Ontario (Canada). *Journal of Hydrology*, 553, 49-58. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2017.07.052
- Parida, B. P. (1999). Modeling of Indian summer monsoon rainfall using a four-parameter Kappa distribution. *International Journal of Climatology*, 19(12), 1389-1398.
- Park, J. S., & Park, B. J. (2002). Maximum likelihood estimation of the four-parameter Kappa distribution using the penalty method. *Computer and Geosciences*, 28(1), 65-68.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). Theme 1.8: Tests on hydrologic data and Chapters 7, 8 and 9. In: *Flood Frequency Analysis* (pp. 12-21, 207-321). Boca Raton, USA: CRC Press.

- Shaw, E. M., Beven, K. J., Chappel, N. A., & Lamb, R. (2011). Chapter 13: Estimating floods and low flows in the UK. In: *Hydrology in practice* (4th ed.) (pp. 322-350). London, UK: Spon Press.
- Singh, V. P., & Deng, Z. Q. (2003). Entropy-based parameter estimation for Kappa distribution. *Journal of Hydrologic Engineering*, 8(2), 81-92. DOI: 10.1061/(ASCE)1084-0699(2003)8:2(81)
- Stedinger, J. R. (2017). Flood Frequency Analysis. Chapter 76. In: Singh, V. P. (ed.). *Handbook of Applied Hydrology* (2nd ed.) (pp. 76.1-76.8). New York, USA: McGraw-Hill Education.
- WRC, Water Resources Council. (1977). *Guidelines for determining flood flow frequency*. Bulletin # 17A of the Hydrology Committee. Revised edition. Washington, DC, USA: Water Resources Council.
- Willmott, C. J., & Matsuura, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate Research*, 30(1), 79-82. DOI: 10.3354/cr030079
- Wilks, D. S. (2011). Theme 4.5: Qualitative assessments of the goodness fit. In: *Statistical methods in the atmospheric sciences* (3rd ed.) (pp. 112-116). San Diego, USA: Academic Press (Elsevier).