教育部教學實踐研究計畫成果報告

Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號 / Project Number: PMS1100180

學門專案分類 / Division: 數理

執行期間 / Funding Period: 2021.08.01 – 2022.07.31

計畫名稱 / Title of the Project

「數學魂」形成之探究 — 以高等微積分課程爲例

計畫主持人 (Principal Investigator): 李國瑋

執行機構及系所 (Institution/Department/Program): 國立彰化師範大學數學系

成果報告公開日期: 立即公開

繳交報告日期(Report Submission Date): 2022.09.20

1 本文 Content

這份報告是針對 110 學年度國立彰化師範大學數學系二年級的高等微積分課程實施教學實踐研究計畫下, 從課程內容與教學方式的改變以闡述這些作爲是否符合研究計畫的核心目標與精神; 此外, 在這項教學實踐研究計畫中, 我們提出幾個合理的猜測, 透過觀察修課學生學習模式當中取得的數據進行分析, 並且從已修過高等微積分的高年級同學進行問卷調查與施測, 比較他們在高等微積分的學期成績表現與數學內化程度之間的關係。

2 研究動機與目的 Research Motive and Purpose

本教學實踐研究計畫名爲「數學魂」形成之探究 — 以高等微積分課程爲例, 起因是國立彰化師範大學數學系的系服背後寫著「數學魂」三個字, 而我在三年前開設高等微積分第二學期期末測驗後, 有感而發地給了學生一段勉勵的話:「看看自己穿在身上的系服, 寫著『數學魂』三個字, 想想自己是要成爲具有數學靈魂體質的人 (未來面對事物可用數理邏輯思考並處理問題), 還是變成在數學系館漫無目的四處遊蕩的幽魂?」因爲這個緣故, 我決定申請有關高等微積分的教學實踐研究計畫, 並全面思考當我再次開設高等微積分課程時, 我在教學現場中要做哪些改變, 才可以讓學生在修習完高等微積分之後能夠成功培養出真正的數學魂。此外, 在這項研究計畫中, 我也設定了幾個研究議題, 試圖透過統計數據與圖表以回答當初的提問是否如預先的猜測。

數學向來都不令人討喜, 追根就柢的原因是在於我們從小到大在看待數學這個學科的時候總是從考試的眼光去面對它, 每次看到數學就與考試畫上等號, 當一個人對於數學並不那麼擅長的時候, 一開始就對它沒有好感, 再加上不斷地被評比之下而被認定並非聰明人, 因而產生排斥。就算一個人是在考試制度中既得利益者, 也因爲長時間以考試高分爲目的總是在訓練一些題型或是技巧, 長期下來缺乏的是對數學的深刻認識, 也破壞了對數學的品味。

上面的一段話就連在數學系的學生來說也是如此, 回想在國中或是高中時帶有驕傲的神情, 那些所有人都解不出來的題目結果在一看完題目之後秒殺還可以解釋得頭頭是道, 心中幻想著這自己非常適合讀數學系, 二話不說把數學系當作第一志願, 沒想到進了數學系之後, 系上的必修課程不論是廣度或難度都遽增, 在大一時銳氣就少了一大半, 到了大二就幾乎崩盤, 這真的是屢見不鮮的事實。若是將焦點放在那些平時表現不錯的同學, 卻也發現他們還是存在著以考試爲本位去學習數學, 並非在追求數學的價值, 又或者是他們雖有能力學數學, 但是經過了大學的時日後對於數學的見解並不到位。就這些現象來說, 我對這樣的現狀感到極度不滿意。

如何培養一個人用超然的態度面對數學, 真的是一大課題。若要正視並且解決這個問題, 首要目標是要對於大學課程進行全面的討論, 先讓數學系的學生體會到學數學的正真意義, 在傳達數學價值的時候要設法讓學生產生認同感, 從根基開始做起, 利用這樣的方式才有後座力於是才有辦法傳遞得更遠。而這項研究計畫就以數學系最重要的一門課高等微積分開始, 從歷年來教學現場看到的現象, 我自認爲始終有著勇於嘗試與挑戰的精神, 所以能夠很快地順應當前急遽變化的教學模式, 從這些全新的嘗試之中再發現一些新教學形態的優點與缺點, 紀錄這一年當中的教學歷程, 從中再進行反思, 透過這樣的過程, 讓自己的教學再度昇華。

3 研究問題 Research Question

本研究計畫是想要深入了解學生在學習高等微積分課程的學習成效。而研究問題的發想起源於是我們從幾個直覺上認定的某些事實作為出發點, 然後找尋一些自願參與研究計畫的受測者, 透過對於施測者進行一些數據的調查、問卷或評量進行分析, 一方面回答我們直覺認定是事實的正確性, 此外可以再用這些結果看看能否描述其它現象。

更進一步地, 我在這個研究計畫中想要檢測的部分並不是停留在知識面 — 知道或不知道 — 這個層面而已, 而是要觀察一個人從內心自然而然就散發出對於一件事情有合理且到位的見解。於是本研究計畫設定以下幾個問題, 並從高等微積分課程為主體進行實質分析:

(A) 普遍來說, 我們會認為: 花愈多時間唸書會有愈好的學習成效。師長也經常利用這句話鼓勵或是要求學生多花一點時間在課業上。關於這個敘述的真實性有多高? 如果花愈多時間唸書會有愈好的學習成效這件事情為真, 那麼我們能否更清楚地描述此現象? 也就是說, 在高等微積分課程中, 學習成效對於時間的變化率是呈現遞增或是遞減?

關於後面這個問題對應到的概念是: 如果一位學生, 希望在高等微積分課要有非常好的表現, 那麼採取的策略會是以下哪一種情況呢? (1) 只要投注基本的時數就可以有不錯的結果, 後期必須花更多的時間成效才會再增加一點點。(2) 一開始必須花非常多的時間才有一點點進展, 但是後來只要再多花一點時間就可以快速的提升。

若能將這件事情再進行更深刻地理解, 日後對於一個想要修高等微積分的同學來說, 就可以給他一些更為實質的意義, 比方說, 先問這位學生對於高等微積分這門課的期待是什麼? (例如學生回答: 我想要取得學期成績 85 分以上的表現) 這時, 我就可以給他實質的建議, 像是告訴他應該要投注多少時間在課業上? 還必須額外做什麼準備? 寫作業的時候還必須注意哪些事情? 給出具體的建議可以讓學生有更清楚的方式去執行。

(B) 一般來說, 我們會認為: 一個概念或一項技能如果日後較少使用的話那麼就會生疏。就數學來說, 其實這門學科有著特殊性: 如果這個數學觀念有確實學到位, 則會永生難忘; 反之, 若一個數學概念學得並不踏實, 甚至只是在期中、期末測驗之前花個兩、三天的時間進行短暫記憶, 這種臨時抱佛腳的方式雖然可以立即反應在學期成績上, 但是測驗完之後就會馬上忘記, 長久下來其實是在浪費生命。

在上述這個合理的猜測下, 我們想要研究的是: 學生在高等微積分這門課來說, 學期成績的高低與數學知識半衰期的關係。也就是說, 我們想要了解學生在這門學科當中得到的學期成績, 隨著時間來說逐漸生疏的快慢程度。

關於問題 (B), 實際上可以和問題 (A) 兩者合併探討, 最理想的研究成果會是以下情形: 日後若有一個學生想要學習高等微積分而尋求一些建議, 那麼我可以告訴他在學習的當下要做什麼樣的努力則會有立即的回饋 (學期成績), 然後還可以說明他在未來的一年與兩年後可能會有怎麼樣的衰退程度。

4 研究設計與方法 Research Methodology

爲了回答前一節所提的兩個研究問題, 在這個教學實踐研究計畫中, 我提出以下的研究設計與方法並從受測者所回答的結果轉換成數據以及圖表的形式, 以此解讀出一些事情, 最後再看看這些成果是否符合預期, 並且從中再思索一些更深刻的問題。

- 對於問題 (A), 我從修課的同學中邀請約略是二十位的大二同學, 這些同學都是自願參與研究計畫, 他們的任務是要他們每天紀錄花在高等微積分的時間 (包含與同學討論問題的時間) 還有寫作業的時間。

  同學在參與研究之前, 先向他們聲明取得這些數據只是爲了研究使用, 紀錄的內容完全不會影響學生的學期成績。具體做法是: 關於受測者的讀書與寫作業的時間是透過助教幫忙統計與確認, 在整個學期之中我完全不過問, 一直到學期結束繳交學期成績之後再處理這些數據。這麼做是要讓數據真實性提高, 不要讓學生因爲當天沒有唸書然後怕被老師責罵或甚至扣分所以謊報數據, 又或者是盡量填報數字爲的是想要得到老師的讚美。此外, 要求受測的同學每天紀錄, 所以我請助教每天晚上十一點發布訊息請同學填寫時間, 避免久久才記錄一次會讓那些數據有相當的誤差。

  取得這些數據後, 最直接的一個方式就是將這些數據製作讀書與寫作業的總時間與學成績的對照表, 然後再畫出線性迴歸直線, 迴歸直線的斜率預期要是正的, 這樣才會符合「花愈多時間會有愈好的學習成效」這件事。若迴歸直線與每個受測者點列分布愈接近的話, 那將表示我們未來愈能夠用這些數據給出實質的建議。另外, 我們也可以試著畫出指數或是對數迴歸線探討問題 (A) 的第二個部分。

- 關於問題 (B), 預定尋找約二十位大三與大四的同學成爲受測者, 在第一個學期 (寒假) 與第二個學期 (暑假) 都給予施測。然後從他們的作答結果, 得到他們的學期成績與一年後、兩年後的對於高等微積分的衰退程度的關係圖。

  爲了要得到較爲準確的結果, 同學在參與研究計畫之前, 我有先聲明在這段期間以及施測的過程中, 不要刻意花時間複習高等微積分的內容, 因爲這麼做會讓這項施測中有一部分是來自於短暫記憶所產生的效果。此外, 在受測之前我也簡單調查學生在修完高等微積分課之後是否還有修一些與分析相關的課程, 還有是否有學弟妹會在平日詢問有關高等微積分的問題, 而學生畢業之後的打算可能會是一個影響這份調查的因子。

  因爲研究計畫的目的是想要測試學生是否具備「數學魂」, 所以有關問題的設計, 幾乎不會有直接背誦而立刻得到結果的問題, 而是設計可以經過一些推理而得到結果的數學問題。這當中免不了會提到一些非常專業的問題, 這些問題只會在高等微積分課程中會出現, 而這類的問題, 我會在測驗問卷中寫出相關的引導文字, 然後希望受測者在看完這些引導文字之後, 是否能夠從中回想並取得解決問題的重要資訊以回答問題。此外, 我也問了一些開放式問題, 設法從別的面向理解學生是如何看待高等微積分。

5 教學暨研究成果 Teaching and Research Outcomes

有關讀書的時間與寫作業的時間對於學期成績的結果, 如圖 1 所示:

圖 1: 讀書寫作業總時間 (小時) 對於學期成績關係圖。藍: 第一學期, 紅: 第二學期。

在這個圖表中, 我們發現到幾件事情: 第一: 班上有同學一個學期下來唸書與寫作業的總時間高達 18000 分鐘, 平均一天花將近 150 分鐘在高等微積分課程。而也有同學一個學期下來唸書與寫作業的總時間不到 3000 分鐘, 平均一天不到 25 分鐘。第二: 兩學期迴歸直線的斜率為正, 表示花愈多時間唸書會有愈好的學習成效這件事確實為真, 至於這些點離迴歸直接的距離如果愈大的話, 表示這個迴歸直接的意義愈低。也就是說, 在這張圖表中, 我們發現到有幾位同學只花約略 9000 分鐘的時間, 但是最後的表現比花了 12000 分鐘的時間還要好, 甚至這個表現也將近是最認真的同學的表現。這個結果暗指學習高等微積分時, 天賦也是一個重要的因子, 對於數感較好的同學, 他們可以事半功倍, 花較少的時間就可以達到很好的成效。

圖 2 是畫出修完高等微積分課程的同學學期成績對於重新思考高等微積分課內容的熟悉度的關係圖。我們先製作第一學期的圖表, 藍色的點是修完課後一年的同學表現 (大三), 而紅色的點是修完課後兩年的同學的表現 (大四)。

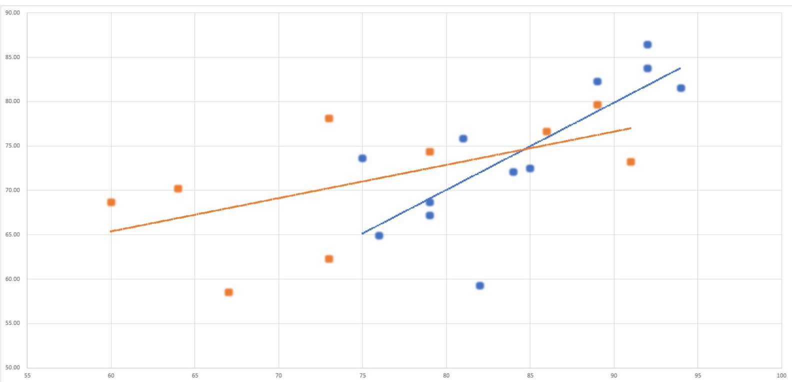


圖 2: 第一學期成績對於後測關係圖。藍: 一年後, 紅: 兩年後。

只看藍色點的分布還有只看紅色點的分布也明顯呈現學期成績高的同學依舊表現比較好、學期成績低的同學目前表現比較不理想的情形, 所以在修課過程中投注在該課程中的結果也會影響日後的表

現。但是另一個比較有趣的現象是: 原先預測的是學生的學習會有半衰期, 也就是時間愈長衰退得愈多這個現象, 若是對應到圖形上的話, 預期要有的圖形會是: 同一區塊中藍色的點要在紅色的點的上方。然而, 在學期成績落在 75 到 85 之間的群族會有紅色的點在藍色的點的上方的趨勢。

至於測驗內容是第二學期的範圍時, 同樣我們也是製作與上圖相同的關係圖, 如圖 3 所示。

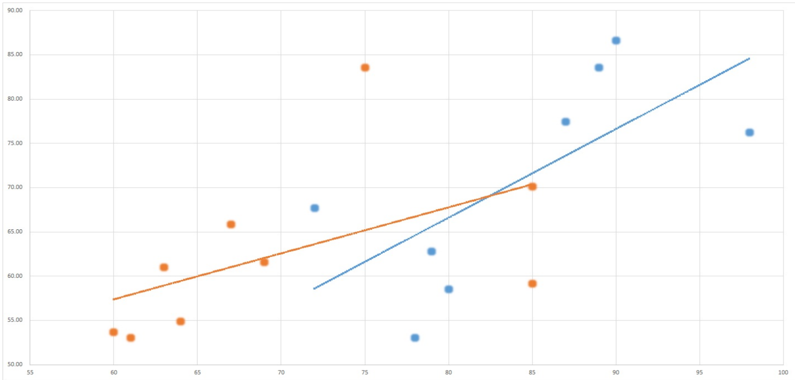


圖 3: 第二學期成績對於後測關係圖。藍: 一年後, 紅: 兩年後。

在這個圖表中, 我們也有看到與上圖幾乎一樣的現象, 所以隨著時間增加之下, 高等微積分並沒有絕對的衰退這件事是變值得繼續討論的。初步的想法是, 學生在修完課後雖然沒有再繼續碰高等微積分, 但是藉由修習其它的科目時, 其實會補足一些當初學習上可能沒有學成的觀念。

6 教學過程與成果

在這一年開設高等微積分的課程中, 我試圖做了幾個和以往不同的嘗試。爲了要讓學生在修完課對後具有「數學魂」, 所以關於數學的詮釋, 我盡可能地設想一些生活中的情境, 將數學概念與生活中的現象進行類比。這個方式可以讓學生馬上體會數學的意義, 而不是掉進抽象符號與邏輯當中無法思考。以下列舉一些我在課堂中跟大家介紹的一些例子:

(A) 最小上界 (supremum) 或是最大下界 (infimum) 的概念 — 氣象預報員說:「瑪瑙颱風在太平洋外海形成, 目前規模已達到輕颱的上限。」— 因爲輕颱的上限意味著: 若風勢再增強一點點, 那麼颱風就會被視爲中颱, 它是一種改變狀態的臨界點。

(B) 最小上界 (supremum) 的意義 — 兩個人玩疊疊樂, 輪流抽出木條再往上堆疊, 玩到最後會發生一個情況: 前一個人抽出木條疊放上去沒事, 但是下一個人抽出木條再把木條疊上去的時候整組木條都垮了。— 堆高且穩定的臨界值, 再追加的時候就會破壞整體結構。

(C) 在測量身高的時候, 頭上的橫板逐漸下降, 最後輕碰到頭部。

(D) 單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) — 在一條筆直的道路上開車前行, 看到前方一百公尺的紅綠燈已由綠燈變成紅燈, 於是煞車減速在停止線之前車子就停了下來。— 車子前行表示遞增, 紅綠燈前的停止線表示上界, 車子停下來的位置是極限之所在。

(E) 有限覆蓋定理 (Finite Covering Theorem) — 在一條筆直的道路上, 如果處處都裝設監視攝影機抓違規是一種方法, 但是這樣太耗費成本。由於每台監視攝影機都可以在攝影機的前後一個小區段錄到影像, 所以只要裝置某幾台監視攝影機, 確定前後台機器錄到的區段都有重疊, 也可以達到目的。— 有界閉區間上的任何開覆蓋, 必存在有限各數的子覆蓋。

(F) 數列與子數列的標記與對應 — 某高中進行模擬考, 學生甲、學生乙、學生丙、學生丁在同一個班級, 成績結果如下: 學生甲班級排名第 1 而全校排名第 1; 學生乙班級排名第 2 而全校排名第 5; 學生丙班級排名第 3 而全校排名第 13; 學生丁班級排名第 4 而全校排名第 24。— 子數列的排序對應到原數列的項。

(G) 可數 (countable) 的特性 — 一間人氣非常旺的餐廳, 每天中午餐廳外總是大排長龍完全看不到排隊之終點, 餐廳一開始用發號碼牌的方式讓客人依序入坐。過不久, 突然來了一位不速之客也想用餐, 但是餐廳竟然讓他插隊, 排在第一順位, 然後要求其他客人皆順延一個號碼入坐。— 重新給出與正整數有一對一且映成的映射。

(H) 最大值 (Maximum element) — 學生甲在全班 60 人當中身高最高。

(I) 可數集 (countable set) 的概念 — 某餐廳週日人潮爆滿, 想要吃到餐廳美食, 必須先抽號碼牌等待服務生依序帶位。

(J) 極限精確定義 (precise definition of limit) 的互動模式 — 玩大老二撲克牌的時候, 我出了梅花 3, 你順勢打出黑桃 4; 當我再出紅心 7, 你又立刻打出磚塊 10 以取得優勢。

(K) 逐點收斂 (pointwise convergent) 與均勻收斂 (uniformly convergent) — 想必各位曾在體育課或競賽中比過百米賽跑, 比賽前大家在起跑線的地方就定位, 當哨音響起所有人奮力向前衝到目的地。我小時候是個體育白痴, 體育老師介紹了很多跑步的要領, 但是我那時候要嘛聽不懂又或者學不會, 所以不管怎麼跑都跑不快, 印象中那次的比賽我是六個人當中最後一個跑到終點。這場百米賽跑, 每個人都依自己的能力向前跑, 這就像逐點收斂的情況一樣, 所有人都會到終點, 只是體育細胞很好的人一下就衝到終點; 但是我跑不快, 需要花比較多的時間才能抵達終點。

    那什麼樣的情況可類比於均匀收斂的百米賽跑呢? 這個百米賽跑是一個「六人七腳」的比賽, 當六個人排成一列時, 相鄰兩人的左、右腳必須綁起來之後再開始跑, 這時你就會發現到: 這樣的百米賽跑就不能自顧自地跑, 這六個人彼此受到牽制, 若你自己一人跑太快整隊就會跌倒, 反之你若跑得太慢也無法順利前行。而這六個人必須擬定作戰計畫, 可能需要推派一人當領隊, 然後在比賽的時候喊出指令約定每個人的出腳順序; 除此以外, 還要顧慮到每個人的步伐大小, 每次跨步的差異也不能太大, 在這樣的情況下才有可能全隊順利到達目的地。而在六人七腳的百米賽跑下, 所有人到達終點會有一致性。

除了上述這些生活中的例子與數學概念的結合外, 我在每一次的期中與期末測驗, 都會試習設計數學素養題目。素養一詞近年來一直被廣泛地討論, 但是每個人都有各自的想法, 無法取得一定的共識。對

我來說, 素養題目是一種需要情境搭配的問題設計, 它可以是介紹歷史上一個很重要的東西, 透過引導的方式介紹這一個深刻的概念, 題目的設計融合當下所學到的技術或知識, 但更重要的是要讓學生了解在這些思考的過程中能更好好體會原來問題的各種意義。

關於數學素養題, 這裡我精選了幾題自己設計的題目放在本報告的附錄供參, 數學素養題可欲不可求, 需要靈光一閃才有可能設計出好題目。

7 教師教學反思

關於我的教學歷程, 可以追溯至八年前在台灣大學初次開設微積分課程說起, 那個時候我帶了三年理工科系的微積分, 之後便到彰師大任教, 至今已滿五年。這八年的教學當中每一年都有不同的體會, 特別是八年前對於教學的核心價值與理念與現在的心境完全不同, 而這件事情也是持續在改變, 而且我認爲每次的調整會讓自己變得愈來愈好。

初次任教的我, 其實就是因爲自身也是在台灣的教育下成長, 所以當下的作爲就是爲了要符合目前的環境, 看看能否愈早擠進族群的前端以得到肯定。更仔細地說, 由於台大總是佈滿著考試的氛圍, 也因爲台大的學生是考試制度下的受益者, 當他們進到下一個階段時, 又要再次爲了考試而競爭, 所以那時候在教學上的想法是要怎麼樣協助學生達到最好的學習成效 (考試考得好)。然而, 那時候雖然做了非常多的努力, 某種程度學生也有非常好的表現, 但是這些成果其實反應出來的是: 我所帶的學生普遍來說都沒有「數學魂」。

從我教過的學生來看, 雖然數學的成績有很好的表現, 若是再仔細觀察, 其實他們只是因爲在我這樣的教學下可以訓練出快速又正確的解題能力, 所以若是問他們某個特定題目該怎麼解的時候, 他們可以告訴你如何求出最終的結果, 但是若是問有關微積分實質內涵這類的問題, 他們可能無法給出滿意的答案。

在我到了彰師任教之後, 從第一年開始, 我就突然意識到教學的目的並不是要讓學生考試考高分, 而是要帶著他們體會數學, 能不能用數學看世界, 甚至悟出某些生命的意義。所以我對於一門課的態度就轉變成不會一直提醒有關考試的事情, 然後開始轉變, 以往可能過於強調知識的傳遞 (只是讓他們知道某些事情), 現在則是要強調如何利用這些知識再創造出一些新的思維, 試圖用一些方法告訴他們數學的核心。

最近對於數學的體悟是: 我覺得學數學是一種幸福又奢華的事情。當多數人在一生中對於數學的態度只是在追求考試得高分, 又或者是在學數學的過程中只是在問學這個有什麼用, 那麼這些人終究只能停留在最表面的意義。不否認地, 當我們在解題的過程中會因爲表現得比其他人好於是會帶來一些優越感或成就感, 又或者我們可以不斷地拿數學來賺大錢, 但這些都是一些形式或物質上的東西。若能夠體會到數學上深刻的意義, 不從賺錢的角度爲出發點而去學數學, 這個無形中發自深省的快樂更爲長久且無價。

現在的我在教學現場中或許還沒有辦法透過更精確的言語去傳遞這個概念, 但日後我會開始思索這個面向的意義。目前的一個想法會是開始讀一些數學史的內容, 我覺得從數學史去回顧前人如何逐步建立當今的數學是一個很好的出發點, 當我再多涉獵一些數學史之後, 必能從中再多得到一些想法以實踐我的教學理想。

8 學生學習回饋

我在設計高年級的問卷中提了一個問題:

問題. 你在高等微積分課程當中得到了什麼? 你可以對於數學分析實質內容的體悟加以闡述, 也可以對於每個數學學科之間的整體認識進行說明, 甚至有形或無形中的成長 (心靈、學習心境) 皆可分享。

這裡節錄了幾位同學的作答:

- 我了解了數學分析的基礎概念, 我們藉由 ε-δ 這種誤差是否可以控制的方式去研究函數或者數列的基本性質 (某點的極限值是否存在、某點是否連續等等), 再更進一步了解更進階的的性質, 例如是否可微、可積, 或者求和與極限的操作是否可以互換等等)。相較代數、幾何, 分析給我的感覺有點像是數學中的量子力學, 我們要使用 ε-δ 分析工具去了解非常細節、細小的範圍, 例如要研究在某個點的鄰域之中的函數值是穩定的或是劇烈起伏的。而代數給我的感覺是研究抽象的數學結構, 特定集合與特定運算搭配會形成什麼樣的架構; 至於幾何我覺得是比較可以直觀了解的, 因爲我們可以直接畫圖去了解、研究相關的幾何概念。

- 修高微原本只是當作是一個夢, 對於一個從小到大被唾棄數學學科且半路出家學習數學的人, 我沒有對「聽懂」抱持很大的希望。

  至少修數學的契機就是我的第一個微積分老師教太爛, 引起了我對「極限精確定義」的好奇心, 我怎麼讀怎麼做好像都看不出個所以然, 因此我打開了數學的探索之旅, 我多數利用了均一、幾個高中教材和數本微積分課本, 用了兩、三年的時間把東西都補起來, 然後到學校開始修微積分, 但是在這個時候當要開始理解極限精確定義時, 又卡了關, 似乎停滯不前, 教授隱約告訴我高微會有我想要知道的東西, 所以我又撐了一年, 選上了高微, 我就期待究竟我是否能夠真正了解到我一直在尋找的「極限精確定義」, 結果, 在數週後被我找到了, 但它並不是那麼地顯而易懂, 我花了一些時間找老師討論, 又花了些時間去理解它, 終於找到了我一直以來的難題。

  在搞懂極限精確定義同時, 高微的確很符合我的期待, 代數學、微分方程也是, 我藉由這段時間從學習實數、證明操作和一些計算技巧的練習, 是因爲當時的自己, 我很喜歡這個學科, 但不是每個人的時間都有辦法把一半輩子都投入在研究數學之中, 我希望我能做到一件事: 在我離開學校之後, 我想要靠自己去讀懂數學書、開放式課程, 我不想因爲我不在學校所以就停止了去了解數學, 在離校之後, 高微隱約的影響我對閱讀數學書的理解能力, 至少我試圖找了一些測度論, 看一些沒有學過的勒貝格積分 (Lebesgue Integral) 或是重新去複習代數學, 即便是短期的數學閱讀, 都有稍微達到一些當初期望的效果。

  高微課的安排、設計理念其實影響我在生活中的行爲, 包含「行爲動機」、「心靈期中考」、「模式觀察」等, 某種程度上對我而言, 就是在體驗一趟數學旅程, 我感到榮幸, 因爲未必所有人都可以體驗到這樣的課程設計方式、有互動感的課程, 許多教師在教學數學後開始比較不會把心思放在學生體驗上, 這沒有對或錯, 畢竟不同階段關注的重點不同, 只是我覺得能體驗到這樣用心的課程是我人生中生常特別的體驗。

- 之前因爲對這些有一點反感, 所以有點半放棄的讀它, 但後來真的花心力去準備, 反而不像以前那麼無趣, 可能是心態上的變化, 有點搞不懂之前的我在想什麼, 沒努力過就放棄, 但也因爲這段時間, 我覺得在心態上有很大的幫助並提升。
- 我覺得高微讓我真正有感受到分析數學的感覺, 在碰高微之前的數學只能叫做算術, 可是高微的題目每次都要讓我想很久, 是真正地在深入思考每個問題。那個時候, 每週的功課真的每天都在想, 可是想到週末可能都在產出大便, 不過多虧總是在思考, 所以在課堂上的檢討會得到更多。

  雖然我已經沒碰高微很久了, 不過從學高微的過程, 我收穫最多是耐心和如何從不同面向深入分析一個問題。關於耐心, 是因爲我以前總會很急著想把答案寫出來, 導致時常錯失一些沒有考慮到的事, 所以我覺得學高微有無形中讓我培養耐心。

附錄 — 高等微積分的素養問題

問題 **1** (費氏數列, Fibonacci sequence)**.** 在 1202 年, 義大利數學家費波那契 (Fibonacci) 提出了一個有關兎子繁殖的問題:

> 有一對剛出生的兎子, 一個月後(第二個月初) 長大, 兩個月後(第三個月初) 可以繁殖生育, 每月每對可生育的兎子會誕生一對新兎子, 在假設兎子永不死去的情況下, 探討 n 個月後(第 $n+1$ 個月初) 兎子的總對數。

我們先用表格觀察月份與兎子數的關係:

第 n 月初	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
兎子數(對)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$

利用上述所說的條件, 現用數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的方式表達, 並且得到這個問題的 遞迴關係式 (recurrence relation formula):

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

其中 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下標 n 代表第 n 個月初。而 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 現今稱爲費氏數列 (Fibonacci sequence)。

費氏數列在數學上有很多豐富的性質, 其中之一是觀察數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相鄰兩項的比值; 也就是說, 考慮 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 那麼將遞迴關係式改寫, 得到

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \Rightarrow b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}。$$

注意到 $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ 這個遞迴關係式是比較不容易分析的, 原因是數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 本身不具有 單調 (monotonic) 的性質。然而, 我們將這個遞迴關係式重新整理, 得到

$$b_{n+2} = 1 + \frac{1}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_n}} = 1 + \frac{b_n}{1 + b_n}, \text{ 即 } b_{n+2} = 1 + \frac{b_n}{1 + b_n}, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}。$$

透過上式分別考察偶數項子數列 $\{b_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ 與奇數項子數列 $\{b_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$:

- 關於偶數項子數列: 將 $n = 2k$ 代入遞迴關係式得到 $b_{2k+2} = 1 + \frac{b_{2k}}{1+b_{2k}} = 2 - \frac{1}{1+b_{2k}}$, 於是

$$\begin{aligned} b_{2k+2} - b_{2k} &= \left(2 - \frac{1}{1 + b_{2k}}\right) - \left(2 - \frac{1}{1 + b_{2k-2}}\right) = -\frac{1}{1 + b_{2k}} + \frac{1}{1 + b_{2k-2}} \\ &= \frac{b_{2k} - b_{2k-2}}{(1 + b_{2k})(1 + b_{2k-2})}, \end{aligned}$$

  得知: $b_{2k+2} - b_{2k}$ 與 $b_{2k} - b_{2k-2}$ 具有同樣的符號(同時爲正或同時爲負)。

- 關於奇數項子數列: 將 $n = 2k-1$ 代入遞迴關係式得到 $b_{2k+1} = 1 + \frac{b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}} = 2 - \frac{1}{1+b_{2k-1}}$, 於是

$$\begin{aligned} b_{2k+1} - b_{2k-1} &= \left(2 - \frac{1}{1 + b_{2k-1}}\right) - \left(2 - \frac{1}{1 + b_{2k-3}}\right) = -\frac{1}{1 + b_{2k-1}} + \frac{1}{1 + b_{2k-3}} \\ &= \frac{b_{2k-1} - b_{2k-3}}{(1 + b_{2k-1})(1 + b_{2k-3})}, \end{aligned}$$

  得知: $b_{2k+1} - b_{2k-1}$ 與 $b_{2k-1} - b_{2k-3}$ 具有同樣的符號(同時爲正或同時爲負)。

現在希望各位透過前一頁文字提供的訊息, 再搭配一些觀察, 並結合課堂中介紹過的定理與觀念, 證明: 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂的, 並且求出極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

註. 在證明的過程中若要引用定理, 必須寫出定理名稱, 並解釋清楚為何定理可以使用。若你想要引用的定理並沒有被冠上專有名稱, 則必須把定理的敘述詳細寫出(課堂上證過的定理不需要再證一次)。

註. 前一頁文章已有的計算不需要重抄, 你可以在文章中適當地標註記號並由此繼續說明或討論即可。比方說: 你把想要用的式子框起來, 在旁邊打上 $(\star)$, 然後在證明中直接寫: 由 $(\star)$ 式可知: 數列 ......。而前一頁的計算並非所有的內容, 你可能還要做一些額外的觀察及討論才能得到完整的證明。

問題 **2.** 有一群考古學家在布拉格 (Prague) 附近挖掘到一篇約莫是一百年前的古文, 這篇古文經專家鑑定後是一篇極具價值的文章, 而文章經過翻譯後大意如下:

給定函數 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$, 現在想要研究集合 $R=\{f(x)\in\mathbb{R}|\, x\in[a,b]\}$ 的性質。首先, 集合 R 不是空集合這件事是可以確定的, 這是因為函數的定義必須將每個 $x\in[a,b]$ 指定唯一的實數 $f(x)\in\mathbb{R}$。如果集合 R 有上界的話, 那麼由確界原理 (Supremum Principle) 得知集合 R 的上確界存在, 記為

$$\alpha=\sup_{x\in[a,b]} f(x)。$$

因為 α 是集合 R 的上確界, 那麼對任意 $\varepsilon>0$, $\alpha-\varepsilon$ 就不再是集合 R 的上界; 也就是說, 存在 $x''=x''(\varepsilon)\in[a,b]$ 使得 $\alpha-\varepsilon<f(x'')\le\alpha$。特別地, 考慮 $\varepsilon=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$, 則得到 $x_n\in[a,b]$ 使得 $\alpha-\frac{1}{n}<f(x_n)\le\alpha$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$。另一方面, 對於數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 而言, 因為 $x_n\in[a,b]$, 由數列緊緻性定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem) 得知: 存在子數列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收斂, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$, 其中 $x_0\in[a,b]$。最後, 只要我們建立以下等式:

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\overset{\text{(B1)}}{=\!=\!=}\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\overset{\text{(B2)}}{=\!=\!=} f(x_0),$$

這麼一來, α 就可以表示成某個點的函數值;換言之, $\alpha\in R$。

(A) 這一篇文章想要證明函數 $f(x)$ 有什麼性質? 請把它寫成一個定理的樣子, 注意到你所寫下的定理敘述必須明確寫出前提以及結論, 並且利用 $f(x)$ 的關係式表達。

(B) 在文章中的倒數第二行, 作者將很多事情利用等式串聯, 其中第一個等式是透過第八行中間的論述而得。至於其它的式子, 可能用到了函數的性質、數列的理論、實數的理論...... 等。請將 (B1) 與 (B2) 等式成立的原因解釋清楚。

問題 **3.** 數學上,悖論 (paradox) 是指一種從邏輯上無法判斷正確或錯誤的命題; 如果先承認此命題爲真, 經過一系列正確的推理, 卻又得出它是假的; 若先承認該命題是假的, 經過一番正確的推論, 卻又得出其爲真。有的時候, 違背直覺的正確論斷之敘述也會稱爲悖論。

自古至今有許多著名的悖論, 這些敘述震撼了數學與邏輯的基礎, 卻也激發了人們對於整個數理邏輯的重新審視, 並將思維推入一個新的高峰。解決悖論需要創新, 打破舊有的思考, 而悖論的解決往往會帶來全新的理論。

以下要跟各位介紹一個著名悖論:托里切利小號悖論。考慮函數 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty)$ 對於 x-軸旋轉而得的旋轉曲面 (surfaces of revolution), 圖形示意如下:

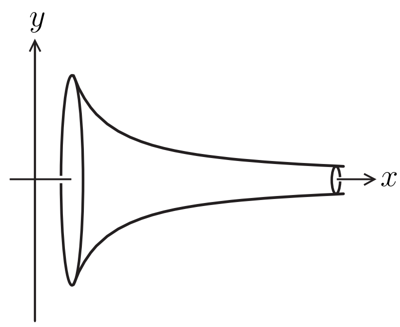


圖 1: 托里切利小號是函數 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,\infty)$ 上對 x-軸旋轉而得的曲面。

這個旋轉曲面後人稱爲托里切利小號 (Torricelli's Trumpet)[1], 或是加百利號角 (Gabriel's Horn)。而托里切利小號到底對人們造成什麼樣的衝擊呢? 我們考慮以下問題:

(A) 試根據旋轉體的體積公式

$$\text{旋轉體體積}=\int_1^{\infty}\pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

與瑕積分 (improper integral) 的定義計算托里切利小號內部的實體體積。

(B) 試根據旋轉體的表面體積公式

$$\text{旋轉體表面積}=\int_1^{\infty}2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

判斷並驗證托里切利小號的表面積是收斂 (convergent) 或是發散 (divergent)。

(C) 若考慮 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x\in[1,\infty)$, 則以此函數對於 x-軸旋轉而得的曲面表面積是收斂或是發散? 請對於你的判斷給出數學論述。

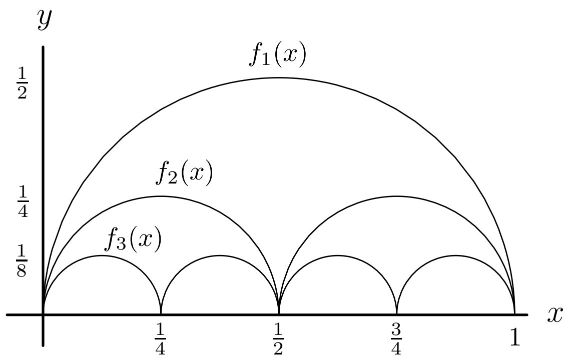
關於 (A) 與 (B), 在當時托里切利就發現到: 托里切利小號的表面積是無窮大, 但是內部的體積有限。這件事的怪異之處如下: 假設有一名油漆工想要將托里切利小號的表面刷油漆, 因爲表面積無限大, 那麼他不可能拿油漆刷滿整個小號; 當油漆工發現到他不可能刷滿小號的表面時, 他就森七七地把油漆倒進托里切利小號。可是, 因爲托里切利小號內部體積有限, 所以油漆可以倒滿整個托里切利小號。問題在於: 當油漆倒滿托里切利小號時, 油漆不就完全附著在托里切利小號內部的表面嗎?(這裡假設小號非常薄, 內部與外部的表面積一致。) 那不就是說油漆可以刷滿整個托里切利小號嗎?

[1]托里切利 (Evangelista Torricelli, 1608–1647) 是義大利物理學與數學家。

問題 **4.** 學生甲在網路上看到一段證明 $\pi = 2$ 的文章:

如下圖, 考慮函數列 $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ (圖中僅示意 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$):

- 函數 $f_1(x)$ 的圖形是以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 爲圓心, 半徑爲 $\frac{1}{2}$ 的上半圓。
- 對於 $n \in \mathbb{N}$, 函數 $f_n(x)$ 的圖形是以 $(\frac{i}{2^n}, 0), i = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ 爲圓心, 半徑爲 $\frac{1}{2^n}$ 的上半圓的聯集。



現考慮函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收斂性: 首先, 對所有 $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$。記 $f(x) = 0, x \in [0,1]$, 則函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上逐點收斂 (pointwise convergent) 到 $f(x) \equiv 0$。

此外, 對於 $n \in \mathbb{N}$, 因爲 $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, 得到

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, 由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$。因此函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上是均勻收斂 (uniformly convergent) 到 $f(x) \equiv 0$。

最後, 考慮函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $f(x)$ 的圖形之曲線長度 (lengths of curves) 的關係。對於 $n \in \mathbb{N}$, 因爲 $f_n(x)$ 的形狀是 2^{n-1} 個半徑爲 $\frac{1}{2^n}$ 的上半圓, 所以長度爲 $L_n = 2^{n-1} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2}$。而 $f(x)$ 的圖形是一個線段, 長度是 $L = 1$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{2} = 1$, 於是 $\pi = 2$。

我們知道 $\pi \neq 2$, 可見得方框中的論述是有問題的, 請協助學生甲找到文章中論述錯誤的地方, 並解釋其原因。