

# Approccio Lagrangiano ad elementi finiti per la simulazione di problemi di interazione fluido-struttura

Massimiliano Cremonesi, Attilio Frangi, Umberto Perego  
*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano*  
*cremonesi@stru.polimi.it, attilio.frangi@polimi.it, umberto.perego@polimi.it*

*Parole chiave:* interazione fluido-struttura, approccio Lagrangiano

**SOMMARIO** In questo lavoro viene presentato un approccio Lagrangiano per l'interazione fluido-struttura che accoppia un metodo particellare ad elementi finiti (PFEM) per la parte fluidodinamica con un metodo classico ad elementi finiti per il dominio strutturale.

**ABSTRACT** In the present work a Lagrangian approach to fluid-structure interaction is introduced coupling a particle finite element method for the fluid part (PFEM) and a classical finite element method for the solid domain.

## 1. INTRODUZIONE

Per risolvere un problema di interazione fluido-struttura è necessario sviluppare un algoritmo per la soluzione del problema fluido-dinamico e uno per la soluzione del problema strutturale. In questo lavoro il fluido è trattato con un approccio Lagrangiano utilizzando il Particle Finite Element Method [3], mentre la struttura è risolta con un approccio classico ad elementi finiti. Sfruttando la natura del PFEM, i termini di accoppiamento si possono calcolare agevolmente come sarà descritto in seguito.

## 1. IL PROBLEMA FLUIDO-DINAMICO

Per risolvere un problema fluido-dinamico con superfici libere e onde frangenti si introduce un approccio Lagrangiano basato sul *Particle Finite Element Method* (PFEM) [2]. Una delle significative difficoltà di un approccio di questo tipo è la distorsione della mesh, che può essere evitata introducendo un continuo remeshing. Inoltre, per definire il dominio di integrazione e per imporre le condizioni al contorno è necessario un algoritmo per l'identificazione dei bordi esterni, la cui configurazione è variabile nel tempo con la continua generazione di nuove superfici.

### 1.1. Descrizione del metodo

Di seguito vengono descritti i passi fondamentali del *Particle finite element method*.

- 1) Partendo da una distribuzione di punti che rappresentano le particelle di fluido, si esegue una triangolazione di Delaunay utilizzando tali particelle come nodi.
- 2) Si identificano i bordi esterni, l'inclusione e la separazione di singole particelle. Questo viene fatto sfruttando il metodo *alpha shape* [5].
- 3) Si risolvono le equazioni Lagrangiane di Navier-Stokes che governano il comportamento del fluido ottenendo velocità e pressione incognite.
- 4) Sfruttando la velocità e la pressione precedentemente calcolate si aggiorna la posizione delle particelle, se la mesh diviene troppo distorta, se ne genera una nuova.
- 5) Si torna al punto 2 e si ripete per il passo temporale successivo.

Uno dei punti critici del metodo appena introdotto è sicuramente la ripetuta generazione della mesh. Questo però non richiede la discretizzazione di un continuo, bensì consiste solamente nel

realizzare una triangolazione di Delaunay partendo da punti assegnati. Questa operazione può essere eseguita in modo molto efficace con tempi di calcolo contenuti.

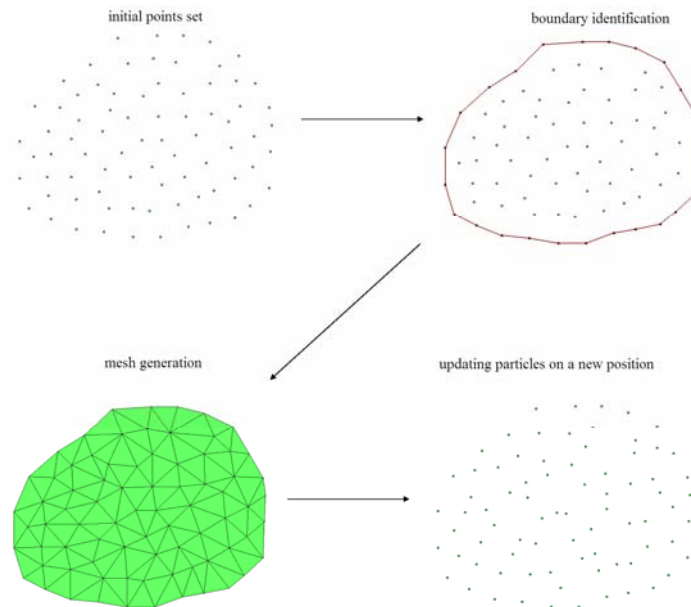


Figura 1: passi del Particle Finite Element Method

Un altro punto significativo è l'identificazione dei bordi esterni. Infatti in un approccio Lagrangiano il bordo esterno ed il volume di riferimento sono definiti dalle particelle stesse. Quindi ogni volta che la mesh viene rigenerata è necessario identificare le particelle (e quindi i nodi) che appartengono al bordo. Per risolvere questo problema la triangolazione di Delaunay viene corretta con il metodo *alpha shape*. L'idea fondamentale è quella di rimuovere i triangoli non necessari (troppo distorti) dalla mesh utilizzando un criterio basato sulla distorsione locale degli elementi stessi. Per ogni elemento  $e$  si introducono: la distanza minima tra due nodi  $h_e$  e il raggio del cerchio circoscritto  $R_e$ . Tutti gli elementi per cui il rapporto tra  $R_e$  e  $h_e$  è maggiore di un certo valore  $\alpha$  vengono eliminati dalla mesh ( $\alpha \approx 1.2-1.4$ ). Una volta che i triangoli in eccesso sono stati eliminati è facile identificare quali triangoli hanno un lato che appartiene al bordo.

In un algoritmo come quello introdotto, in cui la mesh viene rigenerata frequentemente, è necessario passare dei dati dalla mesh vecchia a quella nuova. Le informazioni relative a velocità e pressione vengono memorizzate nei nodi. Poiché per motivi di efficienza computazionale la mesh viene generata con elementi triangolari, per evitare interpolazioni tra una mesh e l'altra si utilizzano funzioni di forma lineari sia per la velocità che per la pressione. In questo modo però, la condizione di compatibilità *inf-sup* non è rispettata ed una stabilizzazione è necessaria. In questo lavoro è stata implementata una stabilizzazione tipo *Galerkin Least Square* [4].

## 2. INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA

Per la discretizzazione spaziale della parte strutturale del problema si utilizzano elementi finiti quadrangolari a quattro nodi. Si considera un materiale elastico lineare e l'algoritmo di Newmark è utilizzato per l'integrazione temporale.

Sfruttando il Particle finite element method introdotto precedentemente, i termini di interazione tra dominio fluido e dominio strutturale possono essere ricavati semplicemente. L'algoritmo di interazione è riportato di seguito:

- si considerano due domini: quello fluido (caratterizzato dalle particelle) e quello solido (caratterizzato dagli elementi finiti quadrangolari);
- si sovrappongono ai nodi del dominio solido che possono entrare in contatto con il dominio fluido delle particelle fittizie di fluido (figura 2(a));
- si effettua la triangolazione di Delaunay (figura 2(b));
- si applica il metodo alpha shape per rimuovere i triangoli in eccesso (figura 2(c));

Si evidenziano ora due possibilità. Se i due domini non sono in contatto (figura 2(c)) l'analisi fluida e l'analisi solido vengono effettuate separatamente senza nessun termine di interazione. Se invece i due domini sono in contatto (figura 2(e)) si effettua un'analisi accoppiata, utilizzando un approccio *staggered*. Per cui, si effettua un'analisi della sola parte strutturale in cui si calcolano gli spostamenti della struttura, questi vengono poi assegnati come condizione al contorno alle particelle fittizie di fluido che si trovano all'interfaccia. Quindi si effettua un'analisi fluidodinamica con assegnate condizioni al contorno di velocità e si calcolano gli sforzi che vengono poi applicati all'interfaccia sul dominio strutturale. Questa procedura viene ripetuta finché non si raggiunge la convergenza nel passo temporale.

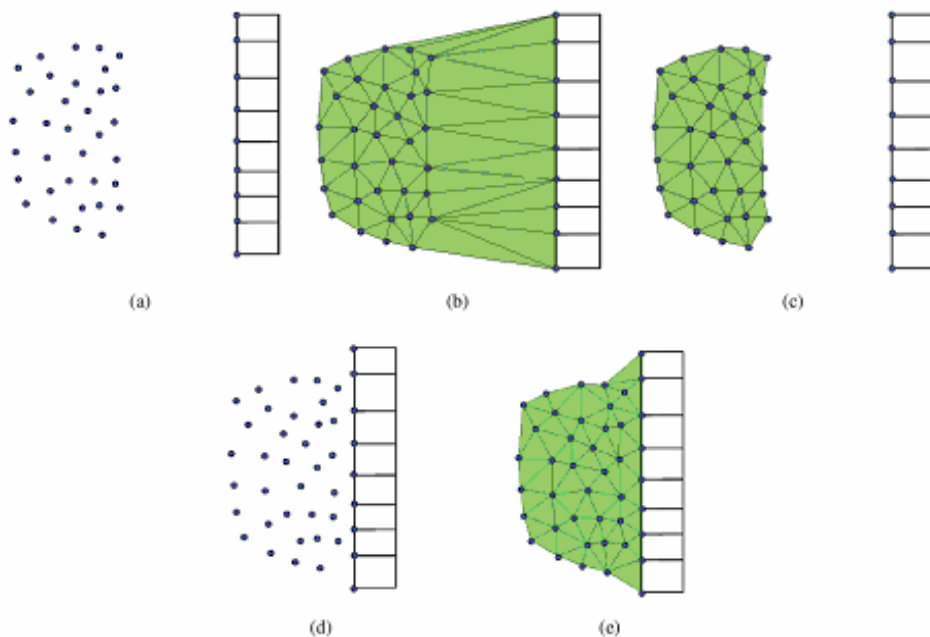


Figura 2: passaggi fondamentali nell'interazione fluido-struttura.

*Riferimenti bibliografici:*

- [1]. Radovitzky R., Ortiz M., Lagrangian finite element analysis of newtonian fluid flows, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 43 (1998) 607-619
- [2]. Idelsohn S. R., Oñate E., Del Pin F., Calvo N., Fluid-Structure interaction using particle finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195 (2006) 2100-2123
- [3]. Idelsohn S. R., Oñate E., Del Pin F., The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 61(7) (2004) 964-989
- [4]. Tezduyar T. E., Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, volume 28
- [5]. H. Edelsbrunner and E. P. Mücke, Three-dimensional alpha shapes, *ACM Trans Graph*, 13(1):43\_72, (1994)