MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 29, NO. 2, 2022
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector

M. V. Nevskii[1]
DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-92-103

[1]P. G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 41A05, 52B55, 52C07
Research article
Full text in Russian

Received May 6, 2022
After revision May 30, 2022
Accepted June 1, 2022

Let $Q_n = [0,1]^n$ be the unit cube in $\mathbb{R}^n$ and let $C(Q_n)$ be a space of continuous functions $f : Q_n \to \mathbb{R}$ with the norm $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x\in Q_n} |f(x)|$. By $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ denote a set of polynomials in n variables of degree ≤ 1, i. e., a set of linear functions on $\mathbb{R}^n$. The interpolation projector $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ with the nodes $x^{(j)} \in Q_n$ is defined by the equalities $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$. Let $\|P\|_{Q_n}$ be the norm of P as an operator from $C(Q_n)$ to $C(Q_n)$.
If $n+1$ is an Hadamard number, then there exists a non-degenerate regular simplex having the vertices at vertices of Q_n. We discuss some approaches to get inequalities of the form $\|P\|_{Q_n} \le c\sqrt{n}$ for the norm of the corresponding projector P.

Keywords: Hadamard matrix; regular simplex; linear interpolation; projector; norm

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail Viktorovich Nevskii correspondence author	orcid.org/0000-0002-6392-7618. E-mail: mnevsk55@yandex.ru Head of the Chair, Doctor of Science, Docent.

For citation: M. V. Nevskii, “On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 92-103, 2022.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 29, № 2, 2022
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Об одной оценке для нормы интерполяционного проектора

М. В. Невский[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-92-103

[1]Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 514.17, 517.51, 519.6
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 6 мая 2022 г.
После доработки 30 мая 2022 г.
Принята к публикации 1 июня 2022 г.

Пусть $Q_n = [0,1]^n$ — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, $C(Q_n)$ — пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x\in Q_n} |f(x)|$. Через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(j)} \in Q_n$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$. Пусть $\|P\|_{Q_n}$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.
Если $n+1$ — число Адамара, то существует невырожденный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба Q_n. В статье обсуждаются различные подходы к получению оценок вида $\|P\|_{Q_n} \leq c\sqrt{n}$ для нормы соответствующего интерполяционного проектора.

Ключевые слова: матрица Адамара; правильный симплекс; линейная интерполяция; проектор; норма

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил Викторович Невский автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0002-6392-7618. E-mail: mnevsk55@yandex.ru Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, доцент.

Для цитирования: M. V. Nevskii, “On Some Estimate for the Norm of an Interpolation Projector”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 92-103, 2022.

Введение

Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Обозначим через $C(K)$ пространство непрерывных функций $f : K \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(K)} := \max_{x\in K} |f(x)|.$$

Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, иначе говоря, линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Для $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, R > 0$ через $B(x^{(0)}; R)$ обозначим n-мерный евклидов шар, задаваемый неравенством $\|x - x^{(0)}\| \leq R$, где

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Положим $B_n := B(0;1), Q_n := [0,1]^n, Q'_n := [-1,1]^n$.

Пусть S — n-мерный невырожденный симплекс с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \leq j \leq n+1$. Введём в рассмотрение следующую *матрицу вершин* этого симлекса:

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать $\mathbf{S}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) := l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$. По нашей терминологии, λ_j называются *базисными многочленами Лагранжа симплекса* S. Для $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)}, \qquad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1.$$

Эти равенства означают, что $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки x. Также имеем

$$\lambda_j(x) = \frac{\Delta_j(x)}{\Delta},$$

где $\Delta = \det(\mathbf{S})$, а $\Delta_j(x)$ получается из Δ путём замены j-й строки на строку $(x_1 \ \ldots \ x_n \ 1)$. Подробнее см. [1, §1.1].

Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(K) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу $S \subset K$, если узлы интерполяции проектора P совпадают с вершинами S. Этот проектор определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x). \tag{1}$$

Обозначим через $\|P\|_K$ норму проектора P как оператора из $C(K)$ в $C(K)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_K = \max_{x\in K} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{x\in K} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|}. \tag{2}$$

Если K — выпуклый многогранник, то максимумы в (2) достаточно брать только по $x \in \operatorname{ver}(K)$. Под $\operatorname{ver}(K)$ понимается совокупность вершин многогранника K.

В настоящей статье рассматривается случай, когда $n+1$ есть число Адамара, т. е. существует матрица Адамара порядка $n+1$. *Матрицей Адамара порядка* m называется квадратная бинарная матрица $\mathbf{H}$, каждый элемент которой равен 1 или -1 и такая что

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{m}\mathbf{H}^T.$$

Это означает, что строки $\mathbf{H}$ попарно ортогональны относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^m$.

Порядок матрицы Адамара равен 1, 2 или кратен 4 (см. [2]). Однако до сих пор не известно, существует ли матрица Адамара порядка m для любого $m = 4k$. Это одна из самых старых открытых проблем в математике. Утверждение, что для любого m, кратного 4, матрица Адамара существует, называется *гипотезой Адамара*. Порядки до 1500, для которых матрицы Адамара до сих пор не найдены, равны 668, 716, 892, 956, 1132, 1244, 1388 и 1436. Число $m = 668$ остаётся наименьшим таким порядком с 2005 г. По поводу ссылок см., например, [3, 4].

Две матрицы Адамара называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой путём конечной последовательности следующих операций: умножение строки или столбца на -1, перестановка строк или перестановка столбцов. С точностью до эквивалентности существует единственная матрица Адамара порядка 1, 2, 4, 8 и 12. Имеется 5 классов эквивалентности матриц Адамара порядка 16, 3 класса порядка 20, 60 классов порядка 24 и 487 классов порядка 28. Для порядков 32, 36 и 40 число классов эквивалентности матриц Адамара существенно больше. Для $n = 32$ имеется по меньшей мере 3 578 006 классов эквивалентности; для $n = 36$ — по меньшей мере 4 745 357 классов эквивалентности (см. [3]).

Пусть Q — произвольный n-мерный куб. Если $n+1$ — число Адамара, то существует невырожденный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах Q. В статье обсуждаются различные подходы к получению оценок вида $\|P\|_Q \le c\sqrt{n}$ для нормы соответствующего интерполяционного проектора. Из соображений удобства мы берём $Q = Q_n$ или $Q = Q_n'$.

1. Применение чисел h_n

Обозначим через h_n величину максимального определителя порядка n, состоящего из 0 и 1, через ν_n — максимальный объём n-мерного симплекса, содержащегося в кубе Q_n. Эти числа связаны соотношением $h_n = n!\nu_n$ (см. [5]). Для любого n в Q_n существует симплекс максимального объёма, некоторая вершина которого является вершиной куба. С такими симплексами связано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть S — симплекс максимального объёма в Q_n, одна из вершин которого совпадает с вершиной куба, P — соответствующий интерполяционный проектор. Тогда*

$$\|P\|_{Q_n} \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины симплекса S. Можно считать, что $x^{(n+1)} = 0$, т. е. матрица вершин имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как S — симплекс максимального объёма в кубе Q_n, то $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$ и $|\Delta| = |\det(\mathbf{S})| = n!\nu_n = h_n$. Значит, если $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$, то $|\Delta_j(x)| \le |\Delta|$, $1 \le j \le n+1$.

Зафиксируем $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ и рассмотрим определители $\Delta_j(x)$ при $1 \le j \le n$. По определению $\Delta_j(x)$ и свойствам определителя имеем:

$$|\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \\ x_1^{(j)} & \dots & x_n^{(j)} & \pm 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(j)} & \dots & x_n^{(j)} & \pm 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Мы выделяем в определителях j-ю строку. Поэтому существуют числа u_j, каждое из которых равно 1 или -1, такие что

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & u_n \end{vmatrix}.$$

Определим n-мерные векторы v и w из 0 и 1 следующим образом. Если $u_j = 1$, то $v_j = 1$, $w_j = 0$, а если $u_j = -1$, то $v_j = 0$, $w_j = 1$. Тогда $u = v - w$, значит,

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta_j(x)| = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & v_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & w_n \end{vmatrix}.$$

Обозначим последние два определителя порядка $n+1$ через d_1 и d_2. Так как их элементы принадлежат отрезку $[0,1]$, то $|d_1|, |d_2| \le h_{n+1}$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} |\Delta_j(x)| = d_1 - d_2 \le |d_1| + |d_2| \le 2h_{n+1}.$$

Поскольку $|\Delta| = h_n$, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \le \frac{2h_{n+1}}{h_n}.$$

Осталось привлечь $j = n+1$. Как отмечалось выше,

$$\frac{|\Delta_{n+1}(x)|}{|\Delta|} \le 1, \quad x \in \mathrm{ver}(Q_n).$$

Следовательно, для любой вершины куба выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Отсюда

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|} \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Теорема доказана. □

Обозначим через θ_n минимальную величину нормы $\|P\|_{Q_n}$ для проектора, узлы которого принадлежат Q_n.

Следствие 1.

$$\theta_n \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1. \tag{4}$$

Сразу получается из (3).

Следствие 2. *Существуют константы $c, c_1 > 0$, не зависящие от n, такие что*

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \ge c\sqrt{n}, \qquad \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \le c_1\sqrt{n}. \tag{5}$$

Доказательство. Для чисел θ_n автором установлено неравенство $\theta_n \ge \gamma\sqrt{n}$, $\gamma > 0$ не зависит от n (см. [1]). Поэтому левое неравенство в (5) следует из (4). Правое неравенство получается из левого, поскольку $h_n = n!\,\nu_n$. □

Отметим более конкретные формы оценок (5). При любом n

$$\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Следовательно,

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \ge \frac{\theta_n - 1}{2} > \frac{\sqrt{n-1}}{2e} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} = \frac{h_{n+1}}{(n+1)h_n} > \frac{\sqrt{n-1}}{2e(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Приведённое здесь доказательство теоремы 1 осуществляется по методу работы [6], где рассматривался случай произвольного n. К сожалению, в рассуждениях [6] позднее был обнаружен пробел. Однако для случая, когда $n+1$ есть число Адамара, теорема 1 позволяет получить точные по порядку n верхние границы чисел θ_n. Для этого мы применим оценки

$$h_n \le \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{6}$$

$$h_n \le \frac{n^{n/2}\sqrt{2n+1}}{2^n}, \qquad n \text{ — чётное.} \tag{7}$$

Равенство в (6) выполняется тогда и только тогда, когда $n+1$ — число Адамара. Соотношение (6) доказано Адамаром [7], оценка (7) получена Барба [8] (см. [5]).

Следствие 3. *Пусть $n+1$ — число Адамара. Если S — правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба Q_n, то для соответствующего интерполяционного проектора P*

$$\|P\|_{Q_n} \le \sqrt{2n+3} + 1.$$

Доказательство. Если $n+1$ — число Адамара, то максимальным объёмом из всех симплексов, содержащихся в Q_n, обладает правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба. Поэтому к симплексу S применима теорема 1, согласно которой

$$\|P\|_{Q_n} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1.$$

Как отмечалось, в этой ситуации в (6) выполняется равенство:

$$h_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}.$$

Кроме того, так как $n+1$ является чётным, к h_{n+1} применима оценка (7):

$$h_{n+1} \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}\sqrt{2n+3}}{2^{n+1}}.$$

Из этих соотношений следует

$$\|P\|_{Q_n} \leq \frac{2h_{n+1}}{h_n} + 1 \leq \frac{2(n+1)^{(n+1)/2}\sqrt{2n+3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)^{(n+1)/2}} + 1 = \sqrt{2n+3} + 1.$$

□

Следствие 4. *Если $n+1$ — число Адамара, то $\theta_n \leq \sqrt{2n+3}+1$.*

Верхние оценки следствий 3 и 4 являются неулучшаемыми по порядку n, однако их можно существенно уточнить. Мы сделаем это в двух следующих пунктах.

2. Применение матриц Адамара

Напомним (см. [5]), что число $n+1$ является адамаровым тогда и только тогда, когда в n-мерный куб можно вписать n-мерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба. Проще всего это можно показать для куба $Q_n' = [-1,1]^n$. Между матрицами Адамара порядка $n+1$, последний столбец, который состоит из 1, и n-мерными правильными симплексами, вершины которых находятся в вершинах Q_n', имеется простое соответствие. Поскольку это соответствие нам потребуется, остановимся на нём подробнее.

Если S — правильный симплекс указанного вида, то его матрица вершин $\mathbf{S}$ является матрицей Адамара порядка $n+1$. Действительно, пусть $x^{(1)},\ldots,x^{(n+1)}$ — вершины S. Так как $x^{(j)}$ совпадают с вершинами куба, то элементы матрицы $\mathbf{S}$ равны ± 1, причём её последний столбец состоит из 1. Обозначим через $h^{(j)}$ строки $\mathbf{S}$ и убедимся, что эти векторы попарно ортогональны в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку $\|x^{(j)}\| = \sqrt{n}$, симплекс S вписан в n-мерный шар радиуса $\sqrt{n}$. Как известно (см., например, [1]), длина d ребра правильного n-мерного симплекса и радиус R описанного шара связаны равенством

$$d = R\sqrt{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}. \tag{8}$$

Если $R=\sqrt{n}$, то $d=\sqrt{2(n+1)}$. Значит,

$$2(n+1) = \|x^{(j)} - x^{(k)}\|^2 = 2\|x^{(j)}\|^2 - 2(x^{(j)}, x^{(k)}) = 2n - 2(x^{(j)}, x^{(k)}).$$

Получается, что $(x^{(j)}, x^{(k)}) = -1$. Так как строки матрицы $\mathbf{S}$ в первых n столбцах содержат координаты вершин симплекса, а последний элемент каждой строки равен 1, то

$$(h^{(j)}, h^{(k)}) = (x^{(j)}, x^{(k)}) + 1 = 0.$$

Итак, векторы $h^{(j)}$ попарно ортогональны в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тем самым $\mathbf{S}$ есть матрица Адамара порядка $n+1$. Для неё

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{n+1}\,\mathbf{S}^{T}. \tag{9}$$

Наоборот, пусть $\mathbf{H}$ — матрица Адамара порядка $n+1$, последний столбец которой состоит из 1. Рассмотрим симплекс S, матрица вершин которого есть $\mathbf{H}$. Это означает, что вершины S задаются строками $\mathbf{H}$ (за исключением последней компоненты). Симплекс S вписан в куб Q'_n, причём $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q'_n)$. Если $h^{(j)}$ — строки $\mathbf{H}$, $x^{(j)}$ — вершины S, то $(h^{(j)}, h^{(k)}) = 0$, $(x^{(j)}, x^{(k)}) = -1$, $\|x^{(j)}\|^2 = n$, откуда $\|x^{(j)} - x^{(k)}\|^2 = 2(n+1)$. Поэтому симплекс S является правильным с длиной ребра $\sqrt{2(n+1)}$.

Заметим, что каждая матрица Адамара порядка $n+1$ эквивалентна матрице вершин некоторого n-мерного правильного симплекса, вписанного в Q'_n. Эта матрица вершин получается из исходной матрицы после умножения некоторых строк на -1.

Теорема 2. *Пусть $n+1$ — число Адамара, S — n-мерный правильный симплекс, вершины которого совпадают с вершинами куба Q'_n. Тогда для соответствующего интерполяционного проектора $P : C(Q'_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство*

$$\|P\|_{Q'_n} \le \sqrt{n+1}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S. Как отмечалось выше, при наших предположениях матрица вершин $\mathbf{S}$ является матрицей Адамара порядка $n+1$, последний столбец которой состоит из 1.

Покажем, что для $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2 = \frac{\|x\|^2 + 1}{n+1}. \tag{11}$$

Пусть $y = (x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Коэффициенты многочлена λ_j составляют j-й столбец матрицы $\mathbf{S}^{-1}$. Поскольку $\mathbf{S}$ — матрица Адамара, для неё верно равенство (9), значит,

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n+1}(h^{(j)}, y).$$

Далее, $\dfrac{h^{(j)}}{\sqrt{n+1}}$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому

$$y = \sum_{j=1}^{m} \frac{(h^{(j)}, y)}{\sqrt{n+1}} \frac{h^{(j)}}{\sqrt{n+1}}, \qquad (y, y) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(h^{(j)}, y)^2}{n+1}.$$

Отсюда имеем

$$\|x\|^2 + 1 = (y, y) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(h^{(j)}, y)^2}{n+1} = (n+1) \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2.$$

Из последнего соотношения и следует (11).

Если x — вершина Q'_n, то $\|x\|^2 = n$ и (11) даёт $\sum \lambda_j(x)^2 = 1$. Применяя неравенство Коши, для $x \in \mathrm{ver}(Q'_n)$ получим

$$\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \le \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}.$$

Пусть $P : C(Q_n') \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, соответствующий симплексу S. Тогда

$$\|P\|_{Q_n'} = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n')} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \le \sqrt{n+1}.$$

Теорема доказана. □

Из соображений подобия результат теоремы 2 переносится на любой n-мерный куб, например, на куб $Q_n = [0,1]^n$.

Следствие 5. *Если $n+1$ — число Адамара, то $\theta_n \le \sqrt{n+1}$.*

Результат следствия 5 известен (см. [1, 9]), однако в приведённом способе его доказательства связь с матрицами Адамара является более ясной.

Заметим, что n-мерные правильные симплексы с вершинами в вершинах куба могут быть расположены по-разному относительно вершин и граней куба. Это легко обнаружить, если нормы соответствующих проекторов различаются. Но это возможно и для правильных симплексов, дающих равные нормы проекторов. Остановимся подробнее на способе, опирающимся на сравнение μ-вершин куба относительно различных симплексов.

Понятие μ-вершины единичного куба Q_n относительно содержащегося в нём симплекса было введено автором в статье [10]. Эквивалентные результаты получаются, если вместо Q_n рассмотреть произвольный n-мерный куб Q, что мы и сделаем.

Пусть $1 \le \mu \le n$. Будем говорить, что точка $x \in \mathrm{ver}(Q)$ является *μ-вершиной куба Q относительно симплекса $S \subset Q$*, если для интерполяционного проектора $P : C(Q) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство

$$\|P\|_Q = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|,$$

причём среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных. Это понятие связано с соотношениями между нормой $\|P\|_Q$ и величиной

$$\xi(Q;S) := \min\{\sigma \ge 1 : Q \subset \sigma S\}.$$

Здесь σS есть результат гомотетии симплекса S относительно его центра тяжести с коэффициентом σ. Число $\xi(Q;S)$ называется *коэффициентом поглощения куба Q симплексом S*. Как доказано в [10], для проектора $P : C(Q) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и соответствующего симплекса S

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|_Q - 1\right) + 1 \le \xi(Q;S) \le \frac{n+1}{2}\left(\|P\|_Q - 1\right) + 1. \tag{12}$$

Равенство справа в (12) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q относительно S. Если для некоторого μ имеется μ-вершина Q относительно S, то

$$\frac{n+1}{2\mu}\left(\|P\|_Q - 1\right) + 1 \le \xi(Q;S).$$

Разумеется, симплексы, имеющие различные наборы μ-вершин относительно содержащего их куба, располагаются относительно вершин куба по-разному, даже если нормы их проекторов совпадают. Эти симплексы неэквивалентны в следующем смысле: один из них нельзя перевести в другой при помощи ортогонального преобразования, оставляющего куб на месте. Приведём некоторые примеры, взяв $Q = Q_n'$.

При получении оценок минимальных норм проекторов в [11] обсчитывались, в частности, n-мерные правильные симплексы, возникающие из различных матриц Адамара одного порядка $n+1$. При $n = 15$ порядок матриц равен 16. С точностью до эквивалентности имеется пять таких матриц Адамара. Они соответствуют пяти симплексам, описанным в таблице 1. Результаты этих вычислений автору любезно предоставил А. Ю. Ухалов.

Table 1. Regular simplices for $n = 15$ **Таблица 1.** Правильные симплексы при $n = 15$

S	$\|P\|_{Q'_{15}}$	**Значения μ**	**Число μ-вершин куба Q'_{15}**
S_1	4	6	$m_6 = 448$
S_2	4	6	$m_6 = 192$
S_3	4	6	$m_6 = 64$
S_4	$\frac{7}{2}$	4, 5, 6, 8	$m_4 = 896$, $m_5 = 1344$, $m_6 = 5376$, $m_8 = 1344$
S_5	$\frac{7}{2}$	4, 5, 6, 8	$m_4 = 896$, $m_5 = 1344$, $m_6 = 5376$, $m_8 = 1344$

Через m_μ обозначается количество μ-вершин куба Q'_n относительно каждого симплекса. Для остальных $1 \le \mu \le 15$, кроме отмеченных в таблице, числа m_μ равны нулю. Каждый из симплексов S_1, S_2 и S_3 порождает одну и ту же норму проектора и обладает только 6-вершинами. Но числа 6-вершин куба относительно этих симплексов различны, поэтому симплексы попарно неэквивалентны. Любой из них в этом смысле также неэквивалентен как S_4, так и S_5. У последних симплексов и нормы, и наборы μ-вершин совпадают. Получается также, что $\theta_{15} \le \frac{7}{2} = 3.5$. Это точнее, чем оценка $\theta_{15} \le 4$ следствия 5 для $n = 15$.

Другой пример связан с $n = 23$. В статье [12] описываются результаты анализа шестидесяти правильных симплексов, вписанных в Q'_{23}. Эти симплексы построены из 60 имеющихся попарно неэквивалентных матриц Адамара порядка 24. Для всех симплексов, за исключением симплексов с номерами 16, 53, 59 и 60, норма проектора равна $\frac{14}{3} = 4.6666\ldots$, а для каждого из этих четырёх симплексов норма проектора равна $\frac{9}{2} = 4.5$. В частности, это ведёт к оценке $\theta_{23} \le 4.5$, отмеченной и в [11]. Это неравенство точнее, чем оценка $\theta_{23} \le \sqrt{24} = 4.8989\ldots$ следствия 5 для $n = 23$. Каждый из четырех исключительных симплексов неэквивалентен любому из 56 остальных.

Несмотря на возможные различия, для каждого правильного симплекса с вершинами в вершинах куба справедлива верхняя оценка (10). Вписанные правильные симплексы, для которых $\|P\|_{Q'_n} = \sqrt{n+1}$, существуют хотя бы при $n = 1$, $n = 3$ и $n = 15$. Вопрос о полном описании размерностей n с таким свойством является открытым.

3. Связь с интерполяцией на евклидовом шаре

Правильный симплекс, вписанный в n-мерный шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре. Других симплексов, обладающих этим свойством нет (см. [13—15]). В случае, если $n+1$ — число Адамара, аналогичным свойством по отношению к n-мерному кубу обладает правильный симплекс, вписанный в куб. При этом норма интерполяционного проектора, соответствующего такому симплексу, и на кубе, и на шаре имеет одну и ту же верхнюю границу $\sqrt{n+1}$.

В этом пункте мы дадим ещё одно доказательство теоремы 2. Оно выглядит более коротким, чем доказательство из предыдущего пункта, однако опирается на соотношения статьи [16], полученные совсем не простым путём. Исходным пунктом этого подхода является интерполяция на шаре.

Пусть сначала S — правильный симплекс, вписанный в n-мерный шар $B = B(x^{(0)}; R)$, $P : C(B) \longrightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующий интерполяционный проектор. Очевидно, $\|P\|_B$ не зависит ни от центра $x^{(0)}$ и радиуса R шара, ни от выбора правильного симплекса, вписанного в этот шар. Иначе говоря, $\|P\|_B$ зависит только от размерности n. Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\Big(t(n+1-t)\Big)^{1/2} + \left|1 - \frac{2t}{n+1}\right|, \quad 0 \le t \le n+1. \tag{13}$$

Обозначим $a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть s. Как доказано в [16],

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

С применением этого равенства в [16] установлено, что

$$\sqrt{n} \le \|P\|_B \le \sqrt{n+1}. \tag{14}$$

При этом $\|P\|_B = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Из правого неравенства (14) немедленно следует результат теоремы 2. Пусть $n+1$ — число Адамара, P — интерполяционный проектор, узлы которого являются вершинами Q_n' и образуют правильный симплекс S. Поскольку куб Q_n' вписан в единичный шар B_n, то в этот шар вписан и правильный симплекс S. Остаётся применить формулу (2) для нормы проектора на кубе и на шаре, а также верхнюю оценку (14) при $B = B_n$:

$$\|P\|_{Q_n'} = \max_{x \in Q_n'} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| \le \max_{x \in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \|P\|_{B_n} \le \sqrt{n+1}.$$

Неравенство (10) теоремы 2 получено.

Достижение верхней границы $\sqrt{n+1}$ нормы проектора на шаре и на кубе происходит по-разному. Для размерностей вида $n = m^2 - 1$, и только в этих случаях, равенство $\|P\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ имеет место для любого правильного симплекса, вписанного в B_n. Если $n+1$ — число Адамара, равенство $\|P\|_{Q_n'} = \sqrt{n+1}$ может выполняться как для всех правильных симплексов с вершинами в вершинах куба ($n = 1$, $n = 3$), так и для части из них ($n = 15$), а может не выполняться вообще ($n = 7$).

Интересно, что связь с конструкциями на шаре прослеживается и в доказательстве теоремы 2, данном в пункте 2 (см. (8)).

References

[1] M. V. Nevskii, *Geometricheskie Ocenki v Polinomial'noj Interpolyacii.* Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, p. 218, in Russian.

[2] M. Hall Jr., *Combinatorial Theory.* Mass., Toronto, London: Blaisdall Publishing Company, 1967.

[3] K. J. Horadam, *Hadamard Matrices and Their Applications.* Princeton: Princeton University Press, 2007.

[4] P. K. Manjhi and M. K. Rama, "Some new examples of circulant partial Hadamard matrices of type $4 - H(k \times n)$", *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 21, no. 5, pp. 2559–2564, 2022.

[5] M. Hudelson, V. Klee, and D. Larman, "Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem", *Linear Algebra and its applications*, vol. 241–243, pp. 519–598, 1996.

[6] M. V. Nevskii, "Minimal projectors and largest simplices", *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 14, no. 1, pp. 3–10, 2007.

[7] J. Hadamard, “Résolution d’une question relative aux déterminants”, *Bull. Sciences Math. (2)*, vol. 17, pp. 240–246, 1893.

[8] G. Barba, “Intorno al teorema di Hadamard sui determinanti a valore massimo”, *Glornale Mat. Battaglini (3)*, vol. 71, pp. 70–86, 1933.

[9] M. V. Nevskii, “Estimates for the minimal norm of a projector in linear interpolation over the vertices of an n-dimensional cube”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 9–19, 2003.

[10] M. V. Nevskii, “On a certain relation for the minimal norm of an interpolation projector”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 24–43, 2009.

[11] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, “On optimal interpolation by linear functions on an n-dimensional cube”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 291–311, 2018. DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-291-311.

[12] I. S. Kudryavcev, E. A. Ozerova, and A. Y. Ukhalov, “Novye ocenki dlya norm minimal’nyh proektorov”, in *Sovremennye Problemy Matematiki i Informatiki*, vol. 17, in Russian, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2017, pp. 74–81.

[13] L. Fejes Tót, *Regular Figures*. New York: Macmillan/Pergamon, 1964.

[14] D. Slepian, “The content of some extreme simplices”, *Pacific J. Math*, vol. 31, pp. 795–808, 1969.

[15] D. Vandev, “A minimal volume ellipsoid around a simplex”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, vol. 45, no. 6, pp. 37–40, 1992.

[16] M. V. Nevskii and A. Y. Ukhalov, “Linear interpolation on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 279–296, 2019. DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-279-296.