técnicas de educação

A MATEMÁTICA NATURAL NA INSTRUÇÃO PRIMÁRIA

1.ª FASE

J. J. Dumora e a Comissão Matemática
Paul Le Bohec

EDITORIAL ESTAMPA

A MATEMÁTICA NATURAL
NA INSTRUÇÃO PRIMÁRIA

COLECÇÃO «TÉCNICAS DE EDUCAÇÃO»

DIRECÇÃO DE SÉRGIO NIZA
Técnico do Centro de Observação
e Orientação Médico-Pedagógica

J. J. DUMORA E A COMISSÃO MATEMÁTICA
PAUL LE BOHEC

A MATEMÁTICA NATURAL NA INSTRUÇÃO PRIMÁRIA

1.ª fase

Editorial Estampa

Título do original

Premiers Pas vers une mathématique naturelle au C. P.
Première experience de mathématique libre au C P 1

Capa de **Soares Rocha**

Tradução de **Aura Ramalho**

ÍNDICE

1.ª PARTE — *Primeiros passos para uma matemática natural no 1.º ano* ... 9
Introdução ... 11
Organigrama ... 13
Conjuntos ... 15
Relações ... 21
Símbolos e simbolização ... 29
Lógica ... 35
O número ... 39
Numeração ... 47
Operações sobre cardinais ... 57
A exploração do espaço ... 67

2.ª PARTE — *Primeira experiência de matemática livre no 2.º ano* 85
Advertência ... 87
Material «Cuisenaire» ... 89
Invenção de sinais e de algarismos ... 91
Operações ... 105
Potências e raízes ... 123
O calendário ... 145
Sistemas não decimais ... 155
Quadriculados ... 163
Vectores e coordenadas ... 189
Teoria dos conjuntos ... 215

1.ª PARTE

PRIMEIROS PASSOS PARA UMA MATEMÁTICA NATURAL NO 1.º ANO

J. J. Dumora e a Comissão Matemática

INTRODUÇÃO

Apesar das novas instruções oficiais serem transitórias, elas vão permitir ao professor, da 1.ª classe em particular, libertar-se dos mecanismos e, acima de tudo, tomar em consideração a inteligência e raciocínio lógico de seus alunos.

Se bem que não recorra explicitamente à teoria dos conjuntos, este programa, que parece bastante reduzido, à primeira vista, deve permitir-nos abordar largamente, a partir da 1.ª classe, toda a gama das noções matemáticas de base. É necessário que, a partir da mais tenra idade, a criança possa desenvolver o seu raciocínio e o seu poder de criação.

A fim de auxiliar os camaradas a tomar consciência dos domínios que a criança da 1.ª classe pode abordar (não dizemos conhecer), construímos um organigrama que não pretende ser um modelo completo e a seguir cegamente. Demos relevo, não às noções matemáticas abordadas, mas às relações entre elas existentes. Este organigrama pode ler-se tanto no sentido vertical como no sentido horizontal. Tentámos também desmistificar certos termos matemáticos através de exemplos colhidos nas nossas aulas, mas seria arriscado pensar que, com situações idênticas, tivéssemos podido abordar todas as vias indicadas. Os exemplos escolhidos são a síntese do nosso trabalho e não generalizações resultantes de uma única classe.

No decorrer do ano e *com a vossa participação* (*) contamos publicar os resultados de experiências em que aparecerão, ao mesmo tempo, o ensaio experimental da criança e a repartição do professor.

Esperamos que este documento vos ajude a expressar o vosso pensamento ou a precisá-lo, que vos advirta dos pontos críticos a vigiar atentamente, para que a vossa participação não vá perturbar o progresso da criança.

São necessárias experiências para que este documento corresponda ao objectivo fixado.

Não temos regras a dar; no entanto, achamos que os nossos princípios pedagógicos — o tenteio experimental, o método natural — devem guiar-nos e evitar-nos provocar bloqueamentos.

A criança faz parte da vida e, muito naturalmente, procura compreendê-la. Para isso, isola factos da sua própria vida, procura os elos entre os elementos, estabelece relações.

Progressivamente irá construindo um sistema de abstracções, formando estruturas e, por experiência, constatará que é capaz de compreender situações de carácter geral.

Partindo da vida, a ela regressa constantemente, a fim de controlar as suas próprias descobertas. Fará inúmeros testes através das experiências mais diversas. Por conseguinte, há preparação, mas preparação somente, para a aquisição de noções matemáticas que só mais tarde serão afectadas.

Com efeito, uma noção matemática é uma abstracção complexa que resulta simultaneamente de um trabalho de pesquisa e de um fenómeno de impregnação no espírito de cada criança.

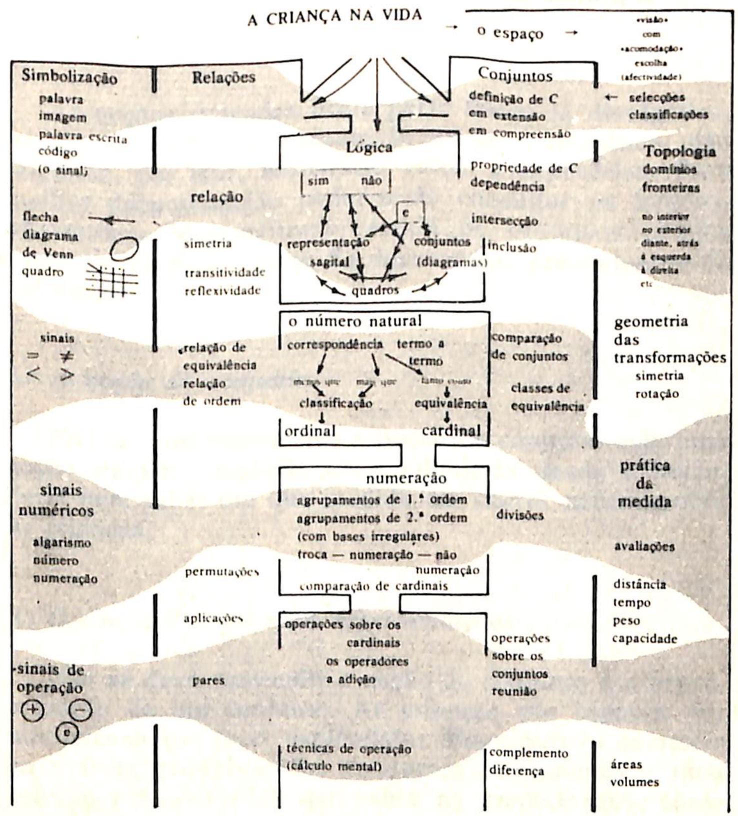
(*) Das escolas ligadas à CEL — *(N. do T.)*

O facto de manipular cubos ou qualquer outro tipo de material não poderia constituir uma prova de aquisição de noções matemáticas.

Experiências em número elevado com o material conduzem muitas vezes, na maioria das crianças, à formação de mecanismos, aos quais se cingem.

Pode exprimir-se o nosso pensamento por este depoimento recolhido no estágio do Sudoeste:

«Quando quis ajudá-la a compreender, ela estacionou.»



* *Pontos críticos do organigrama,* onde devemos estar atentos aos progressos das crianças e à nossa parte de professor:

— todas as simbolizações
as diversas escritas, as representações
— a noção de conjunto
— a correspondência termo a termo
— as bases
— os sistemas de numeração
— as técnicas operatórias diversas e naturais
— as transformações geométricas e suas composições
— a prática da medida

CONJUNTOS

As noções evocadas nesta parte foram já divulgadas, há algum tempo, nos nossos livros de matemática, não julgando, por isso, necessário voltar a explicá-las. Para melhor documentação poder-se-ão consultar os folhetos «Estruturas Matemáticas», sendo os exemplos citados extraídos na maior parte de documentos provenientes da 1.ª classe.

A) *A noção de conjunto*

Não se deve pensar que a noção de conjunto seja uma noção simples, implicitamente adquirida desde o início. Seria bom saber em que medida ela ocorre naturalmente às crianças.

B) *O conjunto e as suas representações*

Não se deve confundir a noção de conjunto e a representação de um conjunto. As crianças são capazes de, mecanicamente, fazer esplêndidos diagramas (o exercício ou a ficha pré-fabricados conduzem unicamente a uma solução pré-resolvida) sem saber na verdade que, constituir um conjunto, não é desenhar uma «rodela» e pôr qualquer coisa dentro, mas que o conjunto existe antes de ser representado, sob uma forma real, que será necessário apreender para o definir:

— quer nomeando os elementos *(conjunto em extensão)*

— quer determinando a propriedade e seus limites *(conjunto em compreensão)*

antes de o representar (seria igualmente preferível aguardar também que a criança o represente à sua maneira, antes de lhe propor as representações em vigor!).

C) *Conjunto e relação*

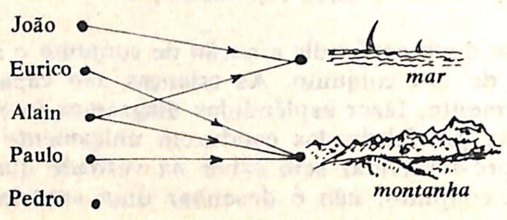
Somente após um longo ensaio e experimentação das suas descobertas a criança é capaz de extrair as noções de elementos, de pertença.

É ao estabelecer, desde a sua mais tenra idade, relações entre os objectos do seu meio ambiente, que a criança chegará a seleccionar, a classificar e a definir o que a rodeia. Que faz, aliás, a matemática actual senão, como diz Papy, «interessar-se mais nas relações entre os objectos do que na sua natureza»?

A noção de conjunto parece pois resultar naturalmente das relações entre os objectos.

Esta noção é muitas vezes considerada como um resultado.

Por exemplo:



A observar esta representação sagital, as crianças interpretam e dizem:

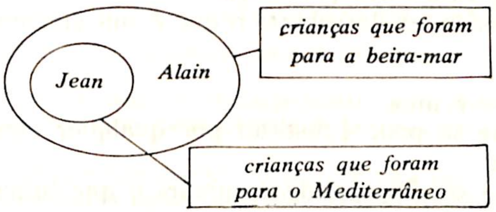
«João e Alain foram para a beira-mar.» (Noção de conjunto.)

«Eurico, Alain e Paulo foram para a montanha.» (Noção de conjunto.)

«Pedro não foi para a beira-mar, nem para a montanha.» (Inserção e não inserção.)

«Alain foi para a montanha e para a beira-mar.» (Aproximação da noção de intersecção.)

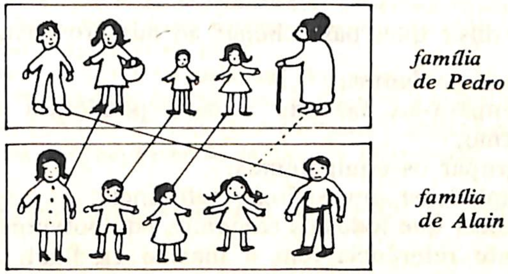
João diz: Eu fui para a beira-mar, no Mediterrâneo mas o Mediterrâneo é o mar! (Aproximação da ideia de inclusão.)



As noções abordadas aqui estão directamente ligadas às noções de topologia (vizinhança, domínios, fronteiras...).

D) *Comparação de conjuntos*

Na aula, cada criança desenhou a sua família. Alain e Pedro comparam a sua família.



Alain diz: *Tu tens um pai, eu também,* por um gesto, depois por um traço.

Alain liga o seu pai ao pai de Pedro; a mãe de Pedro à mãe de Alain, a irmã de Alain com a irmã de Pedro, Alain a Pedro.

(É uma correspondência termo a termo, mas selectiva.)

Fazer corresponder a avó de Pedro à irmã de Alain seria um pouco a prova de que as crianças compreenderam bem a noção de conjunto.

Muitos ensaios terão precedido esta realização.

Uma criança habituada a trabalhar com conjuntos de objectos idênticos como é muitas vezes o caso das fichas (recordemos que não se misturam esfregões com toalhas) não faria esta correspondência.

É preciso ter descoberto o que é um elemento de um conjunto:

a) que é uno;

b) que se pode substituir por qualquer elemento do conjunto;

c) que só a propriedade comum é que importa (se é que a há).

Temos a impressão de que se passa muitas vezes demasiado rapidamente e como uma evidência sobre esta noção: a correspondência termo a termo não deve ser um truque, uma mecânica para comparar os conjuntos, deve ser motivada e sentida. Senão, toda a descoberta do número não será senão o manejo de um processo, pretensamente novo, que conduz a um conhecimento artificial do número.

Quer dizer que, para chegar ao número basta:

— fazer conjuntos;
— compará-los fazendo a correspondência termo a termo;
— agrupar os equipotentes;
— estabelecer um conjunto referência;
— e dizer que todos os conjuntos equipotentes ao conjunto referência têm o mesmo cardinal, é impor

às crianças um caminho que talvez não seja o único a seguir; arriscamo-nos, sobretudo, a avançar demasiado depressa, a elaborar um sistema rígido. O mais importante não é atingir rapidamente o número mas que cada criança encontre por si a maneira de o descobrir.

É necessário desenlear a meada e não ter receio de perder tempo arriscando-se a tecer mais dificuldades. *Não é o conhecimento do número que conta mas a sua criação* (*).

(*) ESTRUTURAS DA VIDA ESTRUTURAS MATEMÁTICAS

(Folhetos de informação para os professores)

Estes folhetos não têm a pretensão de bastar para a vossa informação matemática. Não dispensarão a leitura de livros de iniciação matemática.

Também não são lições-modelo. O facto de uma noção ser apresentada de determinada maneira não deve obrigar nenhum professor a proceder do mesmo modo.

Eles procuram simplesmente demonstrar-vos que é possível, a partir de situações familiares, concretas ou abstractas, permitir às crianças fazer experiências, raciocinar, construir conceitos matemáticos.

A vida de todos os dias e a imaginação das crianças parecem-nos bastante fecundas para lhes permitir um tipo de experimentação de uma riqueza inesgotável; é por isso que não pensamos que o recurso a um material e a jogos artificiais seja indispensável.

O vocabulário introduzido destina-se, primeiro que tudo, ao mestre, que deve esforçar-se mais por sensibilizar os seus alunos em relação aos conceitos matemáticos, do que por ensinar-lhes palavras e definições que não se basearia numa experimentação realmente vivida.

Estes folhetos de dezasseis páginas aparecem em séries de cinco, a partir do início das aulas de 1970.

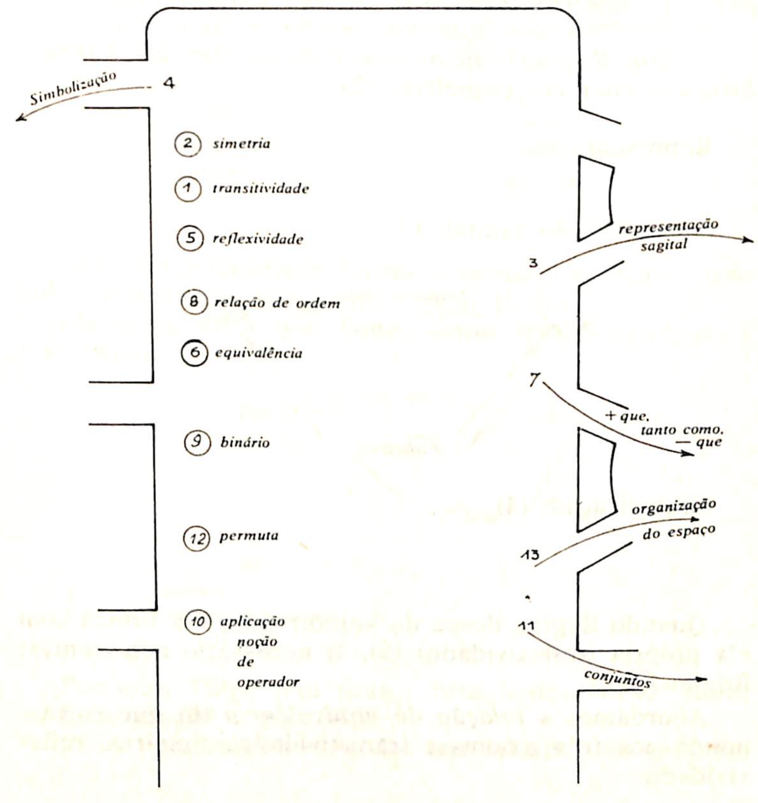
1.ª série (n.º 1 a 5): 1) Os conjuntos; 2) Álgebra de conjuntos; 3) As relações: 4) Propriedades das relações; 5) Funções e aplicações.

2.ª série (n.º 6 a 10): Leis de composição — Estruturas, grupos — Isomorfismos — Transformação do plano — Enumeração.

Para informações complementares: CEL — BP 282 — 06 — CANNES.

RELAÇÕES

A) *Tipos de relação*



B) *Relação de equivalência*

No recreio:

«Régis brinca sempre sozinho, não quer brincar comigo», queixa-se Regina ao voltar do recreio.

— *Com quem brincaste tu então?*

— *Com Filipe; descíamos no «escorrega» de barriga para baixo.*

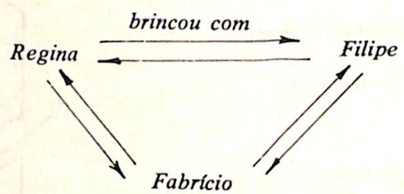
— *Eu também estava com Filipe*— disse Fabrício — *por isso também brincavas comigo* (transitividade) (1).

— *Não! eu não brincava contigo* — disse Regina.

— *Sim, Regina brincava com Fabrício visto que Fabrício brincava com ela* (simetria) (2).

Representa-se:

representação sagital: (3)

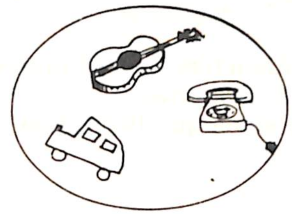


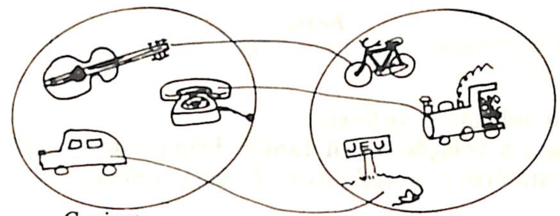
simbolização: (4)

Quando Regina desce do «escorrega», ela brinca com ela própria (reflexividade) (5). É necessário acrescentar: Regina

Abordámos a *relação de equivalência* (6) que corresponde aos três axiomas: transitividade, simetria, reflexividade.

Filipe também desenhou os seus brinquedos:



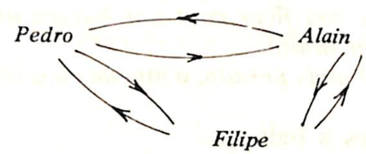


Conjunto dos brinquedos de Filipe

Conjunto dos brinquedos de Pedro

Pela correspondência termo a termo, verifica-se que Filipe tem tantos brinquedos como Pedro.

Tínhamos visto que Pedro tinha tantos brinquedos como Alain:



———→———

tantos brinquedos como

Portanto, Filipe tem tantos brinquedos como Alain. Esta relação é *transitiva*.

Pedro tem tantos brinquedos como Alain, mas também

$$\textit{Pedro} \rightleftarrows \textit{Alain}$$

se pode dizer que Alain tem tantos brinquedos como Pedro.

Esta relação é *simétrica.*

Podemos dizer ainda que Pedro tem tantos brinquedos como ele próprio.

Pedro ↻

Esta relação é *reflexiva.*

Sendo a relação «tem tantos brinquedos como» transitiva, simétrica e reflexiva, é uma *relação de equivalência.*

Este segundo exemplo introduz a relação de equivalência numérica, ou seja, *equipotência* (ver correspondência termo a termo).

C) *Relação de ordem*

Olivier não quer meter a moeda de um franco no mesmo bolso em que está o lenço grande.

— *Assim vou ficar com um buraco no bolso. Os dois juntos pesam muito.*

— *Qual é mais pesado, a moeda ou o lenço?* (+que) (7).

Utilizemos a balança:

«O lenço pesa mais do que a moeda.»
lenço ⧅ *moeda*
(simbolização) (4)

Maria Clotilde quer comparar o peso do seu lenço com o da sua moeda:

moeda ⧅ *lenço pequeno*

Sem pesar, ela deduz:

lenço ⧅ *lenço pequeno*

É a *transitividade* (1):

$$\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array}\right. \Longrightarrow aRc$$

Daniel que não compreendeu bem, lê, começando pela esquerda:

moeda ⧅ *lenço*

«Não! não se pode ler ao contrário.» (Anti-simetria.)

Todas as relações correspondentes aos três axiomas (transitividade, anti-simetria, reflexividade), são *relações de ordem* (8).

D) *Binários*

— *Esta manhã faltaram quatro alunos: três rapazes e uma rapariga.*

Poderiam ter sido 2 rapazes e 2 raparigas. Ou 3 raparigas e 1 rapaz, etc.

Representa-se:

rapazes	*raparigas*
3	1
2	2
1	3
0	4
4	0

(3,1) e (2,2) e (1,3) etc., são os binários possíveis que têm por resultado 4 (n.º 9).

Poder-se-ia representar também:

G \ F	0	1	2	3	4
0					×
1				×	
2			×		
3		×			
4	×				

E) *Aplicações*

1. Brígida trocou de cama com a irmã. Também poderia ter dormido no berço do irmãozinho.

Representa-se:

cama de Brígida	*cama de Cristina*	*cama de João Henrique*
Brígida	C Cristina	João Henrique
Cristina	B Brígida	João Henrique
João Henrique	C Cristina	Brígida
João Henrique	B Brígida	Cristina

(Não é possível: Cristina é demasiado grande!)

Haveria ainda outros casos possíveis.

2. Cristina não cabe no berço de João Henrique, mas Brígida e Cristina podem dormir juntas na cama de Brígida, por exemplo.

Representa-se:

cama de Brígida	*cama de Cristina*	*cama de de João Henrique*
C., B		João Henrique
J. H., B.	Cristina	
	B., C., J. H.	

A primeira representação mostra um exemplo de *aplicação bijectiva* (10) (cada elemento do conjunto partida corresponde a um elemento do conjunto chegada) (11).

F) *Permutações*

Designa-se pelo mesmo termo de *«permutação»*:
— a acção de permutar
— o resultado desta operação

Ao observar o plano da aula, Guy, que fica ao fundo, julga estar no lugar de Maria que fica à frente (ora o fundo da aula está representado no quadro na parte de baixo do desenho).
Esta troca agrada às crianças que operam toda a transformação.

Plano inicial:

Elvira	*Maria José*	*Maria*
Daniel	*Sérgio*	*Melyka*
Dominique	*João Lucas*	*Alberto*
Pascoal	*Roberto*	*Guy*

Novo plano (após a permutação) (12):

Pascoal	*Roberto*	*Guy*
Dominique	*João Lucas*	*Alberto*
Daniel	*Sérgio*	*Melyka*
Elvira	*Maria José*	*Maria*

A permutação é aqui efectuada segundo a simetria em relação a uma recta (13).

A *permutação* efectua-se entre os elementos de um mesmo conjunto. É um caso particular de *aplicação bijectiva.*

SÍMBOLOS E SIMBOLIZAÇÃO

A) *Do objecto real para os símbolos*

De 0 a 1 ano:

objecto verdadeiro ou pessoa

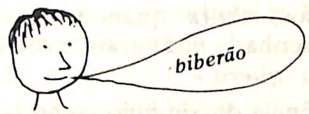
A Criança, o seu eu.

a experiência das coisas que encontra à sua volta: a mãe, o biberão...

2.º ano:

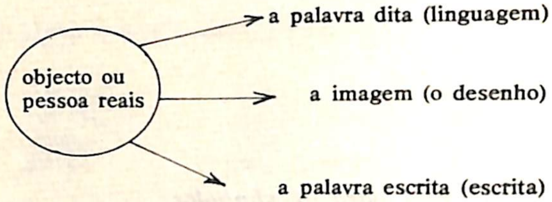
Associação das palavras representativas dos objectos (para uma criança, uma palavra é um acto).

3.º ano:



A criança aprende a falar. A palavra, conjunto de símbolos graças aos quais pode exibir as suas experiências, permite-lhe comunicar; o desenho e a palavra escrita aparecem depois.

Portanto, para traduzir a sua experiência dos seres e das coisas, para *comunicar*, uma criança tem à sua disposição, vários modos de expressão:



Desde o início, há no objectivo de comunicar com os outros o estabelecimento de convenções, de códigos. Na maior parte das vezes, a criança adopta a linguagem, a imagem, as escritas utilizadas no seu meio ambiente, mas fazendo-as passar sempre pelo crivo da sua experiência pessoal.

Pouco a pouco, a criança toma consciência de que o desenho, a palavra pronunciada ou escrita se diferenciam do objecto ou da pessoa real, que não têm existência mas constituem símbolos, convenções que se ligam aos objectos num objectivo de comunicação.

A palavra cão não ladra, o retrato da mãe não pode substituir os seus beijos.

Ora, esta separação do símbolo em relação ao objecto de início não é evidente.

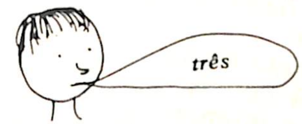
Sabina (4 anos) chora quando Alain quer recortar a sua silhueta desenhada num grande cartão. Diz: «*Vai-me doer muito. Não quero.*»

Tomar consciência do símbolo como tal é um processo muito lento e primordial para progredir para o simbolismo matemático.

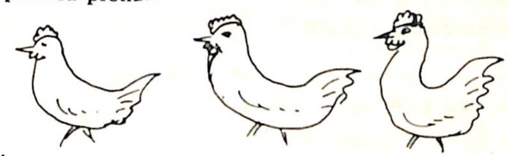
B) *Simbolização do número*

Em relação aos números passa-se o mesmo processo:

Animais reais, objecto de experiência.



A palavra pronunciada.



A imagem.

A representação.

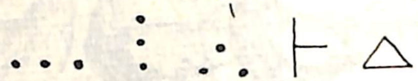
Ou porque a imagem é imperfeita, ou porque seja incapaz de fazer uma imagem fiel, ou porque produzir 20 vezes a mesma imagem é fastidioso e longo, a criança simplifica a sua representação.

Dirá: «• *é uma galinha.*»

Aí temos um sinal e a sua utilização.

Três galinhas

Num grau de consciência mais elevado, desembaraçando-se do suporte objectivo e querendo representar o número, a criança pode adoptar uma maneira característica de escrever e de reconhecer esse número, donde o aparecimento de constelações (escrita pessoal do número).

três 

Aí há invenção, criação de um sinal (noção de algarismo $\neq$ do número).

Se se prestar atenção à criança, há uma riqueza infinita de possibilidades de criações apaixonantes que nos levam directamente à invenção de sistemas de numeração diferentes do nosso. Depois, pelas necessidades de comunicação, recaímos nas escritas em vigor.

• • • → *Três* palavra escrita
• • • → *3* algarismo

C) Os sinais

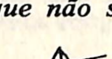
— Encontramos o mesmo processo quando se trata de traduzir qualquer *propriedade de conjuntos.*

Por exemplo: os nomes colectivos

animal ——→ 

sinal convencional que nos permite designar pássaros, mamíferos, etc., ao mesmo tempo. (É impossível desenhar um animal que tenha ao mesmo tempo 2 ou 4 patas, com asas ou sem asas, etc.)

— O mesmo processo ainda para traduzir a negação, a não-propriedade: *os que não são animais*



(o sinal riscado torna-se o símbolo da negação): *«Não, não é verdade, risca-se»,* processo muito natural.

— O mesmo processo ainda para o nascimento do sinal $=$ e $\neq$, dos sinais $<$, $>$ etc.

Ainda neste caso, a criança deve, antes de se servir dos sinais convencionais habituais, *criar os seus próprios sinais,* melhorá-los, simplificá-los, tomar consciência da sua utilidade. Somente com a continuação o professor lhe poderá dar os sinais de utilização corrente, o mais tarde possível. Se estes sinais forem dados prematuramente, não somente eliminamos toda uma parte de pesquisa e de criação, mas também é quase certo que não serão assimilados pelas crianças; dessa maneira, o professor impor-lhos-á sob a forma de mecanismos, o que significa matar o espírito da matemática.

Do mesmo modo, se não se tiver morto na criança essa necessidade de encontrar maneiras de se exprimir, ela procurará fazer representações. Se não se lhe tiver dado bruscamente o diagrama de Venn (a famosa rodela), o quadro cartesiano, etc., encontraremos na criança, por necessidade de clarificação e de economia de meios, a criação de representações mais ou menos perfeitas podendo conduzir naturalmente, e sendo necessário, a representações em vigor.

Nunca se deve ter pressa, as tentativas da criança não são tempo perdido, muito pelo contrário.

AS CAIXAS DE «MATEMÁTICA»

Para a pré-primária a caixa 00 (de material clássico)

* Simples, utilizável individualmente ou em grupo.
* Permite tentativas e experiências nos campos dos conjuntos, da da numeração, da lógica, da geometria.
* Montagem de redes «universais» (binários, ternários,... decimais).
* Figuras lógicas em plástico (48 peças).

A caixa ... ... 20 francos

Para as outras classes: a caixa 0

* O «ensaio experimental» ao serviço da «matematização» graças a um material polivalente, permitindo a mais vasta experimentação, oferecendo largas possibilidades de criação.
* Máquinas de transformar, balanças, simetrias, permutações, isometrias, conjuntos, circuitos lógicos.

2 caixas plásticas ... ... 100 francos
(permite o trabalho em doze salas de um a três alunos)

Informações da CELBP 282 — 06 — CANNES.

LÓGICA

Na aula, um grupo de crianças conta:

Domingo, fomos à feira. Havia carrocéis: carros de choque, baloiços, e até a lagarta.

Pode fazer-se o conjunto dos carrocéis da feira (1).

— *Eurico, andaste no carrocel?*

— *Não.*

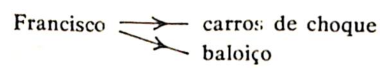
— *E tu, Francisco?*

— *Sim.*

Lógica (2).

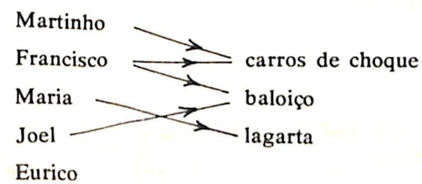
— *Eu andei nos carros de choque e no baloiço.*

$\xrightarrow[\textit{andou}]{}$ símbolo (3)



representação sagital (4)

— *E Martinho? Maria? Joel?*



Alain que não tinha ido, pode saber em que andaram as crianças (5).

Ele lê:

Martinho andou nos carros.

Francisco andou nos carros *e* de baloiço.

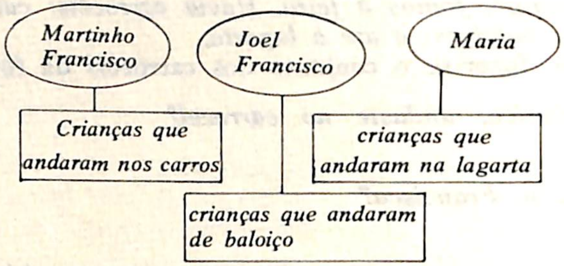
Maria andou na lagarta.

Joel andou de baloiço.

Poderá fazer (6):

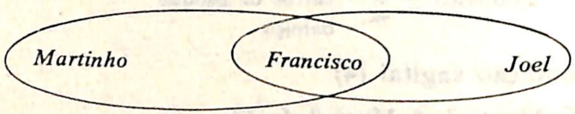
— O conjunto das crianças que andaram de

carro
baloiço
lagarta

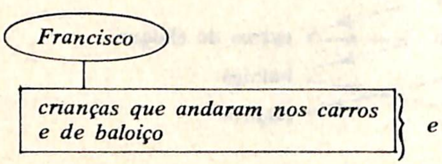


João Maria apercebe-se que Francisco está tanto no conjunto das crianças que andaram nos carros como no conjunto das crianças que andaram de baloiço. Intersecção.

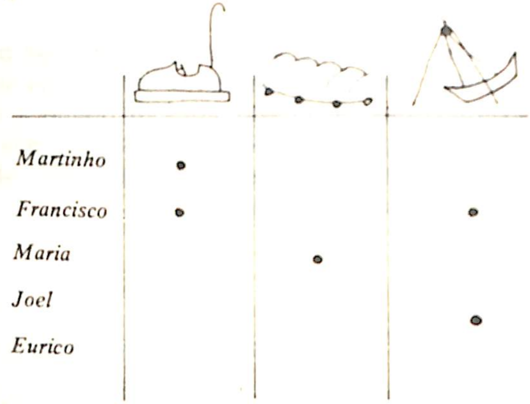
Chega-se a (7):



Paulo fez (8):

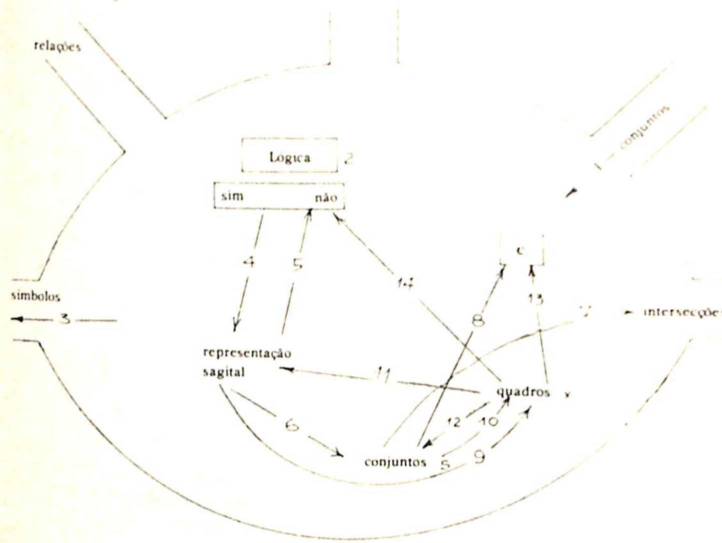


Os nossos correspondentes representaram de um modo diferente esta situação. Enviaram-nos o quadro seguinte: (9) e (10)



As crianças verificaram o quadro:

— Algumas retomaram o trabalho que tinham feito (representação sagital, conjuntos) (11) e (12).



— Alain interrogava-se: *«Francisco andou nos carros? sim; de baloiço? sim; de lagarta? não...* etc. (13) e (14).

Atenção:

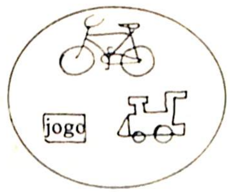
Não se deve julgar que uma situação análoga na vossa aula vos conduza obrigatoriamente a todas estas soluções.

Os exemplos são escolhidos aqui de modo a explicar os termos e as ligações. Os números das setas não correspondem a uma ordem a seguir rigorosamente: são para auxiliar à compreensão do texto.

O NÚMERO

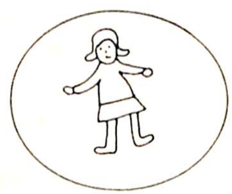
A) *Correspondência termo a termo*

Depois do Natal, as crianças falam dos seus presentes. Cada uma desenha o que recebeu.

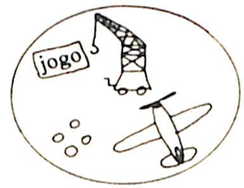


Conjunto dos brinquedos de Pedro

Conjunto dos brinquedos de Alain

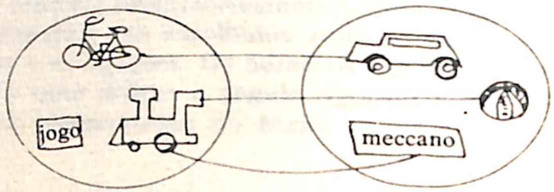


Conjunto dos brinquedos de Maria



Conjunto dos brinquedos de João

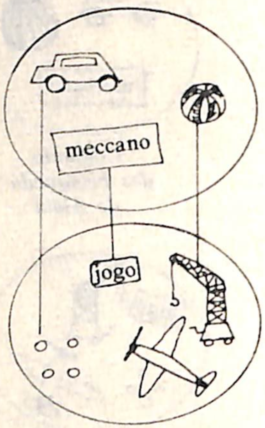
As crianças querem saber quem tem o maior número de brinquedos. Por meio de gestos as crianças fazem comparações. Um aluno tem a ideia de ligar os brinquedos por um traço:



Conjunto dos brinquedos de Pedro

Conjunto dos brinquedos de Alain

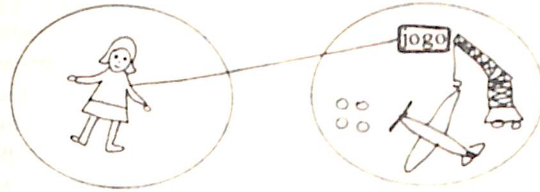
A cada brinquedo de Pedro corresponde um brinquedo de Alain, portanto Pedro tem *tantos* brinquedos *como* Alain.



Conjunto dos brinquedos de Alain

Conjunto dos brinquedos de João

Resta um brinquedo de João sem correspondente, portanto João tem *mais* brinquedos *do que* Alain.



Conjunto dos brinquedos de Maria

Conjunto dos brinquedos de João

Os brinquedos de Maria não correspondem a todos os brinquedos de João, portanto Maria tem *menos* brinquedos *que* João.

Por correspondência termo a termo podemos obter as noções seguintes:

tanto como *mais que* *menos que*

Ou ainda:
O mesmo número de elementos (tanto como).
Maior número de elementos (mais [do] que).
Menor número de elementos (menos [do] que).

A comparação de conjuntos levar-nos-á primeiro a definir (a maior parte das vezes) *mais que* e *menos que* antes de *tanto como* que é unicamente um caso particular desta comparação. *Simbolização* $<$ $>$

Parecem então impor-se dois termos matemáticos, as noções de elementos e de número.

B*) A noção de elemento*

Pressupõe que a criança tenha captado o que é a representação de um objecto.

Quando a criança desenha um gato, faz corresponder o gato real à imagem do gato. É o gato por *convenção,* porque a criança se apercebe, de certeza, que o seu desenho não pode miar e, no entanto, estabelece uma *identidade* entre a imagem e o gato. Cada representação corresponde no seu espírito ao objecto ou à personagem real. A sua afectividade impele-a mesmo para uma identificação total com o seu retrato ou o sinal que o representa e do qual se deve defender e daí o interesse das representações variadas de um mesmo objecto que não se deve cingir a um sistema de símbolos. É necessário que a criança perceba, ao mostrar o seu desenho que, a palavra escrita ou o símbolo do objecto real, *é a mesma coisa, é o objecto.* É necessário que tenha nítida consciência de que as diversas representações de um objecto ou de um conjunto são na realidade UMA mesma coisa. Será assim levada a definir a noção de igualdade em relação às noções de equivalência e de equipotência.

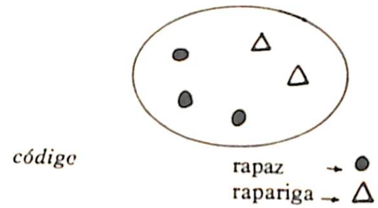
C) *Igualdade — Equipotência*

Na aula, os alunos da 1.ª classe.
A fotografia das crianças da 1.ª classe representa:

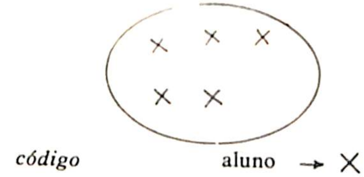
Conjunto das crianças da 1.ª classe

Lista dos alunos da 1.ª classe:
Alain Dupont
Sofia Durand
João Dupont
Eurico Blanc
Maria Dubois

Os rapazes e as raparigas da 1.ª classe:



Os alunos da 1.ª classe:



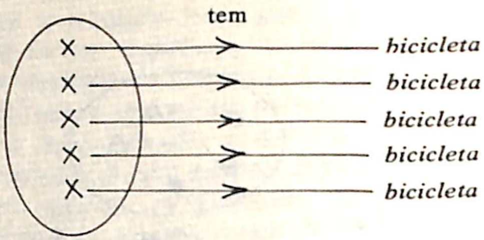
A noção de elemento apura-se cada vez mais.
Alain — fotografia — nome
(real) (identidade)
Alain torna-se pouco a pouco • ou ×
• rapaz ou × aluno da 1.ª classe.

Distingue-se o elemento por uma das suas qualidades que pode ser implicitamente o número, sendo a sua qualidade de ser UM.

Todos estes conjuntos são *iguais* porque não passam das diversas representações de um *mesmo conjunto,* são os critérios de definição que mudam: *um conjunto não é igual senão a si próprio:*

A criança dirá: é a *«mesma coisa»,* há uma *identidade.*

Pelo contrário, se cada criança da 1.ª classe tiver uma bicicleta, Crianças da 1.ª classe:



não posso dizer que o conjunto das bicicletas = ao conjunto das crianças da 1.ª classe. É uma simples questão de bom senso. A criança não dirá: é a «mesma coisa» mas, há tantas bicicletas como crianças ou há o *mesmo número*.

A ambiguidade serve para realçar esta *equipotência* (equivalência em número) o sinal convencional em vigor chama-se *igual* (=).

D) O cardinal

Ao passar directamente à comparação quantitativa de conjuntos, parece esquecer-se que o número não é senão uma qualidade, do mesmo modo que «pontiagudo» ou ser «irmão de...», não pode ser privilegiado à custa dos outros, pois não pode ser verdadeiramente concebido senão no seu contexto e em relação ao seu ambiente.

O estudo das relações de equivalência é indispensável como preliminar ao estudo do número. Por exemplo, a prática da medida de gabinete de cálculo pode favorecer esta maturação: *ter o mesmo peso, o mesmo tamanho*, etc. (sem nenhuma ideia de número).

O estudo das formas, das cores, de todas as relações de equivalência em geral, é indispensável. Quando se pode dizer que dois conjuntos são *equipotentes*, quer dizer que têm a mesma propriedade numérica ou o mesmo

cardinal, e não se pode deduzir repentinamente que por *convenção* este cardinal se chama três, por exemplo. Seria preciso deixar acumular-se primeiramente os conjuntos compostos nas diversas classes, a fim de que o número se separe bem do objecto e que não se diga já somente três maçãs, mas também três de um conjunto formado por uma chávena, um cachimbo e um índio.

Quanto maior e mais variado for o número de conjuntos pertencentes à classe três, mais prazer terá a criança em escolher a sua referência de três.

Em nossa opinião, seria um erro trabalhar com números pequenos e eliminar os grandes em seu favor.

A criança que chega à 1.ª classe tem já mecanismos montados, sabe contar, ou melhor, tem o seu processo de contagem. É preferível trabalhar também com números que ela não conheça, onde tudo será uma descoberta, onde será necessário avançar passo a passo.

Um outro erro seria querer, como no antigo programa (ou mesmo em certos livros de matemática moderna para a 1.ª classe), estudar os número de 0 a 10, depois de 10 a 20... Retiramos então à criança todo um trabalho de classificação, de simbolização, de numeração. Só pela experiência e tentativa a criança estabelecerá, numa segunda fase, comparações com os números, os ordenará, descobrirá a sequência dos números e a lei que a rege.

Do ponto de vista da simbolização, a criança tem a porta aberta à invenção, se se encontrar perante o problema de nomear e escrever um número que não conhece mas que acaba de descobrir. Será, sem dúvida, levada a estabelecer sistemas de numeração, em lugar de se cingir ao sistema de base dez, sistema tão rotineiro que para muitos se torna impossível compreender o seu mecanismo.

NUMERAÇÃO

A) *Divisão*

Eurico trouxe esta manhã a sua colecção de moedas de Napoleão.

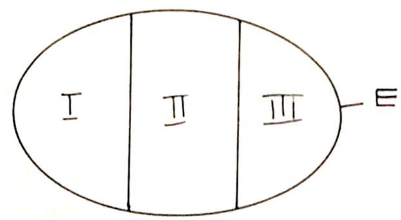
Alain classifica-as:

— *Têm todas uma abelha de um lado, mas do outro lado, há:*

I. *As que têm uma cabeça (busto).*

II. *As que têm personagens a pé.*

III. *As que têm personagens a cavalo.*



Nenhum conjunto é vazio.

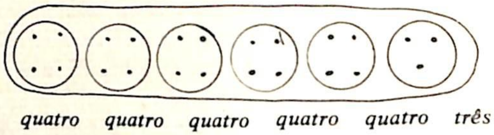
Não há intersecções.

Diz-se que os conjuntos são *disjuntos*.

Todas as moedas da colecção pertencem a um dos conjuntos I, II, III.

O conjunto que tem por elementos I, II, III é *uma divisão de C.* I, II, III são *parcelas de C.*

Eurico diz: *«Há muitas moedas. Vou contá-las.»* Engana-se; recomeça. Há muitas; então diz: *«Vou contá-las a quatro e quatro.»* Assim, agrupa-as e diz:



Está a fazer uma divisão. Certas parcelas são equipotentes (têm o mesmo número de elementos), mas não todas.

Eurico está satisfeito, contou as suas moedas.

Observação:

Muitas vezes as crianças fazem agrupamentos diversos com a preocupação da justeza, porque não gostam do «resto». Vemos que é lógico, porque corresponde a uma matemática: as divisões.

B) *Os agrupamentos*

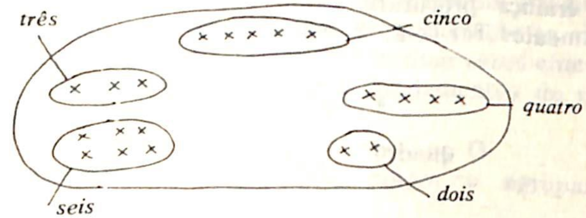
Se se observarem bem as crianças, notar-se-ão certamente os passos seguintes:

a) A influência do meio é importante: a criança diz os seus números (1, 2, 3, 4; ou 4 e 4, 8 e 4, 12...). Utiliza a sua mecânica sem lhe apreender o sentido. Isso estará bem enquanto o número de objectos não for demasiado importante.

(Se quisermos obter progressos naturais e uma tentativa válida, não devemos evitar as situações em que aparecem grandes números, os que se encontram mais vezes nas situações reais.)

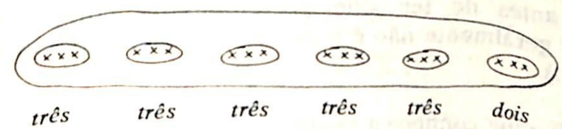
b) A criança faz então apelo às suas referências. Contará da seguinte maneira:

— agrupa por constelações:

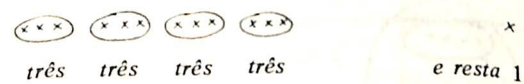


Há 5 e 3 e 4 e 6 e 2. (Isto encontra-se muitas vezes na secção dos mais crescidos na escola infantil.)

c) Depois encontra-se isto (exemplo de Eurico):



d) Depois isto:



Aqui já não há comparação com as referências, mas a adopção de um sistema com a escolha de uma referência (sistema de numeração).

Observação:

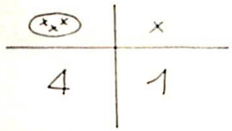
Cada criança tem a sua preferência por um agrupamento determinado. É raro que seja *«dez»*. A maior parte das vezes, é 3, 5, 4, 2,... etc. A criança contará então os seus grupos e dirá:

«Há 4 grupos de 3 e 1.»

Temos aqui um *agrupamento de primeira ordem.*

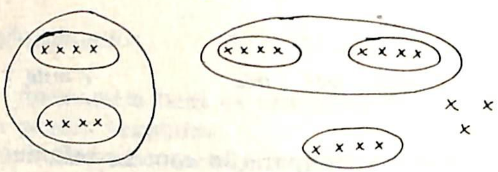
A criança procurará então símbolos para escrever rapidamente. Ter-se-á, a maior parte das vezes:

O quadro:



é, na maior parte da vezes, introduzido pelo professor. É, no entanto, muito útil; será apenas necessário procurar não o introduzir prematuramente e evitar a sua mecanização antes de ter sido perfeitamente compreendido. (O que geralmente não é o caso das fichas à venda nas livrarias.)

e) Porque conhece a cantilena (1 e 1, 2; 2 e 2, 4; 4 e 4, 8;) João Luís agrupa:



e diz: *8 e 8 e 4 e 3 ou 2 grupos de 8, 1 grupo de 4 e restam 3.*

Há aqui um agrupamento de 2.ª ordem (com mudança de cardinal ou de cardinais).

Encontra-se muitas vezes este processo.

A causa disto é muitas vezes:

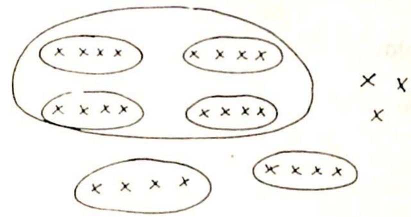
— Quer o material natural empregado (ex.: as caixas de biscoitos de diferentes embalagens).

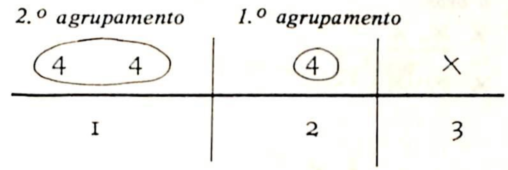
— Quer por agrupamento privilegiado (o par, o binário).

O que é notável é que este agrupamento irregular se encontra nos diversos sistemas de numeração (o sistema romano, por ex.). Este processo é muitas vezes eliminado, o que é lamentável. É um dos fundamentos do cálculo mental.

f) Quando encontraremos, então, o agrupamento com base regular?

Exemplo:





Constatámos que este agrupamento *não é natural:*

a) Raros são os exemplos deste agrupamento na vida corrente;

b) É certo que, nas nossas 1.as classes, pudemos chegar aí, mas foi necessário, como se costuma dizer, «dar a última demão», quer fazendo apelo a um material especialmente concebido para conduzir às bases, quer forçando o processo por estar inscrito no programa.

Em ambos os casos, constatámos que, a mecânica uma vez montada, funcionava bem, que as crianças se divertiam muito com o material, mas parece-nos ter aqui um exemplo do que se não deve fazer. As crianças têm à sua disposição um mecanismo que não podem utilizar na vida. Toda a construção abstracta deve verificar-se pela experiência e, para nós, o país do quatro não existe.

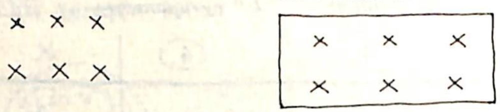
C) *Código numérico*

É o estabelecimento de um sistema de referência após o início de um sistema de numeração.

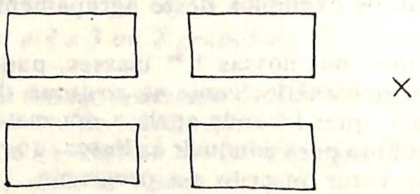
Por exemplo:

por convenção:

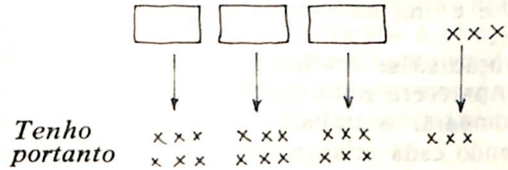
6 ovos *uma caixa de 6 ovos*



pelo que 25 ovos se representarão:



Descodificação:
Tenho três caixas de ovos e 3 ovos:



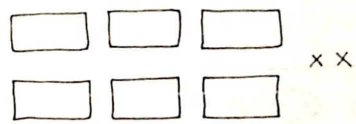
21 ovos

D) *Comparação dos cardinais*
Utilizando os códigos:

Tenho 26 ovos.

Código: *6 ovos* → *1 caixa*

Terei



4 caixas de 6 e 2 ovos

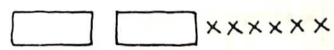
Novo código: *12 ovos* → *1 dúzia*

Terei

2 dúzias e 2 ovos

Novo código: *10 ovos* → *1 dezena*

Terei



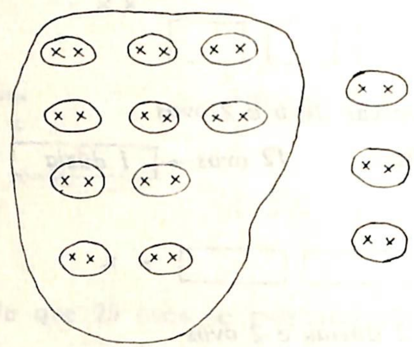
2 dezenas e 6 ovos

Portanto o cardinal 26 pode escrever-se:
4 seis e 2 na base 6
2 doze e 2 na base 12
2 dez e 6 na base 10

Esta comparação só se realizará sobre agrupamentos da 1.ª ordem. Aparecerá naturalmente, sobretudo se se for levado a comparar o trabalho individual de várias crianças (não tendo cada criança forçosamente agrupado na mesma base).

Base 2 e Base 10:

Isto não é falso, se se considerar que o 1.° agrupamento foi feito na base 2 e o 2.° agrupamento na base 10 (agrupamentos irregulares). Posso muito bem conceber o seguinte:



10 (xx)	(xx)	x
1	3	0

Porque contar noutras bases além da base 10?

A numeração decimal é de tal modo habitual, que se torna muito difícil compreender a sua formação, e, por isso, a sua necessidade. Contar noutras bases, criar outros sistemas de numeração ajuda-nos a compreender melhor a formação do sistema que se emprega na vida corrente.

Mas na vida, aliás, nem sempre empregamos o sistema decimal: pensemos nas horas, nas máquinas de calcular, nos ordenadores (*).

(*) FOLHETOS PROGRAMADOS

Uma outra fórmula para o trabalho individual, no mesmo princípio que as bandas programadas, com praias pergunta, praias resposta, praias abrindo-se a pistas de pesquisa...

Um complemento ao cálculo vivo que permite às crianças trabalhar individualmente com situações matemáticas (e, em particular, numéricas) correntes e respeitando ao máximo os diversos métodos de raciocínio.

Estes folhetos encontram-se agrupados em séries de 10 sobre um mesmo conceito matemático:

Série C.3 (0 a 9) Aplicação linear.

Série B.1 (0 a 9) Conjuntos — relações (a sair).

OPERAÇÕES SOBRE OS CARDINAIS — A ADIÇÃO

O novo programa limita à adição o estudo das operações (técnicas operatórias) na 1.ª classe. Isso demonstra a inutilidade obstinada do trabalho mecânico que tentamos impor às crianças, sem resultados efectivos e duradouros. Mas, por outro lado, não se deve crer que não é necessário abordar as noções de divisão, de diferença, etc., a pretexto de que não é do programa. Somente, não se deve impor a lei e uma técnica operatória. As operações sobre os conjuntos (reunião, complemento, diferença), os diversos agrupamentos em numeração, permitir-nos-ão abordá-los.

A) *Diferentes casos de adição*

Pode ser abordada de duas maneiras; confundi-las é para as crianças uma causa de incompreensão.

A criança faz a diferença entre as 3 situações seguintes:

a) *Tenho 3 coelhos numa gaiola, 6 noutra, vou juntá-los.*

b) *Havia 3 coelhos na gaiola, a mãe pôs lá mais 6 que comprou no mercado.*

c) *Na coelheira há uma gaiola com 3 coelhos e uma gaiola com 6 coelhos.*

Estas três situações traduzem-se em matemática tradicional por 3+6=9.

Ora elas fazem apelos a noções matemáticas completamente diferentes.

Em *a* é a *reunião de conjunto:*

$$(3,6) \xrightarrow{+} \boxed{3+6} \text{ ou } 9$$

Em *b* é a *noção de operador:*

$$3 \xrightarrow{+6} 9$$

Em *c* é a *noção de par:*

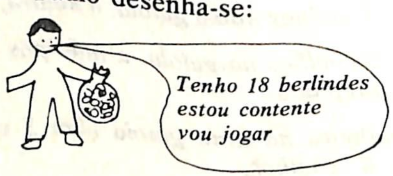
$$(3,6)$$

A diferença fundamental parece ser a existente entre a reunião de conjunto e noção de operador.

B) *Operador e operação*

Eu ganho berlindes.

João Paulo desenha-se:



18 é o *conjunto de partida.*

Ele joga.

João Paulo *Marcos*

Ele joga.

João Paulo Bernardo

Ele joga.

João Paulo Jaky

Após o recreio, João Paulo faz as suas contas. Para isso, recapitula as suas diferentes *acções* e diz:

«Ganhei 3 a Marco, 6 a Bernardo, mas dei 5 a Jaky. Ganhei 4.»

O que interessa aqui a João Paulo são as suas acções, em nenhum momento intervêm os 18 berlindes.

O conjunto partida é, aqui, independente. João Paulo trabalha sobre as suas acções, sobre *operadores*.

Se ele tomar para código:

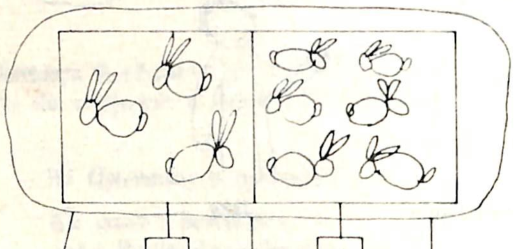
$$\left.\begin{array}{lcl} \text{ganho} & \longrightarrow & + \\ \text{perdo} & \longrightarrow & - \end{array}\right\} \text{simbolização}$$

João Paulo pode escrever:

$$\boxed{+3 \text{ e } +6 \text{ e } -5 = +4}$$

C) *O sinal*

É necessário fazer bem a distinção entre os (+ —) que simbolizam acções e o (e) que é uma coordenação que se costuma por continuidade traduzir também por + (o que cria uma ambiguidade no espírito das crianças).



$\boxed{3}$ $\boxed{6}$

$\boxed{3+6} = \boxed{3 \text{ e } 6} = \boxed{9}$

$\boxed{3+6} = \boxed{3 \text{ e } 6}$ são *números* iguais a 9.

Em álgebra este (e) não se escreve. Esta distinção fundamental deve ser bem clara, pois as crianças esbarram nela.

Para elas o (+) *corresponde a uma acção e não a uma coordenação.*

É necessário fazer a distinção entre (+3) que é um operador e o termo (3) do par (3,6) no conjunto seguinte:

(3,6) não é um número, é um par. Enquanto tenho (3,6), não fiz a operação (é o *caso c*, na coelheira há uma gaiola com 3 coelhos e uma gaiola com 6 coelhos).

Se eu juntar os coelhos, reúno, *opero sobre o par (3,6) (caso a)*

$$(3{,}6) \xrightarrow{+} \boxed{3 \text{ e } 6} \text{ ou } \boxed{3+6} \text{ ou } 9$$

3+6	são as diferentes escritas
3 e 6	de um mesmo número
9	são os resultados

$\boxed{3+6}$ *não indica uma operação a efectuar,* já está efectuada.

A diferenciar de

$$3 \xrightarrow{+6} 9$$

que indica uma operação sobre o 3 sendo (+6) o operador.

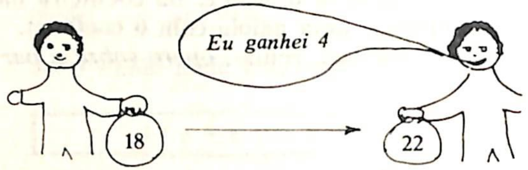
(*Caso b*, a mãe compra 6 coelhos...)

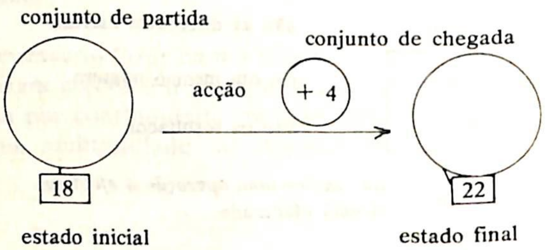
Observação:

Na reunião de conjuntos, as crianças dizem naturalmente *e*. É difícil fazer admitir que este *e* se possa simbolizar por +. As crianças não lhe vêem a utilidade e opõem-se a ela, dizendo «não é a mesma coisa».

D*) Representações diversas*

Se retomarmos o exemplo dos berlindes, João Paulo pode saber quantos berlindes tem no saco *depois do jogo.*
Ele fará a seguinte operação:



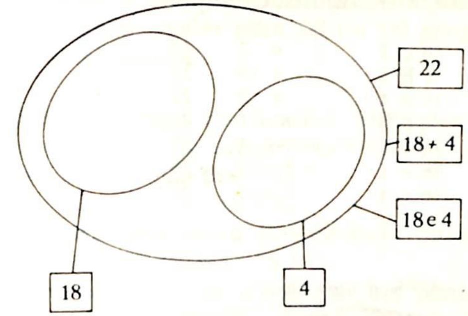


Ou: $18 \text{ e } (+4) = 22$

$$18 \xrightarrow{+4} 22$$

Operação sobre um número (18).

Não se deve confundir com o diagrama seguinte:



que se traduzirá por:

$$(18,4) \xrightarrow{+} 22$$

Operação sobre um par.

(Este diagrama pode corresponder à situação: João tem 18 berlindes Paulo 4. Ao todo, quantos há?)

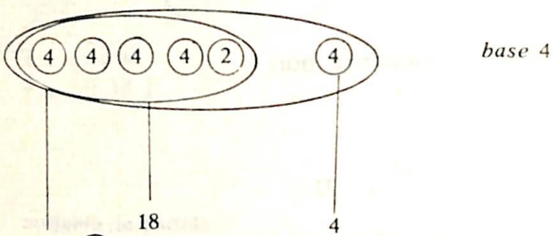
E*) Técnicas operatórias da adição*

Para realizar tecnicamente 18 e 4 devemos *utilizar a numeração.* Não existe *uma* técnica operatória. Cada criança pode ter a sua, adaptada à sua própria visão das coisas. Não temos o direito de impor uma, a pretexto de que é a que toda a gente conhece e que se crê ser a mais eficaz. Essa é uma das causas de inúmeros bloqueamentos. O predomínio da base 10 e a mecanização das técnicas mataram o cálculo mental, que apela, porque mais individual, para circuitos muito mais diversos.

Para 18 e 4 alguns exemplos:

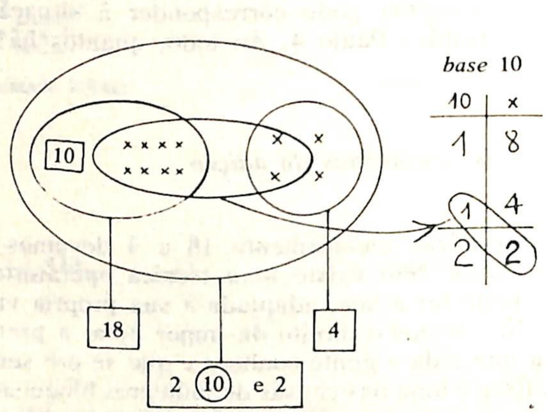
18 e 2	e 2	22
8 E 4	e 10	22
15 e 4	e 3	22
18 E 5	menos 1	22
18 e 8	menos 4	22
18 e 1	e 1 e 2	22
16 e 4	e 2	22

Apelo a uma base



5 (4) e 2

5 × 4 20 e 2 22



A criação de uma técnica operatória necessita, antes de tudo, do conhecimento da operação que se quer fazer.

É, no que respeita à adição, conhecer primeiro as suas diversas propriedades, apelar para tal ou tal propriedade, exercitar tal ou tal técnica.

* Dizer 4 e 8 em lugar de 8 e 4 é utilizar a propriedade *comutativa* da adição $(a+b)=(b+a)$.
* Dizer (16 e 4) 20 e 2=22
  ou (4 e 2) 6 e 16=22
  é apelar para uma outra propriedade da adição: a *associativa* $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Pode sempre substituir-se na adição um conjunto por um outro conjunto equivalente, desde que só interesse a propriedade numérica.

É também tomar consciência de que cada algarismo, da direita para a esquerda, representa o número de conjuntos por uma certa ordem, crescendo as ordens da direita para a esquerda. A criança não pode pois fazer e compreender uma adição se não dominar plenamente a numeração.

É necessário que saiba utilizar *o zero, que é neutro para a adição,* correspondendo a um conjunto vazio.
$(a+o=a)$

Convençamo-nos de que, se a criança não compreendeu, não descobriu, não assimilou estas diferentes noções *«não servirá de grande coisa,* como afirmou Dienès, *mandá-la executar um grande número de "adições" mesmo empregando o material concreto mais moderno. É necessário muito menos prática do que habitualmente para chegar a uma técnica eficaz, quando os princípios são correctamente compreendidos».*

A EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO

Desde a mais tenra idade que a criança explora o espaço. Olha, tacteia, toca, depois mexe-se, desloca-se. Parte à conquista do mundo que a rodeia. Faz a sua experiência por tentativas.

O que conta não são os objectos ou as pessoas na sua fria realidade mas as relações possíveis com eles, o que deles pode fazer.

Procura torná-los seus passando-os pelo crivo da sua afectividade. A criança não tem uma visão de adulto, as suas necessidades não são as dos adultos. Surpreendemo-nos, por vezes, na 1.ª classe, ao descobrir que noções que julgamos simples, tais como *diante, atrás de, dentro de, fora de, antes de, depois de...* são apenas imperfeitamente assimiladas. A razão é que elas de maneira nenhuma são prioritárias para a criança muito pequena. Só se tornam prioritárias quando a criança aprende a ler e a escrever, quando lhe é necessário situar-se ou situar um objecto em relação a outros.

O que é vital, no início, são as deslocações no espaço, a fim de actuar sobre este e de obter o que deseja.

A noção de vizinhança, fronteiras, a ideia de buraco, de passagem, da continuidade, o estudo de todas estas noções fundamentalmente primeiras são o objecto da topologia.

A) *A topologia*

Segundo certos autores, pode definir-se topologia como *«uma geometria de forma primitiva e rudimentar subjacente a todas as geometrias»*. Desta maneira, é possível discerni-la nas acções e reflexões das crianças.

Uma das noções fundamentais que ela aborda é a da continuidade e, para o fazer, estuda as noções de proximidade, de conjuntos abertos e de conjuntos fechados, de fronteira.

Proximidade:

A mesa de Cristina está em completa desordem.

— *Vou,* diz ela, *arrumar o meu lugar. Sento-me e arrumo tudo a que puder chegar com a mão.*

— *Vais arrumar o teu saco que está encostado ao pé da tua cadeira?*

— *Sim, porque lhe posso tocar. Chego a ele, portanto, o saco está na minha proximidade.*

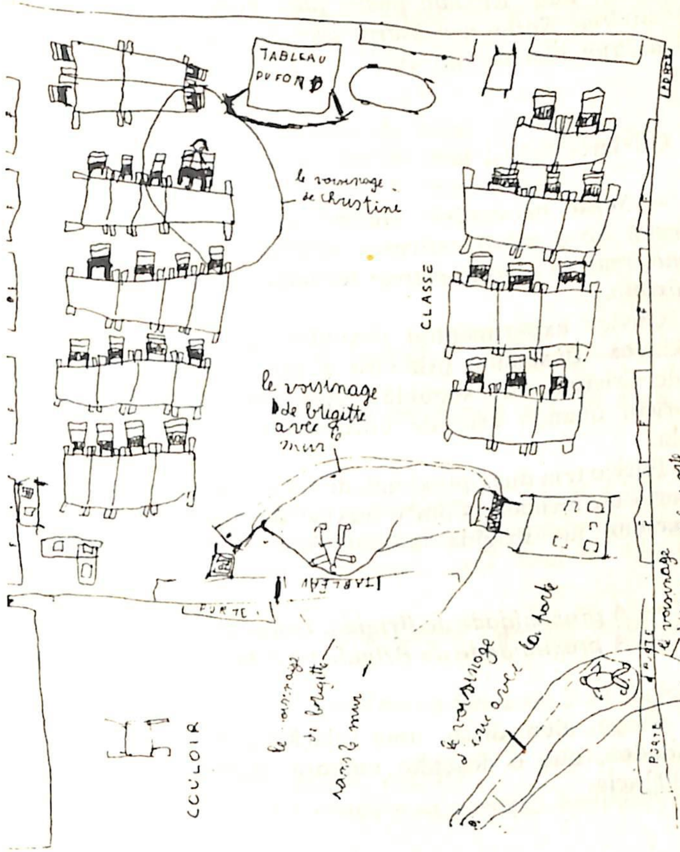
— *E a mosca que voa por cima da tua cabeça?*

— *Se ela voasse mais devagar, poderia apanhá-la. Deveria arrumá-la também. Ela está na minha proximidade.*

Cristina delimitou intuitivamente a sua proximidade. São todos os pontos que se encontram no interior da esfera que tem por raio o comprimento do seu braço.

Verificamos que a exploração da proximidade permite determinar a posição relativa dos seus pontos. A criança pode assim precisar e aprofundar o seu conhecimento de termos tais como:

Sobre — sob — à esquerda — à direita — diante de — atrás de — no interior — no exterior — em cima de — debaixo de — etc.



A professora diz a Brígida, que está perto do quadro:

— *Tu estás a falar muito alto, Brígida! Quem pretendes tu que te ouça?*

— *Eu falo aos meus colegas que estão de pé junto do quadro.*

— *Tu pretendes, sem dúvida, falar também com André que está do outro lado da parede, no corredor?*

— Oh! não! Eu não posso falar com André, ele não me ouviria. Seria necessário que eu estivesse perto da porta, que ele me ouvisse!

Olivier:

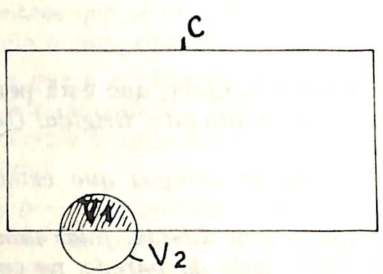
— Seria necessário mesmo que a porta estivesse aberta. Se a porta estivesse aberta, André estaria próximo, mas se a porta estiver fechada, André já não estará próximo.

Olivier experimentou desenhar as diferentes proximidades. Desenhou primeiro a proximidade mais fácil, a de Cristina. Em seguida, representou a vizinhança de Eurico, quando este de encontrava perto da saída da aula.

Eurico tem duas proximidades, consoante a porta esteja aberta ou fechada. Com o auxílio do exemplo de Eurico, concluiu que Brígida também tem duas proximidades:

— A proximidade de Brígida, enquanto a parede existe;
— A proximidade de Brígida se a parede não existisse.

Surge, além disso, uma relação entre as duas proximidades, que o desenho embora esquemático, põe em evidência:



A proximidade de Eurico com a porta é igual à intersecção da proximidade de Eurico sem a porta da aula.

Sejam:
C o conjunto dos pontos da aula.
V1 a proximidade de Eurico com a porta.
V2 a proximidade de Eurico sem a porta.
Temos: $V1 = C \cap V2$.

Conjunto aberto, conjunto fechado:

Num passeio, chegámos a um prado vedado. Guy explica:

— Para mim, o prado está aberto, não está fechado, porque posso passar a quatro patas por baixo do arame.
— No entanto, para as vacas, está fechado, rectifica Fabião.

— Para nós, o prado está aberto, para as vacas está fechado.

No fim do passeio encontrámos a porta da aula fechada à chave.

— E agora, Guy, podes entrar?
— Não, a aula está fechada e as paredes impedem-me de entrar.

No prado, pudemos passar a vedação. Para entrar na aula é preciso ter as paredes em conta.

Conjunto nem aberto, nem fechado:

Brinca-se aos polícias e ladrões. Quando um ladrão é apanhado, é levado para a prisão. A prisão é o caixote de areia.

João Lucas foi apanhado, conduzido para a prisão, mas fugiu.

— *Tu não tens o direito de fugir da prisão!*

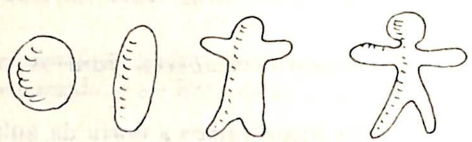
— *Mas esta prisão não tem muros! Quando me levaram para lá, não tinha muros!*

— *Sim, mas agora, há um muro! Tu não podes fugir!*

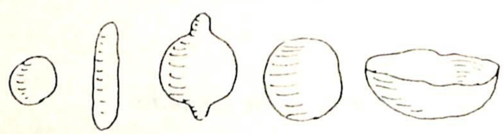
A prisão aberta quando se quer entrar nela, fechada quando dela se quer sair, não está aberta, nem fechada.

Continuidade:

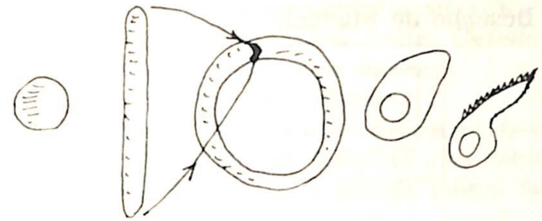
Eis, realizadas por algumas crianças, a partir de uma bola de terra, transformações contínuas, bijectivas, chamadas homeomorfismos. Elas ilustram esta divertida citação: *«Um topologista é um matemático que não sabe distinguir um colete de salvação de uma chávena de café.»*



A transformação de Olivier: o boneco e a bola são *«topologicamente equivalentes»*.



A transformação de Régis: *equivalência topológica entre o cesto e a bola.*

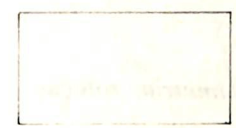


A transformação acima não é um homeomorfismo, porque a colagem impede que a transformação seja bijectiva.

Formas geométricas

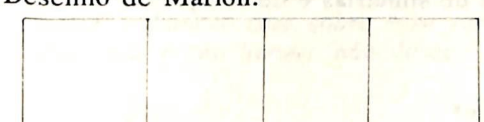
Doménica fala-nos das paredes do seu quarto. Tentamos desenhá-los observando as paredes da sala de aula. Em seguida, critica-se cada desenho.

João Miguel representou cada parede por uma linha, ou seja:



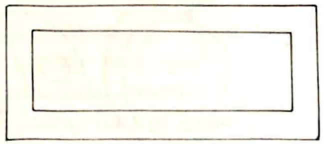
— Uma parede não é uma linha, é um plano.

Desenho de Marion:



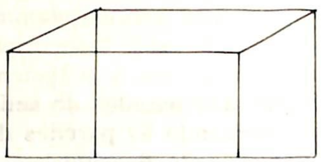
As quatro paredes estão representadas em superfície, mas a aula já não tem a sua forma.

Desenho de Manuel:



As quatro paredes estão representadas em espessura, mas a espessura não se vê.

Desenho de Sílvia:



Tenta dar a profundidade (3.ª dimensão) por um desenho que tem a forma de um cubo.

Após a discussão, é este o adoptado.

B) Deslocamentos, simetria, rotação

Só depois de ter abordado mais ou menos intuitivamente estas noções topológicas, é que a criança se interessa pelos movimentos que transformam as coisas. Abordaremos, assim, após o estudo de diversas deslocações, as noções de simetrias e de rotações.

Deslocações

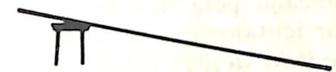
A educação corporal será de grande utilidade para a aprendizagem destes conceitos, mas não se deve parar numa tomada de consciência intuitiva do conceito, será

necessário experimentar representar a situação, a acção, o movimento, simbolizá-lo. Alain conta: *Ontem, desci a duna de Pyla rolando como uma barrica.*

O professor: *Mostra como fizeste.*

Alain: *Não posso, não há aqui nenhuma duna.*

Recriamos a situação, por meio de uma tábua. Fazemos um plano inclinado com o grande painel de cálculo e o banco.

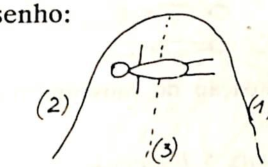


Eurico diz a Alain: *A duna é mais inclinada mas isto deve servir; sobe e rola.* (Noção de inclinação.)

A experiência tem êxito. Alain refaz o seu «rolar como uma barrica».

Tentamos desenhar isto para os correspondentes (*).

1.º desenho:



Crítica:

— *Ele não está na vertente. A vertente fica ali* (1).

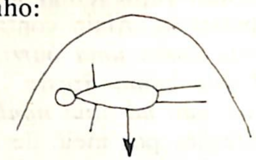
— *Ou ali* (2).

Alain: *A vertente está por toda a parte, excepto em cima e em baixo; o boneco está sobre essa vertente* (3).

Eurico: *Sim, mas o teu boneco não desce.*

(*) Nas escolas que utilizam o método Freinet utiliza-se correntemente a correspondência com outras escolas. — *(N. do T.)*

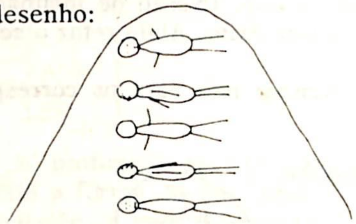
2.º desenho:



Crítica:

— *Ele desce mas não rebola, desliza* (tentamos fazer o movimento indicado pela flecha). Alain refaz o movimento de rebolar lentamente, dizendo: *Estou deitado de costas, depois de lado, depois sobre o ventre, depois sobre o lado esquerdo, depois de costas.*

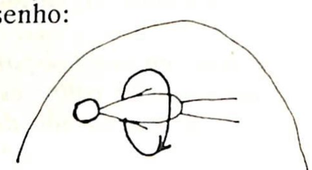
3.º desenho:



(decomposição do movimento)

Crítica:
— *Sim, mas tu tens 5 bonecos.*
— *Mas é o mesmo que rebola: ele faz isto* (gesto).
O professor: *Mostra-o com uma seta.*

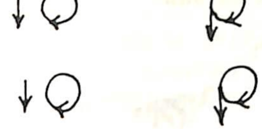
4.º desenho:



Crítica:

— *Sim, ele rebola, mas não desce. São necessárias duas setas.*

Daí resultam diversos ensaios acompanhados de gestos.

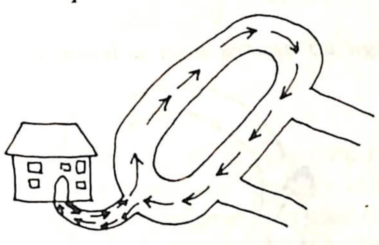


São necessárias 2 ao mesmo tempo. Finalmente Patrício descobre:

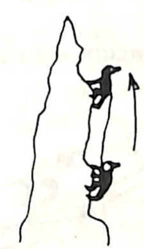
Nota: Este exemplo foi escolhido porque aborda várias noções. Foi realizado no fim do ano escolar (mês de Maio).

Eis algumas deslocações desenhadas pelas crianças:

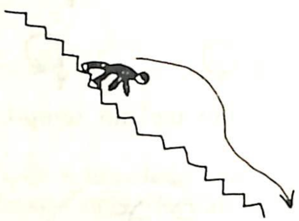
Fomos dar um passeio:



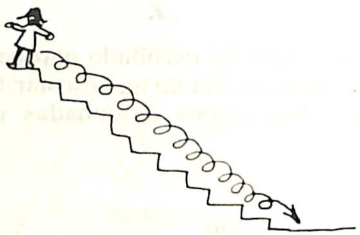
João desejaria ser alpinista:



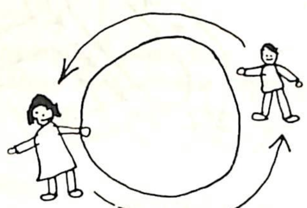
Pascoal caiu da escada:



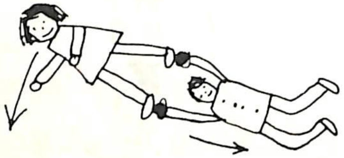
Ana rolou pelas escadas abaixo:



António joga ao agarra com a irmã à volta da mesa:



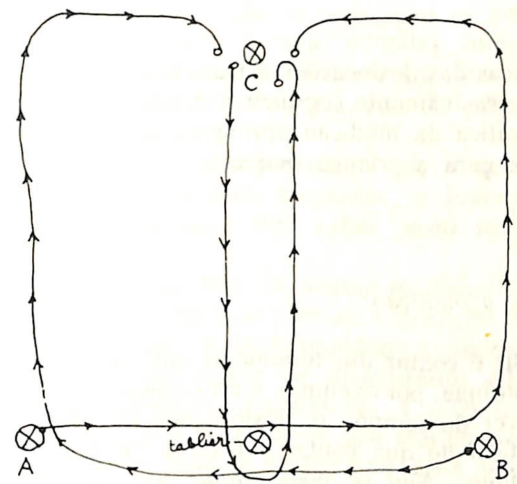
Manuel e o irmão brincam «aos crocodilos» com as suas irmãs:



Simetrias

Segundo uma música muito conhecida, inventámos uma deslocação: estávamos repartidos em 3 grupos.

Eis o plano da nossa deslocação:



3 pontos de partida, A, B, C. Os três grupos partem juntos. Encontram-se todos, ao mesmo tempo, no mostrador; depois o grupo A dirige-se para B, o grupo B para A, o grupo C volta para trás e encontram-se todos ao mesmo tempo em C.

As crianças não empregaram os termos A, B, C. Souberam somente traçar setas, dispor bem os pontos de partida e, com uma pequena explicação (para substituir os A, B, C) os correspondentes souberam compreender o nosso trabalho.

As transformações geométricas são bem esboçadas pelos alunos da 1.ª classe. Encontramos mesmo esboços de composição das transformações. Das géneses ulteriores descrever-se-ão mais precisamente os começos e tentativas neste sector das matemáticas.

C) A prática da medição

Devemos salientar que o estudo das propriedades topológicas das deslocações e transformações geométricas vai progressivamente conduzir à medição.

A prática da medição apresenta uma dificuldade importante para a criança pequena.

O que é a medição?

Medir é contar um fenómeno que varia de uma maneira contínua, por exemplo, o crescimento de uma planta, o decorrer do tempo, as deslocações no espaço. É bem menos fácil do que contar carneiros ou berlindes (facto descontínuo). *Não se pode medir uma quantidade que varia de maneira contínua a não ser que se tome uma unidade referencial e que se meça o crescimento, a duração, a distância em função desta referência, que é então chamada unidade de medida.*

Portanto, é necessário que a criança descubra o conceito de medida e só o pode fazer por tentativas múltiplas.

Medir não é tomar um metro e dizer que o pátio tem 12 m de comprimento e 6 m de largura, é descobrir que, para medir o pátio, é necessário tomar uma medida unitária padrão. Quer seja a caixa de fósforos, o pé, o polegar ou o metro, mede-se sempre em relação a outra coisa. Medir, não é somente medir distâncias, medem-se pesos, o tempo, a capacidade.

O conceito de medida só pode ser abordado na 1. classe, mas é necessário que, desde a mais tenra idade,

a criança tenha ocasião de fazer múltiplas experiências. Só após um longo ensaio, após múltiplas avaliações ela saberá medir.

Comprimentos:

— *Se medíssemos a sala de aula para os correspondentes?*

— *Sim, mas precisamos de metros e nós não os temos.*

As crianças medem com os pés. *Ivo: 35 pés, Eurico: 41, Nadine: 37, Maria: 40.*

Uns descobrem ou compreendem que o que contou mais pés tem os pés mais pequenos, e inversamente.

— *Os correspondentes irão saber como são os pés de Ivo?*

— *É preciso enviar-lhes as nossas medidas.*

Em seguida, resolve proceder-se à medição por meio de alguma coisa que os correspondentes pudessem ter na sua sala de aula; depois de discutirmos, adoptámos as BTJ (*). As crianças dispõem-nas a todo o comprimento da sala de aula. Verifica-se que não chegam. Cristina propõe retirar tudo e medir com uma única BTJ, fazendo marcas a giz. Recusa do grupo, que prefere levantar as primeiras BTJ utilizadas e contá-las na sequência das 27 já contadas.

A sala de aula mede 35 BTJ, colocadas a todo o comprimento.

Verificamos que foram, primeiramente, utilizadas várias referências, as pegadas, depois, por necessidade de comunicação, conservou-se apenas uma.

Encontram-se, aliás, outras dificuldades na prática da medição na 1.ª classe:

(*) Fichas de trabalho. — *(N. do T.)*

— Dificuldade de conceber o ponto marcado O como a origem da medição;
— Dificuldade em conceber comprimentos como equivalentes, enquanto têm a mesma medida, etc.

Pesos:

Interessante também a maneira como os alunos da 1.ª classe utilizam a balança para comparar os pesos dos objectos (ou melhor, a sua massa). Utilizam, em geral, um método de aproximações sucessivas. Por exemplo:

Filipe decide classificar as pedras da colecção; ele diz: *Vou fazer 2 montes: grandes e pequenas.*

Filipe toma uma pedra em cada mão e toma-lhes o peso (avalia o seu peso) depois coloca a que achou mais pesada no monte das «grandes» e a outra no monte das «pequenas», depois agarra noutras duas pedras.

Régis diz que seria mais certo se ele usasse a balança. Filipe procede da seguinte maneira:

2 conjuntos: as grandes (pesado) *a*, as pequenas (leve) *b*. Pega em 2 pedras, coloca-as sobre cada um dos pratos e diz: *O prato que baixa tem a grande,* e coloca-a em *a*. *O prato que levanta tem a pequena* e coloca-a em *b*, etc.

Constatação após a experiência:
Em *a* há pedras de todos os tamanhos (peso).
Passa-se a mesma coisa em *b*.

Verificação de Régis. Constatação do insucesso. É o processo que não serve, donde as diversas tentativas de vários alunos.

João Luís diz: *Eu vou deixar a pedra azul sobre o prato.*

Experimenta as pedras que ele julga menos pesadas que a pedra azul e faz o conjunto das menos pesadas que a azul. Mas quando lhe surge uma pedra mais pesada, ele tira a azul e coloca esta no conjunto das menos pesadas.

Continua a proceder dessa maneira e fica muito espantado, quando, no final, se lhe depara o mesmo conjunto de início.

Mas a tentativa de João Luís prepara a de Malik. Este diz:

— *É preciso deixar a mesma pedra sobre o prato, até chegar ao fim. Em* a *coloco todas as pedras mais pesadas que a azul e em* b *coloco as menos pesadas que a azul.*

No final, Malik coloca a pedra azul entre os 2 conjuntos.

2.ª PARTE

PRIMEIRA EXPERIÊNCIA DE MATEMÁTICA LIVRE NO 2.º ANO

Paul le Bohec

ADVERTÊNCIA

«Freinet solicitou-me que reservasse a relação da minha expedição matemática na 2.ª classe para os "Documentos do Instituto".

Sinto-me contente pela escolha desta publicação um pouco confidencial, pois nela posso expor sem desvios nem precauções tudo o que realizámos ao longo do ano. Do ponto de vista da matemática pura, sem dúvida que o meu trabalho tem alguns erros. Tranquilizemo-nos: haverá sempre erros... ou insuficiências.

Mas, em minha opinião, é primeiramente, do ponto de vista pedagógico que se deve raciocinar com justeza. O resto virá por si só. E saberemos, um dia, adquirir um nível matemático aceitável.

Mas a aquisição de uma cultura pedagógica das matemáticas será mais laboriosa porque, segundo a nova concepção, poucas foram as pessoas que progrediram e não podemos esperar grande ajuda de ninguém.

É por isso que submeto a minha tentativa à vossa apreciação. Se dela exalasse um perfume de verdade pedagógica suficientemente grande para que sentissem a necessidade de se constituírem em equipas, eu teria atingido o meu objectivo.

E desejo-o.

Peço desculpa da rapidez de redacção deste relato da minha experiência. Mas temos pressa. Dessa maneira poderá ser útil.

Verificareis também que insisto e torno a insistir, bastante e repetidas vezes nas mesmas teclas. É que encontrei resistências e tenho a tentação da demonstração. Será, no entanto, preciso que cada um faça a sua redescoberta.

Coragem.»

Eis o que escrevi há três anos. Soube depois, que, tal como havia sido apresentada, a minha brochura tinha prestado certos serviços. Ainda agora parece poder ser útil. No entanto, ao relê-la, encontro-a enfermada de um defeito grande: está ultrapassada. Apesar disso, creio poder difundi-la de novo. Com efeito, ela introduz poucos termos novos. E isso parece-me ser uma qualidade, pois os livros que se encontram no mercado estão de tal modo sobrecarregados de símbolos que o leitor depressa se sente desencorajado, o que produz bloqueios muito lamentáveis. Sendo os termos novos pouco numerosos, eles serão mais facilmente assimiláveis, tanto mais quanto estiverem ligados de um modo contínuo à vida. É por esta razão que, apesar deste meu desejo de rejuvenescimento, farei poucas correcções ao texto inicial.

Mas o leitor que seja perseverante e vá até ao fim e que queira um suplemento de informação, encontra uma alimentação mais densa na segunda experiência. É muito recente, posto que data do primeiro trimestre de 1968-1969. Tentarei ajustar aí a linguagem moderna.

O essencial, a meu ver, para esta brochura, é estar bem integrada na vida e na psicologia das crianças e dos professores.

P. LE BOHEC

MATERIAL CUISENAIRE

Se bem que a ordem cronológica não seja extremamente importante, começo pelo material Cuisenaire. Talvez para não ter que voltar a fazer-lhe referência. Antes do começo das aulas, tive nas mãos o livro de Madaleine Goutard *As Matemáticas e as Crianças* que vários camaradas me tinham recomendado. Este livro havia-me interessado. Com efeito, as reflexões pedagógicas do autor agradavam-me, se bem que, à luz da experiência da Escola Moderna, eu sentisse que elas ficavam aquém do que poderíamos esperar.

O que igualmente me agradou, foi a promessa de resultados rápidos, notáveis e até mesmo surpreendentes. Não é que eu alguma vez tenha sido tentado pela procura do espectacular por si próprio. Somente o espectacular que encontra uma realidade profunda pode ser aceite. Não é necessário rejeitá-lo por sistema: pode ser um auxiliar para o avanço das ideias. Da surpresa pode surgir o interesse e a compreensão, desde que as ideias tenham valor bastante.

Devo reconhecer que, para levar a cabo a experiência que queria tentar, não poderia negligenciar nenhum elemento de segurança.

E, se alguns dos meus possíveis oponentes não foram suficientemente perspicazes para se admirarem com os resultados inesperados, não fiquei a perder, no plano da diminuição das minhas angústias preliminares.

Mas, independentemente destes resultados que podiam contribuir para alimentar a minha segurança e a minha audácia, felicito-me de poder abordar um pouco mais, com Madeleine Goutard, o campo das matemáticas modernas sobre as quais eu sentia que nunca viria a saber o suficiente.

Portanto, lancei um apelo a um camarada bem colocado que me emprestou 5 caixas, o que veio a revelar-se suficiente. E no último dia de férias vi-me, de serrote na mão a construir, a toda a pressa, um material colectivo em contraplacado, no qual a unidade tinha o valor de um decímetro quadrado em vez de um centímetro cúbico.

Com este material, decidi praticar uma pedagogia da invenção e da descoberta, ou, se se preferir, uma pedagogia «a posteriori».

Evidentemente que não dava aula nenhuma. Examinávamos simplesmente em conjunto, quer com o material individual, quer com o material colectivo, as criações de cada um. E, a pouco e pouco, íamos progredindo.

O que me parece interessante, é que os números não surgiram no princípio. Com efeito, com o auxílio do simbolismo que se segue, fomos capazes de escrever todas as igualdades e desigualdades que queríamos. Para facilitar a compreensão, dou também o valor em cm^3, o que não fizemos; pelo menos, no início.

1	2	3	4	5
branco	encarnado	verde	rosa	amarelo
b	e	v	r	a

6	7	8	9	10
verde escuro	preto	castanho	azul	laranja
V	p	c	A	l

Para ulteriores explicações, podem consultar o livro de Madeleine Goutard.

INVENÇÃO DE SINAIS E DE ALGARISMOS

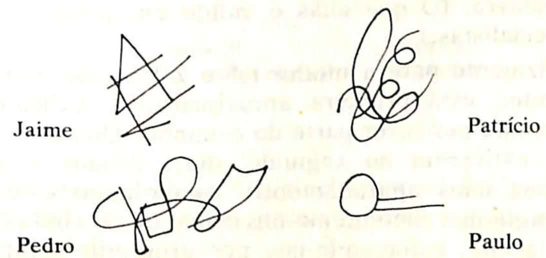
Sinais

No início, deparámos com igualdades do tipo: amarelo + + rosa = azul (5+4=9). Dou a tradução numérica para vos facilitar a compreensão, mas relembro que os números nessa altura não intervinham.

Mas como escrever que o amarelo acrescentado ao rosa tem um comprimento idêntico ao da régua azul? Para o sinal +, não houve necessidade de procurar um, porque este sinal era conhecido desde a 1.ª classe. Conhecido e até assimilado, porque faz parte da vida corrente.

Para «igual», «inventámos» um sinal. Com efeito, para nós, é a classe que inventa os sinais de que necessita para evitar a fadiga e avançar mais depressa. As crianças compreendem muito bem esta preocupação de ganhar tempo e são as primeiras a proporem economias de tempo: não é a isso, em grande parte, que se chama matematizar?

Para o sinal «tão comprido como» tivemos de escolher entre:



Pouco a pouco, levei-os a preferir o sinal de Paulo. Porquê?

— *Porque é mais simples.*
— *Não seria possível simplificá-lo ainda mais?*
— *Sim, conservando somente a parte redonda.*
— *Ou ainda?*
— *Suprimindo a parte redonda.*
As crianças disseram:
— *Este sinal quer dizer «semelhante».*
— *Ou ainda?*
— *Igual. Mas já o conhecíamos.*
— *Sim, conheciam. Mas acabaram de o reinventar.*

Eu pretendia, por razões de comunicação com o resto da sociedade, fazê-los adoptar o sinal e a palavra usuais. Na escola infantil, como as coisas contam mais do que os sinais e como não se tem pressa, talvez tivesse aceite que se gastasse mais tempo com as criações escritas e faladas das crianças. Mas na 2.ª classe pelo menos por essa razão, eu não o podia fazer.

No entanto, as crianças viram, ao menos, que os sinais e as palavras eram criações humanas e que não haviam nascido do nada ou caído do céu.

A propósito desta igualdade a+R=A, e, a propósito de tudo, deveria temer os matemáticos. Com efeito, ao frequentá-los um pouco, apercebi-me de que punham tudo em causa. Mesmo as coisas mais simples. Por pouco, ficaríamos paralisados, a ponto de não mais poder proferir uma palavra. (O que aliás é válido em relação a todos os especialistas.)

Felizmente para a minha 1.ª e 2.ª classe, bem como para mim, esta primeira aproximação é suficiente. Já nos permite percorrer parte do caminho. Quando os meus alunos estiverem no segundo ano, viremos a analisar as coisas mais apuradamente. Aguardando este futuro bem longínquo, contentemo-nos com o que é ainda comummente aceite, esforçando-nos por progredir sempre que

pudermos, com o auxílio dos professores de matemática, que encontrarão em nós gente da melhor boa vontade.

Precisamos também de encontrar um sinal para exprimir:

«há uma diferença entre»

Obtivemos:

Jaime
(demasiado longo)

Robin
(parecido com laranja=0)

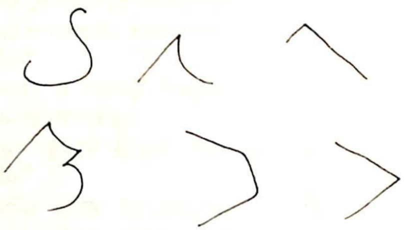
Patrício
(parecido com S)

Jaime II
(muito bom, muito rápido)

Patrício
(perfeito)

Procurámos também um sinal para as desigualdades e, por acaso, as invenções giravam todas à volta do sinal oficial.

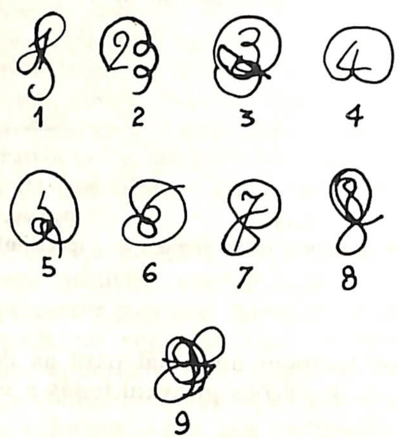
Partindo da boca que se abria para o lado em que se encontrava o bolo maior, as crianças fixaram muito bem este sinal.



Para a multiplicação e divisão, obtivemos os símbolos clássicos.

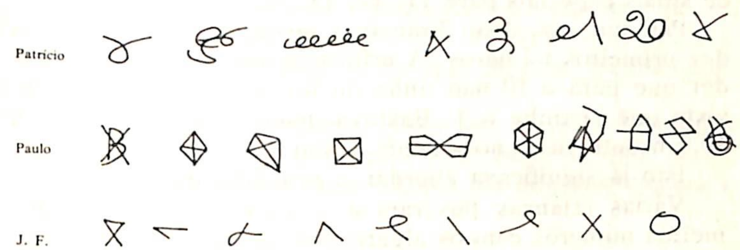
Algarismos

E, como se pode esperar tudo, encontrei, um dia, no caderno de exercícios de Jaime, a criação seguinte:



Os seus algarismos derivavam dos algarismos árabes. As outras crianças notaram-no, depois, durante alguns momentos, só fizeram o mesmo.

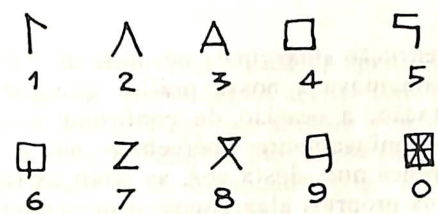
Eis algumas das suas criações (os primeiros números):



Lamento apresentar aqui apenas alguns testemunhos desta pesquisa, desta criação intensa de algarismos.

Havíamos chegado a uma conclusão de um nível bastante elevado, posto que tínhamos descoberto que os bons sinais deviam ser rápidos, bonitos e, sobretudo, diferentes.

Então, cada um dos dez alunos da 2.ª classe contribuiu com um algarismo e, assim, obtivemos os «algarismos» da classe. Ei-los:



A partir daí, abrem-se inúmeras perspectivas.

Observámos os algarismos árabes e concluímos em seu favor: são rápidos, bonitos e diferentes, desde que bem feitos. Sim, a humanidade fez bem em os adoptar.

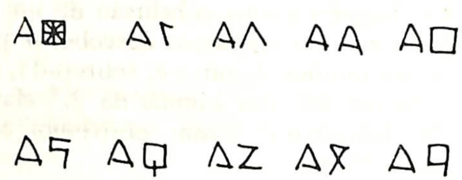
Patrício afastou-se da via comum. Quis exagerar: inventou vinte algarismos diferentes para os 20 primeiros números.

Mas a crítica da classe fez-lhe compreender que, se já tinha inventado 1, 2, 3, etc., não havia necessidade de sinais especiais para 11, 12, 13, etc.

Por sua vez, João Francisco inventou sinais para os dez primeiros números. A crítica permitiu-lhe compreender que para o 10 não tinha de inventar um sinal novo, visto que já tinha o *1*. Bastava inventar o zero. No seu 10, encontrava-se novamente o seu *1*.

Isto já significava abordar o princípio da numeração.

Várias crianças puseram-se a escrever os cem primeiros números com os algarismos da classe. E isso permitiu-nos tomar consciência do papel que desempenhava o algarismo das dezenas, papel perfeitamente sublinhado, por exemplo, na casa dos trinta.

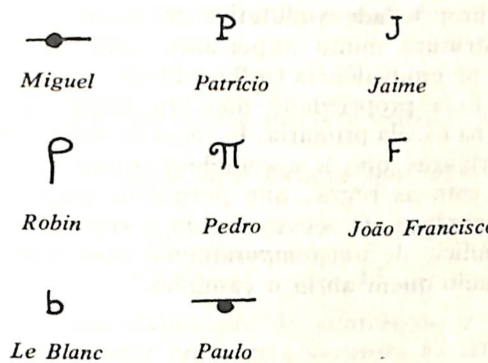


Esta construção «marginal» permitia descobrir em que lei se fundamentava a nossa prática quotidiana. E era, por comparação, a ocasião de confirmar o que apenas havia sido confusamente apercebido no ano anterior. Com a diferença que, desta vez, as crianças raciocinavam sobre os seus próprios algarismos; o que, evidentemente, era mais atractivo e permitia olhar de uma maneira nova as coisas antigas.

Esta actividade de simbolização, tão excitante para o espírito, parece-me muito interessante e até indispensável. Por tentativa experimental, a criança é capaz de compreender esta actividade, porque é simbolizando

que nos tornamos simbolizadores. Se a criança estiver bem treinada, não sentirá complexo algum perante os símbolos dos outros. E isso parece-me de importância capital, pois são muitas vezes os símbolos que se encontram na origem dos bloqueios em matemática: apresentam-se, muitas vezes, de enfiada e empurram-se uns aos outros, sem se esperar que tenham sido aceites os primeiros. Desse modo, a tarefa de ordenação acha-se rapidamente ultrapassada.

É necessário, portanto, proceder a uma desmistificação dos símbolos. Com esse fim, escrevo, por vezes, no quadro, a lista dos meus alunos, da seguinte maneira:



Acabamos de ver, através deste primeiro exemplo de criação de sinais, que podemos aceitar tudo das crianças e que as suas invenções quase sempre permitem a descoberta de noções e campos interessantes.

Mas regressemos ao Cuisenaire e às estruturas que ele nos permitiu descobrir.

Propriedade comutativa

É muito fácil de verificar com as réguas. Vejamos duas criações de Patrício:

A propriedade comutativa da multiplicação também é facilmente verificável por sobreposição: 3 parcelas de 4:

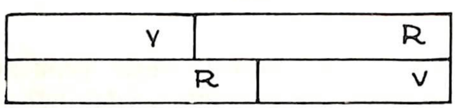
$$a+a+l+a+l=l+a+a+l+a.$$
$$a+R+b=R+b+a.$$

(3 R) substituem perfeitamente 4 parcelas de 3 (4v).

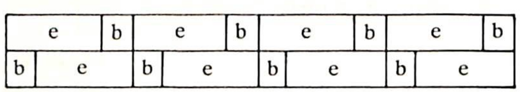
Verificamos consequentemente que $v \times R = R \times v$.

Simetria

É uma propriedade comutativa um pouco mais restrita. É uma estrutura muito importante: entra na definição da relação de equivalência (reflexividade, *simetria*, transitividade). Esta propriedade não era sequer assinalada, até agora, na escola primária. E, todavia, ela é muito acessível às crianças que a apreendem muito rapidamente: sobretudo com as regras que permitem uma descoberta quase instantânea. O acesso rápido à simetria é, muitas vezes, o indício de um temperamento matemático. Entre nós, foi Paulo quem abriu o caminho.



$$R+v=v+R$$



$$e+b+e+b+e+b+e+b =$$
$$b+e+b+e+b+e+b+e$$

Há também a simetria dos membros de uma igualdade. São então necessárias duas igualdades para a exprimir.

$$l+c=A+e+p$$
$$A+e+p=l+c$$

Naturalmente, o que se verificará frequentemente com a continuação, as crianças retomam sempre na vida as estruturas criadas abstractamente.

Assim uma criança diz-nos: «*Ontem, o pai tinha mais caranguejo no prato do que a mãe. Por isso, ele deu um pouco à mãe. E desta vez, era a mãe quem tinha mais.*» E eu disse:

— *A segunda é simétrica da primeira.*

Propriedade não comutativa da subtracção e divisão

Com a continuação descobriu-se que 10—1 era diferente de 1—10 e

$$\frac{10}{2} \text{ diferente de } \frac{2}{10}$$

Esta não comutatividade da subtracção e da divisão não deixa de causar uma certa surpresa às crianças.

A não comutatividade intervém também nas relações de ordem: não se pode escrever indiferentemente

$$A > p \quad \text{e} \quad p > A$$

Se se quiser inverter as letras, será necessário inverter também o sinal.

$$A > p \quad \longleftrightarrow \quad p < A$$

Propriedade associativa

Outra estrutura importante. Enquadra-se na definição do grupo comutativo (associação - neutro - inverso - comutatividade). Tem aplicações imediatas no plano do cálculo, sobretudo quando está associada à comutatividade.

Para nós, derivou muito naturalmente da igualdade referência de Remi.

$$e+b+e+b+e+b+e+b=$$
$$=b+e+b+e+b+e+b+e$$

De passagem quero assinalar que esta criação de Remi foi uma revelação. Todas as crianças da aula a tornaram a fazer: para o prazer da vista, parece (encarnado-branco, encarnado-branco...). E quando todas as crianças aceitam a criação de um colega, isso significa que a apreciaram verdadeiramente.

Encontrava-se $e+b$ (ou $b+e$) em todos. Disse que se tratava de um par, como os pares que dançam nos bailes.

Formaram-se pares: 1 criança da 2.ª classe, 1 criança da 1.ª classe e dançaram. O ruído, os risos, a dança: nada melhor para compreender uma estrutura. Já se está para além de Cuisinaire; é um apelo à vida. E a alegria penetra, será um sentimento que fixará a noção.

Para distinguir os pares uns dos outros, será preciso separá-los uns dos outros.

Aqui estão algumas invenções:

$$e+b \qquad \boxed{r + b}$$

$$< e+b > \qquad (e+b)$$

Passo a passo, conduzi as crianças aos parêntesis mais económicos, mais práticos e, sobretudo, já experimentados.

Desse modo, obtive invenções da forma:

$$(e+b)+(e+b)+(e+b)+(e+b)=v+v+v+v.$$

Propriedade transitiva

O que se deduz rapidamente com as réguas é que se se tiver $a \div a=b$ e $b=c$, poder-se-á concluir que $a=c$.

Exemplo: $V+R=l$

e $l=v+p$

ou seja $V+R=v+p$

Cálculo aritmético

Surgiu de imediato. Com efeito, muito rapidamente as crianças descobriram os números passando pelas unidades: os pequenos brancos (b)

$50=50$ b $\qquad 60=60$ b $\qquad 4$ a$=20$ b

Revelaram interesse pelo cardinal da colecção.

E evidentemente que reencontrámos nos números o que havíamos descoberto com as réguas.

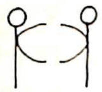
Entretanto, na aula de ginástica, eu havia notado a criação seguinte:

«Duas crianças estavam de mãos dadas. Uma terceira criança disse: "agora eu" e tomou o lugar de uma delas.»

É evidente que exultei perante uma tão maravilhosa ocasião que materializava e confirmava tão bem o que, de manhã, havíamos descoberto. E víamos com Pascoal (P), Cristiano (C) e Remi (R) que, inicialmente, se tinha o par $(P+C)$ e R chegara depois.

Passava-se então de $(P+C)+R$ a $P+C+R$ quando P e C largaram as mãos, depois tínhamos $P+R+C$, depois $(P+R)+C$, quando P e R deram as mãos. Tínhamos passado assim de $(P+C)+R$ a $(P+R)+C$ *(Propriedade associativa).*

Este jogo constituía uma referência excelente, tanto mais que o pequeno Robin declarou que os braços que se davam para isolar o par eram os parêntesis.



Foi a partir desse instante que deu à aula a loucura do cálculo e, durante uns dias, não se pensou noutra coisa. Aliás, com minha grande satisfação, pois contribuía para o alívio das minhas angústias possíveis, ou seja, as minhas preocupações de cálculo.

Assim, sem concessão nenhuma, sem nunca ter dirigido, sempre aceitando tudo, acabámos por cair na matéria do programa obrigatório. Aliás, pode ter-se confiança, pois as crianças amam os números e chegam a eles espontaneamente.

Cristiano era o mais obstinado: enquanto os seus companheiros andavam à volta disto e daquilo, enchia as páginas do seu caderno com impressionantes séries de igualdades.

Eis apenas algumas:

$$5 + 5 + 4 + 2 = 16$$
$$8 + 2 + 4 + 1 = 15$$
$$1 + 16 + 8 = 25$$
$$18 + 16 + 20 + 10 = 64$$

Pouco a pouco, como que por magia, toda a assistência foi tomada desse frenesim.

No quadro, examinámos as adições propostas e descobrimos os pares interessantes. Neste trabalho, Pedro era o rei... Foi, além disso, nesta ocasião, que Pedro se revelou um pequeno matemático.

(Pedro distingue-se, sobretudo, pelo facto de criar pouco; mas excede-se na crítica, melhor dizendo, na observação dos factos, na análise.)

Eis os exemplos que obtivemos:

$$3 + 1 + 8 + 4 + 7 + 2 = 25$$

ou:

$$2 + 3 + 4 + 10 + 1 + 2 + 5 = 27$$

$$2 + 3 \qquad + 5$$
$$10 +$$
$$4 + \qquad + 1$$
$$+ 2$$

Às vezes, são os trios que se revelam interessantes.

$$4 + 2 + 6 + 4 + 3 + 1$$
$$(4 + 2 + \quad 4) + (6 + 3 + 1) = 20$$

Ou ainda:

$$7 + 7 + 4 + 9 + 5$$
$$7 + (7 + 4 + 9) + 5$$
$$(7 + 5) + 20 = 32$$

Que se poderia ter escrito assim:

$$7 + 7 + 9 + 9 = 2\,(7 + 9) = 32$$

Em face de uma adição proposta interrogávamo-nos qual seria a solução mais rendosa, mais económica, mais elegante. Que ginástica! Que prazer!

Houve também um grande período de ensaio para o cálculo aritmético. Não só se descobriram as propriedades associativa e comutativa mas também se passou à fase seguinte da experiência, ou seja, à repetição para a integração. Ou, para empregar a linguagem prática das minhas crianças: fomos arrastados. E não nos termos contentado em descobrir, mas em ter também integrado a associatividade e a comutatividade, eis o que era verdadeiramente novo.

OPERAÇÕES

Comecei a falar de operações. Vou continuar, porque estou a falar de réguas Cuisinaire, que tão úteis nos foram neste campo.

Eu próprio fiz inúmeras descobertas. Um pouco acerca da adição. Mas foi sobretudo a adição que mais me fez reflectir.

Preciso relatar esta aventura.

Um dia, no caderno de Pedro, encontrei: 2 l=3 p, o que significa:

2 réguas de 10=3 réguas de 7.

Evidentemente que a classe protestou.

E Pedro foi o primeiro a rir do seu erro.

Com as réguas, verificámos que, para obter 3 pretos, são necessários 2 laranja mais um 1 branco.

3 preto=2 l+1 b (21=20+1)

E verificámos também que, se se pusessem 2 laranja ao lado de 3 preto, havia uma diferença que se exprimia «começando pelo maior», da seguinte maneira:

3 p—2 l=1 b (21—20=1)

Reescrevemo-las para bem isolar as quantidades

3 p = 2 l + 1 b
1 b = 3 p — 2 l

Restava a terceira quantidade: 2 l.

Tínhamos, com 2 l:

$$2\,l = 3\,p - 1\,b$$

Isto já foi mais dificilmente aceite.

— *Ah! não senhor, isso não é igual!*

E, todavia, quando Pedro, que havia compreendido, colocava um branco *sobre* a extremidade do terceiro preto para apagar o último centímetro quadrado, era bem igual.

Então, tínhamos:	Tradução:
$3\,p = 2\,l + 1\,b$	$21 = 20 + 1$
$1\,b = 3\,p - 2\,l$	$1 = 21 - 20$
$2\,l = 3\,p - 1\,b$	$20 = 21 - 1$

Poderiam reprovar-me ter tomado estas duas reguazitas laranja e estas três pretas para fazer esta demonstração. Com uma reguazita de cada cor, teria sido até mais simples, mais nítido, mais fácil.

Pois bem, não fiz nenhuma demonstração.

E não fui eu quem escolheu estas réguas: limitei-me a aceitá-las. É aí que a descoberta, a tomada de consciência da existência dessas 3 igualdades se insere. Já não era, portanto, possível transpor, porque essa era a nossa única referência. Se eu tivesse tentado introduzir uma segunda referência mais conforme aos meus desejos de clareza, teria lançado a confusão. Uma referência deve ser bem sólida, bem firme: devemos poder basear-nos, apoiarmo-nos nela. Posto que fora sobre este acidente matemático, que deu que falar, que se baseou tudo o que contribuiu para o fixar na memória: o erro de Pedro, a cara que ele fazia, os risos, os protestos, a recusa, a discussão e finalmente a aceitação — e também a simplicidade da construção destas três igualdades por isolamento sucessivo de cada um dos três termos — eu já não podia modificar nada.

Progredi pedagogicamente, quando compreendi que, para a classe, a melhor referência não era a referência mais bonita que o meu espírito adulto poderia ter gostado de oferecer às crianças, mas a primeira que se apresentava. Porque é o acontecimento que fixa, é o acaso que surpreende e interessa. No presente caso, creio que um dos elementos determinantes da fixação foi a discussão que se seguiu à recusa da última igualdade.

Mas voltemos às nossas três igualdades.

Já muitas vezes notara nos recentes livros de matemática

$$a - b = c \longleftrightarrow a = b + c$$

Mas nunca prestara muita atenção à segunda parte, porque isso não se usava no meu tempo de escola.

Na realidade, há uma terceira igualdade.

$$a - c = b$$

Temos a trilogia:

$$a = b + c \ ; \ b = a - c \ ; \ c = a - b$$

O que já sabeis talvez há bastante tempo. Têm sorte! Eu só agora, aos 45 anos, a descubro. Que vergonha!

E porque me demorei um pouco neste ponto, compreendo agora o erro de alguns dos meus alunos.

Verifiquemos, por exemplo, um problema de Patrício.

Eu tinha 150 c e queria comprar uma máscara de 200 c. Quanto me faltava?

Grande parte das crianças escreveram:

$$150\text{ c} + 50\text{ c} = 200\text{ c}$$

dando assim a resposta 200 c à questão: Quanto me faltava?

Para nós é claro:

$150 + x = 200$ portanto $x = 200 - 150$

Mas para as crianças é mais difícil.

Com efeito:

$150 + 50 = 200$ está certo.

Então, porque é que sendo uma igualdade certa, ela não serve?

Mas, visto que as crianças estão habituadas a trabalhar com as três formas:

$$150 + 50 = 200$$
$$200 - 150 = 50$$
$$200 - 50 = 150$$

podem escolher a igualdade que isola a resposta à pergunta. Mas, a partir do momento que saibam trabalhar com os x, isso torna-se ainda mais claro:

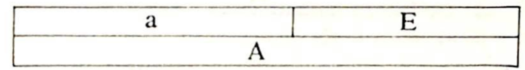
$$150 + x = 200$$
$$200 - x = 150$$
$$200 - 150 = x.$$

Algumas crianças trabalharam com esta tripla relação de dependência entre três números. Mas ficámos por aí, ou seja, na fase da descoberta; não houve verdadeiramente repetição para assimilação. Talvez seja da competência

da 3.ª classe. De qualquer maneira, parece-me ser de encorajar a experiência com esta relação tripla.

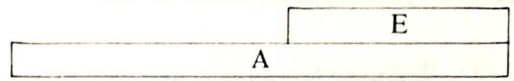
Mas não terminei a *minha* subtracção. Discutindo-a com o meu filho Hervé, compreendi um pouco melhor.

Partamos de:



$$A = a + E$$

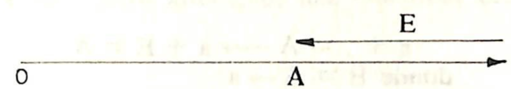
Se igualarmos o amarelo, teremos:



Por um lado, tínhamos A inteiro, por outro lado, ao colocar E, tínhamos começado a tirar E. Nada mais restava a tirar, para proceder à igualdade que a diferença a.

$$A - E = a$$

Compreender-se-á melhor usando os vectores:



Para se obter uma igualdade, quer dizer, para se tornar ao ponto zero, posto que já começámos a subtrair E, é necessário subtrair ainda a para obter $A = E + a$.

O que dá:

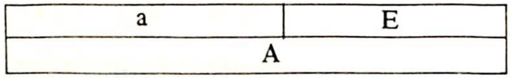
$$A - E - a = 0$$

donde

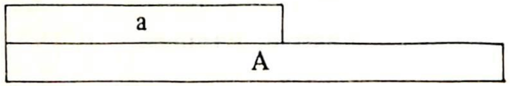
$$A - E = a$$

Isto chama-se calcular o resto, subentendendo o resto para obter a igualdade de ponto zero.

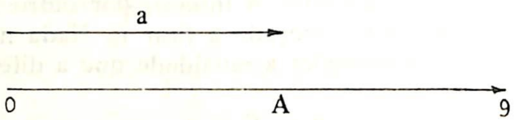
Mas, se na igualdade $A = a + E$



eu tirar E



desta vez não seremos tentados a igualar ao ponto zero mas ao ponto 9.



Desta vez, para igualar, não se volta atrás, avança-se. E é um + que aparece.

$$a + . = A \longrightarrow a + E = A$$
$$\text{donde } E = A - a$$

Agora já não se trata de calcular um resto mas uma falta: é diferente.

Hervé diz-me que eu discuto a torto e a direito, que, quando se tem uma soma de dois termos, convenciona-se que, conhecendo a soma e um dos termos, para se achar o outro far-se-á uma operação chamada subtracção e que se dotou do sinal —. As duas operações $a = A - E$ e $E = A - a$ são idênticas.

Talvez matematicamente ele tenha razão e eu sinto bem que o meu raciocínio matemático não é suficientemente sólido; mas, psicologicamente tenho razão.

Isso torna-se dfícil nas nossas aulas: calcular um resto ou uma falta não é de modo nenhum a mesma coisa. E é preciso abordar a questão francamente, talvez por intermédio de vectores, que tanto agradam às crianças.

No segundo caso, as crianças deveriam poder escrever, durante algum tempo:

$$a + x = A$$
$$\text{donde} \qquad x = A - a$$

Pouco a pouco, por treino e procura de economia, as crianças viriam a escrever directamente $x = A - a$.

Mas, na minha opinião, é bom revelar-lhes o avesso da questao. E em lugar de preferir a fórmula mágica «para obter uma diferença, subtrai-se», elas traduziriam primeiro a realidade por uma equação que trabalhariam à sua maneira.

Na realidade, poder-se-ia também procurar igualar ao ponto 5 entre o ponto 0 e o 9. Os vectores complementares mudam então de sentido. Mas como o seu valor numérico não sofre alteração, não vou falar deste caso.

Multiplicação

Abordamos agora uma questão espinhosa da pedagogia, que eu também não fui capaz de resolver inteiramente e que submeto à vossa apreciação, para que me esclareçam.

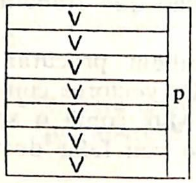
Na minha opinião, 4×7 pode ler-se de duas maneiras; 4 vezes 7 ou 4 multiplicado por 7. No primeiro caso, é o multiplicador que aparece primeiro, no segundo caso é o multiplicando.

Ora o costume actual é escrever para cada 4 montes de 7 couves 7×4.

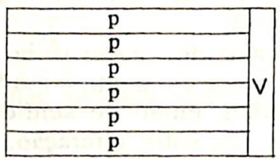
Para as crianças é uma dificuldade de ordem psicológica. Efectivamente, elas traduzem a operação $\times$ pela palavra «vez». E é bem cómodo dizer 4 vezes 7 couves. E seria bastante cómodo poder também escrever 4×7 da esquerda para a direita como se escrevem as palavras. Na minha opinião, dever-se-ia permitir esta forma de escrita às crianças. Mas, conjuntamente, seria necessário associar a ela a noção de operador que se exprime por 7×4. E para ser perfeito, seria também necessário ganhar um tal hábito das duas formas que as crianças pudessem indiferentemente usar uma ou outra.

Quis introduzir na minha aula a noção de operador, que julgo ter tirado de um livro de matemática. Os camaradas melhor informados devem dizer se estou em erro.

Um dia, Jaime, da 1.ª classe, tinha construído esta fórmula, que é notável.



V X p



p X V

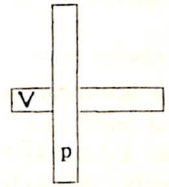
Lê-se V operado por p e não p operado por V.
(6×7) (7×6)

No primeiro caso (6×7), colocamos primeiramente o 6, é a matéria sobre a qual se vai operar uma transformação, sendo esta transformação $(\times 7)$.

Esta noção de operador pareceu-me importante e útil. Desse modo, fiz um considerável esforço intelectual. Cabe-

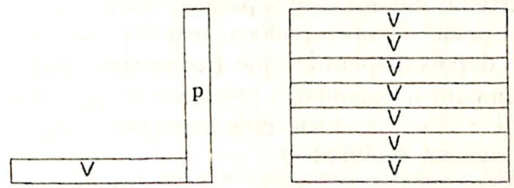
-vos julgar. Com efeito, eis como eu apresentei a questão.

O preto dá uma pancada na cabeça do verde para o



adormecer. E enquanto este dorme, ele faz-lhe uma partida. Mete-lhe companheiros no quarto, depois foge.

Este modo de representar as coisas poderá parecer-vos pouco sério e pouco digno de um educador consciente



das suas responsabilidades e da gravidade da sua missão.

E se, psicologicamente, estiver certo?

E parece-me que está, porque se riram, para não dizer que se divertiram. E não se esqueceram. Não é verdade que as crianças vêem, todos os dias, filmes de «cow-boys», a que se entregam, simulando, às mil maravilhas, o desmaio que se segue a uma pancada na cabeça? E não é preferível que se riam?

Sobrepondo as 7 reguazitas verdes e as 6 reguazitas pretas vimos que $6 \times 7 = 7 \times 6$.

Até agora só existia uma maneira sacrossanta de se exprimir, por exemplo, o preço de 178 objectos a 6 c cada. Era:

6 c $\times$ 178

Mas para realizar a operação, colocávamos:

$$\begin{array}{r} 178 \\ \times \quad 6 \end{array}$$

O que significa reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação. Porque não reconhecê-la no texto? 178 vezes 6 (178 $\times$ 6) ou 6 a multiplicar por 178 (6 $\times$ 178), não é a mesma coisa? De qualquer maneira, há alguma razão para levantar os braços ao céu e arrancar os poucos cabelos que nos restam? Não seria melhor reservar as nossas arrelias e bater os pés para as coisas que realmente valham a pena? Todavia, colocar primeiramente o número a operar, depois o operador que transforma, parece lógico.

(É também o calendário [Fevereiro] que nos permite ver que 4 $\times$ 7 e 7 $\times$ 4 são dois aspectos complementares de uma mesma realidade.)

Divisão

Da mesma maneira que para a, b, c,
Temos com o sinal de operação +

$$a = b + c \qquad b = a - c \qquad c = a - b$$

para a divisão, temos com D, d e q:

$$D = dq \qquad d = \frac{D}{q} \qquad q = \frac{D}{d}$$

Também aqui se trata de duas divisões distintas, consoante se calcula o multiplicador ou o multiplicando do produto dq.

Calcula-se o «número de partes» ou o «valor de uma parte».

Apercebi-me que as duas coisas estavam intimamente ligadas.

Com efeito, durante as férias de Natal, na ocasião de uma desinfecção os empregados da limpeza tinham-nos preparado um belo espectáculo: tinham destruído as nossas caixas e deitado todas as reguazitas para dentro de uma caixa, em completa desordem. Era preciso reconstituir as cinco caixas, quer dizer, dividir as reguazitas de diversas cores pelas 5 caixas.

Vejamos como fizemos:

Demos primeiro uma a cada um, depois outra, etc... O que, por exemplo, para 15 dava:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

E vê-se que 5 $\times$ 3 e 3 $\times$ 5 é a mesma coisa. Isto, já nós sabemos, mas o que sucedeu, foi que as crianças disseram: são necessários 5 para fazer uma primeira distribuição, 5 para fazer uma segunda distribuição e 5 para uma terceira distribuição.

Três distribuições ao todo, portanto: três a cada um.

O que em mim há de pedagogo exaltou, porque, se as crianças conheciam a divisão «Dividido entre», de que tinham uma longa experiência, porque ela se encontra constantemente na vida, a divisão «quantas vezes» é mais delicada. E é justamente na ocasião de uma «divisão entre 5» que as crianças introduziam a expressão «quantas vezes», no momento das distribuições.

Com 15, são necessários 5 para uma distribuição:

Em 15, quantas vezes há 5?

3 vezes, portanto 3 a cada um.

Podemos agradecer aos empregados da limpeza o facto de nos terem fornecido uma referência tão boa.

Creio que, também aqui se deve realçar uma tentativa experimental rica para a assimilação das duas formas da divisão. E até mesmo, como para a adição e para a subtracção, temos interesse em fazer aparecer as 3 relações de interdependência entre os três números.

$$p = a \times b \qquad a = \frac{p}{b} \qquad b = \frac{p}{a}$$

Senão as crianças responderiam erradamente à questão que lhes fez Miguel.

Quantos caramelos de 5 c terei eu com os 30 c de meu padrinho?

Escrevem: $5 \times 6 = 30$.

Porque pensam intuitivamente:

$5 \times x = 30$

Portanto x é 6 portanto: resposta:

$5 \times 6 = 30$ o que é falso.

Como para

$$150 + x = 200 \longrightarrow x = 200 - 150$$

seria necessário que as crianças se habituassem às três formas:

$$5 \times 6 = 30 \qquad 5 = \frac{30}{6} \qquad 6 = \frac{30}{5}$$

que passassem facilmente de uma para a outra e que soubessem isolar a resposta correcta.

Senão, visto que $5 \times 6 = 30$ é certo, elas não compreenderão porque é que a sua resposta é incorrecta.

O que não poderão atingir senão através de um intensivo ensaio experimental que talvez esteja no campo da 3.ª ou da 4.ª classe.

Relação entre subtracção e divisão

Dado que estamos pedagogicamente a aperceber-nos do que se esconde nas operações, tentemos ver, visto que a adição se encontra na multiplicação, se a subtracção não se encontrará, por acaso, na divisão.

Mas claro que sim, claro que sim; vejamos o problema de Robin:

Tenho 16 carros para Gerardo e para mim.

Quantos são para cada um?

Obtenho repetidas vezes a resposta seguinte:

$16 - 8 = 8$ (E vós?)

Como $150 + 50 = 200$, este erro é rico de informações. Pois, de facto, quando se faz uma divisão, fazem-se subtracções.

Tenho 30 c. Se compro um caramelo, fico com 30 c — — 5 c = 25 c. Se comprar outro, fico com 25 — 5 = 20 etc.

E vemos assim que a operação foi:

$$30 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$$

ou $30 - (6 \times 5) = 0$

donde $30 = 6 \times 5$

$$\frac{30}{5} = 6$$

É claro que não se deve ensinar tudo isso às crianças. Mas se se basear o seu ensino na invenção, na criação, na descoberta infantil, precisamos de contar com estas dificuldades. Ou mais simplesmente, será necessário ter reflectido um pouco; é necessário estar avisado do que pode acontecer. É necessário, por exemplo, esperar ver descobrir a divisão por uma via não prevista. É preciso saber reconhecê-la para não arriscarmos estupidamente interditar-lhe a sua aceitação. Felizmente que as reguazitas Cuisinaire permitem, ao professor, a compreensão rápida de inúmeras coisas.

Na nossa aula, temos uma boa referência para a divisão: o calendário, mais uma vez.

Por exemplo, no nosso mês de Janeiro, assinalado permanentemente com um «punaise», no contraplacado,

há $28 + 3 = 31$
Ou seja, também, $31 - 3 = 28$ e $31 - 28 = 3$.
Mas 28 é 4×7 ou 7×4

$$\text{portanto } \frac{28}{4} = 7 \; ; \qquad \frac{28}{7} = 4$$

E se reintroduzirmos a adição $28 + 3 = 31$
Temos $31 = (4 \times 7) + 3$
ou seja também:
$31 - (4 \times 7) = 3$ e $31 - 3 = 4 \times 7$

$$\text{E reencontramos } D = dq + r$$
$$D - r = dq$$

Mas, direis, porquê todas estas reflexões pessoais, quando nos havia sido prometido comentários sobre as lições «a posteriori», a partir de criações das crianças?

Terão que esperar, é necessário que eu trabalhe também para mim e que eu me explique coisas. É que, com efeito, tenho obtido repetidamente criações do tipo:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$$
$$7 + 7 + 7 + 7 + 3 = 31$$

Digo então aos meus alunos:

— Estão a fazer divisões. Poderiam escrevê-las de outra maneira, mas têm o direito de as escrever como fizeram.

E eles trabalham com esta forma tão lícita como as outras e que não passa de uma derivação um pouco especial da experiência de Cristiano sobre a adição.

Há também esta forma interessante:

$$31 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$$

E é um excelente cálculo mental e uma excelente preparação para a prática da divisão. E, também, de passagem, uma aprendizagem sem dor da tábua de multiplicação, que, aliás, nunca se aprende de cor, mas que se sabe, por ensaio experimental, inventando sem cessar num meio em que os casos e a afectividade organizam referências constantes.

Naturalmente que se obterá um dia:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 8 = 36.$$

E descobrir-se-á facilmente que se pode dizer:

$$(7 + 7 + 7 + 7) + 7 + 1$$
$$\text{ou } (4 \times 7) + (1 \times 7) + 1$$

E como evidentemente se conhece o que é um factor comum, temos:

$$7\,(4 + 1) + 1 = 36$$
$$(7 \times 5) + 1 = 36$$

Não se trata de divisão? Sim; e excelente até.

Porquê sempre $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$

e nunca

$D = dq + r\,;$ ou $D - dq = r.$

Não, não, na via que eu sigo, é necessário permitir tudo e saber aceitar tudo. Não se devem limitar as experiências. É sempre útil, eficaz, produtivo. E, tal como o texto livre, as técnicas faladas, o desenho livre, nunca é gratuito. Não temos aqui que partir à conquista do domínio das operações e preparar a teoria das operações?

Este ano, à parte as fracções e a procura de números inteiros com as reguazitas, no início do ano, não fizemos, por assim dizer, divisões, no sentido habitual do termo. Mas fizemo-las em quantidade de uma forma não clássica.

Na minha opinião, a divisão clássica só deveria ser abordada na 5.ª classe. Seria então facilmente assimilada porque viria na altura devida e não seria senão a sistematização, a ordenação de uma aquisição. Penso que, nessa altura já as crianças a teriam assimilado muito bem. Mas se falo no Ciclo, é para que se recue bem no tempo as exigências do programa e para que se permita aos professores a paz tão necessária à ultrapassagem dos planos antes da data prevista.

E se, por acaso, num ou noutro campo, a pesquisa livre não tiver dado o resultado esperado, será então

possível conduzir, as crianças, por meio de caixas de ensino, ao resultado desejado. Digo isso, por todas as razões. Pode sonhar-se com um programa. Num momento preciso, devem assegurar-se certas bases, se não se quer ver comprometido todo o desenvolvimento ulterior. Aos dez anos, por exemplo, não é permitido que uma criança não saiba nadar, jogar à bola, andar de bicicleta, falar em público, escrever, ler, desenhar.

Aos dez anos, não é assim tão necessário que uma criança saiba calcular, porque neste campo poderá sempre treinar-se de uma maneira válida. Mas, aos dez anos, a criança deverá ter integrado numerosas estruturas matemáticas, senão o seu desenvolvimento ulterior estará definitivamente comprometido.

Que pensais vós?

Na minha opinião, e no que diz respeito a certos pontos precisos, se a simples actividade criadora o não permitir, num momento dado, dotar a criança de um ou outro utensílio indispensável, será necessário passar-se à repetição para assimilação, à necessidade de recorrer às caixas.

Mas, de certeza que já sabeis: qual é ou qual será o programa, isto é, a escala de conhecimentos a adquirir no tempo? Eis a questão!

No entanto, rio de mim mesmo, ao pensar nas exigências limitadas dos programadores actuais. Porque eu pressinto que um ensaio tão generoso como o que eu proponho dará resultados rápidos e espantosos. Como se deve avançar quando não se é impedido de trabalhar!

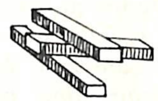
Mas não revelo as minhas esperanças secretas a ninguém, porque «eles» poderiam aumentar as exigências e, assim, suprimir um ganho.

POTÊNCIAS E RAÍZES

Potências

As crianças operando 7 por 4 (preto por rosa) 6 por 8 etc... chegando naturalmente a operar 4 por 4 (rosa por rosa), 5 por 5, etc... e mesmo 4 por 4 por 4 quer dizer $4 \times 4 \times 4$, que se escreve 4^3.

Para este fim, colocamos as réguas em cruz.



E podem montar-se assim torres de vários andares; de dez andares, por exemplo, com o 2, o que faria 2^{10}.

2^{10} é fácil de calcular porque se encontra na vida (os concursos da Televisão do «dobro ou nada») e que é uma contagem familiar:

$$2 \text{ e } 2 = 4, 4 \text{ e } 4 = 8, 8 \text{ e } 8 = 16 \text{ etc.}$$

$$2^{10} = 1\ 024.$$

Com as potências de 10, é igualmente fácil, pois que 10^2 é 100, 10^3 é 1000, 10^6 é um milhão, 10^9 são mil milhões. (Este milhão, estes cem milhões que agradam tanto às crianças.)

Para as potências de 10, não demorarão muito a encontrar um truque. Basta escrever tantos zeros quantos o expoente indica.

$10^6 = 1\ 000\ 000 \quad 10^5 = 100\ 000$
$10^4 = 10\ 000 \quad 10^3 = 1\ 000$
$10^2 = 100 \quad 10^1 = 10 \quad 10^0 = 1$

Estes últimos resultados $10^1 = 10$ e $10^0 = 1$ obtidos por um sábio «decrescendo» são muito importantes. Teremos ocasião de os encontrar nas numerações não decimais e quando se fizer o estudo da numeração de posição.

As crianças revelaram bastante prazer neste novo jogo das potências. Era agradável, porque se baseava no uso das réguas e nas torres de uma so cor que se podiam montar com as mãos.

Poder-se-ia, talvez, dispensar as réguas para falar de potências, em favor de bilhetes e moedas, ou do sistema decimal. Mas, deve reconhecer-se que as réguas permitem uma boa implantação das raízes e das potências.

Mas Pedro trabalhou sem o uso das réguas E, se Paulo foi o especialista da simetria, Cristiano, o especialista do cálculo numérico, Pedro da associação, Miguel da tábua 9, Pedro tornou a revelar-se, no que respeita às potências. O que revela, com este último aluno, que cada criança poderia constituir uma personalidade matemática original, seleccionando no mundo das matemáticas, os elementos que mais especificamente lhe convêm. E a partir destes elementos bem adaptados, bem assimilados, ele poderia construir um saber sólido e próprio, que só teria que se deixar frutificar num clima favorável.

Eis as potências que mais frequentemente apareceram na 2.ª classe:

$2^1 \ 2^2 \ 2^3 \ 2^4 \ 2^5 \ 2^6 \ 2^7 \ 2^8 \ 2^9 \ 2^{10}$
$3^1 \ 3^2 \ 3^3 \ 3^4$
$4^1 \ 4^2 \ 4^3$
$5^1 \ 5^2 \ 5^3 \quad 6^2 \ 7^2 \ 8^2 \ 9^2$
$10^1 \ 10^2 \ 10^3 \ 10^4 \ 10^5 \ 10^6 \ 10^7 \ 10^8 \ 10^9$

É claro que, e quero sublinhar bem isso, porque foi uma característica da nossa experiência de matemática livre, as potências só duraram um certo tempo. E foi assim para tudo.

Por vezes, a classe interessava-se numa única coisa. E parecia que nunca mais a deixaria. Eu aceitava, porque queria verdadeiramente entrar no jogo. Mas, de repente, um dos alunos tomava outra via. Eu assinalava-a à classe porque essa era a minha tarefa.

Mas quando não havia ainda feito o percurso completo do que acabava de descobrir, ela ignorava a nova pista. Todavia, por vezes, quando já estavam cansados de girar à volta de um mesmo assunto, aproveitavam a descoberta da nova pista para lhe tirar a tangente.

Mas alguns alunos afastavam-se momentaneamente do grupo para retomar criações deixadas por planear, quer porque, naquela altura, tinha havido uma superabundância de descobertas e não houvera tempo de se debruçarem sobre elas; quer para retomar um tema de procura e avançar um pouco mais no seu desenvolvimento; quer, enfim, porque, ao prolongar um tema, poder-se-ia desembocar, por uma simples derivação, sobre qualquer coisa de novo e de muito interessante.

Mas, dirão, deixar as crianças assim, ao sabor da sua inspiração, não será fazê-las correr os riscos de um esvoaçar estéril? Podem estar tranquilos — e essa foi para mim a descoberta essencial — há sempre posições, comparações, ordens sucessivas, que dão um conhecimento profundo de todos os assuntos.

Raízes

Poderá causar surpresa. Mas é a operação inversa das potências.

Potência, segundo Cuisenaire, é o número de andares da torre de uma dada cor.

A raiz é a cor da torre.

Quando se conhece o valor numérico total e o expoente (a altura da torre), pode achar-se a cor.

$$\sqrt[3]{27}$$

É uma torre de três andares de que se conhece a altura mas de que se não conhece a cor (verde, quer dizer: 3).

Devo assinalar que explorámos menos as raízes do que as potências. Não se trata de, na 2.ª classe, aprender, possuir estas noções, mas simplesmente de as ter abordado, pelo menos, uma vez, quer dizer, ter fixado uma base na mente. Deste modo, todas as potências e raízes que apareçam na vida, saberão onde se situar, porque haverá um lugar para elas.

Elas saberão, por si sós, apoiar-se na base instalada. Irão, elas mesmas, tomar o seu lugar, sem que quem esteja encarregado da repartição dos conhecimentos tenha de se fatigar.

Parece-me que, para a captação das raízes, o ensaio teria sido mais longo que para as potências. Mas não chegámos até ao seu final. Tivemos de passar adiante, no início de Dezembro, por causa do Cuisenaire. Mas, em meados de Fevereiro, reencontrámos as potências e raízes, quando tivemos de trabalhar as áreas de quadrados (rectângulo pequeno de Serge de Buzet).

E desta vez, não era artificial, vinha da vida e somente da vida e das criações das crianças que se tinham posto a quadricular os seus cadernos de exercícios de matemática.

Poder-se-ia pôr, como princípio, partir sempre da vida e somente da vida. Mas esperar que a vida ofereça concretamente todas as possibilidades é estabelecer o princípio de que nada se pode fazer senão a partir do concreto.

Mas eu penso, com Bachelard, que não é um bom princípio. Para ser criador, o pensamento deve ser livre de jogar como quiser. Depois, investe as suas descobertas no real, o que o confirma na boa opinião justificada que tem de si próprio.

Então, depois de ter jogado artificialmente com 10^0, 10^1, 10^2, etc., fica feliz de descobrir na vida o sistema decimal.

10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
		1	9	6	7

Não insisto mais sobre os contributos do Cuisenaire. Poder-se-ão obter outras informações nos livros de Gattegno e Madeleine Goutard. Devo, no entanto, apontar que, se, na minha opinião, Madeleine Goutard expôs excelentes princípios no seu primeiro livro, os esquece um pouco no segundo. A meu ver, não se deve pedir ao Cuisenaire mais do que ele pode dar. Não nos devemos sobretudo cingir ao Cuisenaire. Isso seria tornar um bom utensílio de passagem numa limitação (*).

Porém, antes de terminar, gostaria de retomar um outro ponto interessante do Cuisenaire.

Pudemos substituir 5 réguas encarnadas por uma régua laranja ($5 \times 2 = 10$). Mas também se podia fazer a operação inversa: Sendo dada uma laranja, quantas encarnadas seriam necessárias para a cobrir ($10 \div 2$).

Escreve-se para isso:

10 medido por 2 =

O que corresponde bem à noção de medida. Medir, não é olhar «quantas vezes» a unidade cabe no comprimento a medir?

(*) Permito-me recomendar-vos, a este propósito os artigos surgidos no *Educador* (n.º 12, 13, 15 de Março - 1 de Abril, 1966, p. 2). (CEL).

Para «medido por» as crianças arranjaram três sinais ÷ — . Guardámos todos três.

Esta expressão de «medido por» é muito prática. Permite-nos, em particular, compreender que

$$\frac{8}{0} \text{ é impossível}$$

porque não existe a medida zero.

Por outro lado, quando se quer medir uma régua pequena com uma régua um pouco maior, é-se obrigado a tomar, para unidade de medida, um bocado (uma fracção) da régua maior.

Também aí, o Cuisinaire é um bom apoio visual.

Portanto, vê-se que é um utensílio interessante. Mas as crianças abandonaram-no depressa (ao fim de um mês), porque queriam voar mais alto.

No entanto, de vez em quando, para se repousarem ou reassegurar, retornavam a apoiar-se neste sólido rochedo. Constatá-lo-emos mais para a frente.

Retomo agora o meu diário para prosseguir o relato da nossa viagem nas antecâmaras dos espaços matemáticos.

Falei, no início, acerca das pesquisas em relação à associatividade e comutatividade.

Eis um trabalho de Patrício sobre o assunto.

$$\begin{aligned} 8 + (4 + 1) + 2 &= 15 \\ 9 + (1 + 2) + 3 &= 15 \\ 10 + (0 + 4) + 1 &= 15 \\ 11 + (1 + 2) + 1 &= 15 \\ 12 + (1 + 1) + 1 &= 15 \end{aligned}$$

É um quadro muito interessante, a que talvez se pudesse dar o nome de quadro de equivalência. Na realidade não o é, é uma sequência de igualdades. E seria banal se o número 15 não aparecesse em todas. É pois uma sequência que tem uma unidade. E é este bem comum a todas as igualdades que permite dar à sequência, que poderia ser qualquer uma, o nome especial de quadro.

Quando foi criado, não pensei em tirar partido dele. Somente pensava na associatividade.

Mas Jaime deve ter pressentido nele qualquer coisa de interessante.

Com efeito, enquanto toda a gente trabalhava com as adições, ele partia subitamente para um caminho novo. Tive oportunidade de me aperceber disso, porque foi esse facto que provocou em mim uma atitude nova que suscitou a sequência da minha experiência. A partir desse dia, pus-me à espera.

E valeu a pena.

Eis a criação de Jaime (o 15 — 10):

$$\begin{aligned} 19 + 3 &= 22 \\ 17 + 5 &= 22 \\ 15 + 7 &= 22 \end{aligned}$$

Porque é que ele tinha escolhido o número 22? Não sei. Talvez por causa do número de alunos da aula (22).

Um aluno disse:

— *Teríamos podido continuar.*

— *Então continuemos.*

Mas como terminávamos por 1 + 21, tínhamos colocado 21 + 1, ao alto da coluna, por causa da simetria. Efectivamente, ao analisar a criação de Jaime, verificámos a simetria em relação a 11 + 11 (simetria obtida por comutatividade).

$$\begin{aligned} 21 + 1 &= 22 \\ 19 + 3 &= 22 \\ 17 + 5 &= 22 \\ 15 + 7 &= 22 \\ 13 + 9 &= 22 \\ 11 + 11 &= 22 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9 + 13 &= 22 \\ 7 + 15 &= 22 \\ 5 + 17 &= 22 \\ 3 + 19 &= 22 \\ 1 + 21 &= 22 \end{aligned}$$

Nesse mesmo dia, Jaime quis fazer um quadro de equivalência das diferenças. Mas enganou-se. E fizeram-lhe ver.

No dia seguinte, experimentou um novo quadro de adição.

Paro um pouco aqui para assinalar a atitude da criança que procura. Satisfeita com o seu primeiro sucesso, ela tinha querido atacar à vontade e abordar também a subtracção. Mas como é mal sucedida, vai atacar profundamente: torna à adição em que tão bem sucedida fora da primeira vez e vai progredir.

Tinha aberto uma brecha e acreditava que a brecha era nas quatro operações. Mas era só na adição. Só na adição ele pode dar o segundo passo. Eis o segundo quadro:

$$\begin{array}{r}
18 + 4 = 22\\
16 + 6 = 22\\
14 + 8 = 22\\
12 + \cancel{12} = 22\\
10 + \cancel{13} = 22\\
8 + \cancel{15} = 22
\end{array}$$

Desta vez, o quadro está bem ordenado, no que, pelo menos, diz respeito à primeira coluna. Mas na segunda coluna há uma derrapagem. O grupo auxiliou Jaime a tomar consciência do seu erro e ele retomou e prolongou a sua criação da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll}
22 + 0 = 22 & 14 + 8 = 22 & 6 + 16 = 22\\
20 + 2 = 22 & 12 + 10 = 22 & 4 + 18 = 22\\
18 + 4 = 22 & 10 + 12 = 22 & 2 + 20 = 22\\
16 + 6 = 22 & 8 + 14 = 22 & 0 + 22 = 22
\end{array}$$

Analisámo-lo e verificámos que os números se encontravam duas vezes: uma vez na primeira coluna, outra vez na segunda coluna. Era uma confirmação da comutatividade e da simetria descobertas com as réguas Cuisenaire.

Mas este segundo quadro, comparado com o primeiro, permitiu-nos constatar que havia uma diferença entre os dois. No primeiro quadro, há um *1* no começo. No segundo, há um *0*.

$$\begin{array}{ll}
21 + \mathit{1} = 22 & 22 + \mathit{0} = 22\\
19 + 3 = 22 & 20 + 2 = 22\\
17 + 5 = 22 & 18 + 4 = 22\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

É a primeira intuição de paridade.

Sem dúvida que se poderia ainda ter descoberto uma outra coisa. Mas basta uma coisa de cada vez. Por hoje já é bom. A vida é longa. Não é necessário devorar tudo de uma vez.

Além disso, a partir do dia seguinte, fomos um pouco mais longe, pois uma criança disse:

— *Em lugar de se saltar 2, poderíamos saltar só 1.*

$$\begin{array}{r}
22 + 0 = 22\\
21 + 1 = 22\\
20 + 2 = 22\\
19 + 3 = 22
\end{array}$$

O que já não é o mesmo que ontem. Voltámos então ao quadro de ontem e comparámos os três quadros.

$$\begin{array}{l|l|l}
22 + 0 = 22 & 22 + 0 = 22 & \\
21 + 1 = 22 & & 21 + 1 = 22\\
20 + 2 = 22 & 20 + 2 = 22 & \\
19 + 3 = 22 & & 19 + 3 = 22\\
18 + 4 = 22 & 18 + 4 = 22 & \\
17 + 5 = 22 & & 17 + 5 = 22\\
16 + 6 = 22 & 16 + 6 = 22 &
\end{array}$$

O quadro da esquerda contém os dois outros e a perfeita alternância entre os dois quadros da direita causou surpresa e satisfação.

Correspondia a um certo desejo de perfeição próprio de cada criança.

É de notar que na formação dos quadros, as crianças não fazem o cálculo da soma, mas, por exemplo, para

$$\longleftarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 22 & + & 0 \\ 20 & + & 2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

justapõem duas progressões aritméticas de razões opostas (+ 2 e — 2). O que demonstra que elas perceberam a estrutura do quadro. Quando as crianças descobrem um «truque» para economizarem cálculos, é um sinal de inteligência matemática, porque é isso mesmo a matemática: encontrar truques que permitam avançar mais depressa com o menor esforço.

Há também nestes quadros uma interessante ideia de compensação, ou, se se preferir, da constância da soma dos complementares.

Este trabalho sobre as progressões é inconsciente: ainda se está na intuição vaga. A consciência dele virá quando se abordarem, por exemplo, os múltiplos e as classes de equivalência em que o módulo se torna razão.

Mas graças a Remi, a ideia precisa-se bastante rapidamente.

Eis o seu quadro:

$$\begin{array}{l} 32 - 2 = 30 \\ 30 - 2 = 28 \\ 28 - 2 = 26 \\ 26 - 2 = 24 \\ 24 - 2 = 22 \end{array}$$

Oh! eu compreendi o seu truque: tira 2 ao que achou. É sempre assim.

No dia seguinte, Remi continua o seu trabalho. Mas alarga a sua descoberta à adição e à subtracção de 3.

$$\begin{array}{lcl} 0 + 2 = 2 & \quad & 32 - 3 = 29 \\ 2 + 2 = 4 & & 29 - 3 = 26 \\ 4 + 2 = 6 & & 26 - 3 = 23 \\ 6 + 2 = 8 & & 23 - 3 = 20 \end{array}$$

São bem progressões aritméticas. Outrora, quando nós estudávamos, obrigavam-nos a fazer progressões como «contar e descontar, por 2, por 3, etc.». E era bem «obrigar». Mas «descobrir» é infinitamente melhor. Aqui é a criança que dá o seu trabalho: nisso está toda a diferença. E, atenção, não é para um treino útil ao cálculo mas para uma exploração dos números e dos seus mistérios. Não é isso também diferente?

Quadros ordenados

Algumas crianças querem seguir a via descoberta por Remi e Jaime. Mas não se apercebem de que os seus quadros não estão ordenados.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} 20 + 1 = 21 \\ 13 + 1 = 14 \\ 17 + 1 = 18 \\ 12 + 1 = 13 \end{array}$$

É necessária a crítica da classe, para que eles tenham consciência disso.

Esta noção de ordem é muito importante. No ensino habitual, não se lhe faz muita referência. Porém, é uma noção que as crianças descobrem espontaneamente. E basta sublinhar a ordem existente ou inexistente para que a estrutura se fixe. E esta estrutura, é um utensílio suplementar para a investigação do real.

Evidentemente que as crianças são livres de ordenar ou não ordenar. Regra geral, sucumbem à tentação: é uma tendência natural.

Factor comum

Estava de bastante bom humor este ano e pronto a dar uma oportunidade a todas as estruturas que se apresentassem.

Mas não esperava de modo algum, vir a tratar de factores comuns.

Uma manhã, Miguel Robin escreveu:
10 l + 10 A + 10 c
o que significa 10 réguas laranja + 10 réguas azuis + 10 réguas castanhas.

(Dou-vos a tradução.)
dez 10 + dez 9 + dez 8.

Pressentindo que isto poderia ser interessante, mandei dispor a aula à volta de Miguel, que primeiramente, reuniu as réguas em grupos separados.

10 l   10 A   10 c

Foi então que nos surgiram claramente duas possibilidades para exprimir a situação.

Efectivamente, Pedro perguntou:
— *Porque não se juntam umas às outras?*
— *Está bem.*

l + A + c

Poder-se-ia, então, dizer como antes:
10 l + 10 A + 10 c
ou ainda 10 trios (l + A + c).
(Emprego a expressão trio, mas será melhor talvez, dizer triplo ou triplicado.)
E tínhamos:

10 l + 10 A + 10 c = 10 (l + A + c).
Exclamei:
— *Mas é a descoberta do factor comum.*
Eles riram:
— *O factor, o factor* (1)*! É o senhor Prigent.*
— *Ah! não, é o Roger Le Goff.*
Tive uma inspiração.
— *Qual é o vosso factor?*
E descobriu-se que Roger era o factor comum a Patrício, Pedro, Miguel, Patrício e Cristiano.
E o senhor Prigent é o factor comum a Remi, Jaime, Pascoal, João Francisco e a Robin.
O que se pode escrever:
Rogério (Patrício + Pedro + Miguel + Patrício + Cris-

(1) Em francês facteur = carteiro. — *(N. do T.)*

tiano) e o senhor Prigent (Remi + Jaime + Pascoal + João Francisco + Robin).

Que se lê «factor de».
E para 10 l + 10 A + 10 c é 10 o factor comum.
E escreve-se 10(l + A + c).

Assim, partindo de uma invenção escrita de Robin e recorrendo às réguas e à vida, chegámos a uma noção, todavia difícil. Aprendi, no decorrer do ano, a respeitar as criações das crianças. Nada é verdadeiramente gratuito. E muitas vezes me apercebi que as pequenas loucuras conduzem frequentemente à razão.

Isto parece-me importante, embora, à margem do que habitualmente se faz. Perdão, não é à margem do que habitualmente se faz na Escola Moderna em francês, em canto, em desenho e em pintura. Mas é à margem do que habitualmente se faz em cálculo.

Em cálculo, como em «falado», alguns camaradas temem o «qualquer coisa». Mas não se deverá, sobretudo, temer ser o «seja quem for», isto é, aquele que não sabe ver o que sempre há de profundo em todas as criações infantis, mesmo as que, na aparência, são as mais loucas?

Quanto a mim, já fiz a minha escolha. Será boa esta escolha. Tenho a presunção de o crer. Imaginem que eu penso que é também necessário favorecer o ensaio experimental no plano do pensamento.

Bachelard escreveu: *«O real serve para nos fazer pensar.»*

Assim o real não seria o essencial; é de pensar que sobretudo se trata. E pode-se partir tão bem de um sonho, de uma criação infantil, de uma astúcia, de um desenho, de um quiproquo, de uma construção geométrica real ou artificial, como da vida. O essencial é pensar.

Em que pensava Robin quando escreveu 10 l + 10 A + + 10 c. Pensava em algo que ele apercebia intuitivamente no seu conjunto, ou então não tinha senão um elo da cadeia.

Que importa, posto que a classe lhe permitiu obter um desenvolvimento do seu pensamento?

Dado que estudo aqui a aproximação de uma noção, devo esclarecer que, eu, professor, não tinha uma ideia preconcebida, não sabia, de modo nenhum, aonde podíamos chegar.

Evidentemente que, aqui, ajudei voluntária e involuntariamente a precisar a ideia.

Pude fazê-lo porque sabia o que era um factor comum. Mas há certamente muitas coisas nas quais eu não pude pensar porque delas não fui informado. Sinto então a necessidade de me informar. Estudo pela necessidade de ser informado de inúmeras coisas. O conhecimento verdadeiro só advém da prática. E, como é de um conhecimento pedagógico que tenho necessidade, a prática pedagógica é-me suficiente. Mas encontro-me em condições especiais. Efectivamente, aceitaria com alegria fazer o que me fosse dito para fazer. Mas até aqui, ninguém me quis dizer o que era necessário fazer. Portanto, sou constrangido a passar ao quarto meio do conhecimento: a descoberta.

É o lado bom das novas matemáticas e da pedagogia destas matemáticas. Nestes campos, o professor é quase tão inculto como os alunos e esta humildade obrigatória permite-lhe estar ao seu nível e senti-los melhor. O professor integra-se então no grupo: está ao mesmo plano que os alunos. É o companheiro que sabe apenas um pouco mais e não o professor que está a mil léguas de distância dos seus alunos, sozinho com a sua sapiência. O professor é um elemento da equipa de investigação. O seu papel é procurar e procurar sempre informações para a equipa. Para que haja sempre novos campos a explorar.

Porque a série dos quatro meios do conhecimento: ler (informar-se) - ver - fazer - descobrir, seria incompleta se não desembocasse, após a descoberta, num regresso à informação (para recomeçar o ciclo).

Creio que seria necessário aos professores uma espécie de manual pedagógico, que se pudesse consultar a todo o momento. O que se pode facilmente constituir sobre o plano local (camaradas professores, filhos estudantes, colegas advertidos). E depois consultamos a rubrica de Pellissier, brochuras livros da CEL e outros.

Queria dizer uma última palavra acerca do jogo de palavras «factor dos CTT» e «factor de». Fez-nos rir; experimentámos, portanto, uma sensação. E é esta emoção que melhor permite fixar as recordações.

Após um ano de experiências, dou conta que, de cada vez que cedemos à fantasia, ao inesperado, ao insólito mesmo, a referência foi melhor estabelecida; situava-se no passado como uma ilhota visível, à qual facilmente se poderia voltar. Tudo o que permita a compreensão afectiva é lícito, válido, razoável. Mas desde que seja a alegria que esteja na sua base, encontra-se a referência com mais prazer e avança-se, impulsionado por esta recordação feliz. É necessário, a todo o custo, que se estabeleçam referências de todas as espécies: afectivas, espaciais, casuais, poéticas, artísticas, musicais, etc.

Na minha opinião, o trabalho na 2.ª classe não é fazer adquirir conhecimentos definitivos, mas estabelecer sólidos pontos de apoio, donde se possa partir para novas ampliações do mundo real.

E retomo, agora, o meu diário.

O neutro na adição e subtracção

Não conseguia encontrar a razão por que o *1* e o *0* apresentavam tantos atractivos para as crianças.

Foi uma emissão de televisão «Construções matemáticas» que me esclareceu, quando me permitiu compreender o que era o *neutro.*

O neutro na adição e subtracção é o zero: ele não muda em nada os resultados. As crianças gostam muito de igualdades deste género:

$10\ 000 - 0 = 10\ 000$

$300 - 0 = 300 \qquad 0 + 0 = 0$

$7 + 0 = 7$

$1\ 000\ 000\ 000 + 0 = 1\ 000\ 000\ 000$

Inversos ou simétricos ou opostos

Creio que foi Jaime quem teve a ideia dos grupos de zeros que em nada modificavam os resultados.

Exemplo:

$$10 + 10 - 10 + 10 - 10 + 10 - 10 = 10$$

Lembrámo-nos dos parêntesis e isolaram-se os grupos de zero.

$$10 + (10 - 10) + (10 - 10) + (10 - 10) = 10.$$

Vejamos outros exemplos:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

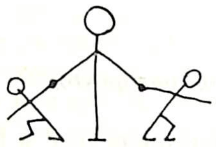
$18 - 8 + 8 = 18$

$q - q + q - q + q - q = 0$

$R - R + R - R + R - R + R = R$

A fim de explicar o mecanismo dos inversos, ou melhor, para lhe dar uma coloração afectiva, coloquei-me diante do quadro e duas crianças puxavam-me as mãos, cada uma de seu lado.

«Se for só um a puxar-me, eu tenho que me mover. Se os dois puxarem, não me movo.» Efectivamente, Pascoal e Cristiano, que tinham a mesma estatura e o mesmo peso *neutralizavam-se.*



O neutro na multiplicação e na divisão

Evidentemente que é o 1.

$$10 : 1 = 10 \qquad \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{a}{1} = a \qquad a \times 1 = a$$

As crianças gostam muito dos números neutros 1 ($\times$, $\div$) e 0 ($+$, $-$).

No início, confundem um pouco, depois, após tentativas, distinguem-nos um do outro.

A noção de *neutro* é muito importante, porque intervém na estrutura do grupo comutativo.

É uma estrutura importante da ciência de hoje (Bachelard).

Consideremos uma operação qualquer.

Se quisermos, chamemo-la: estrela (sinal *).

Se tivermos:

$a * b = b * a$ (Comutação)
$a * n = a$ ($n =$ neutro)
$a * b * c = (a * b) *$ (associatividade)

$a * a^{-1} = n$ (a e o seu inverso dão um neutro: exemplos para a adição $1 + (-1) = 0$; para a multiplicação

$$8 \times \frac{1}{8} = 1$$

A operação * dá ao conjunto dos números utilizados uma estrutura de grupo.

Não é necessário abordar este assunto na primária. Mas, se a criança conhece o que é um neutro, a associatividade, a comutação, o inverso, compreenderá rapidamente, quando se tratar desta questão.

A propósito de inverso e de neutros, devo salientar que as crianças gostam igualmente das operações do tipo:

$$\frac{\text{amarelo}}{\text{amarelo}} = 1 \qquad 50/50 = 1 \qquad \frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{5\,000}{5\,000} = 1$$

$$\frac{i}{i} = 1 \qquad a/a = 1 \qquad \frac{2\,000}{2\,000} = 1 \qquad \frac{1\,000\,000\,000}{1\,000\,000\,000} = 1$$

$$\frac{\wedge}{\wedge} = 1 \qquad \frac{⧗}{⧗} = 1 \qquad \text{mas também} \qquad \frac{0}{0} = \text{impossível}$$

Devemos agora assinalar a existência do

Conjunto dos inteiros relativos
Os números Z

O conjunto dos números naturais ou inteiros positivos é o conjunto N. Os números relativos (inteiros positivos, negativos e nulos) fazem parte do conjunto Z.

Encontramo-los na vida:

— no termómetro $+5$, -5
— No despertador 2 h 10, 2 h — 10.

As crianças fazem operações com Z. Tanto pior se se obtêm números negativos.

«Z é Zorro, pode ir até abaixo do zero.»

Cito esta frase, para demonstrar que as crianças não demoram a criar referências a partir da vida (aqui, a televisão).

Para saber se a operação 4 — 8 é possível, é necessário precisar em que conjunto se devem escolher os números.

Assim em N: 4 — 8 é impossível
e em Z: 4 — 8 = 4.

Classes de equivalência

Já abordámos a álgebra moderna, posto que falámos de associatividade, comutatividade, simétricos, etc. Mas, de facto, isso não vos parece completamente novo. Para nós, o que houve de novo foi o não nos contentarmos com um exercício rápido após a lição do professor: não, pelo contrário, jogou-se bastante com este cálculo e esta abundância de relações é que foi nova.

E eis o que é mais «matemática moderna». Com a ajuda das minhas crianças, espero ser capaz de vos fazer assimilar facilmente esta noção nova, sem que tenhais de fazer grandes esforços, como eu tinha, quando eu «não operava» as matemáticas.

Retomemos o querido calendário de todos os dias. Não, antes, é preciso que vos diga que, na minha aula, cada criança tem um número.

Jaime é o 1; João Francisco o 2; Patrício o 3; Cristiano o 4; Robin o 5; Pascoal o 6; Miguel o 7; Remi o 8; Pedro o 9; Patrício o 10.

E é tudo para a 2.ª classe (10 alunos).

Tivemos a sorte de ter 10 alunos na 2.ª classe, porque a 1.ª classe é homóloga da 2.ª classe, o 1 da 1.ª classe é o 11 da aula.

Eis, portanto os meus 24 alunos.

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	

2.ª classe (1–10) — 1.ª classe (11–24)

Dou esta indicação porque esta personalização dos números tem a sua importância. Ela permite introduzir esta querida afectividade que é o catalisador soberano de toda a aquisição.

Na televisão (Construções matemáticas), eu tinha apreendido as classes de equivalência. Disse para comigo: «Porque não as hei-de revelar às crianças?» Efectivamente, neste domínio da criação e da observação ou, se se prefere, da invenção e da descoberta, não temos ainda qualquer programa, porque não soubemos ainda debruçar-nos sobre as criações da criança. Assim, para estabelecer o programa é preciso fazer bastantes experiências. Então, porque não as classes de equivalência? No ano passado, eu havia-as introduzido pelo processo indirecto de um jogo de números que um deles distribuía.

O 1 a Filipe; o 2 a Yann; o 3 a Pedro; o 4 a mim mesmo; o 5 a Filipe; o 6 a Yann; o 7 a Pedro; o 8 a mim mesmo.

Evidentemente que era melhor introduzi-los artificialmente do que não os introduzir. Mas, este ano, porque *eu os tinha assimilado,* soube-os ver na vida de todos os dias. Elas estavam mesmo debaixo do meu nariz e eu não as via. E, no entanto, tinha o calendário à minha disposição.

O CALENDÁRIO

Eis uma coisa simples, familiar à Escola Moderna, que dele se serve frequentemente para o seu cálculo vivo.

Saber o que há neste calendário. O mês de Janeiro, por exemplo.

Janeiro	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31				

E depois, ver o mês de *Fevereiro.*

1	8	15	22
2	9	16	23
3	10	17	24
4	11	18	25
5	12	19	26
6	13	20	27
7	14	21	28

Na minha aula, colocámos Outubro, Novembro, Dezembro na forma horizontal de Janeiro: 1 — 2 — 3, etc.

Mas para quebrar o hábito nascente, introduzimos um sistema diferente de afixação sobre a placa de contraplacado.

De facto, a dominante, é o sistema Janeiro. É sempre necessário uma dominante, porque é necessária uma referência sólida. E se houvesse igualdade nas apresentações horizontal e vertical, a referência seria flutuante, não seria uma referência, mas uma confusão. Portanto, o mês de Janeiro encontra-se sempre afixado (poderia ser Outubro, Dezembro).

Mas a apresentação do sistema Fevereiro introduz a possibilidade de uma outra apresentação. É útil lançar esta semente que impede os alunos de ficarem condicionados definitivamente a um sistema. É preciso introduzir a segunda possibilidade, porque os quadros que a vida oferece apresentam-se indiferentemente sob os dois aspectos, que se completam.

A bem dizer, «é a mesma coisa, apesar de ser o contrário».

Mas há outras apresentações:

Eis a de Patrício (708) para Março.

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	
		22	23	24		
			25			
	26	27	28	29	30	31

Primeira constatação

Deveria ter-se esperado que fosse Abril, porque, com 30 dias, teria sido perfeitamente simétrico.

Segunda constatação

O que se pode ver à esquerda em 1 — 2 — 5 — 10 — — 17 — 22 — 25 é a progressão aritmética (e a regressão) da diferença (razão?)

1 - 3 - 5 - 7 - (5 - 3)

À direita, igualmente

1 - 4 - 9 - 16 - 21 - 24 - 25

Diferenças: 3 - 5 - 7 - 5 - 3 - 1.

Sim, mas, 1 — 4 — 9 — 16, não vos lembra nada?

Podeis estar tranquilos, as crianças descobri-la-iam bem, esta sucessão de quadrados, se esta apresentação estivesse permanentemente no quadro.

Para Abril, Robin quis o quadrado de 5.

Abril:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27			30
28	29			

Depois não se podia achar nem o quadrado de 4, nem o de 3, mas simplesmente o de 2 e o de 1:

$$5^2 + 2^2 + 1^2 = 30$$

Para Maio, Pedro disse:

— Vamos fazer primeiro o quadrado de 2, depois o de 3 e, assim por diante, até 10.

Mas verificámos que não podíamos ir tão longe.

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	
	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{31}$
			$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{23}$	$\boxed{24}$	$\boxed{25}$	$\boxed{26}$	
						$\boxed{27}$	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	

O que dava:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 = 31$$

Também aqui, seria melhor se se trabalhasse com Abril

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Teria sido mais nítido.
Vejamos o que apareceu para *Junho:*

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Observando esta estrutura, descobrimos que 1 — 3 — — 6 — 10 — 15 — 21 — 28, é sucessivamente:

$$1,\ 1 + 2,\ 1 + 2 + 3,\ 1 + 2 + 3 + 4 \text{ etc.}$$

Mas, retomemos este querido calendário de todos os nossos dias.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Um dia, por acaso, quando tínhamos acabado de espetar a folha da véspera no quadrado de contraplacado, Jaime (1) disse:

— *Oh! eu tenho três filhos Remi (8), Gilberto (15) e Rogério (22). 1 - 8 - 15 - 22, é a minha família.*

Felizmente que tinha acabado de ver uma emissão na televisão e estava pronto a receber esta descoberta de Jaime e a dela tirar partido. Eu disse:

— *Não, Jaime, não são os teus filhos, são os teus alunos 1 - 8 - 15 - 22, é a tua classe.*

— *Também a minha aula* — *disse João Francisco (2)* — *tem 4 alunos e 2 - 9 - 16 - 23. Mas é a classe dos que não fazem nada, porque somos todos Domingo (verificai Janeiro de 1966 ou Outubro de 1966).*

Pascoal (6) disse:

— *Também nós somos a classe dos que nada fazem, pois somos Quinta-feira 6 - 13 - 20 (*).*

Então Jaime interroga-se:

— *Como é que não há senão sábados na minha classe?*

— *Pois bem, descubram.*

(*) Em França, à quinta-feira não há aulas. — *(N. do T.)*

Lêem a primeira linha:

1	2	3	4	5	6	7
sábado	domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta

depois a segunda

8
sábado

— *Já compreendi — disse Patrício. — Quando se liquidou S. D. S. T. Q. Q. S., recomeça-se com Jaime S. E o que é S. D. S. T. Q. Q. S.?*

— *São todos os dias da semana.*

Pedro observa o calendário

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

e depois diz:

— *Descobri uma coisa. 8 é uma fila completa e 1.*

Patrício encadeia:

15 são 2 filas de 7 e 1.

22 são 3 filas de 7 e 1.

29 são 4 filas de 7 e 1.

Pergunto então:

— *E 1?*

A resposta não se faz esperar:

— *É zero filas de 7 e 1.*

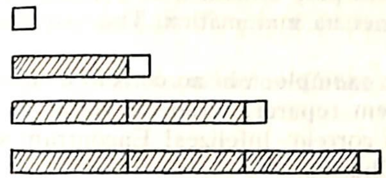
Tomamos então as réguas da classe e medimos 8, 15, 22, 29, com a régua 7. E, de todas as vezes, vemos que sobra um pequeno branco (1).

1

8

15

22



É, portanto, a família «resta 1», quando se mede por 7. Ou ainda, para empregar um termo «moderno» família resto 1 (módulo 7).

Ou ainda, pode dizer-se que é a classe «resto 1» ou classe 1 e 2 - 9 - 16 - 23, é a classe de resto 2 (módulo 7) ou 2 (módulo 7).

Os 31 números repartem-se, portanto, por 7 classes:

$\dot{1} \quad \dot{2} \quad \dot{3} \quad \dot{4} \quad \dot{5} \quad \dot{6} \quad \dot{0}$

Não se satisfaçam com esta leitura e tomem sim as folhas de um calendário ou escrevam os números, ou examinem bem os meses de 31 dias, tal como eles se apresentam em certos calendários. (É o mês de Agosto o melhor, porque começa por uma segunda-feira.)

1965	OUTUBRO				NOVEMBRO				
SEG.	4	11	18	25	*1*	8	15	22	29
TER.	5	12	19	26	2	9	16	23	30
QUA.	6	13	20	27	3	10	17	24	
QUI.	7	14	21	28	4	*11*	18	25	
SEX.	8	15	22	29	5	12	19	26	
SÁB.	9	16	23	30	6	13	20	27	
DOM.	*10*	*17*	*24*	*31*	7	*14*	*21*	*28*	

Não o tenho à mão, mas apresento-vos Novembro de 1965 (apresentação vertical).

Verão que se trata de coisas da vida corrente. Basta abrir os olhos para os ver. É esta a característica da pedagogia Freinet na matemática. Tudo se pode encontrar na vida.

Se, por exemplo, vão ao correio e, distraídos, passam adiante, sem reparar, terão de voltar atrás, para deitar a carta no correio. Infelizes! Encontram-se em plena relação de Chasles.

E afirmo-vos: agora, a vida vai esclarecer as matemáticas e as matemáticas vão esclarecer a vida. E chegareis a compreender até a geometria vectorial, etc.

Voltemos ao calendário:

A classe $\dot{1}$ é 1 - 8 - 15 - 22 - 29... Porque estes números divididos por 7 dão resto 1.

Também se dá a estas classses o nome de classes residuais (resto ⟶ resíduo). Mas também têm outro nome: classes de equivalência. Escreve-se que:

1 é equivalente a 8, a 15, a 22, a 29 (módulo 7). E isso escreve-se:

$$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv 22 \equiv 29 \text{ (mód. 7)}$$

Pode escrever-se também a classe $\dot{2}$.

$$2 \equiv 9 \equiv 16 \equiv 23 \equiv 30 \text{ (mód. 7)}$$

E as classes $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$, $\dot{6}$

Falta uma; não é a classe $\dot{7}$; é a classe $\dot{0}$. A divisão por 7 faz-se exactamente 0 - 7 - 14 - 21 - 28.

É especial — tem um nome especial — é a classe dos múltiplos de 7. Voltaremos a encontrá-la.

Vêem que tudo isto estava à vista. E não é de modo nenhum artificial. Diz-se frequentemente:

— *Que dia será 30? Esperem, hoje, terça, é 8. Portanto, terça 15, terça 22, terça 29. Será uma quarta.*

Também se costuma dizer: de hoje a 8 dias, de hoje a 15 dias.

Na minha aula, para tudo o que respeita a módulos e classes de equivalência, é o calendário que serve de referência. E é também o módulo 7, que é particularmente interessante.

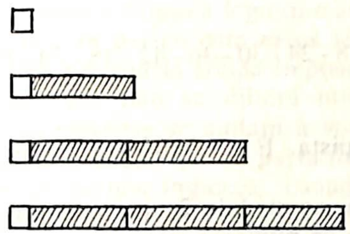
Algumas crianças adoram os módulos. Constroem sobre o módulo 10.

$$2 \equiv 12 \equiv 22 \equiv 32$$

mas transpõem com o módulo 9

$$9 \equiv 19 \equiv 29 \equiv 39$$

o que, evidentemente, é falso. Os restos da divisão por 9 são diferentes. E isso demonstra-se muito bem, pelo Cuisenaire.



2

8

14

20

$$2 \equiv 8 \equiv 14 \equiv 20 \text{ (módulo 6)}$$

E em lugar de ensaiarem com

$$D = d + d + d + r$$

ensaiam

$$D = r + d + d + d.$$

E têm esse direito.

Algumas crianças encontram o truque para as classes de equivalência justamente no Cuisenaire: começam pelo resto

Patrício parte da classe 0 e tira sempre 1:

$$
\begin{array}{ccccccc}
6 & \equiv & 12 & \equiv & 18 & \equiv & 24 \\
5 & \equiv & 11 & \equiv & 17 & \equiv & 23 \\
4 & \equiv & 10 & \equiv & 16 & \equiv & 22 \\
3 & \equiv & 9 & \equiv & 15 & \equiv & 21 \\
2 & \equiv & 8 & \equiv & 14 & \equiv & 20 \\
1 & \equiv & 7 & \equiv & 13 & \equiv & 19
\end{array}
$$

As diferenças mantêm-se iguais, as classes de equivalência subsistem.

Ele é esperto: é um bom truque.

Depois Pedro parte daí para as progressões.

0 - 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36 - 42 - 48 - 54 - 60 etc.

Era uma nova pista. E é também a tábua da multiplicação.

Depois chegámos ao módulo 2, que permite classificar os números pares e os números ímpares.

Os primeiros divididos por 2 dão um quociente exacto.

Os segundos dão resto 1.

Podem adicionar-se as classes de equivalência

$$\dot{1} + \dot{1} = \dot{0}$$

A soma de dois números ímpares é um número par.

As classes de equivalência dão uma nova luz sobre a paridade.

SISTEMAS NÃO DECIMAIS

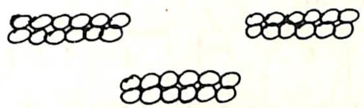
Podemos abordá-los também através do calendário, porque ele faz parte da vida.

Mas há outras coisas bem interessantes na vida, por exemplo, apanhar seixos (ou as dúzias de ovos).

São fáceis os sistemas não decimais. São até infantis, dado que as crianças os assimilam muito bem. Melhor que os adultos, que foram tão bem condicionados ao sistema decimal que perdem a bússola logo que saem da sua gaiola. Pode-se jogar sem perigo com estes sistemas, porque se dispõe de uma referência sólida imposta pela vida: o sistema decimal. Ele não se diluirá nunca na atmosfera. É bom que as crianças se sintam à vontade em todos os sistemas. É fácil, desde que se parta da vida. Além disso, na vida, os pequenos ingleses, canadianos, americanos são obrigados a dar-se conta dele. Mas também em França é fácil. Sobretudo, quando se regressa da pesca.

Espalhem a vossa colheita sobre a mesa. Têm, por exemplo, 36 seixos. Não os vão contar, um por um, não, agrupam-nos por dúzias.

E isso dá:



3 dúzias

Têm três dezenas e 6 seixos e formam três dúzias e zero. Podem fazer um quadro:

dúzias	seixos não incluídos
3	0

Assim, 36 escreve-se 30 no sistema de base 12:

10	
3	6

12 (*)	
3	0

Se dispuserem de 65 minutos, temos:

sessenta	minutos isolados
1	5

ou

horas	minutos
1	5

donde 65 se escreve

60	
1	5

Voltemos ao calendário:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

(*) Trata-se de uma notação de minha invenção. Creio que devemos escrever 30_{12}, o que segnifica 30 no sistema 12.

Há quatro semanas e 3 dias, que se podem escrever:

semanas	dias
4	3

ou

7	
4	3

E é 31 no sistema decimal que se escreve por convenção, sem precisar a base.

31 e não

10	
3	1

Mas o calendário disposto verticalmente é ainda mais legível no sistema 7, porque só as semanas e os dias estão no seu lugar.

1	8	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
2	9	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
3	10	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1
4		1 1	1 1 1	1 1 1 1
5		1 1	1 1 1	1 1 1 1
6		1 1	1 1 1	1 1 1 1
7		1 1	1 1 1	1 1 1 1

7		7		7		7	
1	3	2	3	3	3	4	3

é

10	17	24	31

Esta constatação é muito interessante porque as crianças que inventam o tabuleiro de xadrez de cem casas no sentido «vertical» compreendem melhor, por que razão encontram

1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	12	22	32	etc.				
3	13	23 ...						
4	"	"						
etc.	"	"						

Isso permite-lhes uma melhor assimilação do tabuleiro de xadrez de 100 casas «horizontal». É preciso desmistificar o sistema de 10 e não deixar pensar que ele nos caiu do céu e que é um mistério.

Além disso, podemos deixá-las fazer muitas tentativas com os sistemas, porque, caros professores de cálculo, o que é este trabalho, senão a divisão?

— *Não, a divisão é isto:*

$$\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

— *Sim, sem dúvida, mas vimos que também era:*

$$7 + 7 + 7 + 7 + 3 = 31$$
$$\text{e} \quad 31 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$$
$$\text{e} \quad (4 \times 7) + 3 = 31$$
$$\text{e} \quad 31 - (4 \times 7) = 3$$

$$d + d + d + d + r = D$$
$$D - d - d - d - d = r$$
$$(d \times q) + r = D$$
$$D - dq = r$$

E eis como isto

$$\begin{array}{c} 7 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \end{array} \\ 31 \end{array}$$

se trata da divisão.

Mas então o sistema decimal é a divisão? É claro que sim.

É mesmo, parece-me, a divisão de um número pelo polinómio.

$$10^n \ldots\ldots + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$$

É evidente que se chega rapidamente aos quadros de 3 casas, de 4 casas, etc.

$$\begin{array}{c} 7 \\ \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \end{array} \\ 66 \end{array} \qquad \text{é} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \end{array} \\ 459 \end{array}$$

Explicação:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7^3 & 7^2 & 7^1 & 7^0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \end{array} \\ 459 \end{array}$$

e o exercício é muito interessante. É na divisão que mais preocupações temos com os restos.

Nós éramos privilegiados, porque tínhamos arranjado um tesoureiro para os 1, um tesoureiro para os 10, etc... Vejamos os seus nomes:

Filipe, para 1000	Bouffant, para 100
Patrício, para 10	Brient, para 1

Depois chegámos a

Filipe	Bouffant
10^3	10^2
Patrício	Brient
10^1	10^0

Esta personificação das potências tem interesse porque, quando mudamos de sistema, reencontramos os nossos rapazes.

Sistema 7

Filipe	Bouffant	Patrício	Brient
7^3	7^2	7^1	7^0

Sistema 2

2^3	2^2	2^1	2^0

Naturalmente que, também tínhamos pacotes, sacos, malas para as potências *1*, potências *2*, potências *3*, mas rapidamente os abandonámos.

Não insisto senão para dizer que, para nós, depois, 1966 era claro.

10^3	10^2	10^1	10^0
1	9	6	6

Nota: Os canadianos têm o sistema binário na vida corrente.

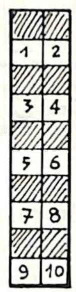
galão	meio galão	quartilho	pinta	meio litro
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

QUADRICULADOS

Esta actividade foi uma revelação para mim. Nunca teria pensado nela! O que demonstra que, se o professor se contenta em mostrar o que sabe, em manter o grupo nos únicos caminhos que conhece, há, para as crianças, uma falta considerável a superar.

E é de todo o interesse inspirar confiança à criatividade infantil, que, felizmente, ultrapassa o mestre e os seus estreitos limites.

Um dia, recebemos a brochura de Serge de Buzet, sobre o rectângulo. As crianças apoderaram-se da ideia e começaram a fazer exercícios sobre quadriculados. E, de repente, Jaime escreveu números no interior. E iniciou-se a aventura rica e original dos quadriculados.



Examinámos esta criação de Jaime e vimos que havia a coluna dos ímpares e a coluna dos pares. (A paridade agrada muito às crianças.)

Vejamos agora o que fez Robin: escreveu os 100 primeiros números, como se quisesse fazer um tabuleiro de xadrez de 100 casas, mas coloriu a vermelho todas as casas pares, o que dá faixas brancas e encarnadas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Robin, muito contente com o seu feito recomeça:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Mas, desta vez, com 36 casas.

Verifica-se, é simples, que a paridade dá uma estrutura de faixas.

Cristiano, atraído pela beleza das criações de Robin, lança-se no caminho aberto por Jaime. E, de repente, o que é que se descobre? A estrutura do tabuleiro de xadrez.

Como foi?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

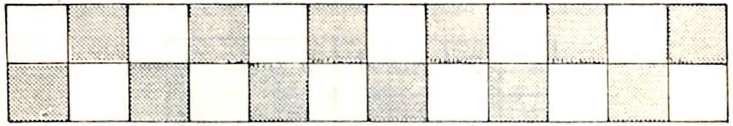
Enquanto que para o quadrado de 10 por 10 e o quadrado de 6 por 6, os pares eram agrupados em faixas, agora isso altera-se. Põe-se a questão, mas não há resposta, pelo menos imediatamente.

Como se faz? Como se faz?

E Robin cria:

1		3		5	
	2		4		6

Ao observar esta criação, descobre-se que começa por um branco e termina por um encarnado, porque há um número exacto de pares (branco-encarnado). Ora, os pares conhecem-se, porque se usaram as réguas Cuisinaire. Recordo-vos a famosa igualdade referência de Remi.



$$\text{branco} + \text{encarnado} + b + e + b + e + b + e =$$
$$= e + b + e + b + e + b + e + b$$
$$\text{ou } 4\,(b + e) = 4\,(e + b)$$

Que coincidência extraordinária: aqui, temos outra vez pares «branco-encarnado» que se aproximam, neste 15 de Fevereiro, aos pares apercebidos em 15 de Outubro.

Apercebemo-nos que, para o quadrado de 7 por 7 de Cristiano, ao alto, há 3 pares completos e o resto 1. O quarto par está dividido em dois, enquanto que, para 6 e 10, os pares se mantinham completos.

— Então?

— Então, quando a linha de cima é um número par, temos faixas e, quando é ímpar, temos um tabuleiro de xadre porque o que está isolado dessarranja a linha seguinte.

Mas a construção de Cristiano só nos tinha dado isto. Efectivamente, Robin e Miguel exclamaram:

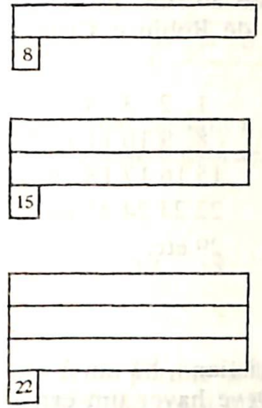
— Mas, a criação de Cristiano é a mesma coisa que o calendário. É exactamente igual.

— Como?

Porque na primeira fila do calendário também há 7 folhas.

— Ah! sim, é verdade.

E as crianças descobrem que, também aqui, como no calendário, o 8 está sob o 1, porque há uma fila e 1.



Reencontramos as classes de equivalência: 8 - 15 - 22 são da mesma família: a família de resto 1 (quando se divide por 7) (módulo 7).

É a família de Jaime.

Podemos escrever:

$$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv 22 \pmod{7}$$

ou seja:

1 equivalente a 8 equivalente e 15 equivalente a 22 (módulo 7).

Encontramos exactamente o que havíamos encontrado no calendário. Verifica-se que não há necessidade de nos preocuparmos com a assimilação. Basta avançar à toa, há sempre comparações.

E eu prevejo que, em breve, nos contentaremos em avançar sem nos preocuparmos em meter as coisas na cabeça. Ao fim de 15 anos de pesquisa ininterrupta, a colheita seria prodigiosa (para ingressar no Ciclo. E porque não continuar depois no primeiro e segundo ciclo, numa ordenação contínua dos conhecimentos adquiridos).

Mas ainda não chegámos ao fim. Efectivamente Pedro compara as duas criações de Robin e Cristiano:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25 etc.					

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29 etc.						

Põe a questão:

— Como é que, para Cristiano, há um 8 sob o 1 e, para Robin, há um 7 sob o 1. Deve haver um erro.

O 7 não é da família de Jaime, posto que a família de Jaime é 1 - 8 - 15 - 22. E aqui, temos 1 - 7 - 13. Porquê?

— Pois bem, descubram.

— Eu sei porquê, diz Patrício. É porque, para Robin, o módulo é 6, não é o módulo 7.

— Ah, sim! diz Pedro. E para o outro quadrado de Robin (10×10), a família de Jaime é 1 - 11 - 21 - 31, etc.

Então a classe encontra-se, durante uns bons momentos, submersa nos quadriculados (com um regresso ofensivo dos módulos).

$$1 \equiv 5 \equiv 9 \text{ (módulo 4)}$$
$$2 \equiv 8 \equiv 14 \text{ (módulo 6)}$$

Eis um exemplo de quadriculado.

A família $\dot{1}$ é 1 - 5 - 13 (resto 1, módulo 4).

A família $\dot{2}$ (a de Fanfan) é 2 - 6 - 10 - 14 (resto 2, (módulo 4).

A família $\dot{3}$ (Patrício) é 3 - 7 - 11 - 15.

A família $\dot{0}$ (Robin) é 0 - 4 - 8 - 12 - 16.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

E as crianças não tardam a descobrir uma lei para os quadriculados: a classe $\dot{0}$ está sempre no fim. Por exemplo, para 6, temos:

$\dot{0}$ - 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36.

É a classe zero, porque a linha de cima se encontra completa e depois não resta mais nada. Assim, no quadriculado 4×4, temos uma fila de 4, ou seja 4. 2 filas, ou seja 8, etc.

Digos às crianças que a classe $\dot{0}$ tem um nome, a classe dos múltiplos. Aqui, os múltiplos de 4, são 0 - 4 - 8 - 12 - 16, e os múltiplos de 6 são 0 - 6 - 12 - 18.

Então Jaime diz:

— *Eu compreendi, começa-se sempre por zero.*

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
0. 3. 6. 9. 12
0. 7. 14. 21.

E é então a grande aventura dos múltiplos, tão agradável para aqueles que se preocupam com as tábuas de multiplicação (não é o meu caso).

Algumas crianças avançam até aos múltiplos de 12, 16, 19, etc., nada os detém. O que é interessante é que isso parte delas e que demonstram uma coragem muito grande. Enquanto que...

Vêem como derivámos do rectângulo de Serge para os quadriculados, para a paridade, para os múltiplos. Mas eis que voltamos atrás, à luz das últimas descobertas.

1	2
3	4
5	6
7	8

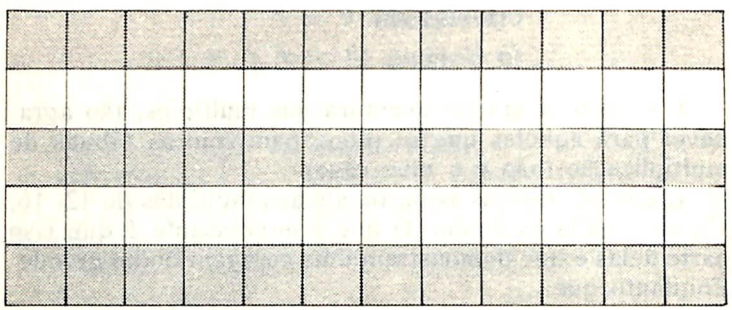
Mas é o que Jaime fizera!
2 - 4 - 6 - 8 são múltiplos de 2.
E 1 - 3 - 5 - 7.

É a classe $\dot{1}$, a classe de Jaime, a classe de equivalência $\dot{1}$ (módulo 2).

Porque no módulo 2 não há senão 2 classes: os múltiplos (a classe $\dot{0}$) e a classe 1, ou ainda a família - resto 1 (módulo 2).

O que vem lançar uma nova luz sobre a paridade.

Mas, entretanto, o rio corre. Iríamos parar nos quadriculados? Em breve lhes vamos fugir. Mas, por enquanto,



as crianças estão a colorir horizontalmente as filas e já não escrevem os números.

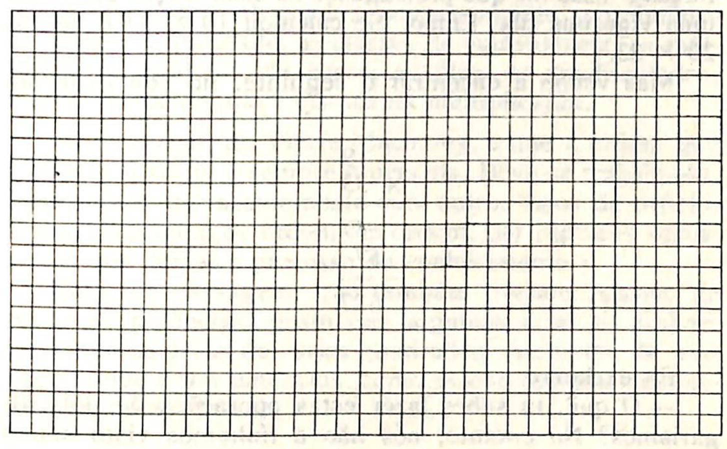
Alguém pergunta:
— *Quantos quadrados há?*
— *Descubram.*
— *Pois bem: 12 quadrados na linha de cima. 5 filas iguais fazem 60.*
— *Sim, porque se pode dizer 5 vezes 12 (12 × 5) = 60.*

Assim, decobriram sozinhos, sem que ninguém lhes perguntasse nada, o cálculo da área do rectângulo.

No início da minha carreira, eu explicava a lição uma única vez (infeliz daquele que não estivesse presente no dia da lição). E, com uma simples demonstração tão clara aos meus olhos, era obrigatória a sua compreensão.

Enquanto que agora, após um exercício «inumerável», tudo é perfeitamente assimilado.

E eis que Patrício inventa algo. Faz um quadriculado sobre as duas páginas do caderno de matemática. E desta vez, ele não os pinta.



Robin segue a mesma via: quadricula uma folha. Calcula: 20 filas de 33 faz 660 quadrados.

Custo a crer. 660 quadrados uma única página.

Mas tenho de me render à evidência.

É claro que eu sabia calcular $20 \times 33 = 660$.

Mas eu ignorava o que isso podia representar, na realidade, porque só o sabia abstractamente. Mas as crianças, essas saberão o que representam 20×33 quadrados.

A ausência de cor permite-nos reencontrar a propriedade comutativa da multiplicação, tendo em atenção também as filas verticais.

Há assim um progresso para a abstracção, porque se passa sem o apoio da cor.

E, um dia, abordar-se-á o rectângulo nu, em toda a sua pureza.

Será possível, com a continuação, que a fórmula $S = C \times l$ seja introduzida no decorrer da vida escolar da criança. Mas far-se-á sem prejuízo, porque terá tido, anteriormente, um duplo exercício: exercício com os símbolos e exercícios com o rectângulo. E a lei será então perfeitamente aceite e assimilada.

Eu fiz batota. Robin não me tinha apresentado 20 filas de 33, mas 19 de 33; pensei que estaria acima das suas forças e disse-lhe que prolongasse os seus traços até obter uma vigésima fila. Então, ele calculou 10×33 e depois 20×33.

Mas venho a encontrar o seguinte, no seu caderno:

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 33 \\ \hline 57 \\ 57 \\ \hline 627 \end{array}$$

Eu exclamo:

— O quê, tu sabes fazer estas operações de dois algarismos? No entanto, nós não a tínhamos visto senão

uma vez e apressadamente, quando Patrício me tinha perguntado como se faziam.

— Sim, eu tinha compreendido e agora vou continuar. Descobriu então que

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array} \quad \text{etc.}$$

$$\text{até} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \times\ 33 \\ \hline \end{array}$$

Evidentemente que vários camaradas o seguiram. Se bem que se tenha posto de parte o quadriculado para abordar a multiplicação.

Chegou o momento, creio, de felicitar o mestre. Em lugar de manter, forçadamente, o rebanho dentro do quadriculado, matéria tão rica, deixa-os à vontade. Será preciso muita coragem para isso? Claro que não. Claro que não. Agora, sei que voltaremos a esse assunto, tal como voltámos à paridade (a propósito das classes módulo 2).

Assim, a partir de Serge de Buzet e sem fazer o que ele fizera, tínhamos abordado, sucessivamente, o tabuleiro de xadrez, a paridade, as classes de equivalência, os múltiplos, os módulos, os pares, as filas, os quadriculados, a área do rectângulo e eis-nos na multiplicação.

«O essencial, diz Pierre Macherey, é que a ordem que a ciência institui, é sempre provisória. Deve-se trabalhá-la, confrontá-la incessantemente com outros tipos de ordem. É esta passagem de ordem em ordem, por rupturas sucessivas, que define o processo do conhecimento.»

Noto, de passagem, que também tivemos ocasião de rever as potências, posto que algumas crianças tinham calculado as áreas de vários quadrados. Assinalei, de passagem, que eram potências, como as que tínhamos conhecido no início do ano.

Mas ninguém se interessou por elas, ninguém se deteve nelas. Não insisti, porque agora tenho confiança: sei que, necessariamente, no futuro, se produzirão uma ou mais repetições.

É preciso constatar, caros camaradas, que me modifiquei muito. Outrora, teria feito parar toda a classe e teria pisado e repisado esta tecla, até ter a certeza que as crianças sabiam tudo. E só depois teria continuado. Porque, procedendo dessa maneira, não teria feito outra coisa e teria, sobretudo, parado o motor que se encontra em cada uma das minhas crianças. E ter-se-iam tornado veículos móveis mas não automóveis. Então, teria de as rebocar, como fazia antigamente, com muito custo. E quando eu parasse, elas paravam também sobre as suas pequenas rodas de ferro, incapazes de fazer, por si próprias, um movimento.

Felizmente que isso terminou. Deixei de bater com toda a força numa tecla, depois noutra, depois noutra. Não, eu não me preocupo, deixo que se trate livremente de vários assuntos. A vida se encarregará de os ir ordenando.

Não faço parar a classe, porque tenho confiança. Já não tenho medo de não cumprir o programa, porque suprimi o programa. Sim, tenho confiança; se as crianças tiverem toda a liberdade de proceder a um exercício inumerável, a colheita será rica. E, se o seu apetite se torna maior, então posso estar tranquilo e deixá-los avançar.

O essencial na 2.ª classe, é de abordar, uma primeira vez, e solidamente, as noções, a partir da «intervenção» do meio ambiente ou a partir de criações das crianças, num clima afectivo que contribua para a fixação dos conhecimentos.

As adivinhas em X

As crianças gostam de brincar com as incógnitas. Deve dar-se-lhes essa oportunidade. Eis algumas equações:

$$x + 10 + x = 100 \longrightarrow x = 45$$
$$100 + x + x = 108 \longrightarrow x = 4$$

Não sei como isso se passa, mas a passagem de um termo para outro membro faz-se sem dificuldade.

Exemplo: $90 + x = 100$.

Pode-se tirar 90 à esquerda, na condição de se tirar 90 à direita.

Com a continuação, mostrei os meus cálculos e demonstrei que era necessário tirar uma mesma quantidade para conservar o equilíbrio; mas já tinham assimilado isso.

$$x + x = x \longrightarrow x = 0 \text{ (Pedro)}$$

Fracções

Tínhamos de chegar a elas, posto que tínhamos equações do tipo

$$x + x + x + x = 1$$

E como se tinha uma experiência da divisão, dividimos o cubo de valor 1 em 4 e isso fazia $\frac{1}{4}$

Então surgiu:

$$x + x + x + x + x + x + x = 7 \longrightarrow x = 1$$
$$x + x + x \ldots\ldots + x = 48 \longrightarrow x = 1$$

$$x + x + x + x + x + x + x + x + x = \frac{9}{10}$$

$$\longrightarrow x = \frac{1}{10}$$

$$x + x + x + 1 = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

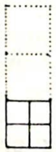
$$x + x + x = \frac{9}{9} \longrightarrow x = \frac{3}{9}$$

$$x + x + x + x = \frac{20}{20} \longrightarrow x = \frac{5}{20}$$

$$13\,x = \frac{13}{12} \longrightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$x + x + x + x = \frac{1}{3} \longrightarrow x = \frac{1}{12}$$

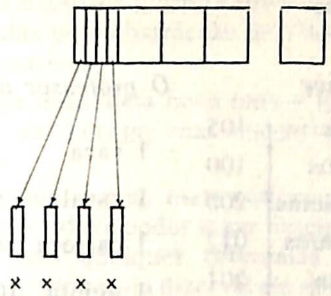
Como se procedeu aqui? Fizemos torres de distribuição. Tomámos $\frac{1}{3}$ de barra de chocolate e cortámo-la em 4 (ficticiamente), o que dava $\frac{1}{12}$



Evidentemente que se trata do processo clássico e o professor habitualmente faz essa demonstração uma ou duas vezes no quadro. Mas aqui o exerício foi muito mais longo, muito mais rico, muito mais extenso. Tivemos muito tempo para fazer tentativas.

$$x + x + x + x = \frac{5}{4} \qquad x = \frac{5}{16}$$

Como se processa isso? Desenhamos os $\frac{5}{4}$



e fazem-se torres de distribuição, cortando cada quarto em 4 bocados, o que faz

$$\frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{16}\right)$$

O primeiro quarto fornece um bocado para cada um dos x e como há 5 quartos, dá:

$$\frac{5}{16}$$

Evidentemente que o processo é infantil, a prova é que as crianças de 7 anos a compreendem e acham fácil. O que efectivamente é.

Problemas

Inventam-se muitos problemas e, este ano, começamos com facturas fictícias.

Eis algumas:

Pedro Deve

100	vacas	105
150	porcos	100
200	bicicletas	200
200	pássaros	012
240	corvos	201
200	pombos	014
200	casas	021
	Total	653

O professor deve

1 vaca	30 francos
1 cavalo	60 francos
1 carroça	80 francos
1 quinta	100 francos
	270 francos

Trabalhámos bem com as facturas, porque as crianças gostam deste assunto.

Eu tinha facturas verdadeiras na minha pasta (não facturas «preparadas anteriormente», mas «a posteriori»). E as crianças referiam-se, espontaneamente, a «Joana compra» e ao «Télex-consumidor». E verificávamo-las à noite.

Naturalmente que não teria pensado nisso sozinho. Elas tinham uma longa experiência das tabelas de preços, que faziam parte da sua vida de todos os dias. E eu nem pensava em esclarecê-las por uma reflexão crítica da classe. Mas em que mundo vivo eu, então? Eu vivo baseado em antigos métodos de trabalho, enquanto que as crianças possuem mil informações novas, nas quais eu não penso, por falta de clarividência. É preciso partir da vida, sim, mas da vida delas.

E pode dizer-se que o educador que não vê televisão, fica, muitas vezes, aquém. Enquanto que, a partir das apostas das corridas de cavalos, das aventuras para crianças, se podem inscrever bastantes coisas, noções importantes, nos espíritos infantis. nos espíritos infantis.

Os problemas expostos permitiram-nos encontrar estruturas, já abordadas pela abstracção de Cuisenaire ou pelas invenções imaginativas.

Creio que seja uma ideia nova para a Escola Moderna. Eu passava por um herege; mas encontrei um apoio em Bachelard.

Bachelard afirma que as matemáticas são realizantes. O espírito da criança deve poder jogar livremente sem qualquer restrição, sem qualquer referência obrigatória ao concreto, no céu, poder-se-ia dizer. E eis que, subitamente, pousa e se passeia por terra como se nunca a houvesse deixado. E como Anteu, retoma força apoiando-se no real. Engel escrevia também que todas as criações matemáticas do homem encontravam a sua ilustração na natureza.

Mas é perigoso querer formar o espírito matemático assente somente sobre problemas reais.

Isto não quer dizer que seja necessário afastá-los, pelo contrário. Mas os problemas reais, naturais (refiro-me aos que se impõem verdadeiramente à classe sem a solicitação do professor), não são assim tão numerosos. E se quiséssemos alimentar-nos só disso, seria um malogro. É, de resto, a causa do malogro do cálculo vivo fora das pequenas classes. Não se sai das «idas às compras», gira-se num ciclo. Vamos à matemática! à matemática!

Querer fazer compreender o cálculo referindo-se a coisas da vida é introduzir quantidades de componentes parasitas que perturbam a compreensão. Enquanto que para a captação da estrutura da divisão
$2x = 24 \longrightarrow x = 12$ é mais simples.

E é certamente, por esta razão, que as crianças de 7 anos preferem os problemas de álgebra «porque é mais fácil».

Então parece claro: a vida *no início* com todas as suas ricas conexões... e *à chegada.* Mas, entre os dois, um desapego extremo. Pensai nos treinos dos futebolistas entre os jogos. Os jogos são a *vida* rica com os seus múltiplos aspectos (camaradas, adversários, público, árbitros, competição), mas o treino (o exercício) é muito mais rigoroso e é no silêncio e na austeridade dos campos de treino que se constrói uma *vid ı* com mais êxito.

Passo sobre uma aventura de lápis de diferentes cores que seria um pouco longa para contar aqui, e no decorrer da qual se falou de vectores, de estatística, e de máquina de calcular. Expliquei o seu funcionamento e a 2.ª classe e mesmo a primeira seguiram com paixão esta história de cartões perfurados. E lembraram-me os cartões perfurados do Seguro Social, que têm de assinar na escola e os recibos de electricidade. Portanto, isto faz parte da vida.

Descobrimos que em todos os problemas existem quatro elementos.

Há primeiramente as *informações*,
depois as *questões* que se podem formular,
depois o *programa* que se estabelece,
depois as *respostas* que se obtêm.

Temos, portanto, 4 sectores de exercício e, em relação a cada criação, podemos criticar os diversos aspectos: insuficiência de informação, irrelevância das questões, erros dos programas, erros das respostas.

Enunciados

Alguns enunciados são bastante reveladores da personalidade da criança.

Eis, por exemplo, os textos de Patrício, a quem se tinham destinado as caixas de aprendizagem, porque era jovem e «pouco permeável à experiência».

Mas ele trabalhara com tanto ardor que fora capaz de se juntar ao grupo dos investigadores. Faz experiências no plano dos enunciados e é o primeiro a rir das suas insuficiências. Toda a classe ri também. Mas eu apercebo-me que há no seu trabalho algo que se pode aproveitar.

Além disso, não se pode sempre aproveitar algo de todas as coisas? E quantas vezes é proveitoso o trabalho sobre os dados fornecidos pelo próprio. Se Patrício anunciou os seus próprios problemas, é deles que se deve partir, para que ele progrida. É a sua criação, o seu pensamento que é necessário esclarecer.

«Tenho um copo, parto-o, sou obrigado a comprar um outro.»

Discussão

$1 - 1 + 1 = 1$

Há um «pacote de zero» (dois oponentes).

«Tenho uma caixa, ela tem um buraco. Meto-lhe água, a água torna a sair pelo buraco.»

Insuficiência de informação.

— *Quanta água metes?*

— *1 litro.*

Ah! bom. Então temos $1\ l - 1\ l = 0\ l$ *ou* $0\ l + 1\ l - 1\ l = 0\ l$.

Verdadeiro também para x litros.

— *Tenho um cão, vendo-o, já não resta nada:* $1 - 1 = 0$.

— *Tenho um gato. Ele come ratos.*

Insuficiência de informação. Não se pode perguntar nada, porque não há informações suficientes. Que estes problemas assentem sobre os números 1 e 0 não tem importância. Se houvesse 1585 *l* seria a mesma coisa. Os números têm pouca importância. O essencial é que a noção de números simétricos seja bem abordada.

Produto cartesiano de um conjunto por si próprio

(«Tábuas» de Pitágoras.)

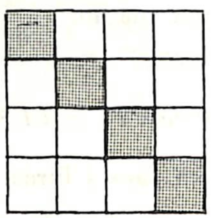
Este ano, e porque tinha 5 canhotos declarados (e 3 escondidos), tomei consciência da importância de uma boa «espacialização». A fim de a favorecer, permiti um exercício importante no espaço (em ginástica: na aula e no pátio) e um exercício importante no plano das estruturas abstractas. Para este último ponto, introduzi os xadrez de 1, 2, de 3, e mesmo de 4 peças (rei, rainha, torre, bispo). Organizámos jogos e para tal tivemos de criar eliminatórias, como as de Rugby de Teledomingo (sempre a vida).

Havia 4 jogadores: Pedro, Remi, Miguel, Robin. Como organizar os jogos com as brancas, depois com as pretas?

Fui estúpido: devia tê-los deixado ensaiar para montar esta estrutura. Em lugar disso, propus-lhes o quadro seguinte, que foi bem aceite, porque o desenhámos a giz no chão.

BRANCAS

PRETAS



Sucessivamente, os jogadores pretos destacam-se do grupo da esquerda para vir assegurar as suas partes brancas e contra as outras 3. Por exemplo, Pedro que não encontra Pedro vem apresentar-se diante de Remi, depois Miguel e, por fim, Robin.

Mimámos estes encontros sucessivos avançando nas casas desenhadas no chão e, tendo à mão as peças brancas

ou pretas. Isso foi perfeitamente compreendido. (Na sequência examinámos os resultados de futebol de Trégastel.)

Fiquei espantado ao ver como as crianças compreendiam facilmente aquilo. Achavam muito natural.

Deste modo, quando, algum tempo depois, Miguel inventou a sua «tábua de Pitágoras» da adição, pudemo-nos referir imediatamente ao que já tínhamos descoberto.

E desta vez, os jogadores eram: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

E a relação já não era «fazer um jogo com» mas «adicionar a».

Observámos a criação de Miguel e como ele tinha colorido os pares a encarnado, verificámos as diagonais (aqui são os duplos que estão em diagonal — na verdadeira tábua de Pitágoras com a relação x são os quadrados).

Relation +	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Miguel tinha compreendido tão bem esta história de diagonais que começou um segundo quadro, começando pelo meio.

Remi tentou imitar Miguel, mas manifestamente não tinha compreendido nada. Mas quinze dias mais tarde, recuperou o tempo perdido, inventando a verdadeira tábua de Pitágoras, após uma discussão sobre as classes zero, ou seja, as classes de números que, divididos por um outro número, não dão resto. Tínhamos trabalhado com os múltiplos e até com os múltiplos comuns descobertos por Jaime. Com efeito, tinha havido uma crise de múltiplos e tinha-se escutado o que cada um tinha encontrado.

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	*24*
0	3	6	9	12	15	18	21	*24*				
0	4	8	12	16	20	*24*						
0	6	12	18	*24*								
0	8	16	*24*									
0	12	*24*										
0	*24*											

No dia seguinte, Remi retomou *todos* os múltiplos e descobriu a tábua de Pitágoras. E, no dia a seguir, recomeçou, mas, desta vez, verticalmente. Compararam-se as duas tábuas: eram iguais.

Somente uma tinha os números 8×17 e a outra 11×15.

O que não é de admirar: é como o tabuleiro de *xadrez* (1) com a diferença que, aqui, a relação é «multiplicar por», em lugar de «reencontrar» ou de «adicionar», como no quadro de Miguel.

(1) Desta vez a referência é o tabuleiro de xadrez.

No ano passado, eu tinha proposto às crianças achar também as tábuas de — e de ÷ ou, se se quiser, o produto cartesiano dos primeiros números por si próprio (—, ÷). Mas, este ano, não proponho nada: não faço mais do que aceitar tudo. Se ninguém mais seguir a pista senão eu, o professor, que a vejo abrir-se, não tem importância. Se não fizéssemos o que eu tinha entrevisto, é porque estávamos a fazer outra coisa. E viríamos a recuperar o assunto um dia ou outro.

Discussão de operações

Isso era para mim uma coisa totalmente inesperada. Foi Jaime (uma vez mais) quem introduziu as incógnitas nas suas adições. Esta simples modificação abriu-nos vastas perspectivas. (É sempre assim: é sempre um simples passo ao lado que permite sair do mundo em que se vivia e aceder a um novo mundo. E, numa classe criadora, há muitas ocasiões de «passo ao lado», quer pela sequência de uma modificação voluntária, quer por consequência de um erro, quer por sequência de uma transposição ou de uma aproximação de duas coisas que ainda não se tinham visto juntas. Se bem que nunca se ande à roda: apanha-se sempre a tangente de uma maneira ou de outra.)

Eis
$$\begin{array}{r} h\,6\,7 \\ +\ \ h\,x\,7 \\ \hline 9\,8\,4 \end{array}$$

$h + h = 9$. Ora, não existe o algarismo 4 1/2. Portanto, há um número que irá juntar-se à coluna seguinte. Mas seria necessário que $1 + 6 + x = 18$. Nesse momento, seria necessário que x = 11. Ora x não pode ir senão até 9.

Para que seja possível, é preciso que um 8 substitua o 6,

$$\text{seja}\qquad \begin{array}{r} h\ 8\ 7 \\ +\ h\ x\ 7 \\ \hline 9\ 8\ 4 \end{array}$$

$$\text{Vejamos ainda}\qquad \begin{array}{r} h\ i\ h \\ +\ h\ i\ h \\ \hline 25\ 9\ 2 \end{array}$$

Não serve, porque para i + i, seria necessário juntar um número para fazer 9. E, como h + h = 2, isso não é possível.

— *Mas, não,* disse Robin (o autor), *h é 6.*

— *Ah! bom. Então i é 4. Mas h + h (6 + 6) não dá 25.*

Mas o autor não se deixa perturbar por tão pouco.

— *Mas não, o i é 9 e há um número a juntar a h + h.*

Mas para 1 + h + h = 25, Robin é obrigado a confessar-se vencido. E além disso, 25 ultrapassava 19. Mas, por duas vezes, Robin tinha sabido responder à crítica. São tais discussões sobre o fundo das coisas que aguçam a inteligência e permitem compreender bem as operações.

As crianças gostam destas discussões sobre as operações que conduzem sempre a surpresas.

10, é «um, zero»

A propósito de surpresa, eu tive uma, e de que tamanho! Foi Jaime, o da 1.ª classe, quem a provocou.

Pôs-se a escrever os dez primeiros números nos diversos sistemas. E depois de alguns exercícios, ele construiu o quadro seguinte:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Système 2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
S 3	1	2	10	11	12	20	21	222	100	101
S 4	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22
S 5	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20
S 6	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
S 7	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13
S 8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
S 9	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11
S 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S 11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De que se trata?

É simplesmente o quadro da divisão dos 10 primeiros números (salvo 1). E escreve-se o quociente e o resto (ou os restos).

Assim 5 ÷ 4 é 1 e o resto é 1.

Portanto, 5 escreve-se 11 no sistema 4.

No sistema 2, *5* dividido por 2 dá *2* e resta 1, mas *2* dividido por 2 dá *1* e resta 0, 5 escreve-se então 101.

Mas eu aceitava muito bem que 2, 3, 4, se escrevessem 10 nos sistemas 2, 3, 4.

Mas quando vi que 10 se escrevia 10 no sistema 10, fiquei surpreendido.

Assim este dez tão carregado efectivamente (10, a nota positiva na escola — o 10 de paus — uma nota de dez mil francos, etc.) era um banal «um, zero». Que surpresa provocada por um rapaz da 1.ª classe. E que vantagem para ele, poder navegar tão facilmente no oceano da numeração!

Para terminar com o sistema de numeração, eis algumas invenções de Patrício e de Cristiano.

$$\begin{array}{cccc}
230 & 560 & \underbrace{1000000000} & 2 \\
\boxed{4\,|\,8} & \boxed{2\,|\,0} & \boxed{7\,|\,4} & \boxed{0\,|\,0\,|\,1} \\
928 & 1120 & \overbrace{7000000004} & 1
\end{array}$$

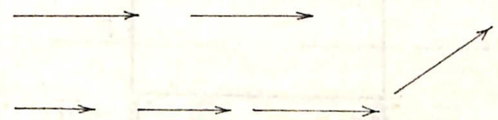
VECTORES E COORDENADAS

Ao regressar de Perpignan, estava bastante decidido a lançar os vectores para o crisol da classe. A este propósito, é necessário que eu esclareça a minha posição. Até aí, tinha praticado quase unicamente (95 %, pelo menos) o ensino «a posteriori». Não tinha proposto nada, por assim dizer. Mas tinha aceite tudo. Tinha-me espantado com o que as crianças nos tinham permitido abordar. Mas, no fim do ano, quis sondar as possibilidades das crianças em dois ou três campos determinados. Tendo já obtido certezas sobre a possibilidade de uma pedagogia da criação na 2.ª classe, queria ter outra certeza sobre o nível de compreensão das crianças. E estava pronto a examinar a atitude das crianças perante certas estruturas que não eram habitualmente do seu nível.

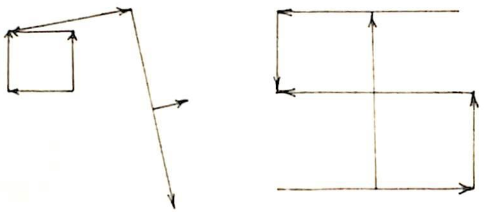
Mas, em relação aos vectores, não tive de fazer qualquer esforço. Com efeito, os desenhos das minhas crianças representam frequentemente os filmes de «cow-boys». E as setas voavam de todos os lados.

Disse-lhes: «Poder-se-ia desenhar unicamente setas, às quais se poderia dar o nome de vectores.»

Eis a primeira criação de Pedro.



São todas horizontais, excepto uma.
Não são do mesmo comprimento.
Eis outras criações:



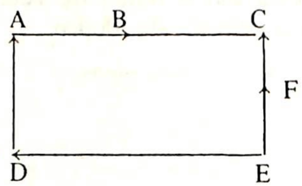
Há vectores que se tocam, que se seguem, que estão em ângulo recto (perpendicular), que são iguais, que são iguais em comprimento, mas não orientados no mesmo sentido.

Eis:

«É uma roda, os vectores partem todos do mesmo ponto. Mas são desiguais. Se fossem iguais, poder-se-ia fazer uma roda de ferro. É como o ponteiro do despertador.»

Então examinámos o ponteiro do despertador e as suas diversas posições.

Assim, partindo de uma construção em abstracto, desembocámos no real. E isso é constante (e repito-o constantemente para os camaradas que disso duvidam).



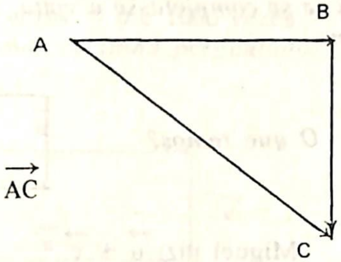
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DA}$ (mesmo comprimento, mesmo sentido)
mas
$\overrightarrow{ED}$ diferente de $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ (sentido contrário)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{ED}$$

Não apresento aqui todas as criações porque elas são muito numerosas.

Vejamos a de Patrício:

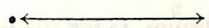
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



AB + BC = AC é falso do ponto de vista do comprimento, mas

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

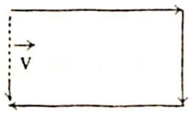
é certo do ponto de vista do deslocamento.



$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (vector nulo)

$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ $\quad$ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$

Pedro disse que $\vec{0}$ é um neutro, não modifica nada.
Miguel disse:
— *E se se fizesse assim, o que é que teríamos?*
— *Teríamos uma adição de vectores, teríamos* $\vec{v}$.



Mas se se completasse a volta, teríamos zero? É claro que sim.

O que temos?

Miguel diz: $\vec{u} + \vec{v}$

— *Sim, e que mais ainda?*
Pedro responde $+ (-\vec{u})$ e o outro é $-\vec{v}$.
Temos então

$$\vec{u} + \vec{v} + (-\vec{u}) + (-\vec{v})$$

Jaime diz: há opostos; podemos fazer grupos de zero.

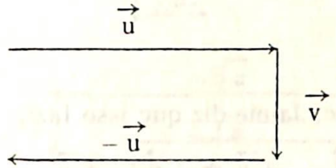
$$\vec{u} + (-\vec{u}) + \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \text{ (vector nulo)}$$

Imediatamente Patrício exclama:
Pois bem, fizemos isso em Morlaix. Procurávamos a gare, passámos por quatro ruas e encontrámo-nos no mesmo ponto. Tínhamos feito um vector nulo (sempre o recurso à vida).

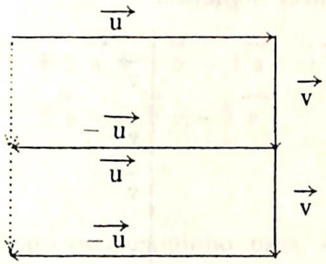
Mas Miguel quer saber mais. Ele diz:
— *Se fizéssemos duas vezes, isso daria ainda* $\vec{0}$?
Evidentemente que sim.

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v} + \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$
$$\text{ou } 2\,(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$$

E 3 vezes $= \vec{0}$ e 4 vezes $= \vec{0}$ e 1000 vezes $= \vec{0}$.
— *E duas vezes, como eu tinha perguntado?*



O que é que dá? Vejamos:

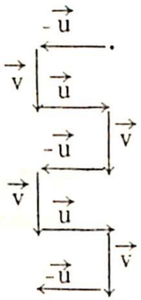


Dá $2\,\vec{v}$.
Eu sabia-o mesmo sem o desenho, diz Pedro, por causa dos pacotes de zeros.

$$(\vec{u} - \vec{u})$$

$$\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = 2\,\vec{v}$$

— *Ah! bom, e isto?*

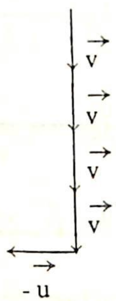


Pedro diz:
Há opostos e, Jaime diz que isso faz:

$$4\,\vec{v} + 2\,\vec{u} - 3\,\vec{u}$$

$$= 4\,\vec{v} - \vec{u}$$

Poder-se-ia fazer somente:



Ter-se-ia ganho tempo.
Mas Remi diz:

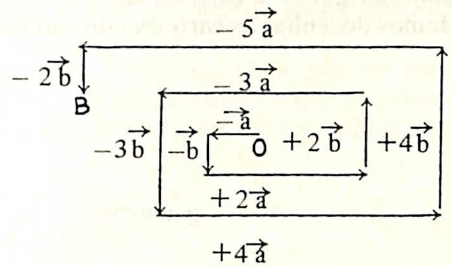
— *Ter-se-ia podido começar por* $-\vec{u}$, *ter-se-ia chegado ao mesmo ponto.*
Pode verificar-se na classe.

— *Sim, a adição dos vectores é comutativa:*

$$4\,\vec{v} - \vec{u} = -\,\vec{u} + 4\,\vec{v}$$

Mas, Miguel, decididamente apaixonado pelos vectores, diz:

— *E agora, o que é que temos?*



$$-\,\vec{a} - \vec{b} + 2\,\vec{a} + 2\,\vec{b} - 3\,\vec{a} - 3\,\vec{b} + 4\,\vec{a}$$

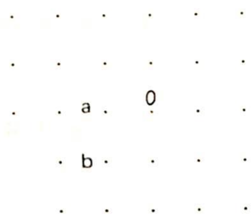
$$+\,4\,\vec{b} - 5\,\vec{a} - 2\,\vec{b} = -\,3\,\vec{a}$$

Discussão. Todo este caminho para — $\vec{3}$ A.
Não valia a pena!

Verificamos na classe e vemos Daniel, que vai do ponto O ao ponto B, fez no total a mesma deslocação que eu, que giro à volta das mesas da aula.

Ao olhar o livro de Papy, proponho substituir as carteiras da aula por pontos.

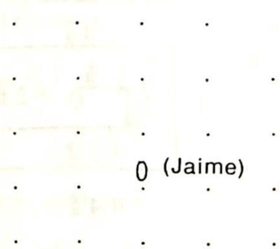
Vejamos o que dá:



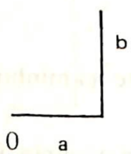
É o início de toda a nossa experiência das coordenadas cartesianas, quando tomamos as carteiras como pontos e já não as coordenadas no quadro, como tínhamos feito no ano passado.

E o ponto origem é a carteira de Jaime, da 1.ª classe.

E podemos desenhar as carteiras de cada um no quadro.



E cada um pode procurar as suas coordenadas, procurando os seus *a* e os seus *b*, como no livro de Papy.



Mas, posto que eu falava de vectores, volto à relação de Chasles.

Passo por alto os exercícios, as descobertas, todo o processo que nos permitiu chegar tão próximo da «relação de Chasles», que digo a mim mesmo:

«Porque não?»

Eis três pontos

. . .

A B C

Mas, para compreender a sequência, é preciso que vos diga que eu tinha levado à classe uma crítica de meu filho Hervé. Ele tinha dito:

— *Tu não me vais fazer crer que, quando alguém quer ir de A a B, se diverte a passar por C.*

Patrício exclama:

— *És tu quem tem razão. No outro dia, a minha mãe queria comprar um fogão para fazer crepes, na loja de ferragens. Mas, estava distraída: tinha chegado à farmácia, e disse:*

— *O que é que eu faço aqui? Tenho de voltar atrás.*

Assim, para ir de um ponto a outro, há duas vias: a via directa e a via distraída. Portanto, três pontos

. . .

A B C

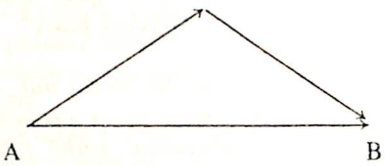
E seis animais (2 em cada ponto)

		Directa		Distraída
Partimos de A	o rato vai para C	$\overrightarrow{AC}$	=	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
	o ouriço vai para B	$\overrightarrow{AB}$	=	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
Partimos de B	a tartaruga vai para C	$\overrightarrow{BC}$	=	$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
	o urso vai para A	$\overrightarrow{BA}$	=	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
Partimos de C	a raposa vai para B	$\overrightarrow{CB}$	=	$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
	a galinha vai para A	$\overrightarrow{CA}$	=	$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

— *Oh, senhor professor, para a rota distraída, há sempre, no meio, a mesma letra. Porquê?*

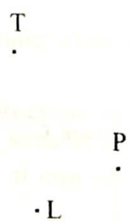
Procurámos e compreendemos que para ir de um ponto a outro se pode ir directamente.

Se se passa por um terceiro ponto, a cabeça do primeiro vector torna-se o pé do segundo vector. E assim temos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$.



Filipe (1.ª classe) diz: *«O meu pai é motorista de camiões. Faz Trégastel - Lannion, passando por Perros. Mas, algumas vezes, vai directamente de Lannion a Trégastel.»*

Examinemos:



(De Lannion há também Trégastel directo e Perros-Guirec directo. Ah! ah! ah!)

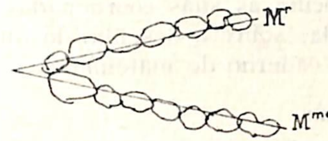
$$\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PT}$$

Vêem como as crianças procuram sempre reinvestir no real o que se construiu no imaginário.

Mas, por vezes, há obstáculos.

Eu conto:

«A Sra. Le Bohec e eu procurávamos um buraco de lavagante nos rochedos. Foi a Sra. Le Bohec quem o encontrou, mas eu não me pude juntar a ela, porque havia água.»



— *Sim, nadando.*

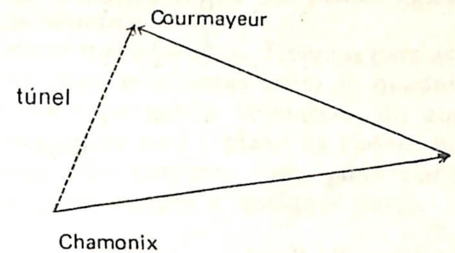
— *Não, a água estava demasiado fria.*

— *Era preciso lá ir de qualquer maneira. Ah! ah! ah!*

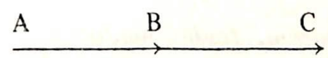
Patrício: *«O meu pai queria ir andar de barco. Mas tinha de dar a volta pelo dique, embora só tivesse de atravessar dez metros.»*

Jaime: *«Eu, quando for a Itália, vou pela estrada directa, porque quero passar pelo túnel de Monte Branco.»*

— *É isso, pode-se passar através dos obstáculos em lugar de os rodear.*



Robin: *«Algumas vezes, muda-se de camioneta em B.»*



E faz-se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ em lugar de $\overrightarrow{AC}$.

— *E mesmo quando se pede boleia. O meu irmão...*
— *Sim, sim, a Relação de Chasles, encontra-se por toda a parte na vida.*

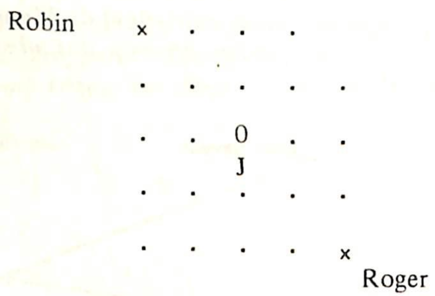
Neste momento, Miguel conduz-nos aos pontos do livro de Papy e às carteiras que se podem representar por pontos. Eu substituo os *a* e os *b* do livro por *x* e *y*.

Cada um procura as suas coordenadas.
Vêm mostrá-las sobre o desenho do quadro. E escrevem-nas no seu caderno de matemática.

Há descobertas.

— *Eu*, diz Robin, *estou como Rogério para Jaime, mas estou do outro lado.*

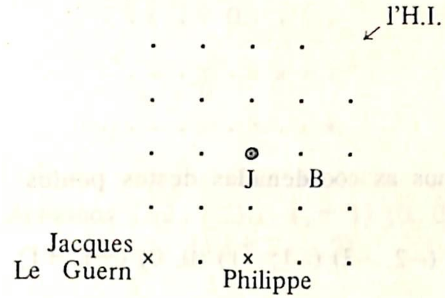
— *Verifiquemos. Vão os três para a vossa carteira. É verdade.*



— *É simétrico*, diz Remi.
Fico confundido. Mas, então, para onde me arrastam eles? Eu grito:

— *Parem, parem, tenho medo!*
Eles riem:
— *Não, não, vamos continuar.*

E cada um vai procurar o seu simétrico em relação a Jaime Bonny. Mas Jaime Le Guern descobre que ele não tem simétrico.



Mas Patrício:
— *Tens, tens, é o Homem Invisível.* (Ele tinha visto um filme na televisão. E assim introduz o imaginário.)
— *Também eu sou simétrico do Homem Invisível.*
Discussão.
— *Mas, não, é Jaime Le Guern.*
— *Sim, mas eu, não é em relação a Jaime Bonny, é em relação a Brient* (B).
— *Oh! isto complica-se. Se nos pomos agora a mudar as pontos de simetria.*
Naturalmente que o fazemos. E vamos para as carteiras, para verificar. Mas as crianças saem do quadro das suas carteiras e falam da minha secretária, do aquecimento e dirigimo-nos assim para o plano da classe, no qual eu, evidentemente, não pensava. Sim, pode caminhar-se à toa, pois chega-se sempre a qualquer parte.

Família de pontos

Mas eis que alguém faz a observação de que Jaime Le Guern - Pedro - Jaime Bonny - Gilberto estão na mesma linha.

```
. . . .
. . . x .
. . 0 . .
. x . . .
x . . . .
```

Estudámos as coordenadas destes pontos

(−2, −2) (−1, −1) (0, 0) (+1, +1)

É que os y são semelhantes aos x.

Eu digo:

— É a família y = x. Então os da primeira fila, que também estão em linha recta, que família são?

Procuremos os seus números (digo indiferentemente os seus números ou as suas coordenadas para os habituar ao termo).

Robin (— 2 + 2)	Pascal (— 1 + 2)
Didier (0, + 2)	Marcos (+ 1 + 2)

Não é difícil, é y = + 2.

```
R P D M
x x x x
. . . . .
. . 0 . .
. . . . .
. . . . .
```


Mas querem saber: e a outra diagonal?

```
x . . .
. x . . .
. . x . .
    0
. . . x .
. . . . x
```

Achamos (−2, + 2) (−1, + 1) (0, 0)
(+ 1, − 1) (+ 2, − 2)

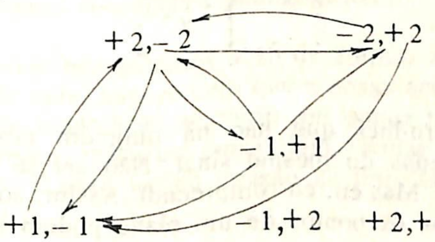
É a família dos opostos: y é o contrário de x. Eu digo y = — x. É aceite e mesmo compreendido. Mas eu acrescento que, para que seja mais completa, em lugar de (0, 0), se deveria dizer (+ 0, — 0).

«Ou — 0, + 0, diz Patrício. *É a mesma coisa, posto zero.»*

Eu aprecio.

Neste momento, caminhávamos igualmente no campo da teoria dos conjuntos. E na sequência de um trabalho sobre a selecção dos sapatos da classe (sapatos altos, sapatos baixos, de lona, não de lona, de cabedal, de borracha), escrevi no quadro coordenadas de pontos, para ver o que iria dar. Eu não esperava encontrar o que encontrámos e sobretudo tanta compreensão (principalmente da minha parte).

Eis o que deu:



Cada um veio estabelecer uma relação entre os pontos que queria.

A relação indicada atrás é a de Miguel. Ele escolheu os seus pontos, por serem opostos (ou simétricos).

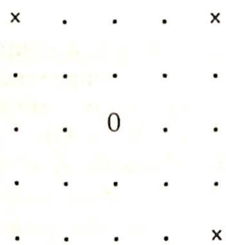
— *É fácil, já a conhecemos, é a relação* $y = -x$.

Robin: *Eu escolhi outros pontos:*

$(+2, -2)$ $-2, +2$ $+2, +2$

É fácil, só temos 2. Verifiquemos no quadro.

Ele poderia ter incluído um outro — 2, — 2.

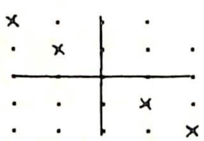


— *Eu,* diz Pedro, *tomo todos os pontos, salvo + 2 + 2. Porquê?*

— *Porque este não tem sinal — e todos os outros têm.*

— *E (+ 1, — 1) (+ 2, — 2) (— 1, + 1) (— 2, + 2)?*

Verificamos no gráfico.



Demonstro-lhes que não há ninguém nos sectores de coordenadas do mesmo sinal. Não sei se eles compreenderam. Mas eu, eu compreendi. Assim, aos 45 anos, descubro que os pontos de um plano podem ser unidos

por uma relação. E um mesmo ponto pode entrar em relações diferentes.

— *Como, tu não sabias?*

— *Não, só estava informado. Agora, que tornei a descobrir, sei-o definitivamente.*

É uma loucura o que aprendo com as minhas crianças. Isso verifica-se porque, em lugar de seguir passivamente como um professor, devo manter-me alerta para responder às questões.

Devo confessar-vos que estou um pouco receoso quando vejo para que caminhos me deixei arrastar. Felizmente que posso afirmar. — Não, não é uma loucura, posto que a cada instante se pode chegar ao real, ou seja, às posições das carteiras na classe. Isso dá-me confiança.

Mas o que descubro é a facilidade das crianças neste campo. Elas situam-se bem na classe, no pátio de recreio, no quadro, nos seus cadernos. Isso é positivo. E temos sempre, se há necessidade disso, a referência do real.

O que não impede que eu trema. Tento sondar as possibilidades de compreensão das crianças desta idade.

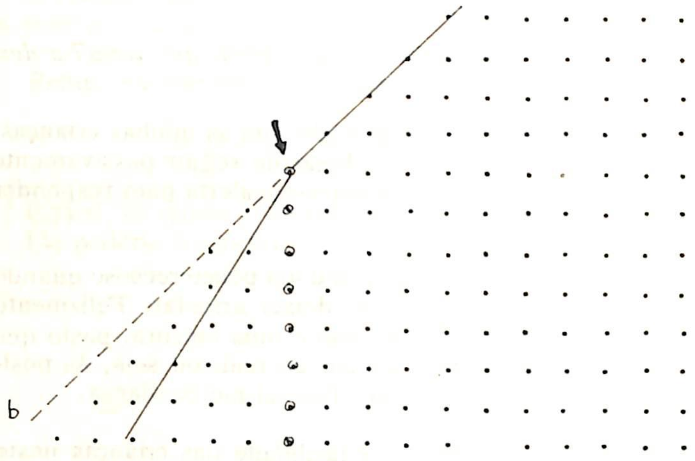
Mas entrevejo o infinito e digo para mim:

— Se as crianças podem abordar isto aos 8 anos (com a ajuda do real), não estarão os programas desordenados do princípio ao fim?

E as nossas concepções pedagógicas?

Felizmente que estamos a 15 de Junho. Só mais três semanas de aula. Espero bem que a nossa actividade matemática de exploração se torne um pouco mais lenta e que possamos respirar um pouco. Sim, tornou-se um pouco mais lenta. E paramos na criação de 0,0 (Jaime Bonny, 1.ª classe).

Reproduzo este desenho no quadro e os comentários começam:



Patrício: *Isso não está certo. Devia ter-se continuado sempre em linha recta (linha ponteada desenhada por mim, PLB).*

Filipe: *Devia ter chegado até lá (ponto b PLB).*

Pedro: *Não, devia ter feito a diagonal até ao canto de baixo.*

Jaime (2.ª classe) *põe-se a contar até 8: ele diz 8 pontos encarnados (eu tinha desenhado todos os pontos a encarnado, no quadro). Então, sem nada dizer, desenho traços que unem os pontos, a branco.*

Pedro conta-os; só há 7.

— *Afinal são 8 ou 7. Tínhamos que nos entender.*

— *É 8, é 7, é 8, é 7.*

Tornam a contar 8 pontos, 7 traços.

— *Porquê?*

Remi: *Porque há um ponto em cada extremidade.*

— *E então?*

— *E então, isso não completa os pares.*

— *Que pares?*

— *Os pares encarnado-branco (coincidência, é a terceira vez que temos de nos preocupar com pares encarnado-branco — réguas de Remi, quadrados de Robin).*

— *Como fazer, então?*

— *É necessário suprimir um ponto encarnado em cima.*

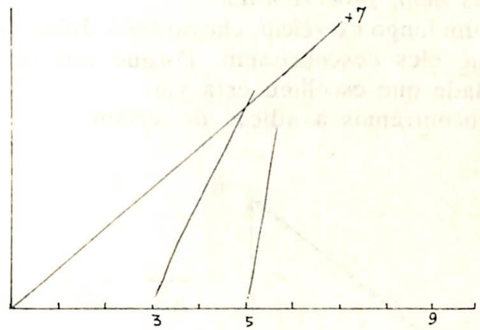
— *Antes em baixo, que é a linha dos zeros.*

E eis como caímos novamente sobre os nossos passos e sobre a linha das ordenadas nulas, que é na aula, a linha: Patrício, Miguel, Jaime, Brient, Sérgio. E sobre as coordenadas derivadas do livro de Papy.

Jaime diz: *E o ponto + 7, posto que se encontra no 7 das linhas do zero.*

Miguel: *Ele está sobre a linha dos pontos + 7. Como Miguel, Didier, Marcos e Pascoal se encontram sobre a linha de + 2.*

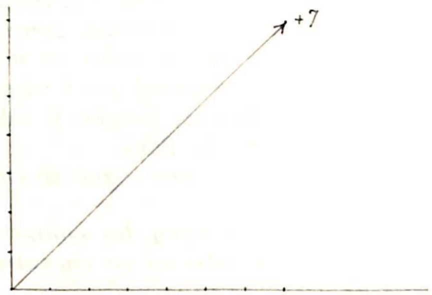
Rectifico agora o risco traçado por Jaime, tornando-o rectilíneo em todo o seu comprimento.



E para lhes pregar uma partida, digo: vou reencontrar este ponto: + 7. Mas parto, sucessivamente, das abcissas + 3, + 5, + 9. E evidentemente que nunca atinjo o ponto. Isso inquieta-os. Mas depressa encontram a solução. E, após uma curta discussão sobre a linha dos zeros vertical, acham que é o ponto + 7, + 7.

Mas como é que se chega a esse ponto partindo de Jaime (0, 0)?

Directamente. Apoio-me sobre esta palavra.



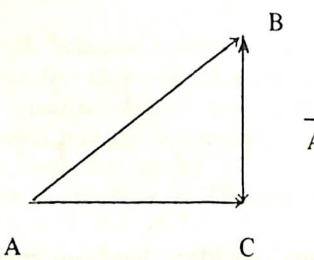
— *DIRECTAMENTE?*

— *Oh! talvez haja, contudo, uma linha indirecta.*

— *Pois bem, procurem-na.*

Após um longo exercício, chegaram à única via, que eu queria que eles descobrissem. Porque nos encontramos na sociedade que escolheu esta via.

E reencontramos a adição do vector.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Para todos os pontos dá-se, então, primeiramente

$\overrightarrow{AC}$ (x) e $\overrightarrow{CB}$ (y)

No dia seguinte, eu tinha convidado um inspector da 1.ª classe. Estava muito desconfiado e muito céptico. Não se fiou nas aparências. Interrogou, investigou. Mas a demonstração foi brilhante.

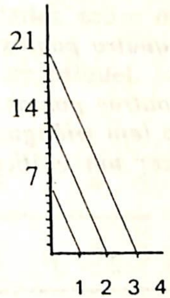
Sim, as crianças compreendem o x e o y.

Sim, sabem reconhecer o seu lugar no plano do quadro. E o lugar dos seus camaradas. Sabem achar as coordenadas de um ponto.

Conhecem a recta $y = x$ e a recta $y = -x$.

Sabem porque os escolheu Jaime Bonny como origem e não Jaime Le Guern (só se teriam obtido coordenadas positivas). Demonstração irrefutável. O inspector rendeu-se.

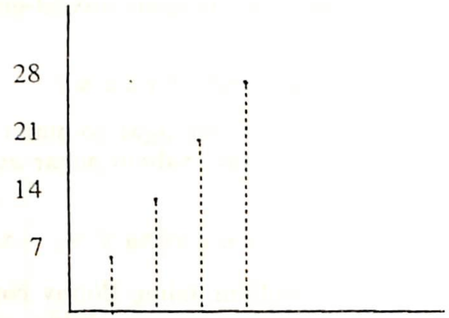
Mas eis uma criação de Pedro.



Fico atrapalhado.

O que é isto? A que nos poderia levar? (Muito simplesmente ao teorema de Thales.) Mas eu não quis falar de tal coisa às crianças.

Robin retomou a criação de Pedro:



— O primeiro ponto é o 7, o segundo ponto é 14, o terceiro ponto é 21, o quarto é 28.

Então digo: *Vamos fazer um quadro.*

primeiro	*segundo*	*terceiro*	*quarto*
7	14	21	28

E o que dão estes quatro pontos?

— Uma linha recta.

Poderíamos tomar outros pontos.

— Os do calendário (em triângulo de Junho).

— Bom, iremos fazer um gráfico. Mas, primeiro faremos o quadro.

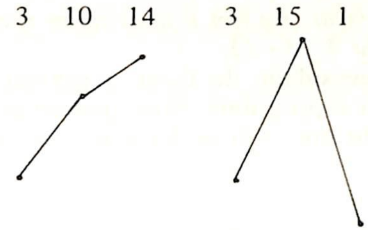
x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	15

E o que dá isto?

— Uma viragem.

— Pode dizer-se uma curva.

— Dêem uns números quaisquer.



Oh! a linha tem uma cabeça cómica.

E o jogo prossegue. Fabricamos, assim, pássaros que voam, borboletas, barcos.

Mas Remi diz: 15 - 10 - 5.

— Reparem, esses não são uns números quaisquer.

— É uma família. É o módulo 5.

— O que é que isso dá? — Reparem, uma recta.

Remi dá então 1 - 8 - 15 - 22.

Ainda uma família. É a famíla de «resto 1», a classe 1 (módulo 7).

O que dá mais uma recta.

Então é a crise dos gráficos. Há primeiramente tentativas para o bom aproveitamento das linhas do caderno; para o lugar das unidades sobre os eixos. Em resumo, para a precisão.

Vejamos a criação de Miguel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	10	1	3	3	3	4	8	12

Temos um gráfico.

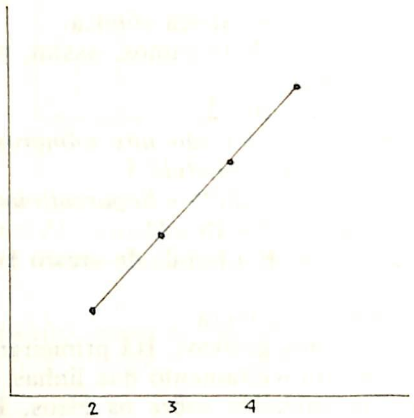
— *Sr. professor,* diz Jaime, *é como no hospital, com a temperatura dos doentes.*

Mais uma vez, o regresso à vida.

— O primeiro número é o primeiro dia, o segundo número o segundo dia, etc.

— Sr. professor, no fim é uma linha recta, porque se trata da família 4 - 8 - 12.

Não há necessidade de fazer o gráfico: vê-se que é uma recta sobre o programa. Mas, quanto às rectas, certas crianças sentem que isso poderia passar para a origem.



Chegamos então a $\frac{1}{2}$

Já não dizemos a fila de números, mas sim a abcissa x e a ordenada y.

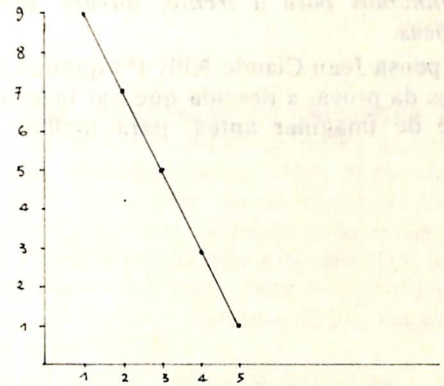
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0

(Miguel)

O que é uma extensão no abstracto de uma realidade concreta.

Mas eis que Jaime propõe um programa esquisito:

x	1	2	3	4	5
y	9	7	5	3	1



— Também aí se pode continuar a descer.

— Piedade! Oh! não, não vão fazer isso?

— Sim, sim.

E descobre-se que o sexto ponto é — 1. (Como no termómetro.)

— E qual é o módulo desta vez?

Remi encontra imediatamente:

— É o módulo — 2.

— E para Miguel, era o módulo — 1.

E se agora se começam a interessar pela inclinação das rectas! É melhor ficar por aqui. Além disso, o fim das aulas está próximo.

A experiência não foi assim tão gratuita, pois nessa época, depois de termos visto um quadrante solar, durante uma excursão da escola, observámos, hora após hora, a marcha da sombra da parede no pátio. E a parede dos gabinetes e a parede da classe faziam perfeitamente as vezes de eixos ortodoxos.

E seguimos bem a marcha da sombra no solo. E compreenderam-na muito bem no quadro.

E como é que o gráfico da temperatura de um doente não é dinâmico? Não, podem acreditar-me. Nunca, seja o que for, é gratuito. E recebem-se, por vèzes, melhor as verdades por se estar preparado para elas.

— *Caminhemos para a frente, haverá sempre aplicações práticas.*

É o que pensa Jean Claude Killy (*) quando mima com a mão, antes da prova, a descida que vai fazer e que tem necessidade de imaginar antes, para melhor a atacar.

(*) Campeão do Mundo de ski.

TEORIA DOS CONJUNTOS

Eu não era um fanático da matemática moderna. E não ia, de certeza, precipitar-me sobre as crianças e fazê-las devorar os diagramas de Venn. Mas estava decidido a ser objectivo e a aceitar da matemática moderna tudo o que surgisse na nossa direcção, tudo o que nos fizesse progredir. Evidentemente que a matemática moderna não é só a teoria dos conjuntos. Mas é também a teoria dos conjuntos. E se ela nos pode ser útil, é preciso recebê-la com um grande sorriso.

Fiel à minha decisão de partir das criações das crianças, aguardei e nada aconteceu neste sentido antes de 26 de Março, dia em que Didier da 1.ª classe, apareceu com imagens que começou a seleccionar, espontaneamente.

Examinámos a sua selecção, que se tornou a referência da classe e verificámos que havia três espécies de imagens: os homens, os animais e as paisagens, e que certas imagens pertenciam, ao mesmo tempo a dois desses grupos. Havia portanto uma intersecção entre os conjuntos. O que sabíamos desde o ano passado, graças a Silvano. (E também no ano passado, a selecção tinha sido imposta pela vida.)

Não vou fatigar-vos com estes diagramas, que se encontram agora em toda a parte, a tal ponto que já se tornaram indigestos. Mas vou simplesmente dar-vos a conhecer algumas reflexões e descobertas a este propósito.

Pode dizer-se que, desde que se trata de fazer uma selecção, de classificar, a Teoria dos Conjuntos pode ser muito interessante. O que sucede frequentemente.

Só a partir de 30 de Abril é que o ensaio experimental sobre as selecções se efectuou verdadeiramente. Patrício seleccionou cartas de jogar. Remi seleccionou imagens de soldados, etc. Dificilmente me continha para não propor às crianças que se fizessem selecções na aula. Mas veio por si só: houve uma selecção: calções curtos, calções compridos. Depois passaram para as blusas, sapatos, cores dos olhos, dos cabelos, etc. Nada de sensacional, a não ser a espontaneidade.

E depois, uma manhã, Patrício disse-me:

— Esta noite pensei numa selecção. Venham cá Jaime, João Francisco, Miguel, etc.

Todos se olhavam. Qual podia ser a relação desta vez? Olhavam para os tecidos, óculos, sapatos, sardas. Nenhuma das relações que nós aplicávamos para a selecção efectuada por Patrício se «ajustava».

Então, disse-nos: — *Juntei todos aqueles cujo nome começava por Le: Le Guern, Le Gall, Le Calver, Le Maréchal, Le Meur, etc.*

Que revelação! Interessámo-nos então nas iniciais dos apelidos dos nomes próprios, dos dois ao mesmo tempo e de todas as coisas mais ou menos despropositadas.

Era uma espécie de jogo de adivinhas.

Exemplo de gráfico:

Alunos da aula

	Presentes	ausentes	Total
GRANDES	I I I I I I I I I	I	10
PEQUENOS	I I I I I I I I I I I I I	I	14
Total	22	2	24

Fiquei espantado: bastava uma simples relação para dividir o mundo e as relações eram de toda a ordem. Mas eu ainda não tinha esgotado todas as fontes de surpresa.

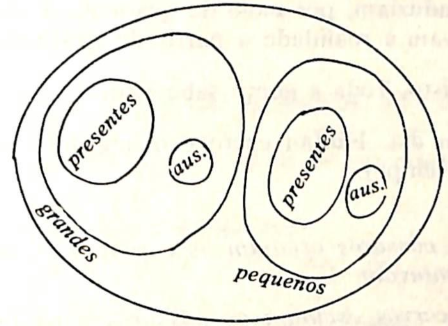
Passámos naturalmente aos quadros, de que já tínhamos experiência e aos gráficos.

DERIVAÇÃO GRAMATICAL

	homem	mulher
1		e
vários	s	es

Exemplo de gráfico

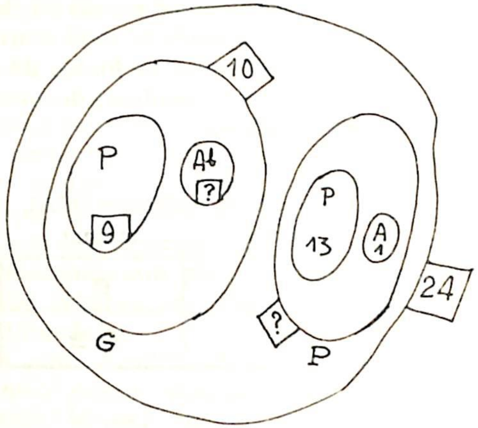
Alunos da aula



A partir daqui fazem-se os problemas. Exemplos:

Pode perguntar-se, por exemplo:
Quantos alunos grandes faltaram hoje?
Quantos pequenos há na aula?

As crianças inventaram gráficos e era necessário fazer perguntas e calcular totais, diferenças, etc.



Nada de sensacional, a não ser que isto partia das crianças, que traduziam, por meio de gráficos, a realidade ou reencontravam a realidade a partir de gráficos.

Não insisto. Toda a gente sabe isto.

Mas um dia, Fanfan escreve o seguinte texto (5 de Julho, era tempo):

1 — *Os pássaros escutam os corvos e os melros e os esquilos cantavam.*

2 — *O corvos escutam os pássaros e os melros dançavam com os esquilos.*

3 — *Os melros escutam os esquilos e o melro canta com os corvos.*

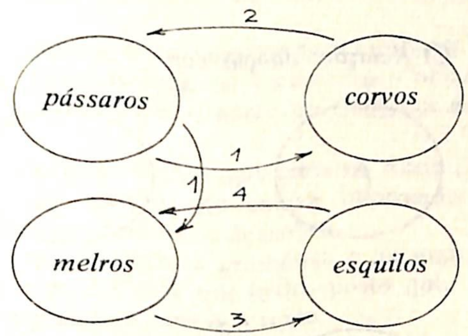
4 — *Os esquilos escutam os melros e os pássaros cantavam com o corvo.*

É complicado!
Para ver claro, é necessário fazerem-se gráficos. Há três relações:

A relação: escutar
B relação: cantar com
C relação: dançar com

Eis os gráficos destas três relações:

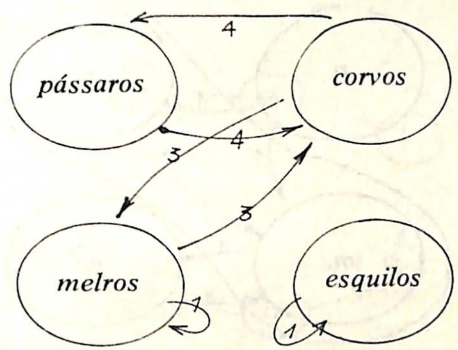
A) *Relação: escutar*



Constatações: o 1 e o 2 são simétricos, o 3 e o 4 também.

Para o 1 há duas setas a partir de pássaros.

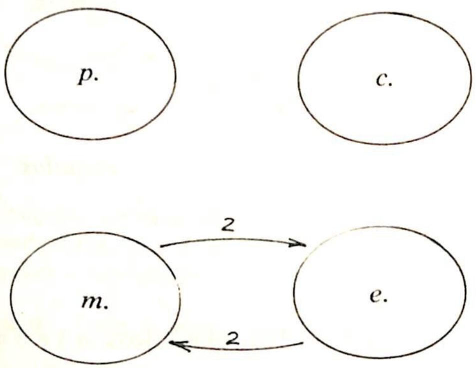
B) *Relação: cantar com*



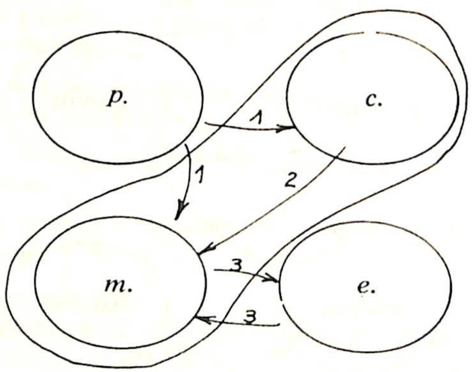
Observações:
Em 1, os esquilos cantam com eles (reflexividade).
Em 3, 1 melro e todos os corvos cantam em conjunto.
Em 4, 1 corvo e todos os pássaros cantam em conjunto.

Para «cantar com» há duas setas mas não para «escutar». Pode escutar-se alguém que não nos escuta.

C) *Relação: dançar com*



Escutar



Mas Remi critica os nossos gráficos.
Os melros e os corvos também são pássaros.
Então é preciso recomeçar.

Mas ainda há dificuldades.

Será que os pássaros que escutam os melros são: todos os pássaros não-melros ou todos os pássaros não-melros e não-corvos?

Surgem então as noções de união e conjuntos complementares.

E surge, sobretudo, o significado da palavra «outro». O conjunto complementar da União dos Conjuntos dos Melros e dos Corvos tem o nome de Conjunto de Outros Pássaros.

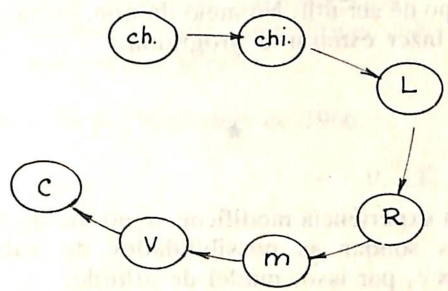
Que perspectivas se me apresentam! Assim, o verbo estabelece uma relação. Eu estava informado. Agora, sei-o, é diferente. Tive de o descobrir.

Há uma ligação entre a gramática e as matemáticas. Um gráfico pode traduzir um texto, posto que, ao ler o gráfico, eu podia reencontrar o texto.

Eis uma outra invenção de Robin:

Os gatos apanham os cães, os cães apanham os lobos, os lobos apanham as raposas, as raposas apanham os carneiros, os carneiros apanham as vacas, as vacas apanham os porcos.

Relação: apanhar



Parece-me que é o *que* que aparece, ele assinala que há duas setas, é o lobo. O lobo apanha.

$$\longrightarrow \text{lobo} \longrightarrow$$

Oh! a minha cabeça! Venham as férias!

Compete-vos criticar todos os erros que eu aqui apresente. O que é certo é que, no próximo ano, a Teoria dos Conjuntos aparecerá antes de 20 de Março.

O que é certo é que me vai ser preciso estudar muito. Felizmente que posso contar com os meus camaradas.

★

Termino aqui a narrativa da minha experiência.

Evidentemente que não mencionei tudo. Não falei dos exercícios, omiti transições e prolongamentos das nossas descobertas. Não falei do cálculo vivo. Não assinalei, por exemplo, a compra de vários lápis, que nos fez ver claramente os vectores da estatística e que provocou exercícios sobre as operações de linhas.

Teria sido certamente preferível fazer um relatório mais completo, mais cuidado da nossa experiência. Mas estamos com pressa, porque o começo das aulas é depois de amanhã. Cada um deve receber a sua «bomba de plástico» a tempo de ser útil. No meio do ano, seria demasiado tarde para fazer estoirar o programa.

★

A minha experiência modificou-se no fim do ano. Nessa altura, quis sondar as possibilidades de «abordagem» das crianças e, por isso, mudei de atitude.

Insisto em repetir, porque não queria que estas três últimas semanas destruíssem o belo resultado obtido:

«Pode-se centrar um ano inteiro de ensino de matemáticas sobre a criação infantil.

★

Receio ter sido demasiado longo na minha demonstração. Mas, com efeito, talvez o meu resultado interesse a outros camaradas. Se, nas classes grandes, mais adiantadas, no Ciclo, no Liceu, na Faculdade, se quisesse também basear o ensino sobre as criações dos alunos, com o apoio do grupo (de que faria parte o professor), que resultados não se viriam a obter? E com alegria, com entusiasmo, com avidez!

Não existe uma hierarquia dos meios de conhecimento: informar (ler), ver, fazer, descobrir?

Ora, em certas Faculdades, há mais informação (não existem policópias). Permite-se ver pouca coisa (os anfiteatros estão repletos, os quadros longe, a letra pequena). Não se pratica o verbo *fazer* (nem sequer existem caixas didácticas). E, sobretudo, nunca se dá a ocasião de descobrir.

Ah! Se se desencadeassem experiências a todos os níveis!!!

Aí está, lancei o meu veneno. Posso retirar-me para o meu buraco.

Deixarei de sondar as possibilidades das crianças. Não correrei mais riscos. Contentar-me-ei, unicamente, em praticar a minha pedagogia «a posteriori».

Mas, de qualquer modo, uma última vez:

«Viva a matemática livre!»

Trégastel, 24 de Setembro de 1966.

P. LE BOHEC

COLECÇÃO TÉCNICAS DE EDUCAÇÃO

PUBLICADOS:

1 — *A Actividade Criadora na Criança*, de Robert Gloton e Claude Clero
2 — *As Técnicas Freinet da Escola Moderna*, de Célestin Freinet
3 — *A Criança e os Brinquedos*, de Jeanne Bandet e Réjane Sarazanas
4 — *A Classe em Acção*, de R. Dottrens
5 — *A Criança e a Expressão Dramática*, de Pierre Leenhardt
6 — *Conselhos aos Pais*, de Célestin Freinet
7 — *O Desporto na Escola*, de Georges Belbenoit
8 — *Da Dietética à Gastronomia. A Alimentação da Criança Pré-escolar*, de Robert Pierre Jolibois
9 — *A Aprendizagem da Leitura*, de Gaston Mialaret
10 — *O Ensino de uma Língua Estrangeira*, de H. Gantier
11 — *O Jornal Escolar*, de Célestin Freinet
12 — *Iniciação Musical dos Jovens*, de Madeleine Gagnard
13 — *A Ecologia na Escola*, de Jeanne Dalibois
14 — *Guia Prático de Alfabetização Funcional*
15 — *A Formação e o Aperfeiçoamento dos Professores na R. D. A.*, Siegfried Bär, Rudi Slomma, Wolfgang Richter
16 — *Linguística Aplicada e Didáctica das Línguas*, Denis Girard
17 — *Manual de Psicomotricidade*, Georges Lagrange
18 — *A Iniciação Desportiva da Infância à Adolescência*, de Robert Pierre Jolibois
19 — *A Escola e a Sociedade*
20 — *O Texto Livre — Escrita das Crianças*, de Pierre Clanché
21 — *Os Mudos Falam aos Surdos*, de Suzanne Mollo
22 — *A Criança Psicossomática*, de Léon Kreisler
23 — *As Novas Técnicas Didácticas*, de Bruno Ciari
24 — *A Matemática Natural na Instrução Primária*, de J. J. Dumora e a Comissão Matemática — Paul le Bohec

Título: *A Matemática Natural na Instrução Primária*
Autores: J. J. Dumora e a Comissão Matemática — Paul le Bohec
Editor: Editorial Estampa, Lda.
Tiragem: 3200 ex.
Acabou de imprimir em : 17 de Maio de 1978
Oficinas: Guide - Artes Gráficas, Lda.
LISBOA — PORTUGAL

Descrevem-se neste livro duas experiências do ensino da Matemática em duas aulas, uma do 1.° ano, outra do 2.° da primeira fase do ensino primário. Ambos os textos foram editados pelos «Dossiers Pédagogiques» de l'Éducateur, a revista do Instituto Cooperativo da Escola Moderna — Pedagogia Freinet.

Neles se descreve com vivacidade e método a experiência vivida por professores lidando com novos conceitos de Matemática e conceitos novos sobre o seu ensino. No dia a dia da aula, deixando as crianças descobrir, através do tenteio experimental, os conceitos que lhes servirão de base para o seu desenvolvimento escolar e mental, ora regressando ao programa ora saindo dele, ajudando a definir-se o interesse da criança e aproveitando a sua experiência concreta, estes professores descrevem-nos não só o percurso fascinante da apreensão da matemática pelos alunos — a transformação do concreto em abstracto —, mas também nos propõem um programa concreto de ensino desta disciplina.