

MATHEMATICAL PROPERTIES OF FRACTAL GEOMETRY AND ITERATIVE FUNCTION SYSTEM

Golib Rashidovich Berdiev¹, Adxamjon Ilhomjon o'g'li To'xtasinov², Farxod Nurali o'g'li Parmonqulov³

^{1,2,3}TUIT named after Muhammad al-Khwarizmi

E-mail: golibberdiev@gmail.com

Abstract: This article discusses the concepts of fractal and fractal geometry, as well as the design of rule-based properties in the construction of structural trusses used on top of buildings, based on the principles of fractal geometry and the analysis of the mechanical properties of these novel structures. Fractal based truss. This article presents a mathematical method for constructing geometric fractal shapes. The use of an iterative function system (IFS) has been proposed in the construction of fractal forms. We determined the fractal dimension of the constructed fractal form and showed its correlation with the mass value of the form.

Keywords: Fractal, fractal geometry, design, construction, architectural form, geometry, model, truss, modeling, IFS, generative systems.

Аннотация: В данной статье обсуждаются концепции фрактальной и фрактальной геометрии, а также расчет свойств на основе правил при конструктивном строительстве конструктивных ферм, используемых на крышах зданий, на основе принципов фрактальной геометрии и анализа механических свойств этих новых структуры. Фрактальная ферма. В данной статье представлен математический метод построения геометрических фрактальных фигур. При построении фрактальных форм было предложено использование системы итерационных функций (ИСФ). Мы определили фрактальную размерность построенной фрактальной формы и показали ее зависимость от значения массы фермы.

Ключевые слова: Фрактал, фрактальная геометрия, проектирование, конструкция, архитектурная форма, геометрия, модель, ферма, моделирование, IFS, генеративные системы.

Annotatsiya: Ushbu maqolada fraktal va fraktal geometriya tushunchalari hamda fraktal geometriya tamoyiliga binoan binolarning top qismida ishlatiladigan strukturaviy fermalarning kompozitsion konfiguratsiyalarida qoidalarga asoslangan o'ziga xos xususiyatlarni loyihalash va fraktalga asoslangan bu yangi fermalarning mexanik xususiyatlarini tahlil qilish haqida fikrlar beriladi. Maqolada geometrik fraktal shakllarni qurishning matematik usullari keltirilgan. Fraktal shakllarni qurishda iteratsion funktsiya tizimlari (IFS)dan foydalanish taklif qilingan. Qurilgan fraktal shakllarning fraktal o'chovi aniqlangan va uning fermalar massa qiymati bilan bog'liqligi ko'rsatib o'tilgan.

Kalit so'zlar: Fraktal, fraktal geometriya, dizayn, struktura, me'moriy shakl, geometriya, model, ferma, modellashtirish, IFS, generativ tizimlar.

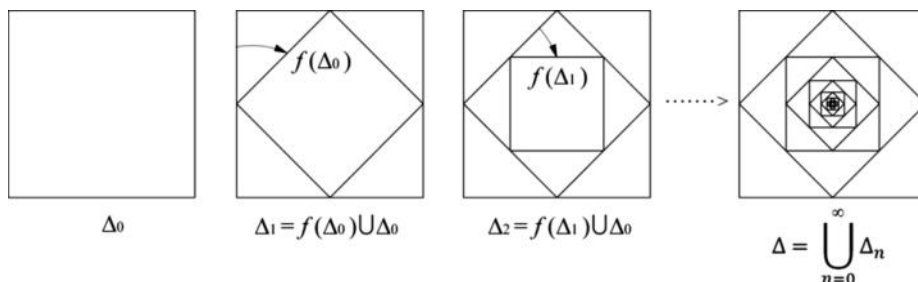
I. KIRISH

1970-yillarda fraktal tushunchasi Mandelbrot tomonidan [1] kiritilishidan ancha oldin fraktal geometriya kontseptsiyasini bilmagan holda, muhandislar an'anaviy fermalarni mustahkamlash uchun ataylab o'ziga o'xshash modulli elementlardan foydalanganlar. Shunga ko'ra, fraktal geometriya tamoyiliga binoan strukturaviy fermalarning kompozitsion konfiguratsiyalarida qoidalarga asoslangan o'ziga xos xususiyatlarni loyihalash va fraktalga asoslangan bu yangi fermalarning mexanik xususiyatlarini tahlil qilish mumkin.

Fraktalning bosh ta'rifi - bu cheksiz xilma-xil o'lchamdagi nusxalarini o'z ichiga olgan shakl yoki tasvir, bu har qanday kattalashtirish darajasida o'ziga o'xshashligini anglatadi. Biroq,

uning matematik ta'rifi aniqroq. Robert Devanining matematik ta'rifiga ko'ra, fraktal – bu R_n (n -o'lchovli metrik bo'shliq)ning kichik qismi bo'lib, u o'ziga o'xshash va Hausdorff o'lchami uning topologik o'lchamidan katta [2]. Oddiy ta'rifda fraktal shakllar kasrli-o'lchovli bo'lib, ketma-ket ikkita butun o'lchamli obyektlar orasida joylashgan, ya'ni $0 < F_o < 1$, $1 < F_o < 2$ yoki $2 < F_o < 3$ bu yerda F_o -fraktal o'lchov. Fraktal – bu metrik bo'shliqda, aniqrog'i Hausdorff metrik fazosida yotadigan o'ziga o'xshash to'plamlarning birlashmasidan iborat to'plam. M.F.Barnsley tomonidan kiritilgan masshtablash nazariyasiga asoslanib, fraktal to'plam – attraktordir, chunki u cheksiz marta qo'llaniladigan f_i , $i=1$ dan k gacha bo'lgan

affin almashtirishlari to'plamidan olingan chegaraviy holatidagi raqamdir [3]. 1-rasmda bitta 'f' (k = 1) transformatsiyali misol ko'rsatilgan.



1-rasm. Fraktal affin almashtirishdan so'ng, butunlay o'ziga o'xshash kichik guruhlar birlashmasi sifatida

Fraktal-bu bo'sh bo'lmagan noyob ixcham to'plam. Natijaviy shaklni barcha bir xil kichik guruhlarni birlashtirish yoki o'z-o'ziga o'xshash kichik guruhlarni kesish orqali olish mumkin.

II. ASOSIY QISM

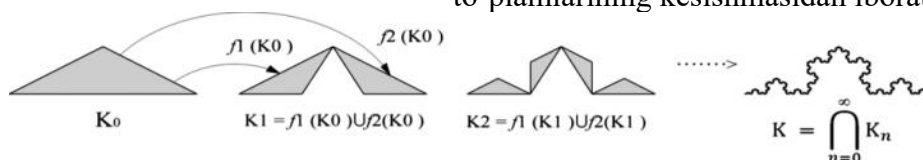
Agar fraktal boshlang'ich to'plamning o'lchovli nusxalari bo'lgan barcha bir xil cheksiz kichik guruhlarning birlashmasi bo'lgan 'Δ' attraktor bo'lsa, u quyidagicha ifodalanadi.

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n, \tag{1}$$

ya'ni $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \dots \cup \Delta_n \cup \Delta_0$,

u holda

$$\Delta_n = \bigcup_{i=1}^m f_i(\Delta_{n-1}) \cup \Delta_0, \tag{2}$$



2-rasm. Fraktal Koch egri chizig'i f1 va f2 affin almashtirishlaridan so'ng K₀ ning o'ziga o'xshash barcha kichik to'plamlarining kesishishi bo'lgan attraktor sifatida

K attraktorini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n \tag{4}$$

ya'ni

$$K = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \dots \cap K_n \cap \dots$$

u holda,

$$K_n = \bigcup_{i=1}^m f_i(K_{n-1}) \tag{5}$$

$$K_1 = f_1(K_0) \cup f_2(K_0) \cup \dots \cup f_m(K_0).$$

$$K_2 = f_1(K_1) \cup f_2(K_1) \cup \dots \cup f_m(K_1).$$

$$K_n = f_1(K_{n-1}) \cup f_2(K_{n-1}) \cup \dots \cup f_m(K_{n-1}).$$

$$\Delta_1 = f_1(\Delta_0) \cup f_2(\Delta_0) \cup \dots \cup f_m(\Delta_0) \cup \Delta_0;$$

$$\Delta_2 = f_1(\Delta_1) \cup f_2(\Delta_1) \cup \dots \cup f_m(\Delta_1) \cup \Delta_0;$$

$$\Delta_n = f_1(\Delta_{n-1}) \cup f_2(\Delta_{n-1}) \cup \dots \cup f_m(\Delta_{n-1}) \cup \Delta_0;$$

bu yerda, n-takrorlanishlar sonlar va m-har bir iteratsiyada ishlab chiqarilgan o'ziga o'xshash nusxalar soni. Qachonki Δ₀ ning qisqarish to'plamlari Δ₁, Δ₂, ..., Δₙ, ... bo'lsa, ular λᵢ qisqarish koeffitsienti yordamida qisqartiriladi va fᵢ affin almashtirish funksiyasidan foydalanib o'zgartiriladi, shuning uchun,

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta_{n-1} \subset \Delta_n \subset \dots \tag{3}$$

so'ngra ular o'zlariga o'xshash mukammal fraktal to'plamni hosil qiladi.

Agar fraktal, attrakor sifatida, 2-rasmda ko'rsatilgandek, K₀ ning barcha bir xil kichik to'plamlarining kesishmasidan iborat bo'lsa,

Shunga qaramay, agar K₁, K₂,, Kₙ, ... lar K₀ ning qisqarish to'plamlari bo'lsa, ular qisqarish koeffitsienti λᵢ yordamida qisqaradi va fᵢ affin almashtirish funksiyasi yordamida o'zgartiriladi.

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_{n-1} \supset K_n \supset \dots \tag{6}$$

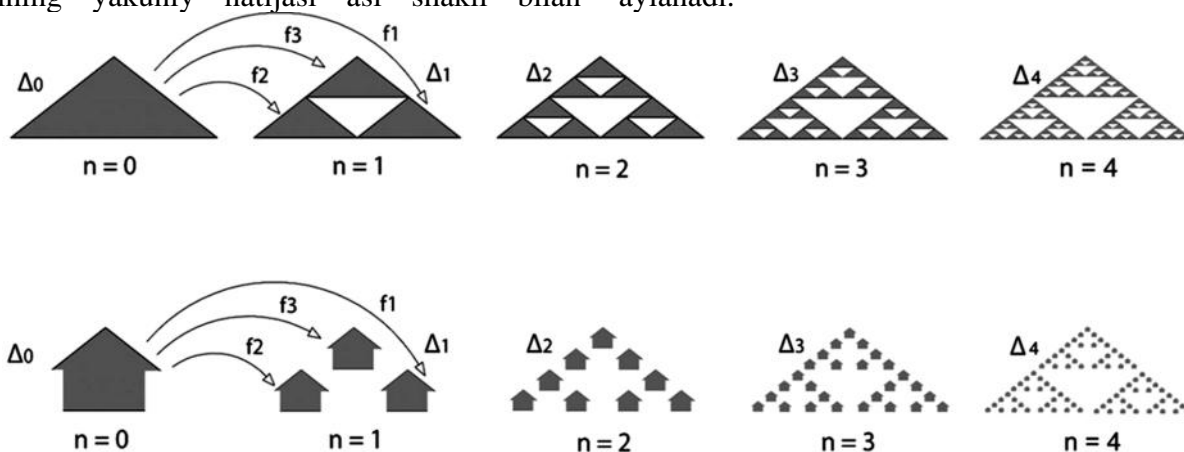
so'ngra o'ziga o'xshash mukammal fraktal to'plamni hosil qiladi.

III. METODLAR

Fraktallar birinchi bosqichda geometrik o'zgarishlardan so'ng asl shaklini takrorlash, so'ngra keyingi bosqichlarda bu jarayonni cheksiz ko'p marta takrorlash orqali hosil bo'ladi. Bu jarayon fraktal shaklni yaratishga olib keladi, uni

ko'p hollarda oldindan aytib bo'lmaydi. Biroq, 1981 yilda Hutchinson operatori asosida [4] Barnsley Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFS) deb nomlanuvchi tizimni ishlab chiqdi, bu fraktal hosil bo'lishining yakuniy natijasini deterministik tarzda bashorat qila oladi. Barnsleyning IFS tamoyilida shuni ta'kidlash kerakki, fraktal shaklning yakuniy natijasi asl shakli bilan

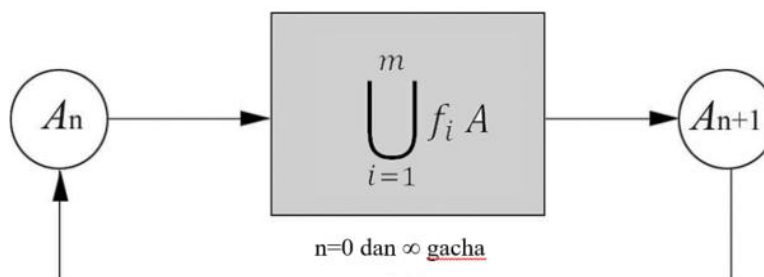
aniqlanmaydi. Buning o'rniga, u haqiqiy "boshlang'ich shart" sifatida qaralishi mumkin bo'lgan affin almashtirishlar bilan belgilanadi. 3-rasm shuni ko'rsatadiki, uchburchak va uychaning shakli har ikkala asl shakl uchun ham bir xil affin almashtirish qoidalarini saqlab, bir necha marta takrorlangandan so'ng, Serpinski uchburchagiga aylanadi.



3-rasm. Siqish xaritalari va IFS yordamida Serpinski uchburchagi ketma -ketligini birlashtirish. Yuqorida: asl shakli uchburchak; patstda asl shakli - uycha

Barnsley Iteratsion funksiyalar tizimlari - bu fraktal shakllarni deterministik tarzda yaratadigan oddiy, ammo kuchli funktsional tizim. 3-rasm IFS o'ziga o'xshash fraktalni yaratish uchun 4-rasmda ko'rsatilgandek, Hutchinson operatori yordamida rekursiv ishlaydi.

shuni ko'rsatadiki, IFSning asosiy kalit operatori yakuniy natijani 'A' attraktoriga olib boruvchi affin almashtirishlar majmui.



4-rasm. IFS ning Hutchinson operatori funksiyasidan foydalangan holda ko'rsatilgan sxematik diagramma.

Natija (n) sonli cheklangan takrorlanishlarga olib keldi:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^m f_i(A_{n-1}). \quad (7)$$

Shuning uchun, IFS xususiyatlariga asoslanib, biz f_i affin almashtirishlarining ahamiyatini sezamiz, ular aslida 'A' attraktorini

belgilovchi asosiy omil hisoblanadi. 'f' affin almashtirish quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$f = T(x) + b, \quad (8)$$

bu yerda 'T' - chiziqli transformatsiya ('n x n' matritsa bilan ifodalanadi) va 'b' - vektor. Yevklid XY tekisligida ikki o'lchovli affin almashtirishining standart matritsa shakli quyidagicha ifodalanadi:

$$f(x) = [W]\{x\} + \{\delta\} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

Agar konvertatsiya qisqarish, akslantirish, aylanish va siljishdan iborat bo'lsa, (8)-formulani quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$f = \lambda [\mu][r]\{x\} + \{\delta\} = \lambda \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

bu yerda $\mu_1 = -1$ va $\mu_2 = 1$ Y o'qi bo'ylab, $\mu_1 = 1$ va $\mu_2 = -1$ X o'qi bo'ylab akslantirishlar, θ -burilish burchagi, δ_x va δ_y -mos ravishda X o'qi va Y o'qi bo'ylab siljish.

IV. NATIJALAR

Hausdorff o'lchovi-o'ziga o'xshash fraktallarning fraktal o'lchovlarini baholash uchun eng mashhur bo'lgan matematik o'lchov. Barnsleyning masshtablash nazariyasiga asoslanib fraktalning Hausdorff o'lchovi usuli qisqarish omillariga bog'liq:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^D = 1 \quad (11)$$

bu yerda $\lambda_i - f_i$ affin almashtirishlarining siqilish koeffitsienti, k esa affin almashtirishlar soni. Masalan, 5-rasmda ko'rsatilgan Koch egri chizig'i har biri 1/3 marta qisqartirilgan ikkita nusxaning birlashmasidir. Uning Hausdorff o'lchami D (11) tenglama yordamida quyidagicha hisoblanishi mumkin,

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)_i^D = 1$$

ya'ni, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^D + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^D = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^D = 1$

Demak

$$D = \frac{\log(1/2)}{\log(1/\sqrt{3})} \approx 1.262 \quad (12)$$



Katak o'lchami = 512 birlik	Katak o'lchami = 256 birlik	Katak o'lchami = 128 birlik	Katak o'lchami = 64 birlik
Kataklar soni = 35	Kataklar soni = 98	Kataklar soni = 270	Kataklar soni = 720

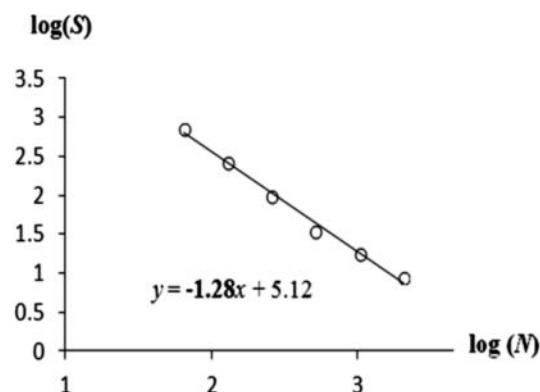
(a)

Kataklarni hisoblash usuli. Minkovskiy-Buligand o'lchovii sifatida ham tanilgan, kataklarni hisoblash usuli fraktal o'lchovni hisoblashning yana bir usulidir. Hausdorff usuli o'z-o'zidan o'xshash fraktal shakllarning fraktal o'lchovlarini hisoblash uchun mos bo'lsada, kataklarni hisoblash usuli o'z-o'ziga o'xshash va o'xshash bo'lmagan fraktal shakllar uchun, shu jumladan, har qanday (matematik) fraktal bo'lmagan shakllar va eng muhimi, cheklangan shakllarning fraktal o'lchovini aniqlashda samaralidir. Bu usul nohiziqli tasvir detallarini tahlil qilishda mashhurdir.

Rasmning kataklarini hisoblash usulida fraktal o'lchovini aniqlash uchun avval rasimga to'rtburchak panjara qo'yiladi, bu panjaradagi har bir to'rtburchakning kattaligi S bo'lgan panjara shkalasi aniqlanadi. Keyin panjaradagi tasvirning istalgan qismini qamrab oluvchi kvadratlar soni N sanaladi. Xuddi shu tasvirni bir xil jarayonda takrorlagandan so'ng, S va N natijalarini logarifm grafigiga aylantirish orqali, katakning o'lchamini l dan $2n$ gacha o'zgartirib ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$, chekli qiymat) bu tasvirning fraktal o'lchovini olish mumkin. Logarifm grafigini hosil bo'lgan chizig'ining burchak koeffitsienti tasvirning qutularni hisoblash usuli o'lchovini aniqlaydi. 5-rasmda qutularni hisoblash usuli yordamida Koch egri chizig'ining fraktal o'lchovini hisoblashning bir misoli ko'rsatilgan.

S	N	$\log(S)$	$\log(N)$
2048	9	3.31	0.95
1024	18	3.01	1.26
512	35	2.71	1.55
256	98	2.41	1.99
128	270	2.11	2.43
64	720	1.81	2.86

(b)



(c)

5-rasm. Koch egri chizig‘ining fraktal o‘lchovini kataklarni hisoblash usulida aniqlash. (a) Koch egri chizig‘ining istalgan qismini qoplaydigan kataklar; (b) turli o‘lchamdagi yopiq kataklar soni; (c) Olingan chiziqli funksiyaning burchak koeffisientini ko‘rsatuvchi logarifm grafigi

Shuni ta’kidlash kerakki, Hausdorff usuli va kataklarni hisoblash usuli yordamida o‘lchanadigan fraktal o‘lchovlar bir biriga yaqin bo‘lib, bir xil qiymatni berishi shart emas. Masalan, Koch egri chizig‘ida Hausdorff usulida o‘lchovi deyarli 1,262 ga, qutularni hisoblash usulida esa 1,28 ga teng.

Fraktallar va ularning o‘lchovlarini modellashtirish. Fraktal tizim qurilish sohasida konstruktiv dizaynda foydali bo‘lgan ikkita muhim xususiyatga ega. Birinchi xususiyat shundaki, fraktal tizimni oddiy algoritmik funksiya yordamida ifodalash mumkin. Bu xususiyat tuzilmalarni kompyuterda loyihalash uchun fraktal modelni oddiy dasturlashda foydalidir. Ikkinchidan, fraktal tizim-bu o‘z-o‘ziga o‘xshash birlik elementlarining yig‘indisi; shuning uchun ular tuzilishda o‘ziga xos ierarxik yoki modulli tizimni tashkil qiladi. Bu xususiyat uzoq muddatli tuzilmalarni qurishda foydali bo‘lishi mumkin, bu yerda strukturani mustahkamlash uchun modulli bloklar kerak bo‘ladi. Fraktal modelni yaratadigan oddiy algoritmik funktsiyani ishlab chiqishning turli usullari mavjud. Barnsley fraktal geometriya tamoyilidan foydalangan holda, ushbu tadqiqotda ba’zi strukturali fermalarning turli geometrik konfiguratsiyalarini yaratish uchun ba’zi fraktal modellar qurilgan. Birinchi ikkita fermalar Serpinski uchburchagi va Aylanma Fraktal kabi taniqli fraktallarga asoslangan, boshqa fermalar esa fraktal qoidalar yordamida an’anaviy ferma konfiguratsiyalarini qayta tashkil etish orqali yaratilgan. Asayama va Meyning fraktal fermalari ham fraktalga asoslangan fermalar oilasiga kiradi [5].

Serpin uchburchagi. Serpin uchburchagi fraktal geometriyaning kanonik namunasi. Dizayni bo‘yicha, qoida tariqasida, boshlovchi sifatida ‘ S_0 ’ uchburchagi to‘rtta bir xil uchburchakka bo‘linadi, so‘ngra markaziy pastki uchburchak tashlanadi. Bu jarayon qolgan uchta kichik uchburchakda davom etib, kichikroq mos keluvchi kichik uchburchaklar hosil qiladi va shu tariqa, bu jarayon qolgan har bir kichik uchburchakda davriy davom etadi. Serpin uchburchagini Barnsleyning masshtablash va affin almashtirish nazariyasiga asoslanib, IFS usuli yordamida, yaratish mumkin. Bu usulda Serpin uchburchagi ‘ S ’ attraktor bo‘lib, u ‘ S_0 ’, ‘ S_1 ’, ‘ S_2 ’, ‘ S_3 ’, ‘ S_n ’,.... kabi cheksiz takrorlanadigan o‘ziga o‘xshash to‘plamlarning kesishmasining yig‘indisidir. Serpin uchburchagini qurishning bu usulida IFS ning siqilish koeffitsienti λ_i ning qiymati 1/2 bo‘lganda affin almashtirish f_i funksiyasi 6-rasmda ko‘rsatilganidek ishlaydi. Shunday qilib, ‘ S_1 ’ yangi shakli hosil bo‘ladi, bu ‘ σ_1 ’, ‘ σ_2 ’ va ‘ σ_3 ’ ning birlashmasi bo‘lib, matematik tarzda quyidagicha ifodalanadi:

$$S_1 = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 = f_1(S_0) \cup f_2(S_0) \cup f_3(S_0), \quad (13)$$

n-chi takrorlashda

$$S_n = f_1(S_{n-1}) \cup f_2(S_{n-1}) \cup f_3(S_{n-1}). \quad (14)$$

Demak,

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_{n-1} \supset S_n \supset \dots, \quad (15)$$

Shunday qilib, ‘ S ’ attraktor:

$$S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i. \quad (16)$$

bu fraktal birlik Serpin uchburchagining matematik ifodasi hisoblanadi.

Serpin uchburchagini qurishda, quyidagi 6-rasmda ko'rsatilgan asl uchburchakning $k=3$ bo'lgan holdagi (f_1, f_2 va f_3) affin almashtirishidan iborat quyidagi IFS funktsiyasi qo'llaniladi.

$$f_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}; i = 1 \text{ to } 3 \quad (17)$$

(11) tenglamaga asosan, agar Serpin uchburchagining Hausdorff o'lchovi D bo'lsa, u holda

$$\lambda_1^D + \lambda_2^D + \lambda_3^D = 1;$$

Bu yerda

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad (18)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1, \quad (19)$$

ifoda orqali Hausdorff o'lchovi topiladi

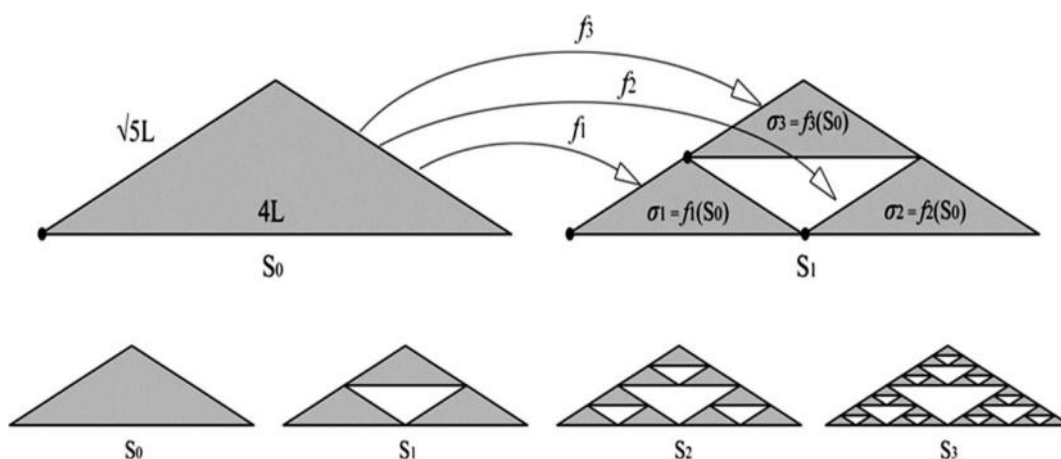
$$D = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 1.585.$$

Shuning uchun quyidagi

1-jadval

Serpin uchburchagini qurishdagi funktsiya parametrlari qiymati

IFS funktsiyalar	Kichraytirish	Akslantirish h		Aylantirish	Almashtirish	
		μ_1	μ_2		δ_x	δ_y
f	λ	μ_1	μ_2	θ	δ_x	δ_y
f_1	1/2	1	1	0°	0	0
f_2	1/2	1	1	0°	2L	0
f_3	1/2	1	1	0°	L	L/2



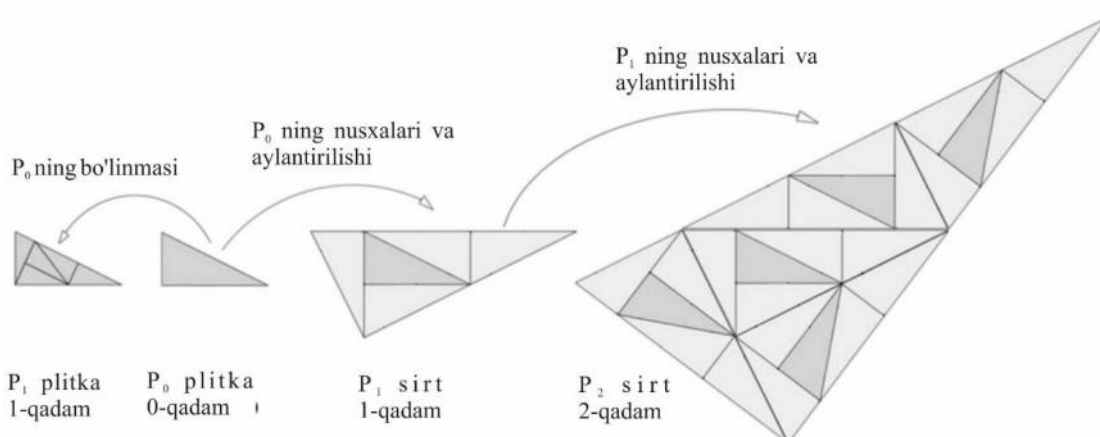
6-rasm. Yuqorida - Serpin uchburchagining masshtablash va affin almashinishi. Pastda - Serpin uchburchagining konversiya ketma-ketligi

Aylanma fraktal plitka. 1994 yilda Jon Conway va Charlz Radin tomonidan ishlab chiqilgan aylanma plitka, tekislikning davriy bo'lmagan plitkalari kabi fraktal shakllarni yaratishning qiziqarli usulini ta'minlaydi [6]. Aylanma plitka - bu bir xil uchburchak plitkalar yig'indisi, ammo yuqori vizual murakkablik bilan

tasodifiylikni keltirib chiqaradi. Ular davriy bo'lmagan plitkalardir, ya'ni ularning yo'nalishlari cheksiz va bir xil yo'nalishlarga amal qilmaydi. Conway birinchi marta katetlaridan biri ikkinchisidan ikki baravar ko'p bo'lgan to'g'ri burchakli 'Po' uchburchakni o'zining beshta izometrik nusxasi 't' ga bo'lish mumkinligini

payqadi, ya'ni bu yerda har bir nusxa 'P₀' dan 5 marta kichikdir. Shundan kelib chiqqan holda, Conway va Radin 'P₀' uchburchakning o'z atrofiga to'rt nusxasini shunday yig'dilarki, beshta izometrik uchburchakning birlashuvi katta to'g'ri burchakli 'P₁' uchburchakka aylandi (7-rasm). Keyin 'P₁' atrofida uning to'rtta izometrik nusxasi xuddi shu tarzda yig'iladi, natijada barcha 'P₁' uchburchaklar va uning nusxalari birlashib katta 'P₂' uchburchagiga aylanadi. Barcha yangi uchburchak tekisliklari 'P₀' ning izometrik nusxalari bo'lgan o'sib borayotgan

uchburchaklarning cheksiz ortib borayotgan ketma-ketligini olish uchun bu jarayonni takrorlash mumkin. Ushbu plitkada bir qiziq xususiyat paydo bo'ladi - bu plitkalarining cheksiz ko'p yo'nalishlaridir. Buning sababi 'P₀' ning arktangens (1/2) va arktangens (2) bo'lgan ikkita burchagi, chunki ikkalasi ham π bilan taqqoslanmaydi. Shunga qaramay, Radin va Konvey 'P₀' plitkadagi izometrik nusxalarining barcha uchlari aniq koordinatalarga ega ekanligini tasdiqlaydi. Shu sababdan, aylanma plitkalar takrorlanmaydi.



7-rasm. Konvey va Radinning bitta kichik uchburchak plitkadan boshlanadigan, so'ngra yuqoridagi qoidaga binoan iterativ ravishda o'sib chiqadigan aylanma plitkasini yaratish usuli

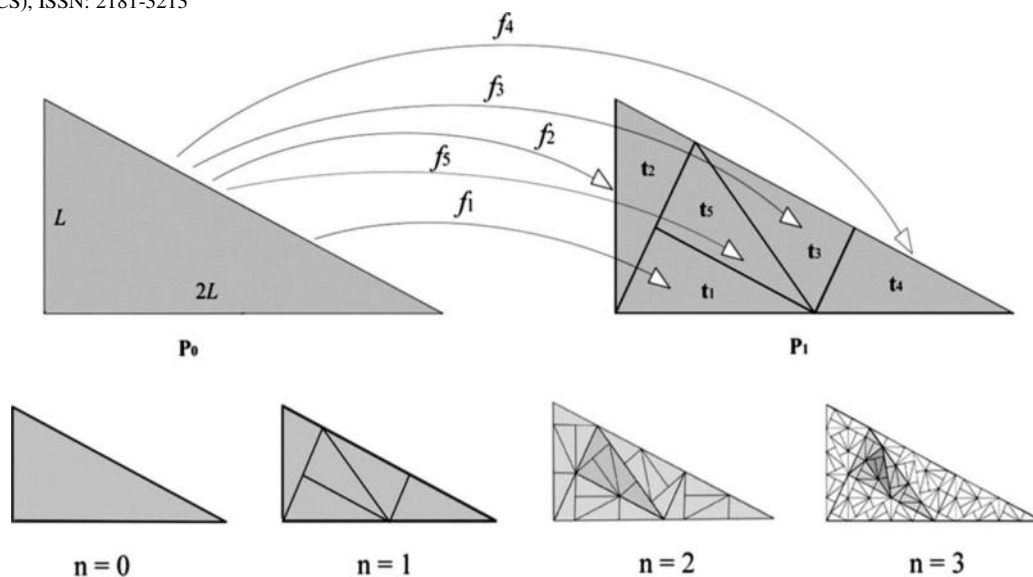
Aylanma plitkalarini 'P₀' boshlang'ich shaklining takrorlangan bo'linmasi sifatida ko'rib chiqish mumkin, shuning uchun ishlab chiqarish jarayoni takrorlangan funksiyalar tizimiga o'xshash bo'ladi. Shu nuqtai nazardan, Barnesli usulini qo'llash mumkin. Bunday holda 'P₀' boshlang'ich uchburchak bo'lib, u aylanma plitka naqshini ishlab chiqarish uchun bo'linadi,

masshtablash jarayonidagi $1/\sqrt{5}$ qisqarish faktoridan foydalangan holda 'P₀' ning kichraygan shakli bo'lgan beshta izometrik nusxalar (t_1, t_2, t_3, t_4 va t_5) hosil bo'ladi. Keyin ularning har biri o'ziga xos affin almashtirish jarayonidan o'tadi, shunda ular bir-biriga halal bermasdan 8-rasmdagi kabi 'P₀' asosiy uchburchagi maydoniga joylashadilar.

2-jadval

Aylanma praktal plitkalarini qurishdagi funksiya parametrlari qiymati

IFS funksiyalar	Kichraytirish	Akslantirish		Aylantirish	Almashtirish	
		μ_1	μ_2		δ_x	δ_y
f	λ	μ_1	μ_2	θ	δ_x	δ_y
f_1	$1/\sqrt{5}$	-1	1	$-(90^\circ + \arctan(1/2))$	0.2L	0.4L
f_2	$1/\sqrt{5}$	-1	1	$-\arctan(2)$	0.4L	0.8L
f_3	$1/\sqrt{5}$	1	1	$-(90^\circ + \arctan(1/2))$	1.2L	0.4L
f_4	$1/\sqrt{5}$	-1	1	$-(90^\circ + \arctan(1/2))$	1.2L	0.4L
f_5	$1/\sqrt{5}$	1	1	$-\arctan(1/2)$	0.2L	0.4L



8-rasm. Masshtablash usuli yordamida aylanma plitkani yasash; Yuqorida - to‘g‘ri burchakli uchburchakning affin almashinishi. Quyida aylanma plitkani birlashtirish ketma-ketligi keltirilgan

Birinchi iteratsiyadagi chiqish ko‘rsatkichini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_1 = t_1 \cup t_2 \cup t_3 \cup t_4 \cup t_5 = f_1(P_0) \cup f_2(P_0) \cup f_3(P_0) \cup f_4(P_0) \cup f_5(P_0) \dots (20)$$

va n -chi takrorlashda,

$$P_n = \bigcup_{i=1}^5 f_i(P_{n-1}), \quad (21)$$

bu yerda,

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots \supset P_{n-1} \supset P_n \supset \dots (22)$$

$$f_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}; i=1 \text{ dan } 5 \text{ gacha} . \quad (24)$$

Hausdorff o‘lchov usuliga ko‘ra, agar aylanma plitkasining fraktal o‘lchovi D bo‘lsa, u holda

$$\lambda_1^D + \lambda_2^D + \lambda_3^D + \lambda_4^D + \lambda_5^D = 1, \quad (25)$$

bu yerda $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\text{Demak, } 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^D = 1.$$

$$\text{U holda, } D = \frac{\log(1/2)}{\log(1/\sqrt{5})} = 2.$$

Aylanma plitkani ushbu takrorlangan tasvirining hisoblangan Hausdorff o‘lchovi 2 ga

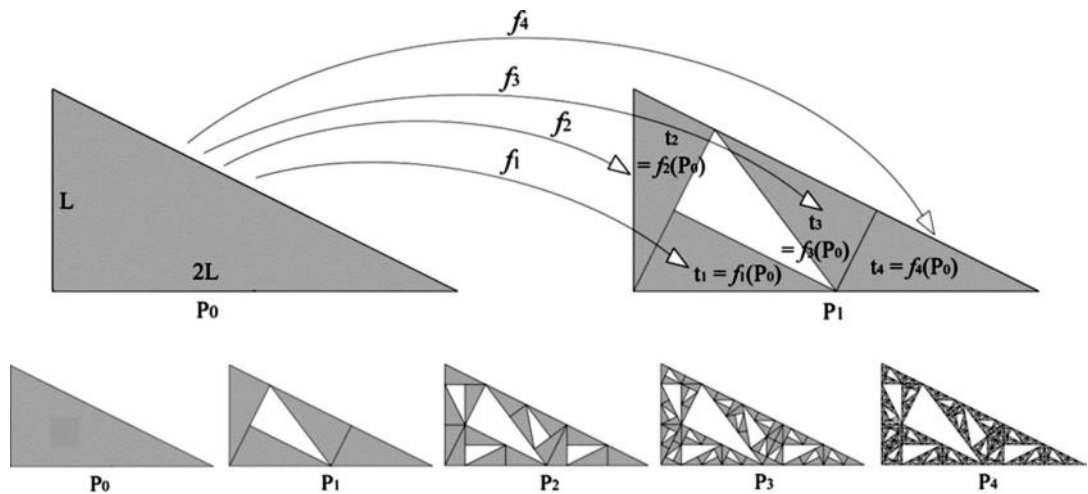
Shunday qilib, Aylanma plitka ‘ C ’ attraktori sifatida ‘ P_0 ’ ning barcha bir xil kichik to‘plamlarining kesishmasidir va quyidagicha ifodalinishi mumkin:

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i . \quad (23)$$

Aylanma plitkani qurishda, asosiy uchburchakning $k=5$ xil affin almashirishidan (f_1, f_2, f_3, f_4 va f_5) iborat bo‘lgan quyidagi IFS funksiyasi qo‘llaniladi.

teng, bu butun son qiymati bo‘lib, u ikki o‘lchovli sirtga ekvivalentdir. Bu bo‘linishda (yoki plitka qo‘yishda) aniq ko‘rinadi, chunki har bir iteratsiya bilan hech qanday sirt qo‘shilmaydi yoki olib tashlanmaydi.

Agar Aylanma plitkani markaziy uchburchagi cheksiz olib tashlansa, u holda butun uchburchak yuzasi o‘z o‘lchovini (Hausdorff o‘lchami, D) 2 dan 1 gacha yo‘qota boshlaydi, $1.0 < D < 2.0$. Shunday qilib, u endi ikki o‘lchovli sirt emas va aylanma fraktal deb nomlanuvchi fraktal shaklga aylanadi (9-rasm).



9-rasm. Yuqorida - affin almashtirishlari; Pastki - konversiya ketma -ketligi.

Shunday qilib, bu holatda 'P₀' ning barcha bir xil kichik to'plamlarining kesishish to'plami bo'lgan 'P' attraktori sifatida aylanma fraktalni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i, \quad (26)$$

Bu yerda

$$P_1 = t_1 \cup t_2 \cup t_3 \cup t_4 = f_1(P_0) \cup f_2(P_0) \cup f_3(P_0) \cup f_4(P_0), \quad (27)$$

va

$$P_n = \bigcup_{i=1}^4 f_i(P_{n-1}). \quad (28)$$

Shuning uchun,

$$P_n = f_1(P_{n-1}) \cup f_2(P_{n-1}) \cup f_3(P_{n-1}) \cup f_4(P_{n-1}). \quad (29)$$

Agar aylanma fraktalning Hausdorff o'lchami D bo'lsa, u holda

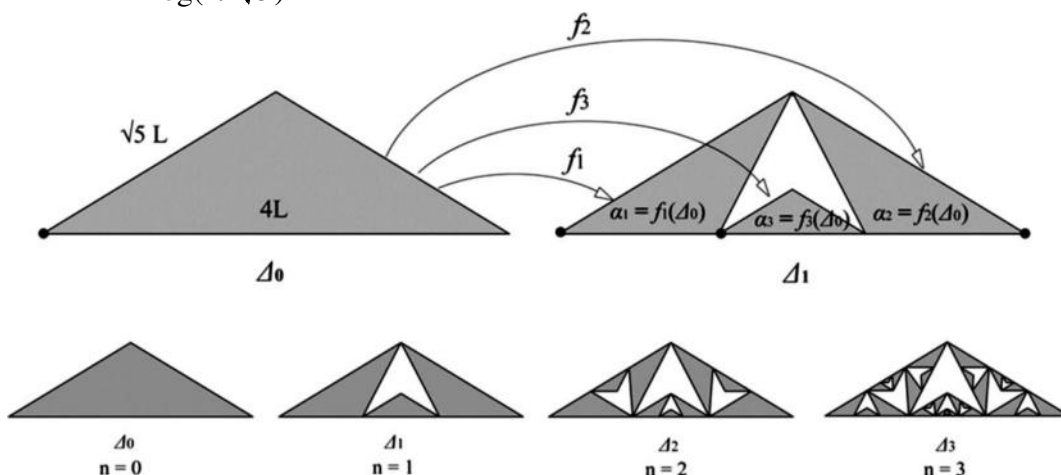
$$4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^D = 1.$$

U holda

$$D = \frac{\log(1/4)}{\log(1/\sqrt{5})} \approx 1.7227.$$

Asayama va Mey fraktallari. Asayama va Mey birinchi bo'lib IFS usuli yordamida ferma dizayni uchun yangi fraktal shaklni taklif qilishdi [5]. Ularning fraktalining birinchi takrorlanuvchi shakli ikki o'lchovli affin almashtirish (f_1, f_2 va f_3)dan so'ng birinchi ' Δ_0 ' uchburchakning uchta o'ziga o'xshash nusxalarini (' α_1 ', ' α_2 ' va ' α_3 ') birlashtirish natijasida hosil bo'lgan, bunda qisqarishlar λ_1, λ_2 va λ_3 ga teng (10-rasm). Ularni dizaynidagi ' Δ_0 ' asl uchburchak parametrik va θ_1 va θ_2 tayanch burchaklariga nisbatan o'zgaruvchan bo'lib, shunga mos ravishda fraktalning kichrayishi asosiy burchaklarga qarab o'zgaradi. Biroq, tadqiqotimizda biz balandligi L va asosi 4L bo'lgan simmetrik uchburchakni oldik, shunda qisqarishlar $\lambda_1 = \sqrt{5}/4, \lambda_2 = \sqrt{5}/4$ va $\lambda_3 = 3/8$ bo'ladi. Bu holatda, Asayama-Mey fraktalini ' Δ ' attraktor sifatida quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i, \quad (30)$$



10-rasm. Asayama va Mey fraktali; Yuqorida - affin almashtirishlari; Pastki - konversiya ketma -ketligi

bu yerda

$$\Delta_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 = f_1(\Delta_0) \cup f_2(\Delta_0) \cup f_3(\Delta_0), \quad (31)$$

va

$$\Delta_n = \alpha f_1(\Delta_{n-1}) \cup f_2(\Delta_{n-1}) \cup f_3(\Delta_{n-1}), \quad (32)$$

$$f_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}; i = 1 \text{ dan } 3 \text{ gacha}. \quad (34)$$

(11) tenglamaga asoslanib, agar Asayama-Mey fraktalining Hausdorff o'Ichovi D bo'lsa, u holda

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^D + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^D + \left(\frac{3}{8}\right)^D = 1. \quad (35)$$

Nyuton-Rafson usuli yordamida $D \approx 1.5953$ ga tengdir.

U holda

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \Delta_{n-1} \supset \Delta_n \supset \dots \quad (33)$$

Ushbu fraktal shaklning affin almashtirishini quyidagicha ifodalash mumkin:

Asayama-Mey fraktalining Hausdorff o'Ichovi taxminan 1,5953 ga teng, bunda asosiy burchaklari $\arctan(1/2)$ ga teng. Ammo, aslida bu fraktalning Hausdorff o'Ichovi asosiy burchaklarga nisbatan o'zgaruvchan, chunki kichrayish, $\lambda_i =$ funksiya (θ_1, θ_2) , Asayama va Mey tomonidan ko'rsatilgan.

3-jadval

Asayama-Mey fraktalini qurishdagi funksiya parametrlari qiymati

IFS funksiyalar	Kichraytirish	Akslantirish		Aylantirish	Almashtirish	
f	λ	μ_1	μ_2	θ	δ_x	δ_y
f_1	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\arctan(1/2)$	0	0
f_2	$\frac{1}{2}$	1	1	$-2 \cdot \arctan(2)$	4L	0
f_3	$\frac{1}{2}$	1	1	0°	5L/4	0

Fan Fraktal. Fan Fraktal ham IFS usuli asosida yuqoridagi jarayonga rioya qilish orqali qurilgan. Bu holda, ' F_0 ' boshlang'ich shakldir va n -takrorlanishdan so'ng 11-rasmda ko'rsatilgan ' F_n ' shakli f_1 va f_2 ikkita affin o'zgarishlardan oldingi ' F_{n-1} ' shaklidagi ikkita qisqargan shakllarning birlashuvidir. Ushbu rasmda nuqtali chiziqlar oldingi shakllarning taassurotlari sifatida ko'rsatilgan, ular keyingi bo'limda tegishli ferma konfiguratsiyasini loyihalash uchun qo'llanma sifatida ishlatiladi. Bu yerda ikkita o'ziga o'xshash nusxaning kichrayishi teng bo'lib, $\sqrt{5}/4$ ga teng. Shunday qilib, Fan Fraktal ' F ' attractor sifatida

' F_0 ' ning barcha bir xil kichik to'plamlarining kesishmasidir va quyidagicha ifodalanishi mumkin.

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i. \quad (36)$$

bu yerda

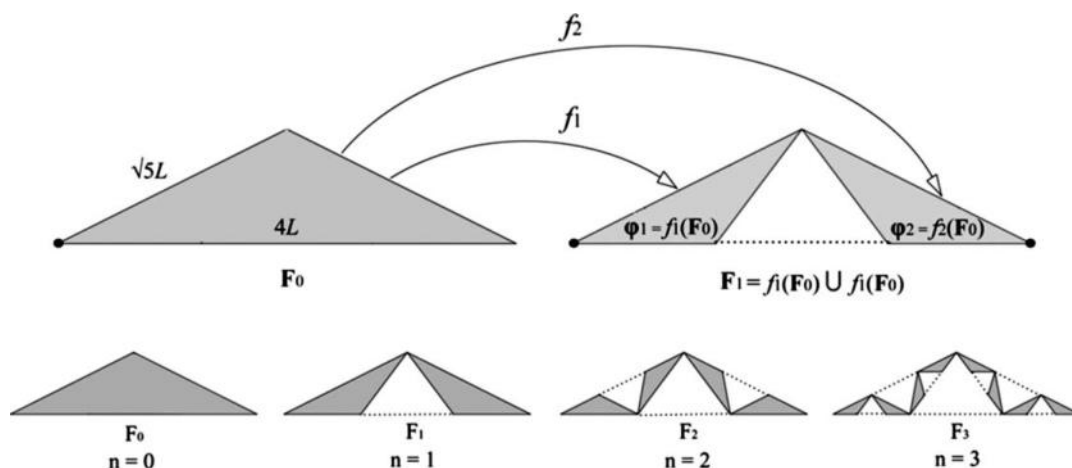
$$F_1 = \varphi_1 \cup \varphi_2 = f_1(F_0) \cup f_2(F_0), \quad (37)$$

Shuningdek

$$F_n = f_1(F_{n-1}) \cup f_2(F_{n-1}), \quad (38)$$

U holda

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots F_{n-1} \supset F_n \supset \dots \quad (39)$$



11-rasm. Fan Fraktal; Yuqorida - affn almashtirishlar; Quyida birlashma ketma-ketligi keltirilgan, nuqtali chiziqlar oldingi shakllarning izlari

Yevklid XY tekisligida fan-fraktal shaklining ikki o'lovchi affn almashtirishi:

$$f_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}; i = 1 \text{ dan } 2 \text{ gacha}, \quad (40)$$

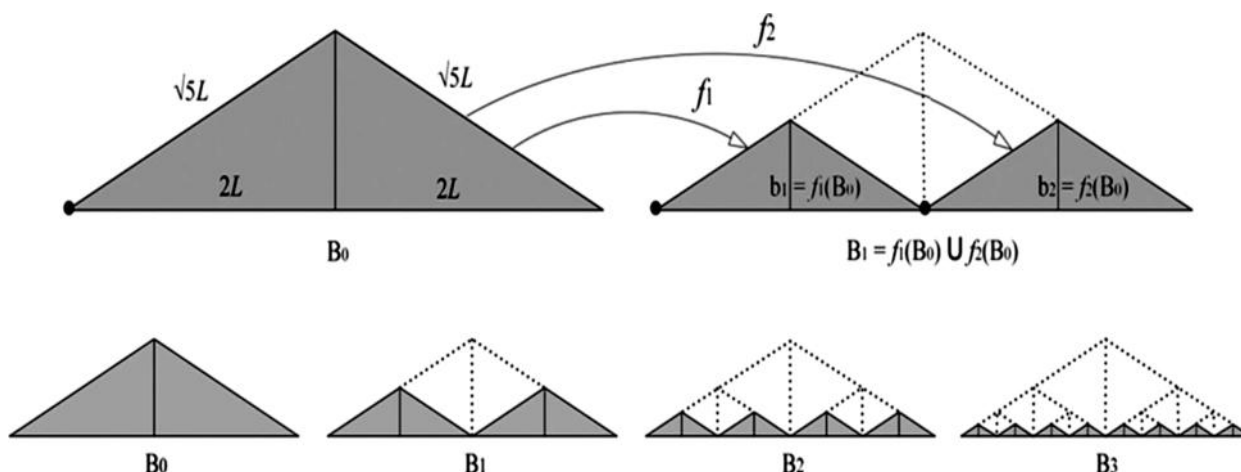
Agar fan-fraktal shaklida Hausdorff o'lchami D bo'lsa, u holda

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^D + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^D = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^D = 1. \quad (41)$$

Natijada

$$D = \frac{\log(1/2)}{\log(\sqrt{5}/4)} \approx 1.1918 \quad (42)$$

Baltimor fraktali. Oldingi fraktallarni yasashda ishlatilgan usulga asoslangan Baltimor fraktali f_1 va f_2 affn almashtirishlari yordamida har bir yangi iteratsiyada oldingi shunga o'xshash shaklning ikkita qisqartmasini birlashtirib quriladi (12-rasm). Boshqa fraktallardan farqli o'laroq, Baltimor fraktalining asl 'B0' shakli uchburchak bo'lib, uning yuqori qismini asosiy chiziqning o'rtasiga bog'laydigan qo'shimcha vertikal chiziq mavjud (12a-rasm).



12-rasm. Yuqorida - Baltimor fraktal fermasining kichiklashishi va affn almashtirishi. Quyida Baltimor fraktal fermasining birlashma ketma-ketligi

Aylanma fraktalida bo'lgani kabi, 12-rasmda ko'rsatilgan nuqta chiziqlar ilgari takrorlangan shaklning izlari. Baltimor fraktalining 'B' attraktori shakli va unga mos

keladigan affn almashtirishlari quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i. \quad (43)$$

bu yerda,

$$B_1 = b_1 \cup b_2 = f_1(B_0) \cup f_2(B_0), \quad (44)$$

shuningdek

$$B_n = f_1(B_{n-1}) \cup f_2(B_{n-1}), \quad (45)$$

$$f_i = \lambda_i \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}; i = 1 \text{ dan } 2 \text{ gacha} \quad (47)$$

Agar Baltimor fraktal shaklidagi Hausdorff

o'lchami D bo'lsa, u holda,

$$D = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1. \quad (48)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1.$$

Natijada

U holda

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \supset B_{n-1} \supset B_n \supset \dots (46)$$

affin almashtirishi,

Ya'ni cheksiz takrorlashda Baltimor Fraktal (nuqta chiziqsiz) bir o'lchovli chiziqqa aylanadi.

4-jadval

Baltimor fraktalini qurishdagi funksiya parametrlari qiymati

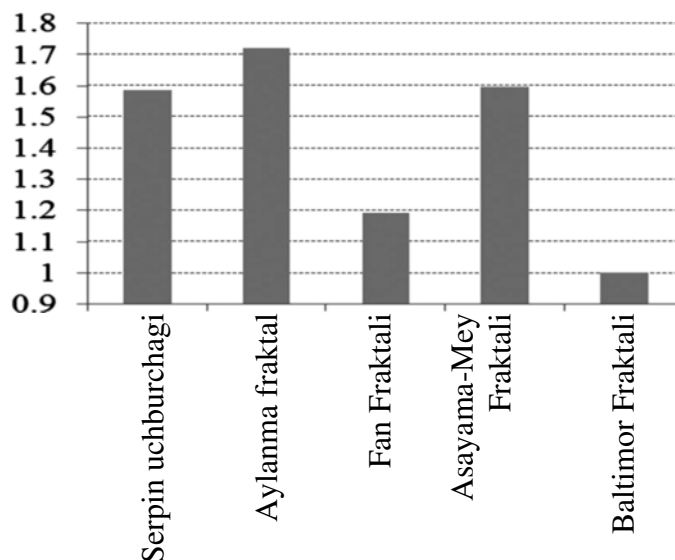
IFS funksiyalar	Kichraytirish	Akslantirish		Aylantirish	Almashtirish	
		μ_1	μ_2		δ_x	δ_y
f	λ	μ_1	μ_2	θ	δ_x	δ_y
f_1	$\sqrt{5}/4$	1	-1	$-\arctan(1/2)$	0	0
f_2	$\sqrt{5}/4$	1	1	$-2 \cdot \arctan(2)$	4L	0

IFS funksiyalar	Kichraytirish	Akslantirish		Aylantirish	Almashtirish	
		μ_1	μ_2		δ_x	δ_y
f	λ	μ_1	μ_2	θ	δ_x	δ_y
f_1	$1/2$	1	1	0°	0	0
f_2	$1/2$	1	1	0°	2L	0

Hausdorff o'lchovlarini taqqoslash. Oldingi bo'limlarda, barcha beshta fraktal shaklining Hausdorff o'lchovlari Barnsleyning masshtablash usuli yordamida hisoblab chiqilgan, chunki barcha uchburchaklar burchaklari bir xil burchak θ_1 va θ_2 ga teng, shuning uchun $\theta_1 = \theta_2 = \arctan(1/2)$. Hausdorffning taxminiy o'lchamlari fan-fraktal va Asayama-Meyning fraktal shaklidagi θ_1 va θ_2 asosiy burchaklarga o'zgaruvchanligi kuzatiladi. Chunki, bu ikki shaklda kichrayish asosiy

burchaklar bilan bog'liq. Bunga qarama-qarshi, Serpinski uchburchagi, aylanma fraktal shakli va Baltimor Fraktal shakli bo'lsa, ularning kichrayishi asosiy burchaklar bilan bog'liq emas va shuning uchun bu uchta fraktal shakldagi Hausdorff o'lchovlari doimiy va o'zgarmasdir. Ushbu beshta fraktal shaklining Hausdorff o'lchovlarining qiyosiy qiymatlari 13-rasmda ko'rsatilgan.

Hausdorff o'lchovi



13-rasm. Hausdorff o'lchovlarini taqqoslash.

Faktal tahlil metodologiyasidan foydalangan tadqiqotchilar me'moriy yodgorliklarni o'rganishda keng istiqbollarga ega deb hisoblaydi. Bu nafaqat yodgorliklarning estetik jihatlari chuqurroq o'rganishimiz balki tabiat, san'at va inson idrokini tashkil etish asosida yotadigan umumiy tuzilish naqshlarini aniqlashga imkon beradi. Shuning uchun fikrimizcha, ushbu tendentsiyani yanada rivojlantirish kerak deb hisoblaymiz [7].

V. XULOSA

Ushbu bobda yangi geometrik tizimlarni joriy etish maqsadida fraktal geometriya tushunchalarini qurilish sohasidagi strukturaviy fermalarni loyihalashda qo'llash taklif qilindi.

Qoidalarga asoslangan konfiguratsiyalar sifatida tizimli ferma shakllarini avtomatik ravishda yaratish uchun iteratsion funksiyalar tizimlari (IFS qo'llanildi).

Tahlil qilingan fraktal konfiguratsiyalarning to'liq matematik ta'rifidan kelib chiqib, ularning Hausdorff o'lchamlarini va kataklarini hisoblash o'lchovlarini hisoblash amalga oshirildi.

Fraktalga asoslangan strukturaviy fermalarning yangi to'plami qisman an'anaviy rejalarini geometrik takomillashtirish va qisman chinakam yangi dizayn sifatida ishlab chiqildi

Strukturaviy tahlil shuni ko'rsatadiki, fermalarning o'z-o'ziga o'xshash fraktal tarmoqlanishi ularga yuqori qatlam tayanchda ham, pastki akkordda ham deyarli taqsimlangan yuklarga bardosh berishga imkon beradi. Ichki kuch oqimi qo'llaniladigan yuk sharoitiga juda bog'liq va ular fraktal naqshlardan yangi shakllar olish mumkinligini ko'rsatdi.

Bunday yangi yechimlar estetik qadriyatlar va innovatsion ko'rinishlarni namoyish etib, ularni real hayotdagi dizayn dasturlari uchun mos qiladi. Tahlil shuni ko'rsatadiki, katakni hisoblash o'lchamining o'lchovi sifatida panjara zichligi ferma konstruksiyalarining mustahkamligiga sezilarli ta'sir ko'rsatmaydi. Bu geometrik konfiguratsiya tufayli fermaning topologiyasi mustahkamlikni ta'minlashi mumkin.

Shunday qilib, fraktallarni yangi geometrik kontseptsiya sifatida innovatsion tizimli tuzilmalarni loyihalash va ishlab chiqishda qo'llash, shuningdek, arxitektura va qurilish sohasida yangi, lekin geometrik usulda samarali shakllarni izlash bo'yicha tadqiqotlarni davom ettirish samarali bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York, 1983
2. Devany, R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1992
3. Barnsley M. F., *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.
4. Hutchinson, J. E., *Fractals and Self-Similarity*. *Indiana University Mathematical Journal*, 1981; 30 (5), 713–747

5. Asayama, S. and Mae, T., Fractal Truss Structure and Automatic Form Generation Using Iterated Function System, *Proceeding of ICCCB E-X*, 2004; Weimar, Germany.
6. Radin, C. and Conway, J., *Quaquaversal Tiling and Rotations*, preprint, Princeton University Press, Princeton, 1995.
7. S.Anarova, S.Sadullaeva, G. Berdiev. “Calculation of building dimensions in the method of composition fractal analysis”, 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). 3-5 Nov. 2021. DOI:[10.1109/ICISCT52966.2021.9670390](https://doi.org/10.1109/ICISCT52966.2021.9670390).