

Paulo Henrique dos Santos

**TERMODINÂMICA E INVARIÂNCIA DE ESCALA NO
MODELO DE GROSS-NEVEU**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física para a
obtenção do Grau de Mestrado.
Orientador: Prof. Dr. Marcus E. Benghi
Pinto
Universidade Federal de Santa Cata-
rina

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Paulo Henrique
Termodinâmica e Invariância de Escala no Modelo de
Gross-Neveu / Paulo Henrique Santos ; orientador,
Marcus Emmanuel Benghi Pinto, 2019.
89 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física,
Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo de Gross-Neveu. 3. Simetria
Quiral. 4. Grupo de Renormalização. 5. Métodos não
perturbativos. I. Emmanuel Benghi Pinto, Marcus.
II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Paulo Henrique dos Santos

**TERMODINÂMICA E INVARIÂNCIA DE ESCALA NO
MODELO DE GROSS-NEVEU**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestrado”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 29 de janeiro 2019.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Emmanuel Gräve de Oliveira
Presidente
Universidade Federal de Santa Catarina

Pawel Klimas
Universidade Federal de Santa Catarina

Robson Zacarelli Denke
Universidade Regional de Blumenau

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo apoio moral e financeiro.

Ao Marcus, que me orientou com muita dedicação e didática, formando grande parte de meus conceitos em física.

À Maria por tanto me aconselhar em eventos e organização, quanto ser uma ótima amiga.

Ao Túlio que participou de reuniões envolvendo o trabalho.

Aos meus colegas, que ajudaram a compreender melhor a física e a matemática ao discutir sobre tais assuntos.

Aos membros da banca pela aceitação do convite para avaliar este trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Em vista dos modernos experimentos de colisões de íons pesados, o estudo e desenvolvimento de técnicas não perturbativas confiáveis para descrever as transições de fase da cromodinâmica quântica (QCD) é de grande importância. O poderoso método numérico não perturbativo conhecido como *lattice* QCD (LQCD) foi capaz de fazer previsões precisas em regimes de altas temperaturas e baixas densidades bariônicas mas ainda não foi refinado a ponto de poder ser aplicado em regimes de altas densidades com confiança. Uma alternativa analítica, que se utiliza de técnicas variacionais, é conhecida como *hard thermal loop perturbation theory* (HTLpt). Apesar de poder ser usado em qualquer regime de densidade e temperatura este método só fornece resultados confiáveis para *um* determinado valor da escala de energia arbitrária, introduzida no processo de regularização, e assim não satisfaz as equações do grupo de renormalização (RG). Recentemente, uma aproximação analítica que une técnicas variacionais com as equações do RG foi proposta sob o acronimo RG OPT (*renormalization group optimized perturbation theory*). Neste trabalho faremos uma aplicação ao caso fermiônico em temperaturas e densidades finitas tendo em vista futuras aplicações a QCD nestes regimes. Para tanto consideraremos o modelo de Gross-Neveu em $2d$ com simetria $O(2N)$ o qual possui algumas características em comum com a QCD (tais como simetria quiral e liberdade assintótica). Aplicaremos a RG OPT para o cálculo da pressão ao nível de dois *loops* incorporando assim efeitos de N finito. Utilizando o método de otimização proposto nos trabalhos seminais mostraremos que embora as previsões para a pressão satisfaçam o RG em um *loop* o mesmo não acontece quando contribuições de dois *loops* são adicionadas. Discutiremos a origem desta dependencia de escala residual e mostraremos como a mesma pode ser completamente eliminada definindo-se uma função β efetiva. Com esta otimização alternativa, que constitui nossa contribuição original, obteremos observáveis termodinâmicos que são completamente invariantes de escala abrindo a possibilidade para que o método seja usado em teorias mais realistas.

Palavras-chave: métodos não perturbativos. modelo de Gross-Neveu. transições de fase.

ABSTRACT

Nowadays, one of the most important research topics in Physics concerns the determination of the phase diagram describing quantum chromodynamics (QCD) phase transitions in which case one must recur to the use of non-perturbative techniques. Among these tools we have lattice QCD (LQCD) as well as hard thermal loop perturbation theory (HTLpt). Although LQCD is highly reliable at high temperatures and vanishing chemical potentials it is still suffering from the so-called sign problem which prevents its use to describe compressed strongly interacting matter. At the same time, HTLpt is a non-perturbative analytical variational procedure which does not observe renormalization group (RG) properties so that its predictions for physical observables may turn out to depend on the arbitrary energy introduced during the regularization process which is undesirable. Recently, an analytical variational method combining optimized perturbation theory and the renormalization group properties has been proposed under the acronym RGOPT (regularization group optimized perturbation theory). In this vein the present work illustrates an application of the RGOPT to evaluate the pressure of the $O(2N)$ Gross-Neveu model in $2d$ since this theory shares common features with QCD (such as chiral symmetry and asymptotic freedom). We show that by following the original optimization prescription suggested in the seminal works one ends up with an unwanted residual scale dependence when two loop contributions (which incorporate finite N effects) are considered. We then discuss the origin of such a dependence and propose an alternative optimization procedure in which one obtains an effective β function to solve the problem so that all thermodynamical observables become completely RG invariant. We believe that this alternative procedure, which constitutes our main contribution, improves the method so that it can be reliably applied to more realistic theories.

Keywords: non-perturbative methods. Gross-Neveu model. phase transitions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Ilustração do diagrama de fases da QCD. Figura extraída da Ref [48].	21
Figura 2 Desconfinamento e simetria quiral em LQCD de dois sabores. No gráfico esquerdo temos o <i>loop</i> de Polyakov L , que é um parâmetro de ordem para o desconfinamento, e χ_L sua susceptibilidade. No lado direito temos o condensado $\bar{\psi}\psi$, este é o parâmetro de ordem para a quebra de simetria quiral, sendo χ_m sua respectiva susceptibilidade. Isso tudo em função do acoplamento $\beta = 6/g^2$, proporcional a temperatura. Figura extraída da Ref. [2].	22
Figura 3 Diagramas de Feynman para o espalhamento $O(N)$ ϕ^4	28
Figura 4 Diagramas de Feynman para o espalhamento de ordem N^{-1} para teoria $O(N)$ ϕ^4	28
Figura 5 Diagramas de Feynman para o potencial efetivo de ordem N para teoria $O(N)$ ϕ^4	30
Figura 6 Potencial clássico em função do campo escalar para o caso $m^2 = \pm 2 \text{ MeV}^2$ e $\lambda = 2.4$	31
Figura 7 Diagramas de correções quânticas do potencial efetivo em primeira ordem na expansão $1/N$, linhas contínuas representam os propagadores dos campos de Dirac e as linhas tracejadas o campo auxiliar.	37
Figura 8 Parâmetro de ordem, $\bar{\sigma}$, em função da temperatura T para o caso em que $M = 1 \text{ MeV}$ e $\lambda = 1$	41
Figura 9 χ_T em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$	42
Figura 10 P_N pressão de Gross-Neveu em razão de P_{SB} pressão de Stefan-Boltzmann em função da temperatura T , linha pontilhada horizontal é limite de Stefan-Boltzmann e vertical o ponto de inflexão ligado a transição de fase, para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$	43
Figura 11 V_{eff} potencial efetivo de Gross-Neveu em função do campo auxiliar σ com potencial químico μ variando, sendo soluções os mínimos do potencial, mostrando que no ponto $\mu_c = 0.26 M$ ocorre a transição. Todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$	44
Figura 12 Campo auxiliar avaliado no mínimo do potencial efetivo	

$\bar{\sigma}$ em função do potencial químico μ , sendo o ponto $\mu_c = 0.26012 M$ onde ocorre a transição. Todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$ 45

Figura 13 Parâmetro de ordem em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$ possuindo uma massa de corrente $m = 0.001M$ 47

Figura 14 χ_T em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M , sendo $\lambda = 1$, $m = 0.001 M$ e $T_c = 0.260 M$ 47

Figura 15 Esquerda: diagrama de "troca"(ou de Fock) para a auto energia proporcional a δ/N . Direita: contribuição de troca para o potencial efetivo em ordem δN^0 55

Figura 16 O parâmetro de ordem ($\bar{\sigma} \equiv \bar{\eta}$) de LN (linha contínua preta), OPT $M = 1$ MeV (linha tracejada vermelha), OPT $M = 0.25$ MeV (linha pontilhada inferior) e OPT $M = 4$ MeV (linha pontilhada superior) em função da temperatura, sendo $\lambda(1) = 1$ e $N = 3$. Para $M = 1$ MeV a temperatura crítica para OPT é $T_c = 0.171 M$ e para LN é $T_c = 0.208 M$ 57

Figura 17 Razão entre a Pressão Normalizada sobre pressão de Boltzmann em função da temperatura, linha contínua preta sendo LN e as vermelhas tracejadas OPT, sendo $\lambda(1) = 1$ e $N = 3$ 58

Figura 18 Diagramas da pressão perturbativa até ordem λ 60

Figura 19 Massa otimizada $\bar{\eta}$ da RGOPT para o caso $N \rightarrow \infty$ e $N = 3$ (linha contínua preta e linha tracejada preta respectivamente) em relação ao campo auxiliar fixado ($\bar{\sigma}$) de LN (linhas tracejadas vermelhas), sendo $\lambda(1) = 1$ e $M = \{0.5, 1, 2\}$ MeV. 63

Figura 20 Pressão subtraída, normalizada por P_{SB} em função da temperatura para a RGOPT considerando $N \rightarrow \infty$ e $N = 3$ (linha contínua e linha tracejada preta respectivamente), e para LN (linha tracejada vermelha), tomando $\lambda(1) = 1$ 64

Figura 21 Parâmetro de ordem $\bar{\eta}$ em função da temperatura, sendo $\lambda(1) = 1$ e $m = 0.001$ MeV. 65

Figura 22 Pressão com constante de acoplamento otimizada $P(\bar{\eta}, \bar{\lambda})$ em função da escala arbitrária, sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$ 67

Figura 23 Razão entre a pressão calculada em função da escala arbitrária sobre pressão no ponto inicial M_0 , sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$ 69

Figura 24 $\bar{\lambda}$ obtido da RGOPT (linha preta continua) e λ_p pertur-

bativo (linha vermelha tracejada) em função da escala arbitrária, sendo sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$	69
Figura 25 $\bar{\lambda}$ obtido da RGOPT em função da temperatura, sendo $M_0 = 1$ MeV, $N = 3$ e $\lambda_0 = 1$	70
Figura 26 Massa otimizada $\bar{\eta}$ da RGOPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV para $N = 3$ e OPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV em função da temperatura, onde $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$ e $N = 3$	71
Figura 27 Pressão da RGOPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV e da OPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV em função da temperatura, sendo a temperatura crítica da RGOPT $\delta^1 T_c = 0.1235$ MeV, $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$ e $N = 3$	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

QCD	Cromodinâmica Quântica
LQCD	Cromodinâmica Quântica na Rede
QGP	Plasma de Quarks e Glúons
HTLpt	<i>Hard thermal loop perturbation</i>
GN	Gross-Neveu
LN	<i>Large N</i> (N grande)
RG	Grupo de Renormalização
OPT	Teoria de perturbação otimizada
RGOPT	Método que combina RG e OPT
PMS	Princípio da mínima sensibilidade

LISTA DE SÍMBOLOS

\int	Integral
\not{k}	$k_\mu \gamma^\mu$
M	Escala de energia arbitrária
T	Temperatura
μ	Potencial químico
F	Energia Funcional de Landau
\mathcal{F}	Densidade de energia livre
Γ	Ação efetiva
V_{eff}	Potencial efetivo
Γ^n	Funções de Green conectadas de n pontos
ϕ	Campo escalar
ψ	Campo fermiônico
σ	Campo auxiliar
λ	Constante de acoplamento
γ^μ	Matriz de Dirac
χ_T	Susceptibilidade térmica
m	Massa
η	Parâmetro variacional
P	Pressão
δ	Parâmetro de expansão
\overline{MS}	Esquema mínimo de renormalização

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	EXPANSÃO $1/N$	27
2.1	POTENCIAL EFETIVO	30
2.2	SIMETRIA QUIRAL	33
2.3	MODELO GROSS-NEVEU NO LIMITE DE N GRANDE	35
2.3.1	Limite quiral	38
2.3.2	Limite físico	46
2.4	GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO	48
2.5	MODELO DE GN E O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO	49
3	TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA ...	53
3.1	LIMITE DE N GRANDE	53
3.2	CONTRIBUIÇÕES DE N FINITO	55
4	RGOPT	59
4.1	MÉTODO PERTURBATIVO	59
4.2	RGOPT EM ORDEM δ^0 NO LIMITE QUIRAL	61
4.3	ORDEM δ^0 NO LIMITE FÍSICO	64
4.4	ORDEM δ NO LIMITE QUIRAL	65
4.4.1	Procedimento padrão	66
4.4.2	Procedimento com invariância exata	67
5	CONCLUSÕES	73
Referências		77
APÊNDICE A - Soma de Matsubara		83
APÊNDICE B - Diagramas de Feynman		87

1 INTRODUÇÃO

A descrição teórica do diagrama de fases da cromodinâmica quântica (QCD) é um tema de grande relevância atual em vista dos experimentos relacionados com as colisões de íons pesados que estão sendo realizados em colisores como o Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) e o Large Hadron Collider (LHC). Do ponto de vista técnico a dificuldade teórica está relacionada com o cálculo da equação de estado relevante para a descrição das transições, já que no regime de temperaturas e densidades onde a transição ocorre o acoplamento entre quarks e gluons ainda é alto excluindo assim a possibilidade do uso de técnicas de aproximações puramente perturbativas [1]. A Fig 1 representa esquematicamente o possível diagrama de fases conforme previsto por simulações na rede (LQCD), em $\mu \approx 0$, e por modelos efetivos para os outros regimes.

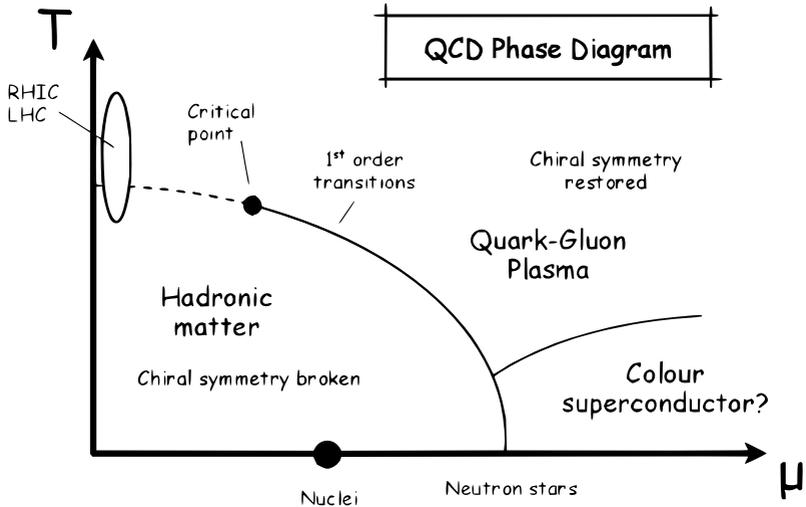


Figura 1 – Ilustração do diagrama de fases da QCD. Figura extraída da Ref [48].

Neste diagrama de fases a região de baixas temperaturas e densidades bariônicas (proporcional ao potencial químico μ) descreve a matéria hadrônica. Nesta fase, quarks e gluons estão confinados formando hádrons. Devido a forte interação os quarks possuem elevados valores

de massa efetiva, aproximadamente 330 MeV, que é muito maior que a massa do quark de primeira geração na fase desconfiada (≈ 5 MeV). Também é observado na Fig.1 uma fase chamada Plasma de Quarks e Glúons (QGP), localizada no regime de altas temperaturas e/ou densidades. Este estado é consequência do fenômeno da liberdade assintótica da interação forte entre quarks e gluons. Podemos nos referir ao QGP como matéria "desconfiada".

No caso da QCD a constante de acoplamento ainda é alta ($g = 4\pi\alpha_s > 1$) nas escalas de energia relevantes para as transições (≈ 1 GeV) requerendo a utilização de aproximações não perturbativas como as simulações numéricas na rede (LQCD). Neste método o espaço-tempo é discretizado em pontos de uma rede e a simulação é feita com técnicas de Monte Carlo.

Em densidades bariônicas nulas esta técnica prevê que a restauração da simetria quiral e o "desconfinamento" (passagem da matéria hadrônica para o plasma de quarks e gluons) acontecem na mesma temperatura [2], conforme ilustra a Fig. 2.

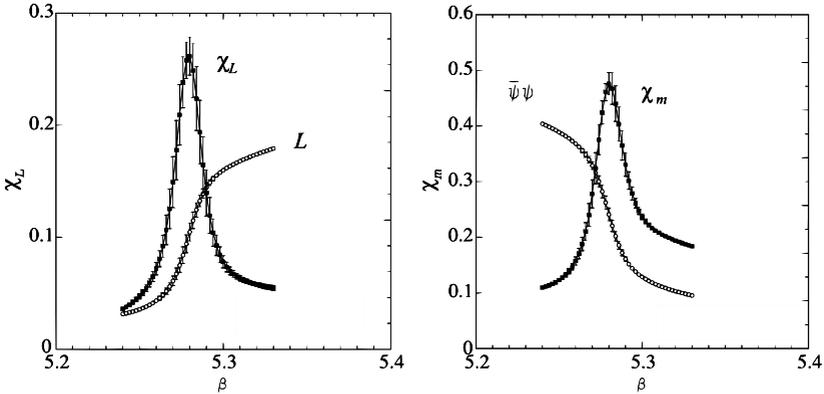


Figura 2 – Desconfinamento e simetria quiral em LQCD de dois sabores. No gráfico esquerdo temos o *loop* de Polyakov L , que é um parâmetro de ordem para o desconfinamento, e χ_L sua susceptibilidade. No lado direito temos o condensado $\bar{\psi}\psi$, este é o parâmetro de ordem para a quebra de simetria quiral, sendo χ_m sua respectiva susceptibilidade. Isso tudo em função do acoplamento $\beta = 6/g^2$, proporcional a temperatura. Figura extraída da Ref. [2].

Infelizmente, no momento, a LQCD é somente aplicável no limite de baixas densidades ($\propto \mu$, sendo μ o potencial químico) onde o

"problema do sinal" não está presente ou pode ser contornado [3].

Outro método não perturbativo que, oposto ao caso da LQCD, pode ser aplicado fora do limite de baixas densidades utiliza uma reorganização da teoria de perturbação sendo conhecido como HTLpt (hard thermal loop perturbation theory) [4,5]. Já que HTLpt utiliza resultados da teoria perturbativa acaba dependendo de uma escala de energia arbitrária, introduzida no procedimento de regularização dimensional, com o objetivo de manter coerência de dimensões. Apesar de HTLpt concordar com LQCD na "escala central" $M = 2\pi T$ [6], onde M é a escala arbitrária, os resultados da HTLpt não são compatíveis com o grupo de renormalização.

Essa dependência da escala arbitrária, que não está presente na densidade Lagrangiana da teoria, compromete a confiabilidade da HTLpt. Outro problema é que os resultados são somente confiáveis no regime de altas temperaturas.

Modelos efetivos para QCD tem sido largamente explorados nas últimas décadas, estes possuem determinadas propriedades semelhantes à QCD. O modelo efetivo que será descrito nesse trabalho foi apresentado por David Gross e André Neveu chamado modelo de Gross Neveu. Os autores estudaram este modelo em (1+1) dimensões no limite de N grande (LN) [7]. O limite LN foi bastante utilizado para estudar comportamentos críticos, sendo na matéria condensada e estatística chamado de aproximação de campo médio (MFT). Os resultados de LN aplicado no modelo GN mostraram que esta teoria possui quebra de simetria quiral dinâmica, liberdade assintótica e transmutação dimensional. Estas propriedades são compartilhadas com a QCD, porém uma das diferenças é que o modelo de GN não possui confinamento.

Como dito antes, a utilização de LN no modelo de Gross-Neveu gera uma quebra de simetria quiral, que é restaurada em uma certa temperatura crítica. Entretanto para teorias de uma dimensão espacial o teorema de Landau [8] proíbe transição de fase para temperaturas finitas, esta violação do teorema é especificamente estudada no caso de Gross-Neveu na referência [9].

Neste trabalho aplicaremos um método analítico não perturbativo alternativo, conhecido como RGOPT (renormalization group optimized theory) [39,40,41] ao modelo GN. Esta técnica combina teoria de perturbação otimizada (OPT)[10,11] com o grupo de renormalização (RG) [12,13]. Nosso objetivo é ir além de campo médio (ou LN) introduzindo diagramas de Feynman com correções de N finito além de observar invariância de escala.

Apesar de ter um desenvolvimento perturbativo a OPT possui

um parâmetro adicionado à densidade lagrangiana responsável por todo caráter não perturbativo. No modelo GN este parâmetro é introduzido com um termo $-(1 - \delta)\eta\bar{\psi}^a\psi^a$ na densidade lagrangiana e a constante de acoplamento é multiplicada por δ . O desenvolvimento perturbativo passa a ser em potências de δ , enquanto η representa um parâmetro variacional com dimensões de massa responsável pelo caráter não perturbativo.

Note que ao incorporar efeitos de N finito a OPT padrão fornece resultados que não são invariantes de escala como veremos em detalhes. Surge então a necessidade de um método mais potente como a RGOPT. A primeira aplicação da RGOPT foi no modelo de Gross-Neveu em temperaturas e densidades nulas [39]. Em seguida a RGOPT foi aplicada com sucesso na QCD (em $T = 0$) para o cálculo do condensado de quarks [41].

O presente trabalho começará com uma revisão da aproximação de LN, que será explorada para testar outros métodos, já que todos eles poderão ser investigados em tal limite. Finalizaremos esse capítulo investigando sua relação com o grupo de renormalização, mostrando que neste limite o modelo obedece "naturalmente" a equação do RG.

No capítulo 3, seguindo a Ref. [11], revisaremos o método OPT aplicado no modelo GN. Iniciaremos este capítulo apresentando a OPT no limite de LN, verificando que este método apresenta uma solução física concordante com LN. Em seguida consideraremos contribuições de N finito em ordem δ , assim verificando novamente o limite de LN é discutindo sobre melhorias no resultado. Mostraremos como as correções de N finito introduzem uma dependência na escala e conseqüentemente comprometem a confiabilidade dos resultados.

O capítulo 4 será dedicado ao estudo da RGOPT. Na primeira seção será feito uma revisão da teoria de perturbação no modelo GN, verificando o aparecimento de problemas relacionados às divergências infravermelhas, além de investigar sua relação com o RG. Na segunda seção consideraremos a ordem mais baixa (δ^0) da RGOPT, verificando sua relação com LN. Após faremos a ordem δ com o procedimento padrão da RGOPT verificando uma dependência de escala residual. Afim de resolver este problema foi desenvolvido neste trabalho um procedimento alternativo através da determinação de uma função beta efetiva que além de preservar a liberdade assintótica assegura que os observáveis termodinâmicos, assim, obtidos satisfaçam exatamente as equações do RG. O desenvolvimento desta técnica alternativa representa nossa contribuição original mais importante.

Finalmente, no capítulo 5 serão apresentados nossas conclusões

e perspectivas.

2 EXPANSÃO $1/N$

Em 1968 Stanley notou a utilidade da expansão em potências $1/N$, onde N representa o número de componentes do campo, em uma aplicação [14] ao modelo discreto de interação entre spin isotrópicos em $\nu \rightarrow \infty$ dimensões (modelo de Ising). Ele mostrou que nesse limite o modelo se comporta como a aproximação esférica, podendo ser resolvido analiticamente. Inspirado pelo trabalho de Stanley da física estatística, Wilson em 1973 introduziu o método na teoria quântica de campos [15], trabalhando com o modelo $O(N)$ escalar e $U(N)$ fermiônico. Depois desses trabalhos várias aplicações da expansão $1/N$ foram implementadas tanto na física nuclear quanto na física de partículas [16,17,18]. Dentre estes trabalhos teve uma aplicação na QCD (1+1) feito por 't Hooft [49], salienta-se que algumas outras aproximações, além do N grande, foram necessárias. Quando apenas a primeira ordem da expansão em potências de $1/N$ é considerada, a aproximação é conhecida como aproximação de N grande (LN).

Começaremos explicando o desenvolvimento da expansão $1/N$ em uma teoria mais simples, a versão $O(N)$ da teoria $\lambda\phi^4$ [15]. Esta teoria não será amplamente discutida, já que este modelo não tem relevância física para este trabalho. Por outro lado, por sua simplicidade é bem adequada para ilustrar o conceito dessa expansão. O modelo $O(N)$ é uma teoria de N campos escalares ϕ^a ($a = 1, 2, \dots, N$) com densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a - \frac{g}{8} (\phi^a \phi^a)^2, \quad (2.1)$$

onde há uma soma em índices repetidos (a), g é constante de acoplamento e m é o parâmetro de massa. Note que a Eq. (2.1) esta escrita no sistema natural de unidades ($\hbar = c = k = 1$) que será adotado ao longo de todo o trabalho.

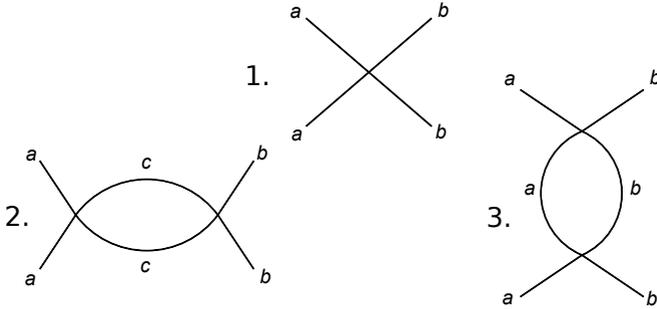


Figura 3 – Diagramas de Feynman para o espalhamento $O(N)$ ϕ^4 .

Na Fig.3 são ilustrados os primeiros três diagramas na teoria de perturbação relacionados ao espalhamento de dois mésons de tipo a em dois b . Note que c pode ir de 1 a N , logo o segundo diagrama é o único de ordem N , sendo os outros de ordem N^0 . Isso acaba deixando o limite de N grande sem sentido, já que o primeiro diagrama (clássico) iria acabar sendo negligenciado. Contornamos isso, facilmente, modificando a constante de acoplamento,

$$\lambda \equiv gN, \quad (2.2)$$

onde λ agora será mantido constante, enquanto g varia de acordo com N .

Com este procedimento o primeiro e o segundo diagramas ficam na ordem de N^{-1} , sendo o terceiro, agora irrelevante, de ordem N^{-2} .

Apesar desse procedimento há vários diagramas de ordem N^{-1} , com várias potencias em λ . Podemos, por exemplo, adicionar outro *loop* no segundo diagrama Fig.4. Desta maneira, obter em todos os diagramas proporcionais a N^{-1} e provar que não existem diagramas de ordem positiva ou nula de N seria um desafio complicado.

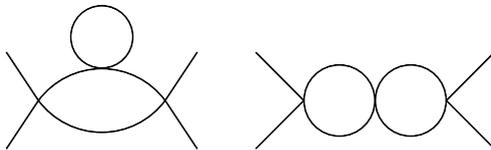


Figura 4 – Diagramas de Feynman para o espalhamento de ordem N^{-1} para teoria $O(N)$ ϕ^4 .

Para simplificar a seleção dos diagramas que contribuem em uma

determinada ordem da expansão em potências de $1/N$ é conveniente adicionar um campo auxiliar (σ)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{N}{2\lambda} \left(\sigma - \frac{\lambda}{2N} \bar{\phi}^a \phi^a - m^2 \right)^2, \quad (2.3)$$

Esse termo extra não altera a dinâmica da Lagrangiana, já que é um termo gaussiano e ao fazer a integral funcional em σ conseguiríamos uma constante multiplicativa no gerador funcional da teoria, sendo que a normalização do gerador é algo irrelevante para dinâmica. Com esta substituição obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{N}{\lambda} m^2 \sigma + \frac{N}{2\lambda} \sigma^2 - \frac{1}{2} \sigma \phi^a \phi^a, \quad (2.4)$$

desconsiderando termos de m^4 .

Note que ao resolver as equações de Euler-Lagrange para σ obtemos

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{N} \phi^a \phi^a + m^2, \quad (2.5)$$

porém apesar da dinâmica da lagrangiana ser a mesma as regras de Feynman mudam. Na nova lagrangiana todos os fatores de $1/N$ estão ligados ao propagador de σ : ($i\lambda/N$). Todo *loop* de ϕ carrega o mesmo índice, portanto carregando um fator de N (basta notar que na nova lagrangiana só há interação entre ϕ^a de mesmo índice ao contrário da antiga que misturava, em pares, índices nas interações).

Após estes procedimentos o potencial efetivo é uma grandeza fácil de ser obtida em potências de N . Vale notar que este potencial efetivo é a soma do potencial clássico,

$$V_c = -\frac{N}{2\lambda} \sigma^2 + \frac{N}{\lambda} m^2 \sigma, \quad (2.6)$$

mais correções quânticas que são ilustradas na Fig.5, já que cada *loop* é proporcional à \hbar .

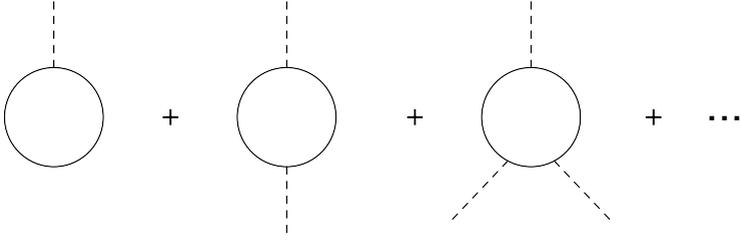


Figura 5 – Diagramas de Feynman para o potencial efetivo de ordem N para teoria $O(N)$ ϕ^4 .

Conforme já enfatizado não iremos calcular estas correções explicitamente para este modelo (o leitor interessado pode consultar a Ref. [46]) Por outro lado, em seguida, discutiremos o potencial efetivo em linhas mais gerais.

2.1 POTENCIAL EFETIVO

Uma simetria pode ser quebrada quando a lagrangiana possui mais de um estado fundamental. Para ilustrar este fenômeno vamos considerar a teoria escalar descrita por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.7)$$

onde ϕ descreve o campo escalar com parâmetro de massa m e interação descrita pelo parâmetro λ . Esta teoria é invariante frente à transformação de paridade $\phi \rightarrow -\phi$. Quando $m^2 < 0$ esta simetria é quebrada espontaneamente no nível clássico (ou de "árvore")

$$V_c(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.8)$$

conforme ilustra a Fig. 6.

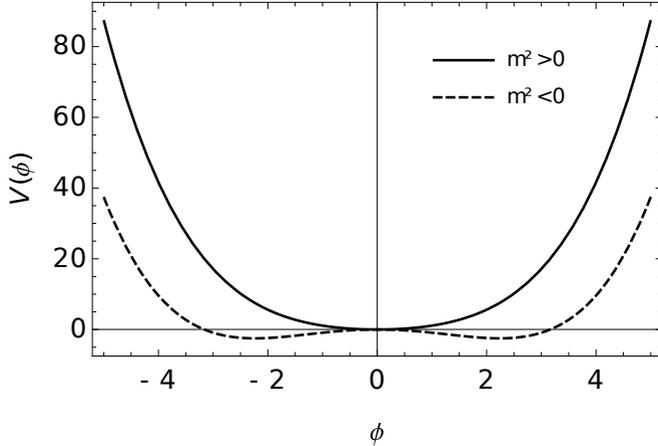


Figura 6 – Potencial clássico em função do campo escalar para o caso $m^2 = \pm 2 \text{ MeV}^2$ e $\lambda = 2.4$.

Apesar da Lagrangiana continuar com a simetria de paridade o estado fundamental (vácuo) não possui essa simetria no caso $m^2 < 0$. No caso $m^2 > 0$ não há quebra de simetria, mas veremos que correções quânticas podem alterar esta situação induzindo a chamada quebra dinâmica de simetria.

O desenvolvimento a seguir é baseado na Ref. [20], onde foi considerada uma teoria escalar mais geral dada pela $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Inicialmente adicionamos à Lagrangiana uma fonte externa $J(x)$ linear ao campo ϕ ,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J(x)\phi(x). \quad (2.9)$$

O gerador funcional, $(Z[J])$, que representa a amplitude relacionada com a transição de vácuo para o vácuo em tempos remotos entre si, também é conhecido como *vacuum-to-vacuum amplitude* [21],

$$Z = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x [\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x)]}. \quad (2.10)$$

Podemos tomar a derivada funcional $W[J]$ e expandir em J

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z(J=0)} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^D x' [\mathcal{L}(\phi) + J(x')\phi(x')]} \phi(x) + \mathcal{O}(J), \quad (2.11)$$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0|\phi(x)|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle} \equiv \phi_c(x), \quad (2.12)$$

sendo ϕ_c o valor esperado do operador $\phi(x)$ na presença de uma fonte. J é uma fonte usada para criar e aniquilar partículas, e quando J tende a zero ϕ_c representa o valor esperado do campo no vácuo da teoria ($\langle 0|\phi(x)|0\rangle_{J=0}$).

Fazendo uma transformação de Legendre obtemos o gerador das funções de Green conectadas, chamada de ação efetiva

$$\Gamma[\phi_c(x)] = W[J] - \int d^D J(x)\phi_c(x), \quad (2.13)$$

ao tomar a derivada funcional da expressão 2.13 em relação $\phi_c(x)$ obtemos,

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c(x)]}{\delta \phi_c(y)} = -J(y). \quad (2.14)$$

Expandindo a ação efetiva em função de ϕ_c ,

$$\Gamma[\phi_c(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (2.15)$$

sendo Γ^n a soma dos diagramas de Feynman irreduzíveis de uma partícula (1PI) com n pernas externas amputadas.

Podemos expandir a ação efetiva sobre os momentos, assim no espaço de posição obtemos

$$\Gamma[\phi_c(x)] = \int d^D x [-V_{eff}(\phi_c(x)) + (\partial\phi_c(x))^2 Z[\phi_c(x)] + \dots]. \quad (2.16)$$

Esta grandeza tem um análogo estatístico chamado energia funcional de Landau, que é, por exemplo, empregada para descrever ferromagnetos [22].

$$F = \int d^3 x [\mathcal{F}[\mathbf{m}(x)] + \frac{1}{2} K(\mathbf{m}(x) \nabla \mathbf{m}(x))^2 + \dots]. \quad (2.17)$$

onde \mathcal{F} é a densidade de energia livre e $\mathbf{m}(x)$ representa a magnetização que é usada como parâmetro de ordem na teoria estatística de campo.

Tomando $J \rightarrow 0$ o campo ϕ_c volta a representar o valor esperado no vácuo e usando a expressão 2.14 obtemos

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\phi_c(x)} = 0 \quad (2.18)$$

Agora vamos fazer a aproximação de campo homogêneo, $\phi_c(x) = \phi_c$. Com isso as equações 2.18 e 2.16 indicam que o valor esperado do campo auxiliar no vácuo é obtido pela solução de

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c} \right|_{\langle \phi \rangle_0} = 0 \quad (2.19)$$

No análogo estatístico voltando ao ferromagneto a aproximação de campo homogêneo, $m(x) = m$, obtemos

$$F = V\mathcal{F} \rightarrow \frac{F(\langle \mathbf{m} \rangle)}{V} = -P = \mathcal{F}(\langle \mathbf{m} \rangle) \quad (2.20)$$

onde P representa a pressão. Analogamente para a teoria quântica de campos obtemos

$$P = -V_{eff}(\phi_c) \Big|_{\langle \phi \rangle_0}. \quad (2.21)$$

Por fim utilizando a equação 2.15, podemos, através da funções de Green no espaço dos momentos, escrever o potencial efetivo como a seguinte expansão

$$V_{eff}(\phi_c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^n(0, \dots, 0) \phi_c^n, \quad (2.22)$$

onde $\tilde{\Gamma}^n(0, \dots, 0)$ são as funções de Green com momento externo nulo [23].

2.2 SIMETRIA QUIRAL

No contexto da QCD a quiralidade só é bem definida no momento em que a massa do quark é nula. Essa aproximação é as vezes utilizada em teoria de perturbação, pois a massa do quark diminui com o aumento da escala (M) [25], sendo que neste mesmo limite a cons-

tante de acoplamento é baixa, logo este limite é mais adequado para o método perturbativo. Porém fisicamente (para a primeira geração) sabemos que quarks possuem massa, apesar de ser pequena comparada com a massa dos hádrons. Da relação de Gell-Mann-Oaks-Renner [2], temos

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_c \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \dots \quad (2.23)$$

onde m_c representa a massa de corrente dos quarks *up* e *down*, que estão relacionadas à massa do pión, $m_\pi \approx 138$ MeV, a constante de decaimento do pión, $f_\pi \approx 93$ MeV e o condensado de quarks, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx -(240 \text{ MeV})^3$. Com isso a massa de corrente dos quarks de primeira geração (*up* e *down*) é aproximadamente 5 MeV. Esclarecendo a grandeza dessas massas podemos concluir que é possível inferir uma simetria quiral aproximada para QCD. Conforme já discutido a massa constituinte dos quarks de primeira geração é de aproximadamente 330 MeV.

Quiralidade é um conceito de simetria baseado em imagem refletida, onde a imagem refletida de um objeto não pode ser sobreposta no objeto original. Fisicamente essa propriedade é bem definida para teorias não massivas, já que a helicidade e a quiralidade de uma partícula são as mesmas. Neste caso uma partícula tendo uma projeção de spin na direção do movimento manterá essa relação para qualquer referencial, já que a partícula com spin se move na velocidade da luz, assim tendo uma helicidade bem definida. Quando temos partículas massivas a helicidade deixa de ser definida, devido a dependência do referencial (velocidade da partícula é menor que a da luz), e a lagrangiana passa a não possuir simetria quiral. Portanto para ter simetria quiral é necessário que as partículas da teoria tenham massa nula. Como veremos neste trabalho a simetria quiral de uma teoria não massiva (no nível clássico) pode ser quebrada por correções quânticas.

Para compreender matematicamente como um termo massivo quebra a invariância quiral podemos considerar a Lagrangiana livre de Dirac em duas dimensões

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi. \quad (2.24)$$

Podemos aplicar os seguintes operadores de projeção

$$T_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (2.25)$$

$$T_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (2.26)$$

onde $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z$, $\gamma^0 = \sigma_x$ e $\gamma^1 = -i\sigma_y$, sendo σ_i as matrizes de Pauli. Agora sabendo das propriedades das projeções: $T_L^2 = T_L$, $T_R^2 = T_R$, $T_R T_L = 0$ e $T_L + T_R = 1$ podemos concluir que,

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (2.27)$$

onde ψ_R e ψ_L são projeções obtida pelos operadores T_R e T_L , respectivamente. Utilizando a equação 2.26 a Lagrangiana livre de Dirac pode ser expressada em termos das projeções como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L i\partial_\mu \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\partial_\mu \gamma^\mu \psi_R - m\bar{\psi}_L \psi_R - m\bar{\psi}_R \psi_L. \quad (2.28)$$

Podemos notar que para a teoria não massiva partículas *righthanded* (ψ_R) e *lefthanded* (ψ_L) estão completamente desacoplados, esta propriedade é o conceito de quiralidade na física. Neste trabalho estaremos interessados na simetria quiral discreta que é definida pela transformação

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi} \gamma_5, \quad (2.29)$$

que pode ser facilmente verificada aplicando a propriedade da anticomutação da matrizes γ ,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (2.30)$$

Novamente concluímos que a quebra dessa simetria ocorre no caso massivo (físico).

2.3 MODELO GROSS-NEVEU NO LIMITE DE N GRANDE

O modelo de Gross-Neveu (GN) é uma teoria de campos renormalizável que admite expansão $1/N$, possui quebra dinâmica de simetria e liberdade assintótica [7]. O modelo possui simetria global $U(N)$, sendo formado por campos de férmions.

A lagrangiana do modelo é descrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^a (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi^a + \frac{g}{2} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2. \quad (2.31)$$

Os campos de férmions (Dirac) ψ^a , $a = 1 \dots N$ possuem duas componentes e as matrizes de Dirac (γ^μ) são 2×2 . De acordo com a convenção temos $\gamma^u = [\sigma_x, -i\sigma_y]$, $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z$, onde σ_i são matrizes de

Pauli para o spin.

A princípio o modelo foi proposto com o objetivo de apresentar a simetria quirál ($m = 0$), para assim evidenciar a quebra dinâmica de simetria.

Através do termo cinético concluímos que ψ^a tem dimensão de

$$[\psi^a] \equiv [\mathcal{M}]^{D/2-1/2}, \quad (2.32)$$

onde \mathcal{M} tem dimensão de energia. Isto permite inferir que a constante acoplamento tenha dimensão de $2 - D$. É bem conhecido que para termos uma teoria renormalizável é preciso que a dimensão do acoplamento seja nula ou positiva [27]. Isso faz com que apenas para dimensão (1+1) o modelo seja renormalizável. Apesar de que para a teoria perturbativa o modelo só é renormalizável para dimensões de no máximo uma componente espacial, no contexto de métodos não perturbativos é possível a renormalização de Gross-Neveu para o caso (2+1) [26]. Note que nesta teoria a interação (local) é do tipo 4-férmions e pode ser vista como uma aproximação para interação da QCD.

Como já enfatizado esse modelo admite expansão $1/N$, a qual requer que a constante de acoplamento seja redefinida como $g \rightarrow \pi\lambda/N$. Em seguida introduzimos um campo auxiliar σ para facilitar a contagem de diagramas

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} - \frac{N}{2\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{\pi\lambda}{N} \bar{\psi}^a \psi^a - m \right)^2 \\ &= \bar{\psi}^a i \partial_\mu \gamma^\mu \psi^a - \frac{N}{2\pi\lambda} \sigma^2 - \sigma \bar{\psi}^a \psi^a + \frac{m\sigma}{2\pi\lambda}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde desprezamos o termo proporcional a m^2 , já que é uma constante.

Resolvendo as equações de Euler-Lagrange para o campo auxiliar obtemos,

$$\sigma = -\frac{\pi\lambda}{N} \bar{\psi}^a \psi^a + m, \quad (2.34)$$

garantindo que a dinâmica original seja a mesma. Se olharmos em termos de integrais funcionais, o termo adicionado é gaussiano e portanto não altera a dinâmica descrita pela Lagrangiana.

Agora, para obter o potencial efetivo em função de σ , diagramaticamente, podemos utilizar a aproximação de N grande, considerando apenas os diagramas de um *loop* (veja Fig. 7) já que estes são proporcionais a N e estão, portanto, contidos na primeira ordem (LN) da expansão $1/N$.

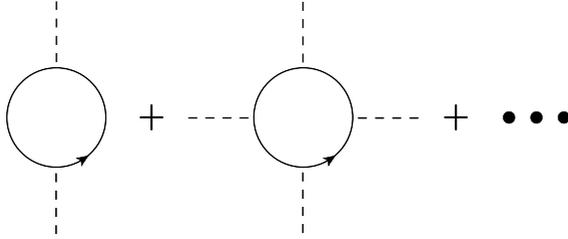


Figura 7 – Diagramas de correções quânticas do potencial efetivo em primeira ordem na expansão $1/N$, linhas contínuas representam os propagadores dos campos de Dirac e as linhas tracejadas o campo auxiliar.

Segundo a Fig. 7 temos infinitos diagramas com pernas externas σ , porém apenas um *loop* fermiônico para essa ordem em cada diagrama, sendo que essas correções quânticas serão somadas ao potencial clássico

$$V_c = \frac{N}{2\pi\lambda}\sigma^2 - \frac{m\sigma}{2\pi\lambda}. \quad (2.35)$$

Note que sem massa esse potencial é descrito por uma parábola com mínimo em zero, já com a massa temos que o mínimo é deslocado.

Faremos agora a leitura dos diagramas, segundo a densidade Lagrangiana:

- Para cada vértice temos que multiplicar por um fator de i e cada propagador por um fator de $i\not{p}/(p^2 + i\epsilon)$.

- Na figura 7, índices foram suprimidos, mas para cada *loop* temos um fator de N associado, pois todo propagador tem o mesmo índice. Lembrando que o *loop* fermiônico demanda tomar o traço e multiplicar por (-1) .

- Cada diagrama tem um fator de simetria $(2n - 1)!$, dado por permutações das pernas externas, sendo que este fator parcialmente cancela o fatorial da Eq. 2.22 sobrando $1/2n$ e segundo essa mesma equação cada perna externa multiplica o campo auxiliar σ .

Ficamos então com

$$-iV_{eff} = -i\frac{N}{2\pi\lambda}\sigma^2 + i\frac{m\sigma}{2\pi\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{2n} Tr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{\sigma\not{k}}{k^2 + i\epsilon'} \right)^{2n}. \quad (2.36)$$

Deve ser enfatizado que devido as integrais contidas nos *loops* estas correções quânticas acabam divergindo no limite U.V. (*ultraviolet*), onde o momento é alto. Com o objetivo de isolar estas divergências podemos implementar um procedimento de regularização através de *cutoff* ou regularização dimensional. Neste trabalho utilizaremos o segundo método.

2.3.1 Limite quiral

Primeiramente vamos considerar o limite quiral, ou seja $m = 0$, evidenciando a quebra dinâmica de simetria por correções quânticas

Analisando a Lagrangiana da expressão 2.33 temos que $\sigma = 0$ para que a simetria quiral se mantenha e essa é uma possibilidade, porém buscaremos as soluções não triviais, assim quebrando dinamicamente essa simetria. Teremos então que os mínimos do potencial efetivo, começando com a Eq. 2.36 e tomando $m \rightarrow 0$:

$$-iV_{eff} = -i\frac{N}{2\pi\lambda}\sigma^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{2n} Tr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{\not{k}\sigma}{k^2 + i\epsilon'} \right)^{2n}. \quad (2.37)$$

Agora tomando o traço $Tr \not{k}^{2n} = (k^2)^n$ e usando a rotação de Wick temos,

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \frac{N}{2\pi\lambda}\sigma^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left(\frac{-\sigma^2}{p^2} \right)^n \\ &= N \left[\frac{1}{2\pi\lambda}\sigma^2 - M^{2-D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{p^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde a dimensão é dada por $D \rightarrow 2$ e M é uma escala arbitrária de energia, usada para manter as dimensões corretas.

A integral é dada por [21],

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \ln \left(p^2 + m^2 \right) &= -\frac{\Gamma(-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{D/2} \\ &= -\frac{\Gamma(\epsilon - 1)}{(4\pi)^{1-\epsilon}} (m^2)^{1-\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde foi usado $D = 2 - 2\epsilon$. Voltando para equação 2.38 e expandindo em ϵ ,

$$V_{eff} = N \left[\frac{1}{2\pi\lambda} \sigma^2 + \frac{1}{4\pi} \sigma^2 \ln \left(\frac{\sigma^2}{M^2} \right) - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma_E + \ln(4\pi) \right) \sigma^2 \right]. \quad (2.40)$$

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni com valor aproximado de 0.577.

Agora poderemos aplicar o esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$, note que a divergência é de ordem σ^2 , podendo ser renormalizado por um contratermo na Lagrangiana. Após renormalizar com o esquema $\overline{\text{MS}}$,

$$M^2 \rightarrow 4\pi M^2 \exp(\gamma_E), \quad (2.41)$$

V_{eff} é dado por:

$$V_{eff} = N \left[\frac{1}{2\pi\lambda} \sigma^2 + \frac{1}{4\pi} \sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{M^2} - 1 \right) \right] \quad (2.42)$$

Utilizando a Eq. 2.19 para achar os valores esperados, podemos observar a quebra de simetria dinâmica,

$$\bar{\sigma} = M \exp \left(- \frac{1}{\lambda} \right), \quad (2.43)$$

onde $\bar{\sigma}$ é o ponto de mínimo do potencial efetivo (vácuo).

Temos aqui algo conhecido como formação de *mass gap*, note que segundo o Lagrangiana 2.33 o fato de σ não ser zero confirma a quebra, já que o termo $\sigma \bar{\psi}^a \psi^a$ só mantém a simetria no caso $\sigma = 0$.

Agora que já observamos a quebra dinâmica da simetria outro fato importante é investigar se ela é restaurada e que tipo de transição acontece.

Podemos começar a investigar o modelo com temperaturas e densidades finitas usando o formalismo do tempo imaginário de Matsubara (Apêndice A). Fazendo a substituição da integral temporal A.1 em 2.39 obtemos

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= N \left\{ \frac{1}{2\pi\lambda} \sigma^2 - \int_p \ln \left[\mathbf{p}^2 + (\omega_n - i\mu)^2 + \sigma^2 M^{2\epsilon} \right] \right\} \\
&= N \left\{ \frac{1}{2\pi\lambda} \sigma^2 - \int_p \ln \left[\omega_p^2 + (\omega_n - i\mu)^2 \right] \right\}, \quad (2.44)
\end{aligned}$$

onde

$$\int_p \equiv T \sum_n \int \frac{d^{D-1}p}{2\pi^{D-1}},$$

$\omega_p = \mathbf{p}^2 + \sigma^2 M^{2\epsilon}$ e ω_n são as frequências de Matsubara, T é temperatura e μ é o potencial químico. Utilizando a soma A.2 chegamos em

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= \frac{N\sigma^2}{2\pi\lambda} - N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \omega_p \\
&\quad + TN \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{-(\omega_p + \mu)}{T} \right] \right\} \\
&\quad + TN \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{-(\omega_p - \mu)}{T} \right] \right\}. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Aplicando a regularização dimensional e renormalizando ficamos com

$$V_{eff} = N \left[\frac{\sigma^2}{2\pi\lambda} + \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(\ln \frac{\sigma^2}{M^2} - 1 \right) - \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{\sigma}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right], \quad (2.46)$$

onde a integral térmica é dada por

$$I_1(a, b) = \int_0^{\infty} dx \left[\ln \left(1 + e^{-\sqrt{x^2 + a^2} + b} \right) + (b \rightarrow -b) \right], \quad (2.47)$$

com $x = p/T$, $a = \sigma/T$ e $b = \mu/T$.

Esses passos estão feitos com detalhes no apêndice B começando com a Eq. B.4. Apesar de não ser a mesma grandeza a comparação é facilmente intuitiva, já que chegamos na mesma multiplicando B.4 por (-1) e substituindo $m \rightarrow \sigma$.

Extremizando V_{eff} obtemos a equação auto consistente do vácuo (ou equação de *mass gap*).

$$\bar{\sigma}(M) = M \exp \left[-\frac{1}{\lambda(M)} - I_2\left(\frac{\bar{\sigma}}{T}, \frac{\mu}{T}\right) \right], \quad (2.48)$$

onde

$$I_2(a, b) = -2 \frac{\partial I_1(a)}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + a^2} + b} + 1} \right) + \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + a^2} - b} + 1} \right). \quad (2.49)$$

Fazendo cálculo numérico podemos avaliar a variação do ponto mínimo do potencial efetivo, $\bar{\sigma}$, em relação a temperatura, no limite onde $\mu \rightarrow 0$.

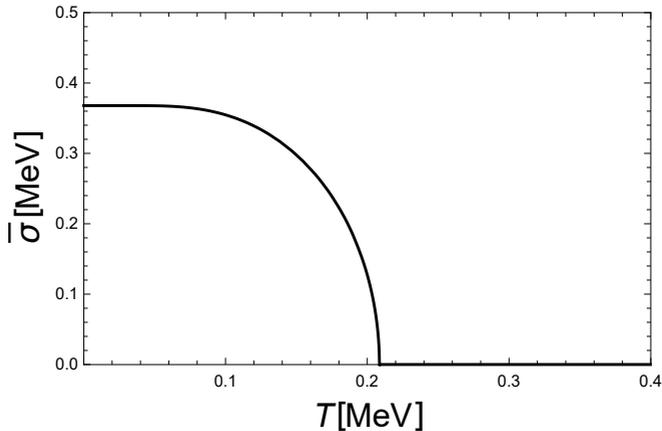


Figura 8 – Parâmetro de ordem, $\bar{\sigma}$, em função da temperatura T para o caso em que $M = 1$ MeV e $\lambda = 1$.

Vale ressaltar que $\bar{\sigma}$ determina se há uma quebra de simetria quiral, ele representa o parâmetro de ordem para transição quiral. Os resultados numéricos (Fig. 8) ilustram uma transição de segunda ordem (que ocorre continuamente, porém na transição a derivada com relação a T diverge definindo um ponto crítico). Note que a temperatura crítica, onde ocorre a restauração da simetria quiral, possui o

valor finito $T_c = 0.208 M$ violando o teorema de Landau [8], já que segundo este temos que $T_c = 0$. Esse problema surge pelo fato que estamos usando a aproximação de campo homogêneo, utilizada para obter a Eq. 2.19. Na Ref. [9] há uma discussão detalhada sobre teorema de Landau no modelo GN especificamente. Isso faz com que agora em diante tenhamos um objetivo claro a medida em que formos adicionando novas correções, ou seja, qualquer método que proponha um refinamento da aproximação de LN deve prever uma diminuição de T_c devido as contribuições de N finito.

Podemos obter como a susceptibilidade térmica ($\chi_T = -d\bar{\sigma}/dT$) varia em função da temperatura conforme mostra a Fig. 9.

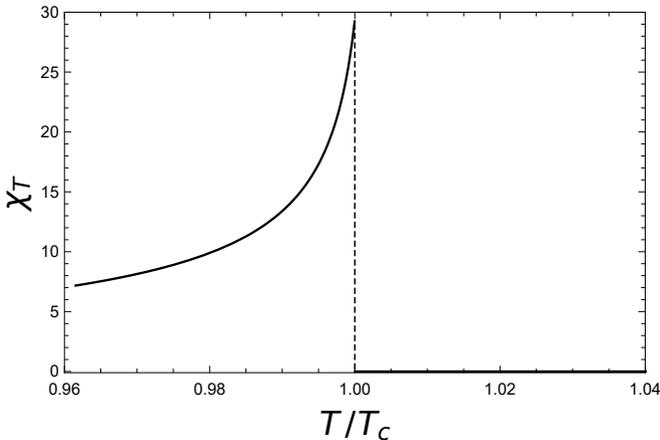


Figura 9 – χ_T em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$

A Fig. 9 mostra que no ponto crítico a susceptibilidade térmica diverge sendo uma das propriedades de uma transição de segunda ordem. Ao comparar com os resultados da Fig. 2 para a QCD notamos que estes são analíticos. Isso se dá pelo fato de que no modelo GN estamos trabalhando no limite quirial, enquanto que para a QCD a quiralidade é um conceito aproximado já que fenomenologicamente $m_q \neq 0$.

Podemos agora calcular a pressão através da Eq. 2.21, antes de fazer cálculo numérico vamos obter a pressão normalizada P_N subtraindo a pressão do vácuo $P_N = P - P(T = 0)$. Para um gás de férmions ideal a pressão (de Stefan-Boltzmann) pode ser facilmente obtida

$$P_{SB} = \frac{\pi}{6} T^2, \quad (2.50)$$

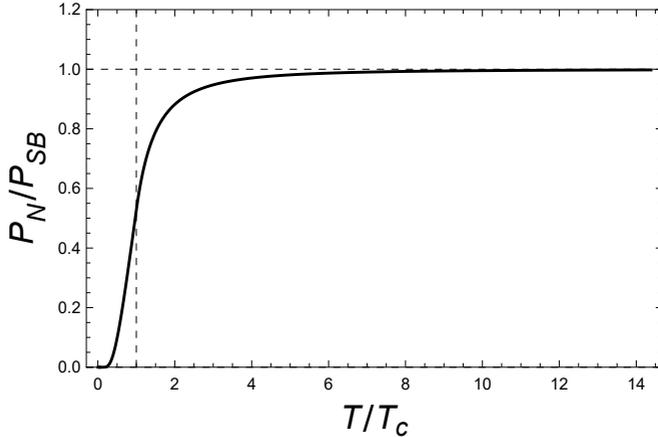


Figura 10 – P_N pressão de Gross-Neveu em razão de P_{SB} pressão de Stefan-Boltzmann em função da temperatura T , linha pontilhada horizontal é limite de Stefan-Boltzmann e vertical o ponto de inflexão ligado a transição de fase, para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$.

Analisando a Fig. 10 temos que a pressão obedece o limite de Stefan-Boltzmann (clássico) e que a temperatura de transição ocorre no ponto de inflexão. Podemos agora avaliar qual tipo de transição ocorre no limite $T \rightarrow 0$ e μ finito. Quando tomamos esse limite temos que as integrais I_1 e I_2 passam a ser

$$I_1(\eta, \mu) = -\frac{1}{2}\theta(\mu^2 - \eta^2) \left[\eta^2 \ln \left(\frac{|\mu| + \sqrt{\mu^2 - \eta^2}}{|\eta|} \right) - |\mu| \sqrt{\mu^2 - \eta^2} \right], \quad (2.51)$$

$$I_2(\eta, \mu) = \theta(\mu^2 - \eta^2) \ln \left(\frac{|\mu| + \sqrt{\mu^2 - \eta^2}}{|\eta|} \right). \quad (2.52)$$

Avaliaremos como se portam as soluções $\bar{\sigma}$ verificando os mínimos de V_{eff} conforme ilustra a Fig. 11.

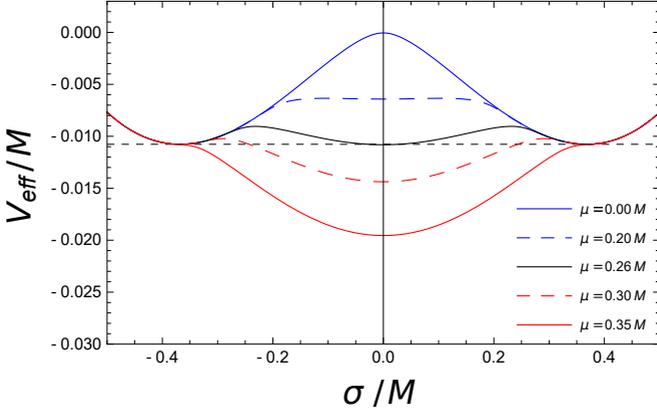


Figura 11 – V_{eff} potencial efetivo de Gross-Neveu em função do campo auxiliar σ com potencial químico μ variando, sendo soluções os mínimos do potencial, mostrando que no ponto $\mu_c = 0.26 M$ ocorre a transição. Todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$.

Da Fig. 11 pode-se concluir que:

- $\mu = 0.00 M$ temos apenas duas soluções estáveis.
- $\mu = 0.20 M$ temos a formação de uma nova solução metaestável (mínimo local) para $\sigma = 0$, esse comportamento é dado por uma inflexão ($d^2 V_{eff} / d^2 \sigma = 0$) e está associado ao aparecimento da primeira linha espinoidal.
- $\mu_c = 0.26 M$ temos a caracterização de uma transição de primeira ordem, onde temos mínimos degenerados estáveis, logo μ_c é ponto de coexistência.
- Em $\mu = 0.30 M$ o mínimo $\sigma = 0$ passa a ser o mínimo global ou estado de mais estabilidade.
- Finalmente em $\mu = 0.35 M$ temos que as soluções não triviais de σ passam por uma inflexão, que está associado ao aparecimento da segunda linha espinoidal, para $\mu > 0.35 M$ as soluções metaestáveis passam a não existir.

Podemos fazer um procedimento analítico para determinar μ_c de maneira precisa. Avaliaremos a pressão ($-V_{eff}(\bar{\sigma})$) no caso em que $\mu = T = 0$, com as equações 2.42 e 2.43

$$P(\bar{\sigma}, \mu = 0) = \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi}, \quad (2.53)$$

O próximo passo é achar a solução onde $\mu \neq 0$ e $\sigma = 0$, tal que a pressão seja a mesma da solução anterior

$$P(\sigma = 0, \mu = \mu_c) = \frac{\mu_c^2}{2\pi}, \quad (2.54)$$

igualando as duas pressões e considerando $\lambda = 1$ ficamos com

$$\mu_c = \pm \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \approx 0.26012 M. \quad (2.55)$$

Pelo fato de termos um campo homogêneo não observamos a formação da fase cristalina, como é visto em baixas temperaturas e densidades elevadas na Ref. [45], logo só temos fase quiral e física (não quiral). A transição de primeira ordem pode ser observada através do parâmetro de ordem, $\bar{\sigma}$, conforme ilustra a Fig. 12.

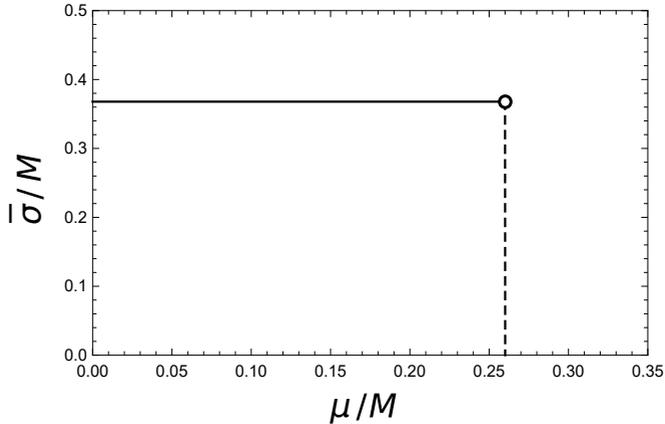


Figura 12 – Campo auxiliar avaliado no mínimo do potencial efetivo $\bar{\sigma}$ em função do potencial químico μ , sendo o ponto $\mu_c = 0.26012 M$ onde ocorre a transição. Todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$.

O diagrama de fases completo para este modelo na aproximação de N grande pode ser encontrado na Ref. [11].

2.3.2 Limite físico

Considerando massa não nula podemos facilmente obter o potencial efetivo, pois a massa intrínseca (de corrente) está apenas relacionada ao nível clássico do potencial. Utilizando as fórmulas 2.36 e 2.46 obtemos

$$V_{eff} = N \left\{ \frac{1}{2\pi\lambda} \sigma^2 + \frac{1}{4\pi} \sigma^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma^2}{M^2} \right) - 1 \right] - \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{\sigma}{T}, \frac{\mu}{T} \right) - \frac{\sigma m}{\pi\lambda} \right\}, \quad (2.56)$$

Podemos agora verificar qual a natureza da transição, agora faremos apenas o limite $\mu = 0$ e temperatura finita. Extremizando o potencial efetivo obtemos o parâmetro de ordem

$$\bar{\sigma} = M \exp \left[- \frac{1}{\lambda(M)} - I_2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{T}, \frac{\mu}{T} \right) + \frac{m(M)}{\bar{\sigma}\lambda(M)} \right], \quad (2.57)$$

A Fig. 13 mostra $\bar{\sigma}$ em função da temperatura no caso físico e claramente ilustrando que uma transição de segunda ordem passa a ser um crossover quando $m \neq 0$, onde a transição ocorre de modo contínuo sem um ponto crítico.

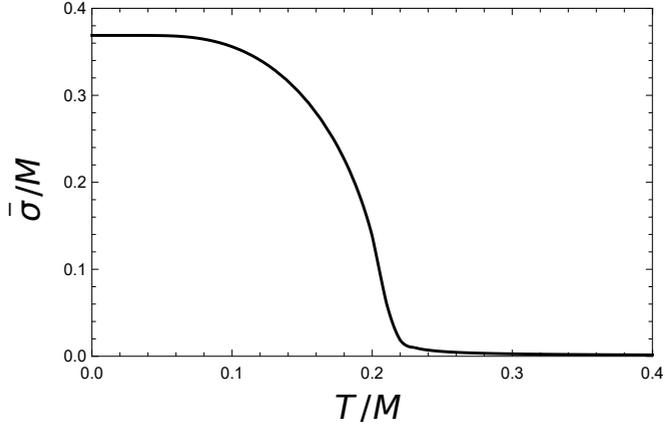


Figura 13 – Parâmetro de ordem em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M e $\lambda = 1$ possuindo uma massa de corrente $m = 0.001M$.

Já que temos um crossover, isso implica que para susceptibilidade térmica ($\chi_T = -d\bar{\sigma}/dT$) não teremos mais a divergência e sim um máximo conforme mostra a Fig. 14.

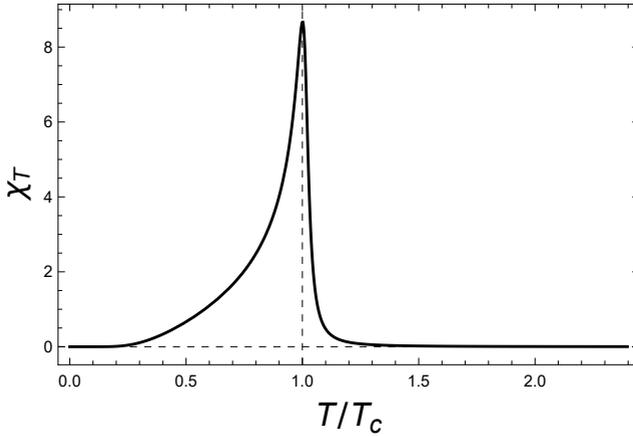


Figura 14 – χ_T em função da temperatura T para o caso em que todas as quantidades estão em unidades de M , sendo $\lambda = 1$, $m = 0.001 M$ e $T_c = 0.260 M$.

Agora temos exatamente a susceptibilidade esperada para um modelo efetivo da QCD.

2.4 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

A ideia de invariância de escala é antiga e atualmente é utilizada em várias áreas, como no caso da física estatística onde o reescalamento do espaço é importante para se obter resultados de fenômenos críticos [35].

Um dos primeiros a investigar como a escala pode dar respostas para questões relacionadas a fenômenos críticos e dar um significado físico ao grupo de renormalização (RG) foi Wilson [36]. O grupo de renormalização basicamente relaciona os parâmetros da Lagrangiana antes e depois da renormalização. Vamos ver que o RG tem ainda o objetivo de deixar os observáveis invariantes de escala.

O RG foi introduzido de uma maneira mais prática na teoria quântica de campos por C. G. Callan and K. Symanzik em 1970. Derivaremos nesse capítulo a equação descoberta independentemente por estes dois autores.

Começaremos voltando à passagem da equação 2.38 para a 2.40, a qual revela que ao separar a divergência expandindo em ordem ϵ , acabamos obtendo uma variável indesejada no resultado de um observável, ou seja, antes desse procedimento não existia na teoria original a escala arbitrária (M).

Todos os outros parâmetros como a constante de acoplamento, a massa e o campo sofrem mudanças nessa escala após adicionarmos correções quânticas [13].

$$\psi = Z_\psi^{-\frac{1}{2}} \psi_b \quad (2.58)$$

$$\lambda = \lambda_b + \delta\lambda \quad (2.59)$$

$$m = m_b + \delta m \quad (2.60)$$

onde m_b , λ_b , ψ_b são parâmetros invariantes de escala, antes de aplicar o processo de renormalização. O campo renormalizado ψ é relacionado ao campo "nu" ψ_b através do fator de escala Z_ψ e logo as funções de uma partícula irredutíveis de n pontos variam de acordo com:

$$\Gamma^n(p, \lambda, m) = Z_\psi^{\frac{n}{2}} \Gamma_b(p, \lambda, m). \quad (2.61)$$

Explorando o fato que Γ_b não possui informação da escala,

$$M \frac{d}{dM} \Gamma_b(p, \lambda, m) = 0. \quad (2.62)$$

Utilizando as duas expressões acima chegamos em

$$M \frac{d}{dM} \left(Z_\psi^{-\frac{n}{2}} \Gamma^n(p, \lambda, m) \right) = 0, \quad (2.63)$$

usando a regra da cadeia

$$M \left(\frac{\partial}{\partial M} + \frac{\partial \lambda}{\partial M} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial m}{\partial M} \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} Z_\psi^{-1} \frac{\partial Z_\psi}{\partial M} \right) \Gamma^n = 0. \quad (2.64)$$

Essa equação é conhecida como *Callan-Symanzik equation*, como já mencionado foi obtida independentemente por Curtis Callan [29] e Kurt Symanzik [30]. Sabendo que a pressão é uma função de zero pontos (não depende do momento externo), logo de 2.64 obtemos

$$M \frac{dP}{dM} = M \frac{\partial P}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad (2.65)$$

onde

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \ln M} = \beta(\lambda) = -\beta_0 \lambda^2 - \beta_1 \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (2.66)$$

$$-\frac{\partial \ln m}{\partial \ln M} = \gamma_m(\lambda) = \gamma_0 \lambda + \gamma_1 \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (2.67)$$

Portanto, o grupo de renormalização assegura que um observável, em nosso caso a pressão, deva permanecer invariante quando a escala de energia *arbitrária*, M , é variada.

2.5 MODELO DE GN E O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Agora usaremos os resultados obtidos na seção 2.3 para demonstrar a aplicação do RG. Primeiramente precisamos das informações sobre os coeficientes das equações 2.66 e 2.27. Neste caso precisaríamos calcular as correções quânticas tanto para a massa quanto para o acoplamento. Vamos retirar esses coeficientes da Ref [13] levando em conta

a troca de notação (constante de acoplamento da Ref [13] $g = \lambda/N$),

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1 - \frac{1}{2N} & \gamma_1 &= -\frac{\gamma_0}{4N}, \\ \beta_0 &= 1 - \frac{1}{N} & \beta_1 &= -\frac{\beta_0}{2N}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

No limite de N grande as Eqs. 2.66 e 2.67 ficam reduzidas a ordem λ^2 e λ respectivamente. Assim, obtemos

$$m(M) = m(M_0) \left(\frac{\lambda(M)}{\lambda(M_0)} \right)^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}}\tag{2.69}$$

$$\lambda(M) = \lambda(M_0) \left[1 + \lambda(M_0)\beta_0 \ln \left(\frac{M}{M_0} \right) \right]^{-1}\tag{2.70}$$

onde $\{\gamma_0, \beta_0\} \rightarrow 1$ no limite $N \rightarrow \infty$.

Obtemos então a pressão de Gross-Neveu utilizando as Eqs. 2.56 e 2.21,

$$\frac{P}{N} = -\frac{\bar{\sigma}^2}{2\pi\lambda} - \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \frac{\bar{\sigma}^2}{M^2} - 1 \right) + \frac{m\sigma}{\pi\lambda} + \frac{T^2}{\pi} I_1\left(\frac{\bar{\sigma}}{T}, \frac{\mu}{T}\right),\tag{2.71}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(M) &= M \exp \left[-\frac{1}{\lambda(M)} - I_2\left(\frac{\bar{\sigma}}{T}, \frac{\mu}{T}\right) + \frac{m(M)}{\bar{\sigma}\lambda(M)} \right], \\ \bar{\sigma}(M) &= M_0 \exp \left[-\frac{1}{\lambda(M_0)} - I_2\left(\frac{\bar{\sigma}}{T}, \frac{\mu}{T}\right) + \frac{m(M_0)}{\bar{\sigma}\lambda(M_0)} \right] = \bar{\sigma}(M_0).\end{aligned}\tag{2.72}$$

Já que a equação autoconsistente do vácuo (2.57) é invariante frente a transformações de escala, $\bar{\sigma}$ também é invariante. Então podemos simplificar as contas trabalhando com o caso $T = \mu = 0$, já que o termo de densidade bariônica e temperatura (I_1) só dependeria da escala no caso de $\bar{\sigma}$ também depender. O termo de massa de corrente no limite de $N \rightarrow \infty$ é facilmente verificado como invariante comparando as Eqs. 2.69 e 2.70. Logo podemos utilizar RG na pressão no caso onde $m = \mu = T = 0$ já que os outros termos são invariantes. Desta maneira obtemos

$$M \frac{d}{dM} P = 0 = \frac{M}{\pi} \frac{d}{dM} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \rightarrow \frac{1}{\lambda(M)} = \frac{1}{\lambda(M_0)} + \ln \left(\frac{M}{M_0} \right), \quad (2.73)$$

conclui-se, ao comparar a Eq. 2.69 e a Eq. 2.71, que só há correspondência para N grande. Logo no limite de N grande temos a satisfação da equação do RG fazendo com que a pressão seja invariante de escala. Outra propriedade importante sobre a teoria é que a constante de acoplamento possui liberdade assintótica (2.69), assim como na QCD.

Note que de fato a Eq. 2.69 prevê que a constante de acoplamento diminui com o aumento da escala como consequência de que, assim como em QCD, a função $\beta(\lambda)$ do modelo GN é negativa (veja Eqs. 2.66 e 2.68). A descoberta da liberdade assintótica para a QCD foi descoberta em 1973 por David Gross e Frank Wilczek [31] e independentemente por David Politzer [32]. Estes trabalhos deram aos três autores o Prêmio Nobel em 2004.

3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA

Um dos métodos não perturbativos, que será desenvolvido nesse capítulo, é conhecido como teoria perturbativa otimizada (OPT) ou expansão δ linear (LDE). Este método foi aplicado com sucesso na teoria $\lambda\phi^4$ na Ref. [37] e também na teoria de Gross-Neveu [11] entre outros casos [38,47,48]. O cálculo utiliza resultados perturbativos acrescentando um parâmetro de massa variacional, adicionado quando se define uma nova densidade Lagrangiana (interpolada) [38]

$$\mathcal{L} \rightarrow \delta\mathcal{L} + (1 - \delta)\mathcal{L}_0, \quad (3.1)$$

onde δ é um parâmetro de expansão (formalmente consideramos $\delta < 1$) e \mathcal{L}_0 é a Lagrangiana da teoria livre massiva.

Neste capítulo revisaremos como o método foi usado no modelo de GN na Ref. [11].

3.1 LIMITE DE N GRANDE

Seguindo a prescrição convencional para a implementação do método, a lagrangiana original deve ser reescrita como [11]

$$\mathcal{L}_\delta = \bar{\psi}^a [i\partial_\mu \gamma^\mu - \eta(1 - \delta)]\psi^a + \delta \frac{\pi\lambda}{2N} (\bar{\psi}^a \psi^a)^2. \quad (3.2)$$

Note que ao tomarmos o limite $\delta \rightarrow 1$ reobtemos a teoria original não massiva com interação, enquanto que quando $\delta = 0$ temos uma teoria livre (de solução exata) que depende do parâmetro arbitrário, η .

Ao adicionarmos o campo auxiliar σ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} - \delta \frac{N}{2\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{\pi\lambda}{N} \bar{\psi}^a \psi^a \right)^2 \\ &= \bar{\psi}^a [i\partial_\mu \gamma^\mu - \eta(1 - \delta)]\psi^a - \delta \frac{N}{2\pi\lambda} \sigma^2 - \delta \sigma \bar{\psi}^a \psi^a. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Conforme já mencionado inicialmente vamos nos restringir ao limite de $N \rightarrow \infty$ para podermos assim avessar a convergência da OPT com relação ao resultado "exato" dado pela aproximação LN. Assim obtemos

$$\frac{V_{eff}}{N} = \frac{\delta}{2\pi\lambda}\sigma^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + \eta^{*2}), \quad (3.4)$$

onde

$$\eta^* = \eta(1 - \delta) + \delta\sigma, \quad (3.5)$$

pode ser expandido ate qualquer ordem arbitraria em potências de δ (mas no limite $N \rightarrow \infty$).

Após truncar a série em uma determinada ordem em δ devemos fixar o parâmetro η . Normalmente isto é feito através de um critério variacional conhecido como princípio da mínima sensibilidade (PMS) [28]. Assim uma quantidade física Φ_δ calculada até ordem k em δ , deve satisfazer a equação

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^{(k)} \right|_{\substack{\delta \rightarrow 1 \\ \eta = \bar{\eta}}} = 0. \quad (3.6)$$

Para ilustrar como os resultados de LN são trivialmente reproduzidos pela OPT já na primeira ordem não trivial, basta considerarmos o potencial efetivo em ordem δ (no limite em que $N \rightarrow \infty$) [11]

$$\begin{aligned} \frac{V_{eff}}{N} &= \frac{\delta}{2\pi\lambda}\sigma^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + \eta^2) \\ &\quad - \delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{2\eta(\sigma - \eta)}{\eta^2 + p^2} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando o PMS (Eq. 3.6) obtemos

$$0 = \left[(\eta - \sigma) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\eta}{\eta^2 + p^2} \right) \right] \Big|_{\eta = \bar{\eta}}, \quad (3.8)$$

que nos fornece duas soluções, $\bar{\eta} = \sigma$ e

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\eta}{\eta^2 + p^2} \right) \right|_{\eta = \bar{\eta}}. \quad (3.9)$$

Note que a solução dada pela Eq. 3.9 não é física, pois não tem informação sobre a dinâmica descrita pela teoria (não depende do acoplamento). Substituindo a primeira solução na Eq. 2.7 reproduzimos exatamente o resultado de LN. Este resultado mostra a fiabilidade do método já que o resultado de LN pode ser considerado como sendo "exato" no limite $N \rightarrow \infty$.

3.2 CONTRIBUIÇÕES DE N FINITO

Para fazer previsões além de LN (ou de campo médio) precisamos adicionar diagramas de troca em ordem δ conforme os mostrados na Fig. 15:

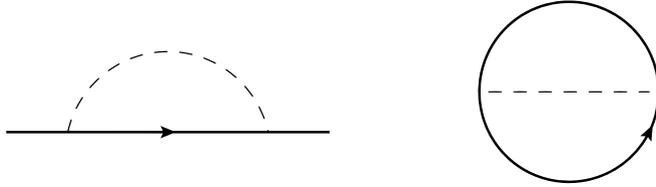


Figura 15 – Esquerda: diagrama de "troca" (ou de Fock) para a auto energia proporcional a δ/N . Direita: contribuição de troca para o potencial efetivo em ordem δN^0

Considerando o segundo diagrama da Fig. 15 para o potencial efetivo obtemos explicitamente a primeira correção de N finito [11]

$$-i \frac{V_{eff}}{N} = -\frac{1}{2} Tr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{\Sigma_a(\eta_*)}{\not{k} - \eta_* + i\epsilon'} \right), \quad (3.10)$$

onde Σ_a representa o primeiro diagrama da Fig. 5. Esta contribuição é dada por

$$\Sigma_a(\eta_*) = -\frac{i\pi\delta\lambda}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\not{q} - \eta_* + i\epsilon'} \right). \quad (3.11)$$

Depois de tomar o traço e renormalizar usando o esquema $\overline{\text{MS}}$ obtemos

$$V_{eff}^{(N^0)} = \delta \frac{\lambda}{4\pi} \left\{ \eta_*^2 \left[\ln \frac{M}{\eta_*} - I_2 \left(\frac{\eta_*}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.12)$$

Os detalhes do processo de renormalização podem ser encontrados no Apêndice B da Ref [11].

Somando essa contribuição e expandindo até ordem δ^1 temos:

$$\begin{aligned} \frac{V_{eff\delta}}{N} = & \left\{ \frac{\delta}{2\lambda}\sigma^2 + \frac{1}{4\pi}\eta^2 \left[\ln \frac{\eta^2}{M^2} - 1 \right] - \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right\} \\ & + \delta \frac{\eta(\eta - \sigma)}{\pi} \left[\ln \frac{M}{\eta} - I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right] \\ & + \delta \frac{\lambda}{4\pi N} \left\{ \eta^2 \left[\ln \frac{M}{\eta} - I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right]^2 + T^2 J_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$J_2(a, b) = \sinh(b) \int_0^\infty dx \frac{1}{\cosh(\sqrt{x^2 + a^2}) + \cosh(b)}, \quad (3.14)$$

com $x = p/T$, $a = \sigma/T$ e $b = \mu/T$.

Extremizando com relação a σ obtemos o parâmetro de ordem

$$\bar{\sigma} = \lambda \bar{\eta} \left[\ln \frac{M}{\bar{\eta}} - I_2 \left(\frac{\bar{\eta}}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right], \quad (3.15)$$

onde $\bar{\eta}$ é obtido aplicando-se o PMS na pressão $P = -V_{eff}(\bar{\sigma})$, considerando o caso $T = \mu = 0$ obtemos

$$\bar{\eta}(M) = M_0 \exp \left[- \frac{1}{\gamma_0 \lambda(M)} \right] = \bar{\sigma}(M_0), \quad (3.16)$$

utilizando a transformação do acoplamento em relação a escala (Eq. 2.69)

$$\bar{\eta}(M) = M_0 \exp \left[- \frac{1}{\gamma_0 \lambda(M_0)} \right] \left(\frac{M_0}{M} \right)^{\frac{\gamma_0}{\beta_0} - 1} \neq \bar{\eta}(M_0), \quad (3.17)$$

confirmamos que para N finito $\bar{\eta}$ depende da escala arbitrária M . Para o presente trabalho é de crucial importância notar que, assim como a HTLpt, a OPT padrão *não* observa as propriedades do RG. A Fig. 16 ilustra a dependência de escala para o caso $T \neq 0$ e $\mu = 0$.

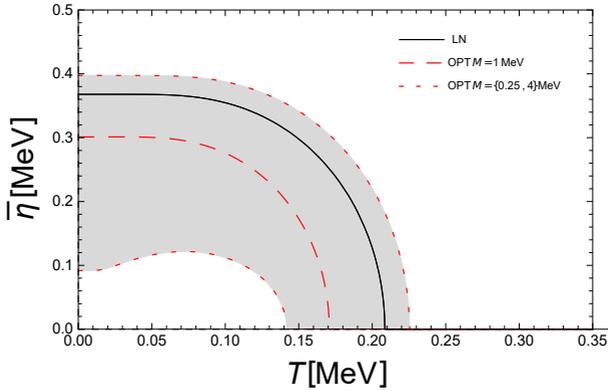


Figura 16 – O parâmetro de ordem ($\bar{\sigma} \equiv \bar{\eta}$) de LN (linha contínua preta), OPT $M = 1$ MeV (linha tracejada vermelha), OPT $M = 0.25$ MeV (linha pontilhada inferior) e OPT $M = 4$ MeV (linha pontilhada superior) em função da temperatura, sendo $\lambda(1) = 1$ e $N = 3$. Para $M = 1$ MeV a temperatura crítica para OPT é $T_c = 0.171 M$ e para LN é $T_c = 0.208 M$.

Os resultados numéricos apresentados na Fig. 16 confirmam a variância de $\bar{\sigma}$ em relação a escala para o caso $T \neq 0$ da OPT, mostrado pela largura da banda cinza. Se considerarmos o caso em que as grandezas estão em unidades de M , obtemos um valor para T_c mais baixo do que o previsto pela aproximação de LN o que indica uma melhor convergência, em vista do teorema de Landau. Para o caso $\mu \neq 0$ e $T \rightarrow 0$, obtemos

$$P(\bar{\sigma}, \bar{\eta}, \mu = 0) = \frac{\bar{\eta}^2}{4\pi}, \quad (3.18)$$

$$P(\sigma = \eta = 0, \mu = \mu_c) = \frac{\mu_c^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\lambda}{2N}\right), \quad (3.19)$$

juntando as duas equações e tomando $\lambda = 1$ e $N = 3$ obtemos

$$\mu_c = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{2N}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0.2333 M, \quad (3.20)$$

mostrando que o valor de μ_c diminui em relação ao previsto pelo método LN.

Assim como no capítulo de LN usaremos a Eq. 2.21 e o PMS para obter a pressão otimizada. Após incluir as correções de N finito e tomar $\delta \rightarrow 1$ obtemos

$$\frac{P_{opt}}{N} = \frac{\eta^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{\eta}{M} \right) \right] + \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) + \frac{\eta^2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\eta}{M} \right) + I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right] + \lambda \frac{m^2 \left(1 - \frac{1}{2N} \right)}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{\eta}{M} \right) + I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right]^2 - \frac{T^2 \lambda}{4\pi N} J_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right)^2. \quad (3.21)$$

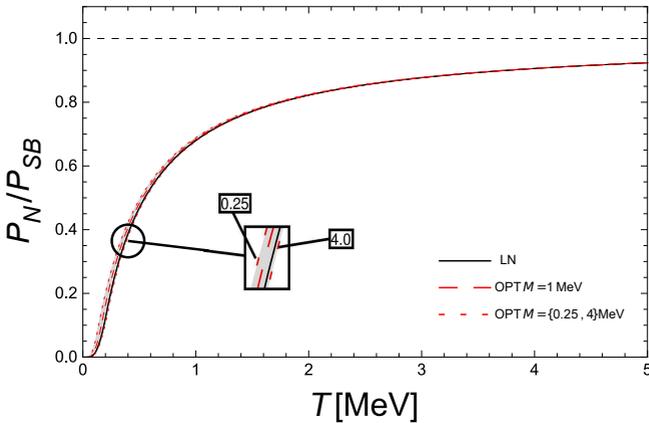


Figura 17 – Razão entre a Pressão Normalizada sobre pressão de Boltzmann em função da temperatura, linha contínua preta sendo LN e as vermelhas tracejadas OPT, sendo $\lambda(1) = 1$ e $N = 3$.

A Fig. 17 mostra como o problema de escala permanece. Todos os resultados apresentados obedecem o limite de Boltzmann e nesse limite a variação da escala vai ficando cada vez menor para a OPT, mas como estamos interessados na transição que ocorre numa temperatura menor, concluímos que as previsões da OPT padrão dependerão expressivamente do valor escolhido para M . Um dos maiores objetivos do presente trabalho é aplicar, e eventualmente refinar, a aproximação RGOPT no sentido de reduzir, ou eliminar completamente, esta dependência de escala. Este estudo é o tema central do próximo capítulo.

4 RGOPT

Vimos no capítulo anterior que ao adicionar contribuições de N finito ao potencial efetivo, que gera observáveis termodinâmicos a qual o método não possui o procedimento adequado para satisfazer as equações do RG.

Nesse contexto discutiremos a possibilidade de termos um método não perturbativo, que gere observáveis invariantes frente a transformações de escala chamado RGOPT.

Relembramos que esse método já foi utilizado com sucesso no modelo GN [39], na QCD [41] em $T = \mu = 0$ e na versão $O(N)$ do modelo $\lambda\phi^4$ em $T \neq 0$ [40] e entre outros. Sua primeira ordem não trivial (δ^0) está bem estabelecida e apresenta invariância exata, porém veremos que a segunda está sujeita a apresentar uma dependência de escala residual quando se utiliza as técnicas disponíveis na literatura [39,40,41].

Começaremos pela ordem δ^0 calculando a pressão diretamente utilizando resultados do capítulo passado. Em ordem δ focaremos mais na metodologia na tentativa de compreender melhor a dependência residual na escala, que pode ser bem expressiva como no modelo σ não linear [42].

Para aplicar a RGOPT primeiramente precisamos que a pressão perturbativa (4.3) seja invariante frente a variações de escala, ou seja,

$$M \frac{dP_{pt}}{dM} = M \frac{\partial P_{pt}}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial P_{pt}}{\partial \lambda} - \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial P_{pt}}{\partial m} = 0 \quad (4.1)$$

Neste sentido, na próxima seção, revisaremos o cálculo perturbativo da pressão até ordem λ (dois *loops*).

4.1 MÉTODO PERTURBATIVO

Nesta seção revisaremos técnicas convencionais de teoria de perturbação em teorias de campos [33,34], que consiste em tratar λ como parâmetro perturbativo e considera-se interação entre quatro férmions, já que esta técnica não é facilitada pela introdução de campo auxiliar. Para calcular a pressão precisamos somar diagramas de zero pontos e, em ordem λ , temos os diagramas mostrados na Fig. 18.

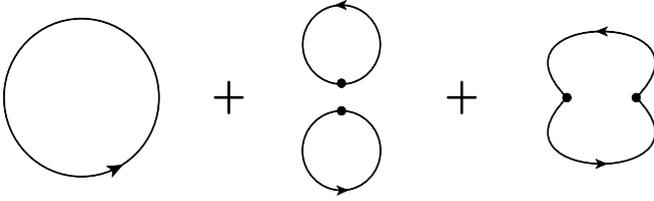


Figura 18 – Diagramas da pressão perturbativa até ordem λ

Utilizando uma massa genérica m (que pode ser vista como *cut-off* infravermelho) obtemos

$$\text{Diagrama 1} \rightarrow \frac{P_0}{N} = -iTr \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(\not{p} - m) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} &\rightarrow \frac{P_1}{N} = -\frac{\pi\lambda}{2N} Tr \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{p} - m} \right)^2 \\ &+ \frac{\pi\lambda}{2} Tr \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{p} - m} Tr \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{k} - m}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Seguindo o procedimento padrão e após renormalizando com o esquema $\overline{\text{MS}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{P_{pt}}{N} &= \frac{m^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right] + \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \\ &+ \frac{\gamma_0 \lambda}{2\pi} m^2 \left[\ln \left(\frac{m}{M} \right) + I_2 \left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right]^2 - \frac{\pi\lambda}{4\pi N} J_2 \left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

os passos que levam a este resultado estão no apêndice B.

Note que para m tendendo a zero o método perturbativo falha, pois divergências infravermelhas aparecem, deixando a teoria de perturbação não renormalizável.

Este fato ilustra, uma vez mais, a necessidade de termos métodos não perturbativos confiáveis ao nosso dispor. É importante salientar que o resultado perturbativo, obtido com uma massa genérica como na Eq. 4.3 é o ponto de partida para implementação da RGOPT.

Ao fazer a renormalização o contra termo de ponto zero pode possuir uma parte finita, conforme discutido na Ref. [40]. Seguindo essa

referência podemos adicionar a pressão um termo finito (independente dos campos) cuja forma é dada por

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{m^2}{\lambda} \sum_{k \geq 0} s_k \lambda^k,$$

onde os coeficientes s_k devem ser determinados ordem a ordem de maneira que a pressão perturbativa satisfaça as equações do RG

$$\frac{d}{dM} P(\mathcal{E}_0 \equiv 0) = -\frac{d}{dM} \mathcal{E}_0, \quad (4.5)$$

assim resolvendo a equação 4.5 em ordem λ^0 obtemos $s_0 = [2\pi(\beta_0 - 2\gamma_0)]^{-1}$ e em ordem λ o resultado é $s_1 = s_0(\beta_1 - 2\gamma_1)(2\gamma_0)^{-1}$. Portanto agora teremos uma pressão perturbativa invariante de escala.

Prosseguindo no método da RG OPT, faremos as seguintes substituições na Lagrangiana massiva (2.31):

$$m \rightarrow \eta(1 - \delta)^a, \quad \lambda \rightarrow \delta\lambda \quad (4.6)$$

onde a é um expoente que será fixado através da equação RG reduzida

$$M \frac{dP}{dM} = M \frac{\partial P}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.7)$$

que deverá ser satisfeita simultaneamente com a equação do PMS, Eq. 3.6, em ordem δ^0 . Como veremos, este expoente (que é igual a 1 na OPT padrão) desempenha um papel fundamental na RG OPT.

4.2 RG OPT EM ORDEM δ^0 NO LIMITE QUIRAL

Nos restringindo a $T = \mu = 0$ e considerando a ordem δ^0 conseguiremos fixar o expoente a ,

$$\frac{P_{RG OPT}}{N}(\eta_*, M, \delta) = \frac{1}{4\pi} \eta_*^2 \left[1 - \ln \left(\frac{\eta_*^2}{M^2} \right) \right] - s_0 \frac{\eta_*^2}{\delta\lambda}, \quad (4.8)$$

onde $\eta_* = \eta(1 - \delta)^a$.

Usando a equação do RG reduzida, Eq. 4.7, e tomando $\delta = 1$ fixamos $a = \gamma_0/\beta_0$, com essas informações podemos escrever a pressão de ordem δ^0

$$\frac{P}{N}(\eta, \lambda, M) = \frac{1}{4\pi} \eta^2 \left[1 - \ln \frac{\eta^2}{M^2} \right] + \frac{\eta^2}{2\pi\lambda\beta_0} + \mathcal{O}(\delta^1). \quad (4.9)$$

Aplicando o PMS, Eq. 3.6, obtemos

$$0 = \ln \frac{\bar{\eta}}{M} + \frac{1}{\lambda\beta_0} \rightarrow \bar{\eta} = M \exp \left[-\frac{1}{\lambda\beta_0} \right]. \quad (4.10)$$

Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ na Eq. 4.10 reproduzimos exatamente o resultado de LN (invariante de escala neste limite). Quando correções de N finito são consideradas é fácil verificar que $\bar{\eta}$ é invariante com respeito a variações de escala, nessa ordem temos ao variar $M_0 \rightarrow M$ nossa nova constante de acoplamento é $\lambda' = \lambda[1 + \lambda\beta_0 \ln(M/M_0)]^{-1}$. Ao fazer essa transformação temos

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(M) &= M \exp \left[-\frac{1}{\lambda'\beta_0} \right], \\ \bar{\eta}(M) &= M_0 \exp \left[-\frac{1}{\lambda\beta_0} \right] = \bar{\eta}(M_0), \end{aligned} \quad (4.11)$$

note que $\bar{\eta}$, será independente de escala até para o caso $\{T, \mu\} \neq 0$, já que termos de temperatura e densidade na equação 4.11 seriam relacionados a exponenciais que dependem apenas de η multiplicando a equação, assim como em 2.72.

Como $\bar{\eta}$ da RGOPT é invariante de escala, verifica-se que P_{RGOPT} também é invariante nesta ordem. Conforme discutido $\bar{\eta}$ da OPT só é invariante no limite de LN. O resultado da RGOPT é surpreendente se considerarmos que foi obtido apenas com um único termo de um *loop*.

Vamos agora considerar as contribuições da temperatura. Neste caso a pressão é descrita por

$$\begin{aligned} \frac{P}{N}(\bar{\eta}, \lambda, M) &= \frac{1}{2\pi} \left[\bar{\eta}^2 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\bar{\eta}}{M} \right) + 2T^2 I_1 \left(\frac{\bar{\eta}}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi\lambda\beta_0} + \mathcal{O}(\delta^1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Na Fig. 19 comparamos os resultados de LN e de RGOPT em ordem λ^0 , sendo que para RGOPT consideramos os casos $N = 3$ e $N \rightarrow \infty$.

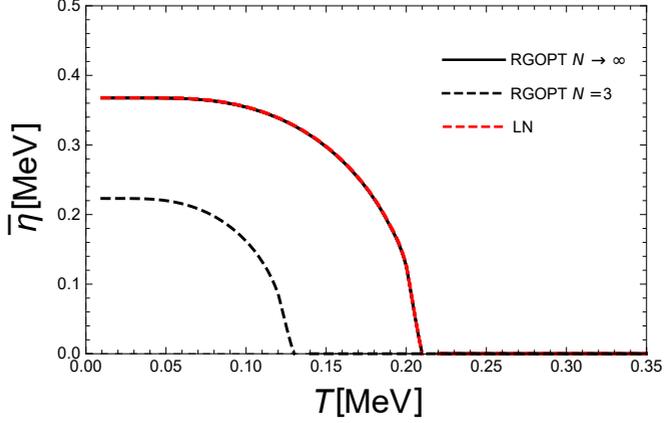


Figura 19 – Massa otimizada $\bar{\eta}$ da RGOPT para o caso $N \rightarrow \infty$ e $N = 3$ (linha contínua preta e linha tracejada preta respectivamente) em relação ao campo auxiliar fixado ($\bar{\sigma}$) de LN (linhas tracejadas vermelhas), sendo $\lambda(1) = 1$ e $M = \{0.5, 1, 2\}$ MeV.

Assim como para $T = 0$, em que $\bar{\eta}_{RGOPT} = \bar{\sigma}_{LN}$, para qualquer temperatura a RGOPT no limite de $N \rightarrow \infty$ reproduz os resultados de LN. No caso $N = 3$ a temperatura crítica é $T_c = 0.1265$ MeV, que ao comparar com LN ($T_c = 0.208$ MeV) demonstra uma melhora com relação ao teorema de Landau (o qual prevê $T_c = 0$)

Outro resultado que podemos obter é μ_c no caso $T = 0$, que resulta em $\mu_c = 0.1577$ MeV para $N = 3$ ao mesmo tempo em que reproduz o resultado de LN para $N \rightarrow \infty$.

Veremos agora como esses resultados se manifestam na pressão, substituindo $\bar{\eta}$ dado pela Eq. 4.11 na Eq. 4.9 e depois subtraindo a pressão do vácuo. Definindo a pressão subtraída como $P_N = P(T) - P(0)$ e normalizando com P_{SB} obtemos os resultados mostrados na Fig. 20.

Logo ao comparar RGOPT em ordem δ^0 e LN, podemos ver que são equivalentes no limite de N grande. Desta maneira, já que nesta ordem mais baixa, podemos observar um grande avanço uma vez que conseguimos gerar resultados não perturbativos, invariantes de escala e que consideram correções de N finito.

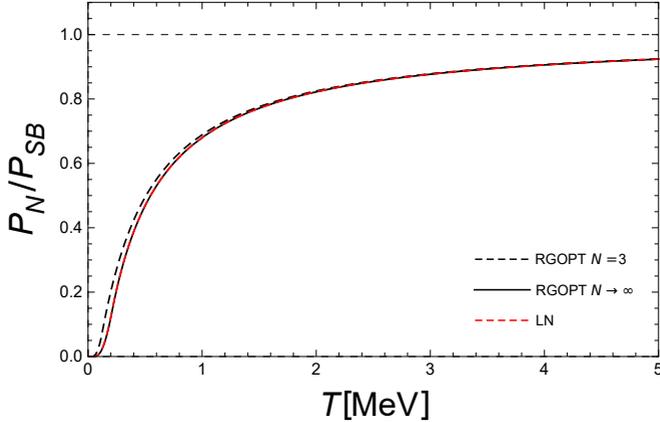


Figura 20 – Pressão subtraída, normalizada por P_{SB} em função da temperatura para a RGOPT considerando $N \rightarrow \infty$ e $N = 3$ (linha contínua e linha tracejada preta respectivamente), e para LN (linha tracejada vermelha), tomando $\lambda(1) = 1$.

4.3 ORDEM δ^0 NO LIMITE FÍSICO

No caso em que a teoria original é massiva podemos adicionar um termo linear em η e m que seja invariante de escala. Tal estratégia é inspirada pela Ref. [44], onde a massa intrínseca desempenha um papel análogo ao de um campo magnético externo fraco no caso de um ferromagneto. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{P}{N}(\bar{\eta}, \lambda, M) = & \frac{1}{2\pi} \left[\bar{\eta}^2 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\bar{\eta}}{M} \right) + 2T^2 I_1 \left(\frac{\bar{\eta}}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right] \\ & + \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi\lambda\beta_0} - \frac{\bar{\eta}m}{(\pi\lambda)^{\frac{2\alpha}{\beta_0}}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde o termo linear em m é invariante por construção.

Neste caso obteremos um *crossover*, como mostra a Fig. 21, onde comparamos RGOPT e LN.

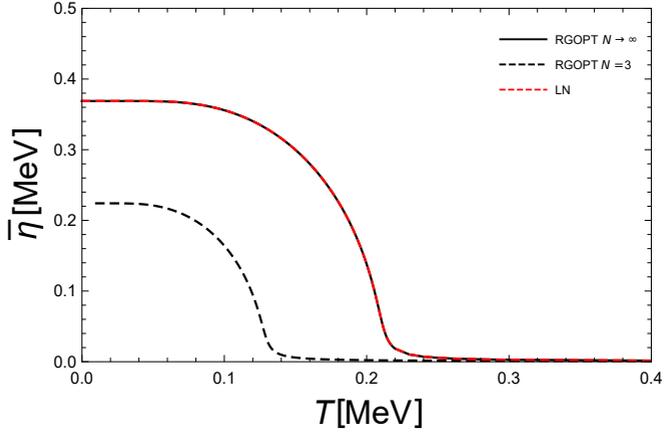


Figura 21 – Parâmetro de ordem $\bar{\eta}$ em função da temperatura, sendo $\lambda(1) = 1$ e $m = 0.001$ MeV.

Fisicamente, a situação é completamente análoga a aquela que acontece no caso de ferromagnetos onde, na ausência de campos externos, observa-se uma transição de segunda ordem. Esta transição se manifesta como *crossover* quando um campo magnético externo h (análogo a m) está presente [43].

4.4 ORDEM δ NO LIMITE QUIRAL

Para obter a pressão vamos considerar diagramas de ordem λ e $a = \gamma_0/\beta_0$ conforme o procedimento padrão onde a é fixado em ordem mais baixa uma única vez. Assim com o resultado da Eq. 4.4, substituindo $m \rightarrow \eta_*$, adicionando os termos s_0 e s_1 e expandindo até ordem δ obtemos

$$\begin{aligned}
 P(\eta, \lambda, M, \delta \rightarrow 1) &= \frac{\eta^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{\eta}{M} \right) \right] + \frac{T^2}{\pi} I_1 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \\
 &+ \frac{\eta^2 \gamma_0}{\pi \beta_0} \left[\ln \left(\frac{\eta}{M} \right) + I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right] + \frac{\lambda \eta^2 \gamma_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{\eta}{M} \right) + I_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right) \right]^2 \\
 &- \frac{T^2 \lambda}{4\pi N} J_2 \left(\frac{\eta}{T}, \frac{\mu}{T} \right)^2 - \frac{\eta^2}{2\beta_0} \left[\frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0} \right) + \frac{\beta_1}{2\pi \gamma_0} \left(1 - 2 \frac{\gamma_1}{\beta_1} \right) \right]. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Aplicando a equação do RG reduzida e a equação do PMS para

o caso $T = \mu = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
 M \frac{\partial P(\eta, \lambda, M)}{\partial M} - (\beta_0 \lambda^2 + \beta_1 \lambda^3) \frac{\partial P(\eta, \lambda, M)}{\partial \lambda} &= 0 \\
 &= \frac{\eta^2}{2\pi} \left\{ 1 - 2 \frac{\gamma_0}{\beta_0} - 2\gamma_0 \lambda \ln \left(\frac{\eta}{M} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (\beta_0 \lambda^2 + \beta_1 \lambda^3) \left[\frac{1}{\beta_0 \lambda^2} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0} \right) + \gamma_0 \ln \left(\frac{\eta}{M} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta, \lambda, M) = 0 &= \frac{\eta}{\pi} \left\{ \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_0 \lambda} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0} \right) - \frac{\beta_1}{2\pi \beta_0 \gamma_0} \left(1 - 2 \frac{\gamma_1}{\beta_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 - 2 \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \gamma_0 \lambda \right) \ln \left(\frac{\eta}{M} \right) + \gamma_0 \lambda \ln \left(\frac{\eta}{M} \right)^2 \right\}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Usando a prescrição da Ref. [40] podemos obter os valores otimizados para $\bar{\eta}$ e $\bar{\lambda}$ que satisfazem as equações RG (reduzida) e PMS dadas pelas Eqs. 4.15 e 4.16 respectivamente.

Note que ao substituir a solução da Eq. 4.16, $\bar{\eta} = M \exp(f(\lambda))$, onde $f(\lambda)$ é função de apenas λ , na Eq. 4.15 concluímos que $\bar{\lambda}$ não depende de M , o que parece ser contraditório em relação a Eq. 4.15, pois nela precisaremos da informação da dependência perturbativa de λ . Desta maneira a equação não é mais satisfeita ao considerar a nova dependência e logo a pressão continua variando com a escala.

Isto indica que devemos buscar solucionar estas duas equações de outra forma. Em seguida discutiremos dois procedimentos para a resolução das equações da RG OPT, sendo o primeiro deles aquele frequentemente usado em aplicações de RG OPT [39,40,41] (que, como já discutido, gera uma dependência residual de escala). O segundo procedimento, uma proposta original do autor deste trabalho, visa obter uma dependência efetiva do acoplamento com a escala de maneira que a pressão seja completamente invariante. Já no procedimento padrão esta dependência é ditada pela função $\beta(\lambda)$ obtida com o RG.

4.4.1 Procedimento padrão

Entre os dois métodos a diferença mais importante diz respeito a equação do RG onde $\beta(\lambda)$ é interpretado de maneira distinta. No

procedimento padrão temos

$$0 = M \frac{\partial P}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (4.17)$$

onde $\beta(\lambda) = (-\beta_0 \lambda^2 - \beta_1 \lambda^3)$ é determinado pelo RG (veja Eq. 2.68)

Fazendo o teste da invariância de escala para $P(\bar{\eta}, \bar{\lambda})$ em temperatura zero obtemos o resultado mostrado na Fig. 22, onde $\lambda_0 \equiv \lambda(M_0)$.

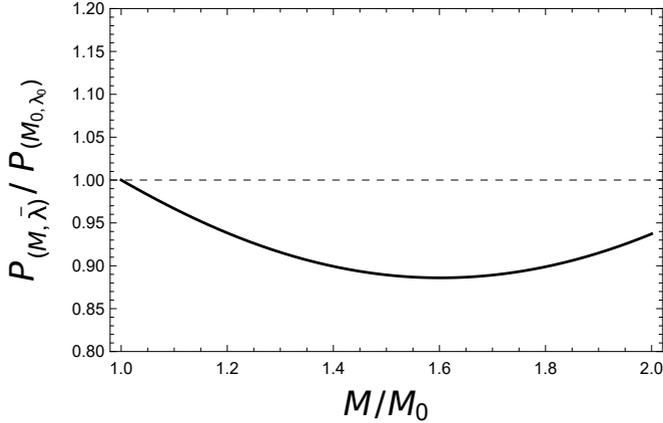


Figura 22 – Pressão com constante de acoplamento otimizada $P(\bar{\eta}, \bar{\lambda})$ em função da escala arbitrária, sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$.

Vale notar que esse resultado (Fig. 22) se dá pela diferença da dependência perturbativa de $\lambda(M)$ que foi introduzida na equação RG para dependência $\bar{\lambda} = \lambda_0$ (constante) em relação a escala. Com esse problema e também com a impossibilidade de trabalhar com transição, devido instabilidade das soluções (soluções descontínuas ou ausência delas) próximo a pontos crítico, será apresentado um método alternativo que busca a invariância através da redefinição da dependência do acoplamento em relação a escala.

4.4.2 Procedimento com invariância exata

Como o procedimento padrão não consegue eliminar por completo a dependência de escala em ordens superiores iremos agora propor uma alternativa que, como já salientado, constitui o resultado original

mais importante deste trabalho. Este procedimento consiste em tomar a equação RG sem que a função $\beta(\lambda)$ esteja previamente determinada, ou seja, $\beta(\lambda) = d\lambda/d\ln M$, de maneira que teremos uma equação diferencial para resolver

$$M \frac{\partial P}{\partial M} + \frac{d\lambda}{d\ln M} \frac{\partial P}{\partial \lambda} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad \lambda(M_0) = \lambda_0. \quad (4.19)$$

Ao resolver a equação do PMS determinando $\bar{\eta}$ no ponto M_0 onde $\lambda(M_0) = \lambda_0$, obtemos duas soluções que podem ser resolvidas analiticamente quando $T = \mu = 0$. Neste caso obtemos

$$\bar{L}_{\eta\pm} = \ln \left(\frac{\bar{\eta}_{\pm}}{M_0} \right) = -\frac{1}{\beta_0 \lambda_0} + \frac{\beta_0(1 - \gamma_0 \lambda_0) \pm \sqrt{\Delta(\lambda_0)}}{2\beta_0 \gamma_0 \lambda_0}, \quad (4.20)$$

onde $\Delta(\lambda_0) = 2\beta_0(\beta - 2\gamma)\lambda_0 + \beta_0^2(1 - \gamma_0 \lambda_0)^2$. Analisando o limite $N \rightarrow \infty$ obtemos

$$\bar{L}_{\eta\pm} = -\frac{1}{\lambda_0} + \frac{(1 - \lambda_0) \pm |1 - \lambda_0|}{2\lambda_0}. \quad (4.21)$$

É natural que devemos escolher o ramo que reproduz LN (no limite $N \rightarrow \infty$), assim deveríamos escolher o ramo positivo para $\lambda_0 > 1$ e o ramo negativo para $\lambda_0 < 1$ (no caso $\lambda_0 = 1$ os dois ramos reproduzem LN). Escolheremos o ramo negativo, pois conforme constatarmos a temperatura crítica desse ramo é menor que do método RGOPT na ordem λ^0 , fato que não ocorreria com o ramo positivo.

A total invariância da pressão obtida por este método alternativo é confirmada pelo resultado mostrado na Fig. 23.

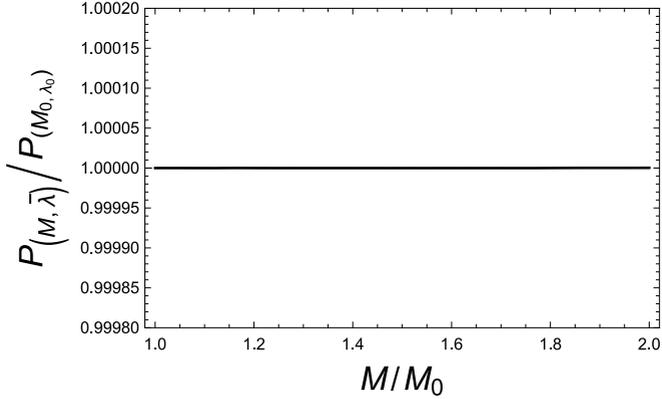


Figura 23 – Razão entre a pressão calculada em função da escala arbitrária sobre pressão no ponto inicial M_0 , sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$.

A Fig. 24 compara o *running* da constante de acoplamento $\bar{\lambda}$ obtido com o método alternativo com o *running* previsto pelo RG em dois *loops*.

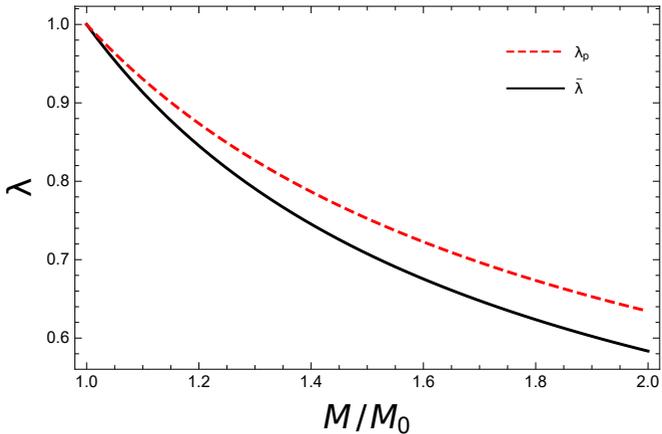


Figura 24 – $\bar{\lambda}$ obtido da RGOPT (linha preta continua) e λ_p perturbativo (linha vermelha tracejada) em função da escala arbitrária, sendo $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$, $N = 3$ e $T = 0$.

É importante analisar o novo $\bar{\beta}(\lambda)$, que é não perturbativo, fazendo uma expansão em λ para comparar com a função $\beta(\lambda)$ pertur-

bativa até a ordem λ^3 (consistente com o procedimento do RG). Para o caso $T = \mu = 0$ e $N = 3$ obtemos

$$\bar{\beta}(\lambda) = -\frac{2}{3}\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (4.22)$$

$$\beta(\lambda) = -\frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{1}{9}\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (4.23)$$

Note que β_1 não foi reproduzido em relação ao perturbativo e apenas β_0 é obtido corretamente. Apesar disso o fenômeno da liberdade assintótica é preservado, conforme mostra a Fig. 24. No caso $\mu = 0$ e $T \neq 0$ para diferentes $M \neq M_0$ λ terá uma dependência térmica conforme mostra a Fig. 25.

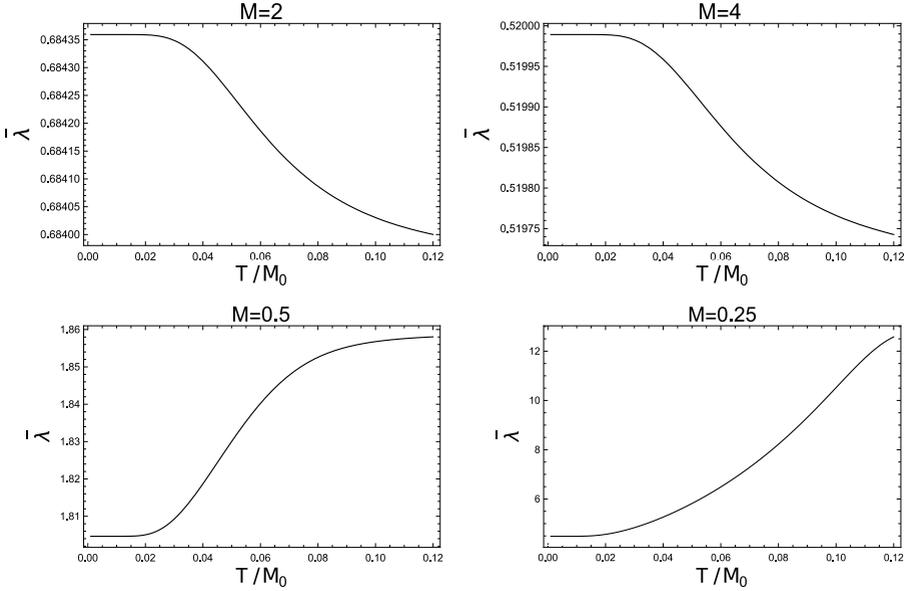


Figura 25 – $\bar{\lambda}$ obtido da RGOPT em função da temperatura, sendo $M_0 = 1$ MeV, $N = 3$ e $\lambda_0 = 1$.

Segundo a Fig. 25, para $M > M_0$ temos que $\bar{\lambda}$ diminui com o aumento da temperatura enquanto que para $M < M_0$ aumenta com a temperatura. Conforme a Ref. 2 para QCD na rede o espaçamento entre os pontos (ℓ) da rede é inversamente proporcional a temperatura é proporcional a constante de acoplamento ($\ell \propto T^{-1} \propto g$). O análogo

do espaçamento para teoria perturbativa (base do nosso método) é a escala arbitrária ($\ell \propto M^{-1}$), logo para a RGOPT, com o aumento de M e a temperatura temos a diminuição da constante de acoplamento, o que se verifica somente no caso $M > M_0$. Nossos resultados indicam que para cada temperatura temos uma dependência de $\bar{\lambda}$ diferente, tal que a pressão seja invariante.

Fazendo o cálculo numérico com o método alternativo obtemos a massa otimizada mostrada na Fig. 26.

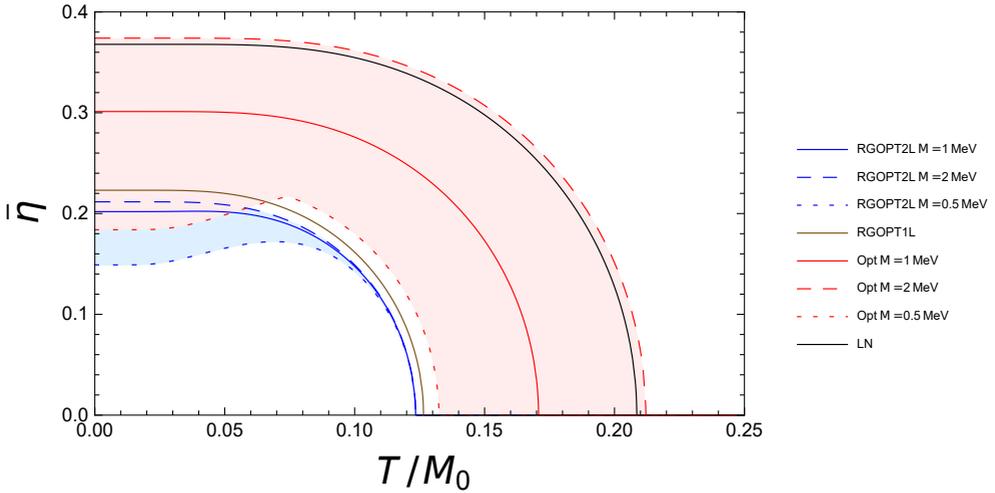


Figura 26 – Massa otimizada $\bar{\eta}$ da RGOPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV para $N = 3$ e OPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV em função da temperatura, onde $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$ e $N = 3$.

Com o procedimento alternativo conseguimos um T_c invariante, apesar da massa otimizada depender da escala. Não conseguimos melhorias significativas com relação a temperatura crítica, sendo que para RGOPT em ordem λ^0 temos $T_c = 0.1265$ MeV e para ordem λ temos $T_c = 0.1235$ MeV.

No caso de $T = 0$ e $\mu \neq 0$, aplicando os mesmos procedimentos feitos em LN obtemos um valor para o potencial químico de coexistência igual à $\mu_c = 0.1687$ MeV, sendo este um pouco maior que o obtido pela RGOPT ordem δ^0 .

Finalmente, estamos em posição de calcular a pressão e comparar com os outros métodos descritos neste trabalho (LN e OPT) conforme ilustra a Fig. 27.

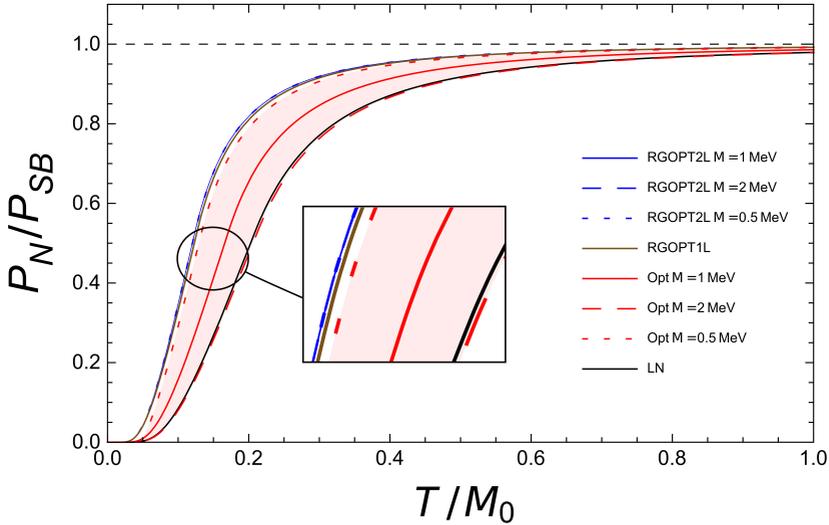


Figura 27 – Pressão da RGOPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV e da OPT $M = \{0.5 - 2\}$ MeV em função da temperatura, sendo a temperatura crítica da RGOPT $\delta^1 T_c = 0.1235$ MeV, $M_0 = 1$ MeV, $\lambda_0 = 1$ e $N = 3$.

Portanto o método alternativo resolve todos os problemas de variância ajustando a dependência de λ em relação a M , mas só reproduz o coeficiente de ordem mais baixa da expansão perturbativa de $\beta(\lambda)$ ditado pelo RG. Essa nova dependência de λ apresenta liberdade assintótica já que β_0 é reproduzido, porém o coeficiente β_1 (correção do acoplamento de ordem λ^3) não é obtido.

É transparente que com esse método a teoria continua dependendo de apenas um parâmetro, λ_0 , e qualquer par (λ, M) reproduzirá a mesma teoria se pertencer a mesma curva $(\bar{\lambda}(M))$.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como principal objetivo a aplicação da RGOPT ao modelo de Gross-Neveu em duas dimensões em temperaturas e densidades finitas. Este método foi recentemente proposto como alternativa às técnicas que envolvem simulações numéricas, como LQCD, e otimização variacional, como HTLpt. Tal necessidade ocorre pelo fato de que, no momento, o conhecido problema "do sinal" impede que a LQCD possa ser utilizada para a descrição da matéria hadrônica em regimes de altas densidades ao mesmo tempo em que a HTLpt falha em produzir observáveis termodinâmicos que sejam invariante de escala. A RGOPT foi aplicada com sucesso no modelo GN e na QCD em temperaturas e densidades nulas [13,41] e também em modelos escalares em temperaturas finitas [42,40]. Neste sentido nossa aplicação representa uma extensão destes trabalhos ao caso de teorias fermiônicas tais como a descrita pelo modelo GN. Vale enfatizar que pelo fato deste modelo possuir várias características em comum com a QCD (tais como liberdade assintótica, simetria quiral, anomalia do traço, entre outras) os resultados aqui obtidos poderão ser úteis em aplicações que utilizem a RGOPT para descrever as transições de fase da QCD. Nosso primeiro objetivo foi estabelecer a confiabilidade do método no limite $N \rightarrow \infty$ já que neste caso a primeira ordem da conhecida expansão $1/N$ (chamada de large- N , LN) pode ser considerada "exata".

Mostramos que a RGOPT reproduz este resultado de maneira completa ao nível de um loop (apenas uma contribuição perturbativa em ordem- δ^0) o que é um resultado altamente não trivial especialmente pelo fato de que o mesmo também satisfaz as equações do grupo de renormalização. Ao mesmo tempo, mostramos que a OPT padrão (versão da HTLpt para teorias que não são de calibre) só observa este resultado ao nível de dois *loops* (três contribuições perturbativas em ordem- δ). Além disto mostramos que quando contribuições de N finito são consideradas, a RGOPT em ordem mais baixa continua sendo invariante frente ao RG pois a massa variacional é função de β_0 . O mesmo não acontece com a OPT padrão uma vez que a massa variacional obtida com esta aproximação é função de γ_0 . Isto nos permite concluir que incorporar efeitos do RG ao processo variacional acelera o processo de resoma.

Além disto, conforme discutido, o modelo GN tem a particularidade de que $\beta_0 \equiv \gamma_0 = 1$ no limite de $N \rightarrow \infty$ de maneira que as tres aproximações fornecem os mesmos resultados nesta situação particular.

Já na QCD β_0 e γ_0 são muito diferentes devido a presença de glúons e portanto, baseados em nossos resultados, podemos antecipar que os tres métodos não fornecerão as mesmas previsões, mesmo no limite de N grande. Analisando o parametro de ordem, $\bar{\sigma} = -(\lambda/N)\langle\bar{\psi}_k\psi_k\rangle$, em temperaturas finitas obtivemos o valor $T_c \approx 0.208 M_0$ quando $N \rightarrow \infty$ o que contradiz o teorema de Landau para transições de fase em uma dimensão de espaço. Mostramos que, para $N = 3$, a OPT padrão prevê $T_c \approx 0.171 M_0$ enquanto que a RGOPT prevê $T_c \approx 0.126 M_0$ em ordem- δ^0 e $T_c \approx 0.123 M_0$ em ordem- δ indicando a possibilidade de convergência para o resultado exato, $T_c = 0$. Em todas as situações a transição observada é de segunda ordem conforme pode ser observado à partir da não analiticidade da susceptibilidade térmica, $-\delta\bar{\sigma}/dT$. Estes resultados indicam que as mudanças introduzidas pela RGOPT são apenas quantitativas e não interferem no tipo de transição observada com outros métodos (pelo menos para este modelo).

Em seguida, para simular uma situação mais próxima da QCD, consideramos o efeito de uma massa intrínseca na lagrangiana mostrando que neste caso (onde a simetria quiral é aproximada) obtemos um *crossover* ao invés de uma transição de segunda ordem exatamente conforme previsto por simulações (na rede) para a QCD. Fisicamente podemos interpretar este resultado em analogia com o caso de ferromagnetos onde a transição é de segunda ordem quando campos magnéticos externos estão ausentes. Já em situações mais realistas a presença de um pequeno campo de fundo pode alterar este quadro transformando a transição em um *crossover*. Portanto, em QCD onde a massa de corrente dos quarks leves é proporcional à massa dos pions, $m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$, não é surpresa que a LQCD preveja um *crossover* similar ao observado em nosso trabalho. Outro ponto de central importância para nosso estudo está relacionado com a invariância dos observáveis termodinâmicos com respeito ao RG. Após discutirmos a origem da dependência de escala presentes na OPT padrão (massa variacional dependente de γ_0) mostramos que os resultados obtidos em ordem- δ^0 (um *loop*) com a RGOPT são exatamente invariantes conforme poderia ser antecipado lembrando que o expoente $a = \gamma_0/\beta_0$ foi fixado nesta ordem e, por construção, a equação variacional do PMS produz resultados em acordo com o RG. Em seguida, consideramos a próxima ordem em δ introduzindo termos de dois *loops*. Inicialmente seguimos o procedimento padrão conforme sugerido nos trabalhos que introduzem o método e resolvemos simultaneamente as equações do RG e PMS utilizando o *running* do acoplamento λ (em dois *loops*) dado pela função $\beta(\lambda)$ perturbativa. Neste caso, já esperávamos obter resultados que refletem uma

pequena dependência residual de escala devido à utilização do *running* perturbativo encontrando uma situação similar aquela determinada em aplicações prévias.

Tendo identificado a origem do problema, propusemos uma alternativa na qual o *running* é determinado pela solução simultânea das equações do RG e PMS. Neste caso o a variação do valor da constante de acoplamento com a escala de energia é ditada pela solução de uma equação diferencial que gera uma função β efetiva, $\bar{\beta}(\lambda)$, a qual produz observáveis que são completamente invariantes de escala. A proposta desta otimização alternativa representa nossa principal contribuição ao tema. Analiticamente para temperaturas e densidades nulas expandimos $\bar{\beta}(\lambda)$ em potências de λ comparando os coeficientes $\beta_n (n = 0, 1)$ com os previstos pelo RG para $\beta(\lambda)$. Observamos que as duas expansões preveem o mesmo coeficiente β_0 garantindo que λ diminui com a escala de energia, M , o que nos permite concluir que nosso método reproduz o fenômeno da liberdade assintótica. Embora este seja um resultado importante, do ponto de vista físico, observamos que a função $\bar{\beta}(\lambda)$ efetiva não contém o termo β_1 , enquanto termos além de β_1 são diferentes daquele previsto pelo RG. Este fato não é surpreendente uma vez que nossa otimização força o desaparecimento da dependência de escala ao custo de introduzir um *running* efetivo. Neste nível de aproximação ainda é difícil avaliar as consequências físicas de tal procedimento uma vez que importantes efeitos provenientes de correções aos vértices e ao propagador mesônico (polarizadores) só podem ser avaliados na próxima ordem (δ^2) que incluem termos de três *loops* os quais por serem tecnicamente muito difíceis de serem calculados não foram incluídos nesta primeira aplicação ao caso de teorias fermiônicas. A análise destas contribuições e a possível concordância entre a função β efetiva e a perturbativa deve ser o objeto de investigações futuras. Uma vez compreendida a relação entre os dois tipos de *running* poderemos aplicar nossa prescrição ao caso da QCD em temperaturas e densidades finitas. Vale lembrar da falta de um procedimento para adicionar massa intrínseca para ordens maiores que a primeira, sendo outro problema a ser investigado.

Em resumo, os resultados aqui obtidos nos permitem concluir que a RGOPT é uma ferramenta com potencial para descrever a equação de estado da QCD já que inclui efeitos de N finito, produz observáveis que satisfazem as equações do RG podendo ainda ser aplicada em qualquer regime de temperatura e densidade bariônica.

REFERÊNCIAS

- [1] D. J. Gross, R. D. Pisarski e L. G. Yaffe, *QCD and instantons at finite temperature*, Rev. Mod. Phys. **53**, 43-80 (1981).
- [2] J. Letessier and J. Rafelski, *Hadrons and Quark-Gluon Plasma*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics, and Cosmology Vol. 18, (2002).
- [3] Troyer, Matthias; Wiese, Uwe-Jens, *Computational Complexity and Fundamental Limitations to Fermionic Quantum Monte Carlo Simulations*, Phys. Rev. Lett. **94**, 170201, (2005).
- [4] J. O. Andersen, E. Braaten e M. Strickland, *Hard-thermal-loop Resummation of the Free Energy of a Hot Gluon Plasma*, Phys. Rev. Lett. **D61**, 2139-2142, (1999).
- [5] N. Su, *A brief overview of hard-thermal-loop perturbation theory*, Commun. Theor. Phys. **57**, (2012).
- [6] J. O. Andersen, E. Leganger, M. Strickland, e N. Su, *NNLO hard-thermal-loop thermodynamics for QCD*, Phys. Lett. **B696**, 468-472, (2011).
- [7] David J. Gross and André Neveu, *Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories*, Phys. Rev. **D10** 3235, (1974).
- [9] R. F. Dashen, S.-K. Ma e R. Rajaraman, *Finite-temperature behavior of a relativistic field theory with dynamical symmetry breaking*, Phys. Rev. **D11**, 1499-1508, (1975)
- [10] M. Moshe and A. Duncan, *Nonperturbative physics from interpolating actions*, Phys. Lett. **B215**, 352, (1988).
- [11] J.-L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos *Critical and tricritical points for the massless 2d Gross-Neveu model beyond large N*, Phys. Rev. **D74**, 125020, (2006).
- [12] D. J. Gross, *Application of the renormalization group to high-energy physics. Methods in Field Theory*, 165-171, (1993).
- [13] J.-L. Kneur, A. Neveu, *Renormalization Group Improved Optimized Perturbation Theory: Revisiting the Mass Gap of the O(2N) Gross-Neveu Model*, Phys. Rev. **D81**, 125012, (2010).
- [14] H. E. Stanley, *Spherical Model as the Limit of Infinite Spin Dimensionality*. Phys. Rev. **176**, 718-722, (1968).
- [15] K. G. Wilson, *Quantum Field - Theory Models in Less Than 4 Dimensions*, Phys. Rev. **D7**, 2911, (1973).
- [16] E. Witten, *Baryons in the 1/N expansion*, Nuc. Phys. **B160**, 57-115, (1979).

- [17] E. Witten, *The $1/N$ expansion in atomic and particle physics, in Recent Developments in Gauge Theories*, G. t'Hooft, Plenum, pg. 403-419, (1980).
- [18] M. Thies, K. Urlichs, *From non-degenerate conducting polymers to dense matter in the massive Gross-Neveu model*, Phys. Rev. Lett. **D72**, 105008, (2005).
- [19] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, p. 351-262, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- [20] M. B. Pinto, *Non-Perturbative Methods Applied to Chiral Symmetry Breaking*, Ph. D. Thesis, (Imperial College, London, 1992).
- [21] M. E. Peskin; D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (1995).
- [22] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory*, Institute of Physics Pub. (1993).
- [23] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena: Graphs to Computers*, (3rd Edition), (2005).
- [24] M. Thies and K. Urlichs, *From non-degenerate conducting polymers to dense matter in the massive Gross-Neveu model*, Phys. Rev. Lett. **D72**, 105008, (2005).
- [25] P. Rozing, *Infrared Divergences in Perturbative Quantum Chromodynamics*, Mas. Thesis, (University of Amsterdam, 2010).
- [26] V. E. Rochev, P. A. Saponov, *The four-fermion interaction in $D = 2, 3, 4$: a nonperturbative treatment*, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 3649-3665, (1998).
- [27] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, University of California, Santa Barbara. Cap. 18 (2010).
- [28] P. M. Stevenson, *Optimized perturbation theory*, Phys. Rev. Lett. **D23**, 2916-2944, (1981).
- [29] C. G. Callan, Jr. *Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory*, Phys. Rev. Lett. **D2**, 1541-1547 (1970).
- [30] K. Symanzik, *Small Distance Behaviour in Field Theory and Power Counting*, Commun. Math. Phys., 227-246. (1970).
- [31] D. J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, (1973).
- [32] H.D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions*, Phys. Rev. Lett. **30**, (1973).
- [33] J. Kapusta, *Quantum Chromodynamics at High Temperature*, Nuclear Physics B, Vol. 148, No. 3-4, (1979).
- [34] M. Le Bellac, *Quantum and statistical field theory*, Oxford University Press, Oxford U.K. (1991).
- [35] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*, (2007).

- [36] K. G. Wilson, *Problems in physics with many scales of length*, Scientific American, (1979).
- [37] S. Chiku e T. Hatsuda *Optimized perturbation theory at finite temperature*, Phys. Rev. **D58**, 076001, (1998).
- [38] M. Moshe and A. Duncan, *Nonperturbative physics from interpolating actions*. Phys. Lett. **B215**,352?358, (1988).
- [39] C. Arvanitis, F. Geniet, M. Iacomi, J.-L. Kneur, A. Neveu, *Variational Solution of the Gross-Neveu Model: finite N and Renormalization*, Int. J. Mod. Phys. A12, (1997).
- [40] J.-L. Kneur e M. B. Pinto, *Renormalization group optimized perturbation theory at finite temperatures*, Phys. Rev. **D92**, 116008, (2015).
- [41] Kneur, J.-L. Neveu, A. *Quark Condensate from Renormalization Group Optimized Spectral Density*. Nuc. Part. Phys. Proc., 98-102, (2016).
- [42] G. N. Ferrari, *Invariância de escala e termodinâmica de teorias com interação forte*, Doctoral Thesis, (Universidade Federal de Santa Catarina, 2016).
- [43] A. Barducci and R. Casalbuoni, *Current quark mass and chiral-symmetry breaking in QCD at finite temperature in a mean-field approximation*, Phys. Rev. **D46**, 2203-2211, (1992).
- [44] J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin, T. van Ritbergen, *The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass*, Phys. Lett. **B405**, 327-333, (1997).
- [45] O. Schnetz, M. Thies, K. Urlichs, *The phase diagram of the massive Gross-Neveu model, revisited*, Ann. Phys. (NY) 314, 425, (2004).
- [46] S. Coleman, R. Jackiw, e H. D. Politzer, *Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N* , Phys. Rev. **D10**, 2491, (1974).
- [47] J.-L. Kneur, M. B. Pinto, e R. O. Ramos, *Thermodynamics and phase structure of the two-flavor Nambu-Jona-Lasinio model beyond large N_c* . Phys. Rev. **C81**, 065205, (2010).
- [48] A. F. Garcia, *Aplicações do Modelo de Nambu-Jona-Lasinio na Física de Altas Energias*, Doctoral Thesis, (Universidade Federal de Santa Catarina, 2016).
- [49] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, Nuc. Phys. **B**, (1974).

APÊNDICE A - Soma de Matsubara

Integrais de Feynman podem ser resolvidas para temperatura e densidade finitas substituindo $\mathbf{p}_0 \rightarrow i(\omega_n - i\mu)$ onde μ é potencial químico e ω_n são as frequências de Matsubara ($\omega_n = \pi(2n+1)T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Ao fazer a substituição a integral temporal é substituída pela soma de Matsubara

$$\int \frac{d^D p}{2\pi^D} \rightarrow iT \sum_n \int \frac{d^{D-1} p}{2\pi^{D-1}}, \quad (\text{A.1})$$

onde a D é o número de dimensões e no lado esquerdo a integral está sendo feita no espaço de Minkowski. As somas de Matsubara que são utilizadas no apêndice B são

$$T \sum_n \ln[(\omega_n - i\mu)^2 + w_p^2] = w_p + T \ln \left[1 + e^{-(w_p + \mu)/T} \right] + T \ln \left[1 + e^{-(w_p - \mu)/T} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$T \sum_n \frac{1}{(\omega_n - i\mu)^2 + w_p^2} = \frac{1}{2w_p} \left[1 - \frac{1}{e^{(w_p + \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(w_p - \mu)/T} + 1} \right] \quad (\text{A.3})$$

$$T \sum_n \frac{\omega_n - i\mu}{(\omega_n - i\mu)^2 + w_p^2} = \frac{i}{2} \frac{\sinh(\mu/T)}{\cosh(\mu/T) + \cosh(w_p/T)}, \quad (\text{A.4})$$

onde $w_p^2 = p^2 + m^2$. Definiremos também as integrais que surgem desses resultados no cálculo da pressão

$$I_1(a, b) = \int_0^\infty dx \left[\ln \left(1 + e^{-\sqrt{x^2 + a^2} + b} \right) + (b \rightarrow -b) \right], \quad (\text{A.5})$$

$$I_2(a, b) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \left[\left(\frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + a^2} + b} + 1} \right) + (b \rightarrow -b) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$J_2(a, b) = \sinh(b) \int_0^\infty dx \frac{1}{\cosh(\sqrt{x^2 + a^2}) + \cosh(b)}. \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B - Diagramas de Feynman

Segundo a Lagrangiana 2.1 vamos ter a regra do propagador $i(\not{p} - m)^{-1}$ e o vértice fermionico sendo $i\pi\lambda/N$

$$\text{Diagrama 1} \rightarrow \frac{P_0}{N} = -iT r \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln(\not{p} - m) \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \text{Diagrama 2} + \text{Diagrama 3} &\rightarrow \frac{P_1}{N} = -\frac{\pi\lambda}{2N} T r \left(\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{p} - m} \right)^2 \\ &+ \frac{\pi\lambda}{2} T r \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{p} - m} T r \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{k} - m} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O primeiro diagrama é a contribuição do vácuo que começaremos aplicando o traço fazendo a substituição pela soma de Matsubara

$$\frac{P_0}{N} = T \sum_n \int \frac{dp}{(2\pi)} \ln[(w_n - i\mu)^2 + w_p^2], \quad (\text{B.3})$$

fazendo a soma de matsubara utilizando a Eq. A.2

$$\frac{P_0}{N} = \int \frac{dp}{(2\pi)} w_p + \frac{T^2}{\pi} I_1\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right). \quad (\text{B.4})$$

Agora o próximo passo é fazer regularização

$$\frac{P_0}{N} = \left(\frac{e^{\gamma_e} M^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}-t} \int \frac{d^{2t} p}{(2\pi)^{2t}} w_p + \frac{T^2}{\pi} I_1\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right). \quad (\text{B.5})$$

Aqui temos uma integral com $2t$ dimensões no espaço euclidiano e vendo que a integral tem simetria esférica ficamos com

$$\frac{P_0}{N} = \frac{2\pi^t}{\Gamma(t)} \left(\frac{e^{\gamma_e} M^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}-t} \int \frac{dp^2}{(2\pi)^{2t}} (p^2)^{t-1} w_p + \frac{T^2}{\pi} I_1, \quad (\text{B.6})$$

onde foi feita a substituição $2pdp \rightarrow dp^2$ e adicionada a escala no esquema \overline{MS} para a pressão ter a dimensão correta, agora utilizando

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{m-1}}{(t+a)^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}, \quad (\text{B.7})$$

substituindo $t \rightarrow 1/2 - \epsilon$ e expandir até ordem ϵ^0

$$\frac{P_0}{N} = \frac{m^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{m}{M}\right) + \frac{1}{2\epsilon} \right] + \frac{T^2}{\pi} I_1\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right). \quad (\text{B.8})$$

Renormalizando o diagrama do vácuo eliminaremos o termo de ordem ϵ^{-1} .

Para fazer a ordem λ^1 temos um diagrama que possui um "loop" fechado, que será calculado explicitamente. O diagrama que possui dois "loops" fechados será facilmente induzido já que varia por uma constante e um termo obtido pela soma A.4, que este não possui em relação ao de um "loop". Note o fator de simetria $1/2$ dos dois diagramas

$$\frac{P_1}{N} = -\frac{\pi\lambda}{2N} \text{Tr} \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{i}{\not{p} - m} \right)^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{m^2\pi\lambda}{N} \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\pi\lambda}{N} \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{ip^0}{p^2 - m^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Da equação B.9 para B.10 foi feito apenas o traço, este procedimento feito no outro diagrama de ordem λ^1 ganha um fator multiplicativo de dois em relação ao primeiro termo e não possui o termo de p^0 , logo ao somar os dois diagramas ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{N} &= 2\gamma_0\pi\lambda m^2 \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\pi\lambda}{N} \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{ip^0}{p^2 - m^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Ao substituir a integral pela soma de Matsubara

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{N} = & 2\gamma_0\pi\lambda m^2 \left[\sum_n \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{(w_n - i\mu) + w_p^2} \right]^2 \\ & + \frac{\lambda}{4\pi N} \left(\sum_n \int dp \frac{(w_n - i\mu)}{(w_n - i\mu) + w_p^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

utilizando a soma A.3 e A.4 temos

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{N} = & 2\gamma_0\pi\lambda m^2 \left[\int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{2w_p} - \frac{1}{2\pi} I_2\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right) \right]^2 \\ & - \frac{\pi\lambda}{4\pi N} J_2\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Renormalizando no esquema \overline{MS} ficamos com e somando as duas ordens ficamos com a pressão perturbativa de Gross-Neveu até ordem λ

$$\begin{aligned} \frac{P_{pt}}{N} = & \frac{m^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{m}{M}\right) \right] + \frac{T^2}{\pi} I_1\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right) \\ & + \frac{\gamma_0\lambda}{2\pi} m^2 \left[\ln\left(\frac{m}{M}\right) + I_2\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right) \right]^2 - \frac{T^2\lambda}{4\pi N} J_2\left(\frac{m}{T}, \frac{\mu}{T}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$