

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE ENGENHARIA FERROVIÁRIA E METROVIÁRIA

LARISSA GABRIELI ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA LONGITUDINAL DE VEÍCULO  
FERROVIÁRIO E METROVIÁRIO

Joinville

2021

LARISSA GABRIELI ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA LONGITUDINAL DE VEÍCULO  
FERROVIÁRIO E METROVIÁRIO

Trabalho apresentado como requisito para  
obtenção do título de bacharel no Curso de  
Graduação em Engenharia Ferroviária e  
Metroviária do Centro Tecnológico de Joinville  
da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Mikowski

Joinville

2021

LARISSA GABRIELI ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA LONGITUDINAL DE VEÍCULO  
FERROVIÁRIO E METROVIÁRIO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia Ferroviária e Metroviária, na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 16 de dezembro de 2021.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Alexandre Mikowski  
Orientador/Presidente

Prof. Dr. Claudimir Antonio Carminatti  
Membro

Prof. Dr. Régis Kovacs Scalice  
Membro

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha gratificação ao Prof. Dr. Alexandre Mikowski, a quem tenho como mentor e orientador. Seu incentivo e dedicação como educador, além da contribuição com o projeto de pesquisa, ilustram a maestria, a paciência e a inspiração com a qual conduz os discentes para uma formação profissional.

À Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), em conjunto a todos os profissionais que suportam o seu funcionamento, por propiciar aos estudantes um ambiente de formação profissional, influenciando o desenvolvimento científico.

Estendo as gratificações ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), o qual apoiou o desenvolvimento deste projeto de pesquisa, assim como ao Laboratório de Modelagem e Análise de Dados (LabMAD), que junto a seus professores colaboradores, contribuíram com a estrutura e o suporte necessários para viabilizar o estudo.

Por fim, mas de primordial importância, agradeço à minha família, por dedicar todos os esforços necessários à minha educação e por apoiar as minhas escolhas. Grandes aprendizados influenciaram o meu caminho até a universidade e, com certeza, são frutos da instrução recebida de minha família.

## RESUMO

O estudo da dinâmica longitudinal ferroviária e metroviária é bastante relevante quando se fala em controle de operação, permitindo avaliar importantes fatores em um determinado trajeto, tais como: demanda de potência, velocidade, consumo de energia, entre outros. A pesquisa bibliográfica e documental pode ser utilizada para revisar e aprofundar o conhecimento sobre as forças relacionadas ao movimento, a fim de desenvolver a modelagem matemática da dinâmica longitudinal para veículos ferroviários e metroviários. Partindo da consideração de uma locomotiva como um corpo rígido e desconsiderando o acoplamento entre diferentes veículos, seja ferroviário ou metroviário, por meio da pesquisa explicativa as referentes forças de resistência ao movimento, assim como o esforço trator e a aceleração são definidos. Ao serem relacionados por meio da Segunda Lei de Newton, pode-se compreender em diferentes cenários de rampa e curva, por exemplo, o comportamento dinâmico do veículo ferroviário e/ou metroviário em função da velocidade. A equação matemática geral do movimento resultante quando aplicada a condições reais de operação, poderá simular o comportamento dinâmico da locomotiva e permitir o estudo das melhores relações de tração e resistências para a operação.

**Palavras-chave:** Dinâmica longitudinal. Esforço trator. Resistência ao movimento.  
Dinâmica ferroviária.

## ABSTRACT

The study of railway longitudinal dynamics is very relevant when it comes to operation control, allowing the study of important factors, such as: power demand, speed, energy consumption, among others. Bibliographic and documentary research can be used to review and deepen the knowledge about forces related to motion in order to develop the mathematical modeling of longitudinal dynamics for railway vehicles. Starting from the consideration of a locomotive as a rigid body and disregarding the coupling between different vehicles, through the explanatory research the referent movement resistance forces, as well as the tractor effort and acceleration are defined. When related through Newton's Second Law, it is possible to understand in different scenarios the dynamic behavior of the railway vehicle as a function of speed. The resulting mathematical equation of motion, when applied to real operating conditions, will be able to simulate the dynamic behavior of the locomotive and allow the study of the best traction and resistance relationships for the operation.

**Keywords:** Longitudinal dynamics. Tractive effort. Resistance to motion. Railway dynamics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Movimentos translacionais e rotacionais de um veículo ferroviário.....	10
Figura 2 - Diagrama de forças para o acoplamento de veículos.....	14
Figura 3 - Fluxograma da pesquisa.....	15
Figura 4 - Rodeiros ferroviários. ....	18
Figura 5 - Diagrama de corpo livre do mancal.....	18
Figura 6 - Diagrama de corpo livre do rodeiro.....	19
Figura 7 - Fluxo de ar sobre trem. ....	21
Figura 8 - Decomposição da força peso em rampa. ....	22
Figura 9 - Esquema trigonométrico de inclinação da rampa. ....	23
Figura 10 - Representação da conicidade das rodas.....	24
Figura 11 - Efeito da conicidade das rodas em curvas. ....	24
Figura 12 - Representação de truques rígido e flexível em curva .....	25
Figura 13 - Segunda Lei de Newton.....	32
Figura 14 - Direções do movimento.....	33

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\gamma_i$	Resistência $i$ [kgf/TF]
$F_i$	Força $i$ [kgf]
$W$	Peso do veículo [TF]
$R_D$	Resistências normais de Davis [kgf/TF]
$C_1, C_2$ e $C_3$	Coefficientes de Davis
$w$	Peso por eixo [TF]
$p$	Peso do rodeiro [TF]
$\mu_m$	Coefficiente de atrito no mancal
$r_m$	Raio do mancal [m]
$F_{t,am}$	Força de tração para compensar o atrito no mancal [kgf]
$R$	Raio da roda [m]
$\gamma_{R,m}$	Resistência de atrito no mancal [kgf/TF]
$K_1$	Grandeza de conversão de unidades 1 [kgf/TF]
$F_{t,ar}$	Força de tração para compensar o atrito de rolamento da roda [kgf]
$\delta$	Deformação do trilho [m]
$\gamma_{R,rol}$	Resistência de atrito ao rolamento da roda [kgf/TF]
$N$	Número de eixos do veículo
$F_{ar}$	Força de arrasto [N]
$K$	Coefficiente de arrasto [adimensional]
$\rho$	Massa específica do ar [kg/m <sup>3</sup> ]
$S$	Área de seção transversal do veículo [m <sup>2</sup> ]
$v$	Velocidade [km/h]
$K_2$	Grandeza de conversão de unidades 2 [(kg.h <sup>2</sup> )/(m.km <sup>2</sup> .s <sup>2</sup> )]
$\gamma_{R,ar}$	Resistência do ar [kgf/TF]
$C$	Grandeza de simplificação da resistência do ar [(kg.h <sup>2</sup> .m)/(TF.km <sup>2</sup> .s <sup>2</sup> )]
$\alpha$	Inclinação da rampa [°]
$i\%$	Inclinação da rampa [m]
$W_T$	Componente tangencial da força peso em rampa [TF]
$\gamma_{R,I}$	Resistência em rampa [kgf/TF]
$K_3$	Grandeza de conversão de unidades 3 [kgf/(TF.m)]
$\gamma_{R,C}$	Resistência em curva [kgf/TF]
$r_C$	Raio da curva [m]
$b_t$	Base rígida do truque [m]
$b$	Bitola da via [m]
$\gamma_{R,P}$	Resistência de partida [kgf/TF]
$K_4$	Coefficiente de resistência de partida

$P$	Potência [W]
$F$	Força [N]
$F_T$	Força de tração [kgf]
$\theta$	Ângulo entre vetores força e velocidade [°]
$P_{tração}$	Potência disponível para tração [hp]
$\eta_{loco}$	Coefficiente de rendimento da locomotiva
$E_T$	Esforço trator [kgf/tf]
$K_5$	Grandeza de conversão de unidades 5 [(W.km.s.kgf)/(hp.m.h.N)]
$A$	Grandeza de simplificação do esforço trator [(km.kgf)/(h.tf)]
$F_{AD}$	Força de aderência [kgf]
$\mu_{R-T}$	Coefficiente de aderência
$W_{AD}$	Peso aderente [tf]
$N'$	Número de eixos motrizes do veículo
$E_C$	Energia cinética [J]
$m$	Massa do veículo [kg]
$k$	Coefficiente de inércia de corpos girantes
$W'$	Peso equivalente do veículo [tf]
$m'$	Massa equivalente do veículo [kg]
$\gamma_A$	Resistência a aceleração [kgf/tf]
$a$	Aceleração [ $m/s^2$ ]
$D$	Grandeza de simplificação da aceleração [(kgf.s <sup>2</sup> )/(tf.m)]
$g$	Aceleração gravitacional [ $m/s^2$ ]
$K_6$	Grandeza de conversão de unidades 6 [(m <sup>2</sup> .h)/(km <sup>2</sup> .s)]
$q$	Quantidade de momento linear [(kg.m)/s]
$t$	Tempo [s]
$d$	Distância percorrida [km]
$a_g$	Aceleração do centro de massa [ $m/s^2$ ]
$F_R$	Força resistiva [N]
$\gamma_R$	Resistência ao movimento [kgf/tf]

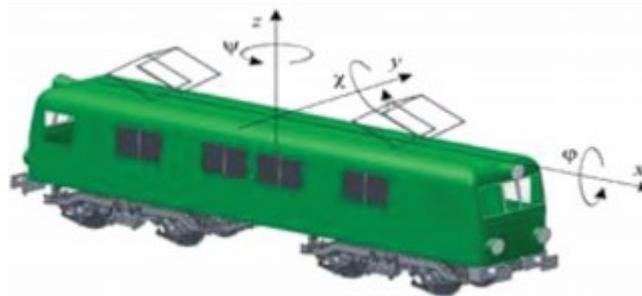
## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1	OBJETIVOS.....	11
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo Geral .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos.....</b>	<b>11</b>
1.2	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.....	12
1.3	RELEVÂNCIA DO TEMA .....	12
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	15
<b>2</b>	<b>CONCEITOS TEÓRICOS DE DINÂMICA FERROVIÁRIA E METROVIÁRIA .....</b>	<b>16</b>
2.1	RESISTÊNCIAS AO MOVIMENTO.....	16
<b>2.1.1</b>	<b>Resistências normais .....</b>	<b>17</b>
2.1.1.1	Resistência nos mancais .....	17
2.1.1.2	Resistência de rolamento.....	19
2.1.1.3	Resistência do ar.....	20
<b>2.1.2</b>	<b>Resistências ocasionais .....</b>	<b>22</b>
2.1.2.1	Resistência em rampa.....	22
2.1.2.2	Resistência em curva.....	23
2.1.2.3	Resistência na partida.....	26
2.2	ESFORÇO TRATOR.....	26
2.3	ACELERAÇÃO .....	28
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DA DINÂMICA FERROVIÁRIA E METROVIÁRIA .....</b>	<b>31</b>
3.1	DINÂMICA DE VEÍCULO FERROVIÁRIO COMO UM CORPO RÍGIDO .....	31
3.2	PARAMETRIZAÇÃO DA DINÂMICA LONGITUDINAL.....	34
3.3	CENÁRIOS CONSIDERANDO VELOCIDADE CONSTANTE.....	35
3.4	CENÁRIOS CONSIDERANDO VELOCIDADE VARIÁVEL .....	38
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>43</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O movimento é um processo de locomoção de corpos e pode ser definido por meio de espaço e tempo. No caso de um veículo ferroviário, seus principais movimentos podem ser translacionais ou rotacionais, como mostra a Figura 1. Como objeto de estudo neste trabalho, o deslocamento no eixo  $x$  corresponde ao movimento de translação longitudinal e pode ser reconhecido como a principal movimentação do trem (SOOMRO, 2015, p. 8 - 9). Segundo Pires (2013), “Na direção do movimento ao longo da via, todos os procedimentos da mecânica são aplicáveis.” (p. 15) e, portanto, é possível tratar um veículo ferroviário como um corpo rígido para estudar o seu comportamento dinâmico.

Figura 1 - Movimentos translacionais e rotacionais de um veículo ferroviário.



Fonte: Soomro (2015, p. 9).

Brina (1982, p. 1), cita três pontos focais na análise do movimento: a carga a ser transportada, o caminho a ser percorrido e o esforço necessário para a locomoção. A modelagem matemática permite produzir a simulação de um sistema real, onde se torna possível prever o comportamento do veículo (BARBOSA, 2001). A importância de desenvolver o estudo dinâmico de composições ferroviárias, compreendendo e simulando a trajetória de um trem, de acordo com Cole (2006, p. 240 - 241), tem relação com diversas motivações: critérios de conforto para transporte de passageiros, falha e fadiga de componentes, prevenção de acidentes, gerenciamento do consumo de energia, treinamento de maquinistas, entre outros fatores importantes para a operação e para o meio ambiente.

Utilizando este conceito, propõe-se analisar a trajetória de um trem, especificando-a por variáveis de deslocamento, de velocidade e de aceleração. No entanto, a representação dinâmica pode apresentar elevada complexidade ao considerar as funções de entrada das locomotivas, os comandos de freio, as características da via, assim como as características do material rodante, dos truques e dos acoplamentos (COLE, 2006, p. 241). Observa-se ainda, que

o movimento sofre a influência de forças e de efeitos cujas definições são complexas, por vezes empíricas ou experimentais, em condições que variam de acordo com características da composição, da via ou do meio em que se encontram (WU, SPIRYAGIN, COLE, 2016, p. 1700 - 1703).

Para modelar matematicamente o movimento de veículos ferroviários se torna necessário desenvolver um estudo de revisão de conceitos de dinâmica para analisar os fatores que influenciam o movimento. Tendo-se estabelecida uma metodologia de pesquisa, é possível elaborar definições matemáticas, com base em conceitos físicos, para as principais forças que atuam sobre os veículos. Com isso, permite-se construir uma equação geral de movimento, que pode ser aplicada para fins de simulação. Tendo em vista a complexidade do sistema real, pode-se estabelecer condições de contorno que guiem o estudo ao desenvolver a modelagem matemática.

## 1.1 OBJETIVOS

Para descrever o movimento de um veículo motriz ferroviário, propõe-se neste trabalho os seguintes objetivos.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Analisar as forças que compõem o movimento de veículos ferroviários e/ou metroviários para contato roda-trilho, com o fim de desenvolver a modelagem matemática da dinâmica longitudinal de uma locomotiva, de maneira que se aplique a diferentes situações de operação.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Revisar conceitos teóricos de Dinâmica Ferroviária e Metroviária através das metodologias de pesquisa documental e bibliográfica para compreender a temática envolvida e fornecer elementos para a realização da modelagem matemática da dinâmica longitudinal;
- Aplicar a Segunda Lei de Newton para construir a equação geral do movimento longitudinal de um único veículo ferroviário e metroviário;
- Estudar cenários de operação em velocidade variável e em velocidade constante, em diferentes condições de contorno, para gerar equações do movimento simplificadas.

## 1.2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Para descrever o movimento longitudinal de veículos ferroviários, tem-se como base a pesquisa de natureza teórica e explicativa, que atua por meio da análise e da interpretação de forças que influenciam o deslocamento de um corpo rígido, ou seja, uma locomotiva. Para esse fim, o desenvolvimento científico pode ser guiado pelos métodos de pesquisas bibliográfica e documental. O primeiro caracteriza o desenvolvimento a partir de estudos prévios, com base em materiais já elaborados, constituindo basicamente livros e artigos científicos. Já o segundo, permite a análise de documentos de diversas fontes, que possam de alguma forma contribuir com o estudo em questão (GIL, 2002, p. 43 - 47). Por meio dos procedimentos descritos, são observadas as abordagens de diferentes autores ao tema, que colaboram com a definição das forças que designam o movimento longitudinal e que permitem representar este movimento por meio da modelagem matemática.

Por meio dessa, a revisão de conceitos físicos possui importante papel ao permitir um estudo crítico sobre os modelos analíticos já construídos por diferentes autores e, então, delimitar a área de pesquisa para guiar a representação do movimento de veículos ferroviários. No presente estudo, tem-se como base o Portal de Periódicos CAPES e as plataformas Scopus e Scielo na busca de trabalhos científicos relacionados ao tema dinâmica longitudinal ferroviária e metroviária. O desenvolvimento deste trabalho foi limitado ao âmbito teórico-analítico, não sendo objeto de sua execução a realização de testes laboratoriais e de campo. Dessa forma, o equacionamento proposto é baseado nas informações técnicas e conceitos teóricos obtidos durante o levantamento das características do movimento por meio da abordagem bibliográfica e documental.

A pesquisa foi realizada no Centro Tecnológico de Joinville (CTJ) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), no Laboratório de Modelagem e Análise de Dados (LabMAD) e também em regime de Home Office, dispondo e adaptando os recursos necessários para a sua realização devido à pandemia de COVID-19.

## 1.3 RELEVÂNCIA DO TEMA

Ao consultar diferentes bibliografias que desenvolvem a dinâmica longitudinal ferroviária, nota-se distintas abordagens e aplicações aos estudos. Isso se deve à amplitude dos fatores influenciados pela dinâmica do movimento e também à complexidade de representação dos sistemas reais. Definir a equação de movimento para um veículo representa a possibilidade

de simular a operação real, permitindo avaliar importantes fatores em um determinado trajeto, tais como: demanda de potência, velocidade, consumo de energia, entre outras condições relevantes para a otimização dos sistemas.

No entanto, a representação fiel à operação efetiva é sensibilizada pela complexidade do sistema, que envolve o acoplamento de veículos, com diversos graus de liberdade, atuando em regimes permanente e transiente e, ainda, com influência das dinâmicas lateral e vertical ferroviária (WU et al., 2016, p. 1688 - 1689). Sendo assim, verificam-se diferentes abordagens e simplificações, que permitem alcançar resultados satisfatórios para as condições de contorno determinadas em cada estudo.

A modelagem matemática da dinâmica longitudinal pode ser desenvolvida por meio da Segunda Lei de Newton, relacionando o movimento acelerado às forças que o influenciam, tendo como variável a velocidade ou a posição no deslocamento. Wang e Rakha (2018), Pires, Nabeta e Cardoso (2005) e Cole (2006) promovem a simulação considerando a associação entre a força de tração, as forças de resistência ao movimento e a aceleração do veículo. A força de tração abriga em sua definição as particularidades de representação de cada modo de tração.

As resistências ao movimento são forças que se opõem à direção de deslocamento e que podem ser classificadas de acordo com sua ocorrência: como resistências normais (estando sempre presentes) ou como resistências acidentais (presentes em determinadas situações). As resistências normais são forças originadas por atrito, pela gravidade e pelo meio, enquanto as resistências ocasionais têm relação com a inércia e com características do trajeto (presença de curvas e rampas) (BRINA, 1982, p. 86).

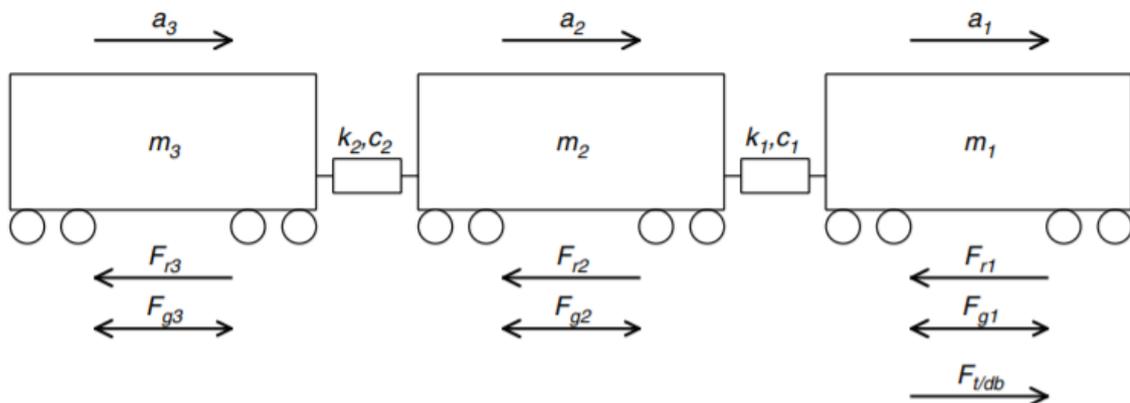
Diversos estudos comumente descrevem as resistências normais por meio de definições empíricas, como um polinômio de segunda ordem, variável com a velocidade e cujos coeficientes são obtidos experimentalmente. Cole (2006), Yi (2018), Wang e Rakha (2018) e Wu et al. (2016) descrevem as diferentes origens dessas forças e apresentam algumas das abordagens utilizadas em diferentes regiões e para distintas condições de aplicação, formando diferentes equações que designam as resistências normais. Compreende-se que por se tratar de um método empírico, a reprodução das equações para fins de simulação deve ser verificada e garantir a fidelidade ao sistema real.

As resistências ocasionais são apresentadas de maneiras distintas em estudos científicos quanto à expressividade de cada uma das forças na influência ao movimento. Algumas das forças são regularmente consideradas, enquanto outras são definidas somente em determinados estudos. Wang e Rakha (2018), Wu et al. (2016) e Pires et al. (2005) definem como relevantes as resistências características de trajetos curvilíneos ou inclinados, causadas

principalmente pelo atrito entre roda e trilho e pela aceleração gravitacional. No entanto, Yi (2018) lista as resistências de partida e em túneis como fatores também importantes a serem considerados no cálculo das resistências ao movimento. A resistência em partida se refere à parcela adicional de inércia que deve ser superada para sair do repouso e a resistência em túneis designa uma porção adicional de resistência aerodinâmica, quando o veículo se encontra em obras de arte do tipo.

Além de compreender as forças envolvidas para movimentar um veículo, é importante considerar a interação entre dois ou mais veículos acoplados quando em movimento. Com esta abordagem, Cole (2006) descreve que o acoplamento pode ser representado por um sistema massa-mola-amortecedor para refletir a ação dos engates e dos aparelhos de choque e tração na transferência das forças de um veículo para outro. Assumindo a ação de forças de tração, de resistências ao movimento e também do próprio acoplamento, o autor apresenta o diagrama de forças conforme a Figura 2, que permite formar as equações de movimento para cada veículo.

Figura 2 - Diagrama de forças para o acoplamento de veículos.



Fonte: Cole (2006, p. 242).

Ainda que com a descrição do modelo, a solução e a simulação do conjunto de equações formado apresentam grande complexidade (devido ao acoplamento das equações), dadas as necessidades de calcular as forças de entrada do sistema e de manter estes dados atualizados conforme ajustes de operação por parte do maquinista ou do trajeto (COLE, 2006).

Considerando as diferentes abordagens, faz-se necessário desenvolver a modelagem matemática da dinâmica longitudinal para veículos ferroviários e/ou metroviários, com o fim de compreender o comportamento das forças e a relação entre as formulações empíricas e as definições matemáticas. Com isso, pode-se validar as equações desenvolvidas por meio de simulação, se possível, com aplicação em um caso real. Por meio desse desenvolvimento,

permite-se produzir uma análise crítica sobre as forças relevantes para o estudo, voltada às condições de operação do sistema ferroviário e metroviário brasileiro.

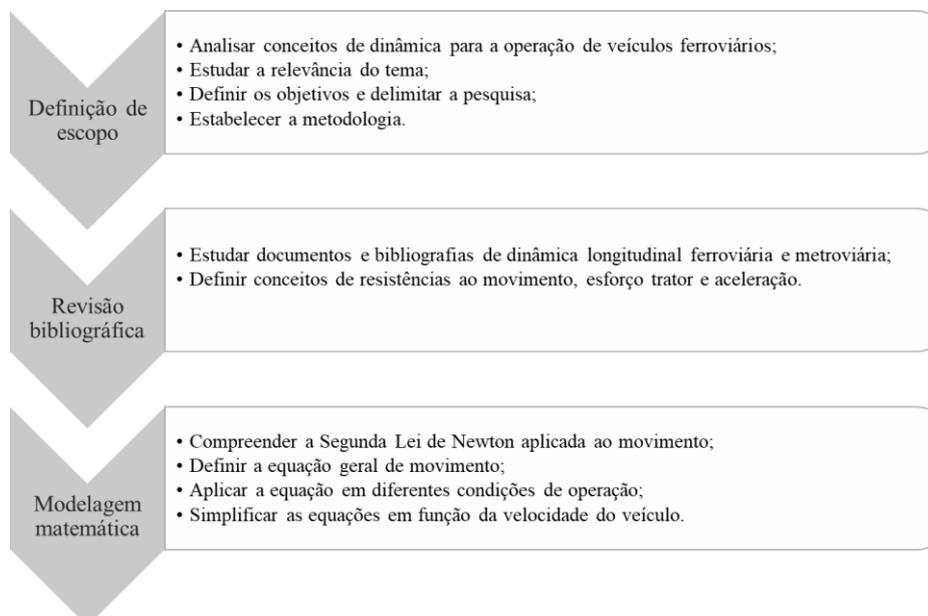
Este trabalho tem como intuito o desenvolvimento da modelagem matemática de um veículo ferroviário e metroviário, ou seja, um corpo rígido. Para guiar este estudo, tem-se como foco o desenvolvimento da equação de movimento de um veículo, desconsiderando o acoplamento, aplicada a uma locomotiva, considerando a atuação em potência constante e desprezando os efeitos das dinâmicas lateral e vertical no movimento longitudinal.

#### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho de pesquisa teve sua construção baseada nas etapas apresentadas pela Figura 3 e se apresenta dividido pelos capítulos descritos a seguir:

- Capítulo 1: uma ampla introdução do tema ao leitor, deixando-o integrado à proposição da pesquisa e às etapas previstas para a sua execução;
- Capítulo 2: definição de conceitos relativos ao movimento de veículos ferroviários e metroviários, seguindo a metodologia de pesquisa proposta;
- Capítulo 3: aplicação da Segunda Lei de Newton para modelar matematicamente o movimento de veículos ferroviários e metroviários;
- Capítulo 4: apresenta as conclusões oriundas da pesquisa realizada e propõe recomendações para a continuidade do estudo em trabalhos futuros.

Figura 3 - Fluxograma da pesquisa.



Fonte: Autoria própria (2021).

## 2 CONCEITOS TEÓRICOS DE DINÂMICA FERROVIÁRIA E METROVIÁRIA

Para alcançar o objetivo do trabalho, é necessário compreender a relação entre o movimento e as forças que o causam. Aprofundar os conceitos envolvidos no deslocamento de um veículo ferroviário implica no estudo de dois tipos de forças que são predominantes na descrição desse movimento: a tração e as resistências. Além deles, falando de movimento, inclui-se nessa análise a variação da velocidade, representada pela aceleração em que o veículo está sujeito.

Brina (1982, p. 86), explica que no setor ferroviário é usual representar as forças na unidade kg/t, avaliando cada força de maneira unitária, tal como uma taxa. Portanto, neste trabalho os equacionamentos desenvolvidos são parametrizados como  $\gamma$ , criando uma relação de cada força com o peso do veículo. Para isso, cada força  $F_i$  relacionada ao movimento, será representada por:

$$\gamma_i = \frac{F_i}{W} \left[ \frac{\text{kgf}}{\text{tf}} \right] \quad (1)$$

em que  $\gamma_i$  é a resistência devido a  $F_i$  [kgf/tf],  $F_i$  é a força (hipotética)  $i$  [kgf] e  $W$  é o peso do veículo [tf].

### 2.1 RESISTÊNCIAS AO MOVIMENTO

As resistências ao movimento compreendem o conjunto de forças que se opõem ao movimento longitudinal do veículo ferroviário. De acordo com Brina (1982, p. 86 - 87), considera-se que essas resistências podem ser representadas como forças aplicadas nos pontos de contato entre rodas e trilhos, no sentido contrário ao movimento. Em geral, são originadas pela presença de atrito em diferentes componentes, pelo arrasto, por características da via permanente, por movimentos parasitas do veículo, pelo próprio peso e pela inércia do trem.

Com o fim de aprofundar o seu estudo, classificam-se conforme a ocorrência:

- Resistências normais: presentes em qualquer instante, são próprias do veículo;
- Resistências acidentais/ocasionais: em decorrência de alterações da via (em curva ou em rampa) e de movimento.

### 2.1.1 Resistências normais

As resistências normais representam um conjunto de forças que constantemente se manifestam na movimentação de um veículo ferroviário, independentemente do tipo de veículo ou do trajeto percorrido. Segundo Brina (1982, p. 87), são causadas pelos seguintes fatores: atrito (em mancais, engates e rodas), gravidade (devido ao rolamento da roda) e meio (pela pressão de ar e por correntes atmosféricas). Cole (2006), Yi (2018), Wang e Rakha (2018) e Wu et al. (2016) representam as resistências normais por meio da Equação de Davis:

$$R_D = C_1 + C_2 v + C_3 v^2 \quad (2)$$

sendo  $R_D$  as resistências normais [kgf/TF],  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  os coeficientes determinados experimentalmente e  $v$  a velocidade de operação.

A Equação 2 descreve um polinômio cujos termos se referem expressivamente à resistência de atrito nos mancais, à resistência de atrito de rolamento das rodas e à resistência do ar. Alternativamente à descrição das resistências normais por meio da Equação de Davis, propõe-se a definição matemática de cada uma delas.

#### 2.1.1.1 Resistência nos mancais

Mancais são utilizados como pontos de apoio fixos a elementos giratórios. Para isso, asseguram a movimentação relativa entre duas superfícies, suportando as solicitações de carga e rotação, com baixo nível de atrito (NORTON, 2013, p. 623 - 625). Rodeiros ferroviários empregam mancais de elementos rolantes, com rolamentos de cartucho do tipo rolos cilíndricos ou rolos cônicos. Esse componente, visto na Figura 4, tem a função de conectar o truque aos rodeiros, transmitindo o peso do veículo às rodas e permitindo a rotação dos eixos.

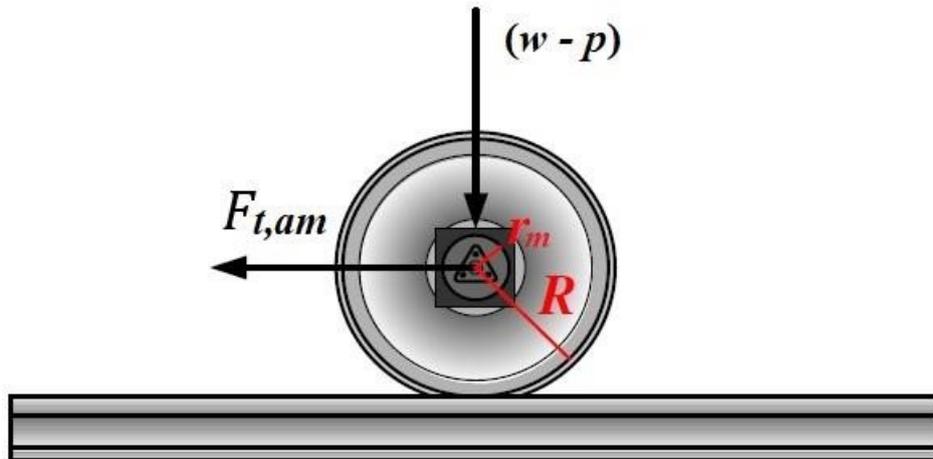
Figura 4 - Rodeiros ferroviários.



Fonte: Bracciali (2016, p. 26).

Avaliando o diagrama de corpo livre para o mancal, conforme a Figura 5, indica-se a força de tração necessária para a força de atrito gerada no componente. Considerando  $r_m$  o raio do mancal,  $R$  o raio da roda,  $w$  o peso por eixo e  $p$  o peso do rodeiro, a variável  $F_{t,am}$  da Figura 5 indica a força de tração necessária para compensar a força de atrito gerada nos mancais.

Figura 5 - Diagrama de corpo livre do mancal.



Fonte: Adaptado de Borba (2009, p. 46).

Borba (2009, p. 46 – 47) define o equacionamento dessa resistência pela relação entre o trabalho devido ao atrito e o trabalho da força trativa necessária para superar esse atrito em um eixo do veículo. Com isso, é possível determinar a força de tração correspondente como:

$$F_{t,am} = K_1 \mu_m (w - p) \frac{r_m}{R} \quad (3)$$

tal que  $F_{t,am}$  é a respectiva força de tração [kgf],  $K_1$  é a constante de conversão de unidades 1000 [kgf/tf],  $\mu_m$  é o coeficiente de atrito do mancal (adimensional),  $w$  é o peso por eixo do veículo [tf],  $p$  é o peso do rodeiro [tf],  $r_m$  corresponde ao raio do mancal [m] e  $R$  é o raio da roda [m].

Dessa forma, é possível aplicar a parametrização da Equação 1 e obter uma equação que represente a resistência devido ao atrito no mancal:

$$\gamma_{R,m} = K_1 \mu_m \left( \frac{w - p}{W} \right) \frac{r_m}{R} \quad (4)$$

sendo  $\gamma_{R,m}$  a resistência de atrito no mancal [kgf/tf] e  $W$  é o peso do veículo [tf].

Dado que a Equação 4 caracteriza a resistência em um eixo, para determinar a resistência do veículo todo, multiplica-se a mesma pelo número total de eixos:

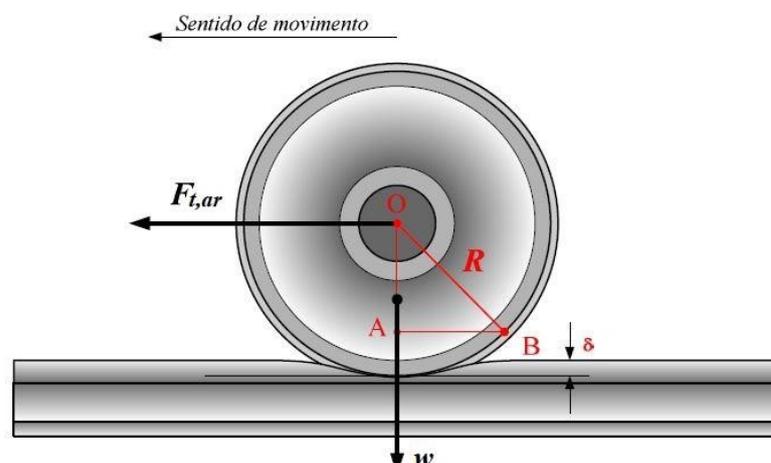
$$\gamma_{R,m} = N K_1 \mu_m \left( \frac{w - p}{W} \right) \frac{r_m}{R} \quad (5)$$

em que  $N$  indica a quantidade total de eixos.

#### 2.1.1.2 Resistência de rolamento

A resistência causada pelo atrito de rolamento da roda sobre os trilhos existe devido a uma deformação causada no trilho pela própria carga do veículo. A Figura 6 ilustra essa deformação e o diagrama de corpo livre que auxilia a determinação da força.

Figura 6 - Diagrama de corpo livre do rodeiro.



Fonte: Adaptado de Borba (2009, p. 48).

Considerando a carga por eixo  $w$  mostrada na Figura 6, é necessário que haja uma força de tração  $F_{t,ar}$  que seja suficiente para superar a deformação  $\delta$  nos trilhos e movimentar o veículo. Analisando a representação das forças na Figura 6, por meio da trigonometria é possível estabelecer o equacionamento da força de tração envolvida como:

$$F_{t,ar} = K_1 w \frac{\sqrt{2R\delta}}{R} \quad (6)$$

onde  $F_{t,ar}$  é a força trativa para compensar o atrito de rolamento [kgf],  $K_1$  é a constante de conversão de unidades 1000 [kgf/tf],  $w$  é o peso por eixo [tf],  $R$  é o raio da roda [m] e  $\delta$  é a deformação do trilho [m].

Com a definição da força é possível aplicar a parametrização mostrada na Equação 1, determinando a resistência devido ao atrito de rolamento para todo o veículo. Portanto, identificando que a Equação 6 representa a força para somente um eixo, deve-se multiplicar a mesma pelo número total de eixos do veículo, descrevendo a resistência como:

$$\gamma_{R,rol} = \frac{N F_{t,ar}}{W} = N K_1 \frac{w}{W} \frac{\sqrt{2R\delta}}{R} \quad (7)$$

tal que  $\gamma_{R,rol}$  é a resistência devido ao atrito de rolamento [kgf/tf],  $N$  é o número de eixos do veículo e  $W$  é o peso do veículo [tf].

Reconhecendo que a relação entre o peso total do veículo e o peso por eixo corresponde ao número de eixos do mesmo, pode-se reescrever e simplificar a Equação 7 de forma que:

$$\gamma_{R,rol} = K_1 \sqrt{\frac{2\delta}{R}} \quad (8)$$

em que as variáveis já foram definidas anteriormente.

### 2.1.1.3 Resistência do ar

Na existência de uma velocidade relativa entre um fluido e um corpo sólido, o corpo experimenta uma força denominada arrasto, oposta ao movimento do corpo e paralela ao movimento relativo do fluido (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008, p. 132). Esse é o caso da resistência do ar, oposta ao movimento do trem, representada pelas linhas da Figura 7.

Figura 7 - Fluxo de ar sobre trem.



Fonte: Actiflow (2018).

Halliday et al. (2008, p. 132 – 133) explica que quando o fluido de trabalho é o ar, a força de arrasto pode ser simplificada como:

$$F_{ar} = \frac{1}{2} K \rho S \left( \frac{v}{3,6} \right)^2 \quad (9)$$

sendo  $F_{ar}$  a força de arrasto [N],  $K$  o coeficiente de arrasto [adimensional],  $\rho$  a massa específica do ar [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ],  $S$  a área de seção transversal do veículo [ $\text{m}^2$ ] e  $v$  a velocidade [km/h].

Borba (2009, p. 51 - 52) explica que o coeficiente da força de arrasto é calculado experimentalmente, mas que possui representação satisfatória por meio da constante:

$$K = \frac{2 K_2}{\rho} \quad (10)$$

onde  $K_2$  é a grandeza que inclui o coeficiente de arrasto, o fator 1/2 e a massa específica do ar, além da conversão de unidades para a velocidade e para a força em kgf [ $0,10192 \cdot (\text{kg} \cdot \text{h}^2) / (\text{m} \cdot \text{km}^2 \cdot \text{s}^2)$ ].

Com isso, permite-se escrever a força de arrasto como:

$$F_{ar} = K_2 S v^2 \quad (11)$$

Com isso, estabelece-se a resistência do ar de acordo com a Equação 1:

$$\gamma_{R,ar} = \frac{F_{ar}}{W} = \frac{K_2 S v^2}{W} \quad (12)$$

tal que  $\gamma_{R,ar}$  é a resistência do ar [kgf/tf] e  $W$  é o peso do veículo [tf].

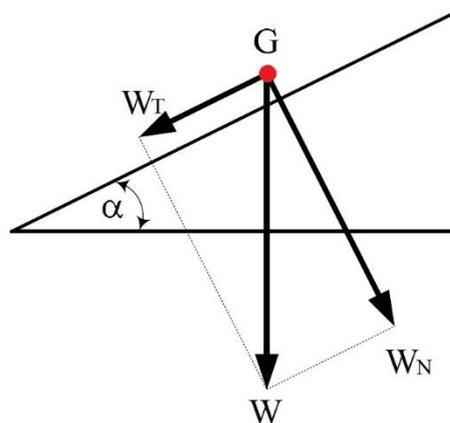
### 2.1.2 Resistências ocasionais

As resistências ocasionais representam as forças que só se manifestam em determinadas situações. Brina (1982, p. 86 - 87), aponta que essas resistências são notadas em virtude de alterações no trajeto e no estado de repouso ou movimento. No caso de alterações na via, destacam-se os percursos curvilíneos (que provocam aumento do atrito entre rodas e trilhos) e os trechos inclinados (onde a aceleração gravitacional passa a contribuir com o movimento). Referindo-se à inércia, aponta-se a resistência experimentada para sair do repouso e os períodos de aceleração do veículo.

#### 2.1.2.1 Resistência em rampa

A resistência em rampa se torna presente quando o veículo está em aclave ou em declive, pois a ação da gravidade no plano inclinado faz com que parte da força peso atue contra ou a favor ao movimento. A Figura 8 representa a decomposição da força peso para o veículo em um trajeto inclinado. Na figura, o ponto G indica o centro de gravidade do corpo rígido, trafegando sobre uma rampa de inclinação  $\alpha$ , onde o peso é indicado pelo vetor  $W$  e pelos vetores  $W_T$  e  $W_N$ , que caracterizam a sua decomposição em duas coordenadas (tangencial e normal, respectivamente).

Figura 8 - Decomposição da força peso em rampa.



Fonte: Autoria própria (2021).

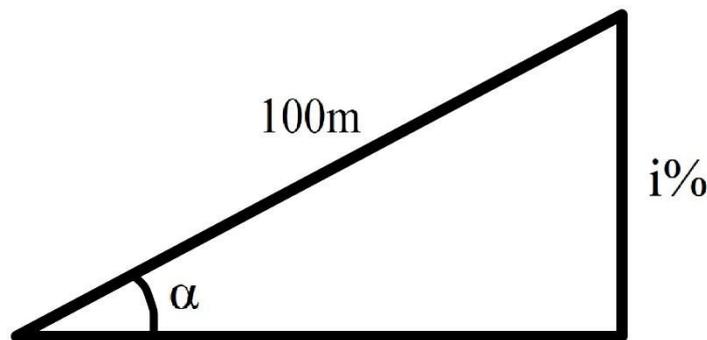
Analisando a Figura 8, compreende-se que a resistência em rampa ocorre devido à componente tangencial da força peso, que passa a colaborar com o movimento longitudinal, quando há um trajeto inclinado. Definindo essa força, pode-se descrever a resistência em rampa conforme:

$$\gamma_{R,I} = \frac{1000 W_T}{W} = \frac{1000 W \sin(\alpha)}{W} = 1000 \sin(\alpha) \quad (13)$$

onde  $\gamma_{R,I}$  é a resistência em rampa [kgf/tf],  $W_T$  corresponde a componente tangencial da força peso [tf],  $W$  é o peso do veículo [tf] e  $\alpha$  é o ângulo de inclinação da rampa [°].

Com o fim de simplificar a Equação 13, propõe-se a análise geométrica da Figura 9, que determina o percentual de inclinação  $i$  da rampa como a altura da mesma para cada 100 metros (100 m) percorridos. Vale ressaltar que no setor ferroviário brasileiro, as rampas geralmente possuem inclinação máxima de 3° – equivalente a aproximadamente 5% (Borba, 2009, p. 72).

Figura 9 - Esquema trigonométrico de inclinação da rampa.



Fonte: Autoria própria (2021).

Observando a Figura 9, nota-se que a Equação 13 pode ser reescrita por meio da relação trigonométrica:

$$\sin(\alpha) = \frac{i\%}{100} \quad (14)$$

Sendo assim, permite-se definir a resistência como:

$$\gamma_{R,I} = 1000 \frac{i\%}{100} = K_3 i\% \left[ \frac{\text{kgf}}{\text{tf}} \right] \quad (15)$$

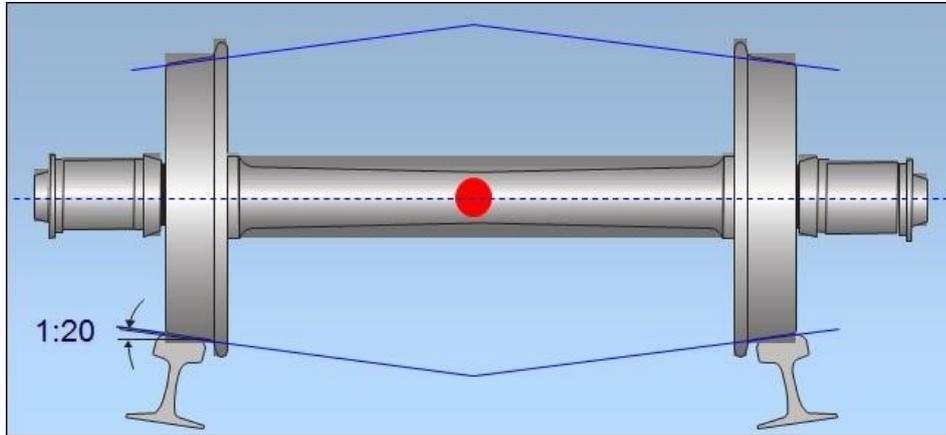
para  $\gamma_{R,I}$  como a resistência em rampa [kgf/tf],  $i\%$  é a inclinação da rampa [m] e  $K_3$  é o coeficiente que considera a relação trigonométrica e a conversão de unidades 10 [kgf/(tf.m)].

#### 2.1.2.2 Resistência em curva

Pires (2013, p. 45) explica que a resistência de curvatura é formada pela junção de três fatores: solidariedade entre rodas e eixos, paralelismo dos eixos e força centrífuga. Para analisar estes fatores, é importante conhecer a configuração dos truques ferroviários, que usualmente

são compostos por dois eixos paralelos, com rodas em formato cônico, como mostra a Figura 10.

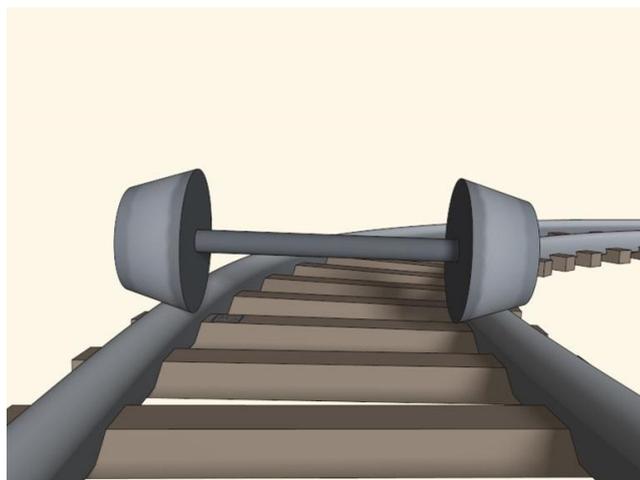
Figura 10 - Representação da conicidade das rodas.



Fonte: Rosa (2015).

Em trajetos curvilíneos, os trilhos interno e externo de uma ferrovia possuem raios de curvatura diferentes. Sendo assim, as rodas sobre o trilho externo percorrem maior distância do que as rodas sobre o trilho interno da via. Rodas com perfil cônico favorecem a inscrição do veículo em curvas, pois promovem o deslocamento lateral do roldão sobre a via, como demonstra a Figura 11, reduzindo a diferença na distância percorrida entre as rodas de um mesmo roldão, o que conseqüentemente diminui ou elimina o deslizamento das rodas (PIRES, 2013, p. 45 - 53).

Figura 11 - Efeito da conicidade das rodas em curvas.

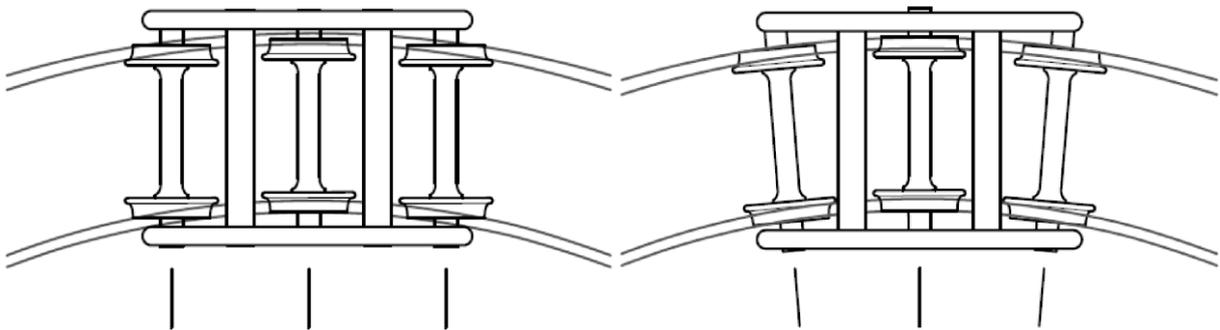


Fonte: Mathematical Etudes Foundation (2002-2008).

Pires (2013, p. 45 - 53) explica que o paralelismo dos eixos de um mesmo truque é outro fator de grande representatividade na resistência de curvatura, pois a limitação do

movimento relativo entre os eixos (rigidez do truque) resulta em maior deslizamento das rodas. A configuração do truque pode variar, permitindo ou não o movimento relativo entre os eixos, como mostra a Figura 12. No entanto, a configuração do truque para promover rigidez e flexibilidade é complexa, pois as características ideais de um truque para a inscrição em curvas trazem movimentos parasitas ao veículo quando em um percurso retilíneo e vice-versa. Dessa forma, o raio de curvatura é limitado, com o intuito de reduzir o deslizamento das rodas e de controlar o atrito entre rodas e trilhos.

Figura 12 - Representação de truques rígido e flexível em curva.



Fonte: Borba (2009, p. 82).

Além da influência desses fatores, o movimento curvilíneo coloca o veículo sob a ação de uma força centrípeta e de uma força centrífuga. Brina (1988, p. 124 - 125) explica que a força centrífuga experimentada por corpos rígidos em trajetos curvilíneos provoca o deslocamento lateral do veículo sobre os trilhos, aumentando o atrito devido ao conseqüente contato dos frisos das rodas com os trilhos.

Ao unir as três fontes de resistência ao movimento em curva, não é possível construir um equacionamento teórico que represente um caso geral. Sendo assim, formulações empíricas são utilizadas para estimar a resistência em curva de veículos ferroviários (PIRES, 2013, p. 51). Brina (1982, p. 95) propõe a aplicação da Fórmula de Stevenson para locomotivas:

$$\gamma_{R,C} = 0,2 + \frac{100}{r_c} (b_t + b + 3,8) \quad (16)$$

em que  $\gamma_{R,C}$  é a resistência em curva para locomotivas [kgf/TF],  $r_c$  é o raio da curva [m],  $b_t$  é a base rígida do truque [m] e  $b$  é a bitola [m].

### 2.1.2.3 Resistência na partida

O instante da partida do veículo gera uma resistência adicional ao movimento, correspondente à força extra necessária para superar a inércia e a força de atrito estático nos mancais (YI, 2018, p. 118 - 119). De acordo com Borba (2009, p. 62 - 63), essa força é influenciada por diversos fatores, tais como: posição do trem (esticado ou encolhido), tipo dos mancais, tipo de suspensão, condições atmosféricas, temperatura e tempo em que o veículo permaneceu parado.

Sendo assim, diferentes definições experimentais são produzidas para representar essa força. Borba (2009, p. 63) aponta que a resistência na partida pode ser estimada entre 2 a 5 [kgf/tf], dependendo das condições de operação do veículo. Considerando o valor médio da resistência na partida, pode-se determinar que:

$$\gamma_{R,P} = K_4 \cdot 3,5 \quad (17)$$

onde  $\gamma_{R,P}$  indica a resistência na partida [kgf/tf] e  $K_4$  é o coeficiente de resistência na partida (equivalente a 0 se o veículo está em movimento ou 1 se o veículo parte do repouso).

## 2.2 ESFORÇO TRATOR

O esforço trator é desenvolvido pelos veículos motrizes para entregar energia mecânica aos rolos. No Brasil, as locomotivas diesel-elétricas são amplamente utilizadas no transporte de cargas. São dotadas de um motor de combustão a diesel, conectado a um gerador de tração e a outros equipamentos auxiliares (BORBA, 2009, p. 131 - 132). A transmissão da energia elétrica proveniente do gerador aciona os motores de tração e esse processo resulta na movimentação do veículo.

A potência gerada por um motor é descrita por Hibbeler (2005, p. 152) como o produto escalar dos vetores força e velocidade:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos(\theta) \quad (18)$$

em que  $P$  é a potência [W],  $\vec{F}$  é o vetor força [N],  $\vec{v}$  é o vetor velocidade [m/s] e  $\theta$  é o ângulo entre os vetores.

Aplicando a Equação 18 para a força de tração (onde os vetores de força e de velocidade estão na mesma direção), considerando a potência disponível para tração e adotando

as unidades de medida usuais (potência em hp e velocidade em km/h), determina-se a força de tração:

$$F_T = \frac{K_5 P_{tração} \eta_{loco}}{v} \quad (19)$$

onde  $F_T$  é a força de tração [kgf],  $P_{tração}$  é a potência disponível para tração [hp],  $\eta_{loco}$  é o coeficiente de rendimento do sistema de transmissão,  $v$  é a velocidade [km/h] e  $K_5$  é a grandeza de conversão de unidades [(W.km.s.kgf)/(hp.m.h.N)].

Dessa forma, com o intuito de parametrizar a força motriz igualmente às resistências ao movimento, pode-se expor o esforço trator como:

$$E_T = \frac{F_T}{W} = \frac{K_5 P_{tração} \eta_{loco}}{v W} \quad (20)$$

sendo  $E_T$  o esforço trator [kgf/tf] e  $W$  o peso do veículo [tf].

No entanto, além de considerar a limitação do esforço trator pela eficiência da locomotiva, a aderência entre rodas e trilhos é outro fator a ser analisado. O movimento do veículo ferroviário é uma combinação da aplicação do conjugado, gerado pelos motores de tração, com a força de aderência entre as rodas e os trilhos. Isso se deve ao fato de que as rodas motrizes possuem tendência a patinar por não possuírem aderência suficiente aos trilhos (PIRES, 2013, p. 56 - 57).

Pires (2013, p. 58 - 65), explica que a força de aderência pode ser representada pela Lei de Coulomb como:

$$F_{AD} = K_1 \mu_{R-T} W_{AD} \quad (21)$$

sendo  $F_{AD}$  a força de aderência [kgf],  $\mu_{R-T}$  o coeficiente de aderência entre roda e trilho [adimensional],  $W_{AD}$  o peso aderente da locomotiva [tf] e  $K_1$  o coeficiente de conversão de unidades 1000 [kgf/tf].

O peso aderente do veículo é identificado como o peso total sobre os eixos motrizes. Logo, supondo que o veículo possua sua massa igualmente distribuída sobre os eixos:

$$W_{AD} = \frac{W}{N} N' \quad (22)$$

onde  $N$  é o número total de eixos e  $N'$  é o número de eixos motrizes.

Por sua vez, o coeficiente de aderência é um fator influenciável por diversos elementos, dificultando sua definição matemática com exatidão e, por isso, sugere-se que seja definido experimentalmente. No entanto, Pires (2013, p. 63 - 65) aponta uma equação

matemática que apresenta satisfatória representação do comportamento desse coeficiente de acordo com a velocidade de operação:

$$\mu_{R-T} = \frac{7,5}{v + 44} + 0,161 \quad (23)$$

sendo  $\mu_{R-T}$  o coeficiente de aderência entre roda e trilho (adimensional) e  $v$  a velocidade [km/h].

Posto isto, de maneira a evitar a patinagem das rodas, estabelece-se como condição que o módulo da força trativa não deve superar o módulo da força de aderência (PIRES, 2013, p. 57 - 59) e, assim, permite-se condicionar a velocidade de operação a um limite pré-estabelecido para cada condição:

$$|F_{AD}| \geq |F_T| \quad (24)$$

tal que  $F_{AD}$  é a força de aderência [kgf] e  $F_T$  é a força de tração [kgf].

### 2.3 ACELERAÇÃO

Brina (1982, p. 90 - 92) introduz que o conceito da aceleração na definição do movimento representa a força necessária para aplicar ao veículo, de maneira que o mesmo adquira velocidade e saia do repouso ou altere sua velocidade de atuação. Para isso, pode-se abordar a sua definição por meio do conceito de energia cinética. De acordo com Hibbeler (2005, p. 358 - 359), a energia cinética de um corpo pode ser definida como:

$$E_c = \frac{1}{2} m \left( \frac{v}{3,6} \right)^2 \quad (25)$$

em que  $E_c$  é a energia cinética [J],  $m$  é a massa do corpo [kg] e  $v$  é a sua velocidade [km/h].

Ao analisar o veículo ferroviário, deve-se considerar que há um armazenamento adicional de energia cinética devido a inércia rotacional de peças girantes (PIRES, 2013, p. 17 - 19). Logo, a energia cinética total do sistema é:

$$E_c = \frac{1}{2} (1 + k) m \left( \frac{v}{3,6} \right)^2 \quad (26)$$

dado que  $W$  é o peso do veículo [tf] e, segundo Pires (2013, p. 19), estima-se que para locomotivas  $k$  varia entre 1,15 e 1,25.

Devido a isso, pode-se escrever a massa equivalente do sistema, que considera a existência de peças girantes (estimando o valor médio de  $k$  para locomotivas):

$$m' = m k = 1,20 m \quad (27)$$

sendo  $m'$  a massa equivalente [kg],  $m$  a massa do veículo [kg] e  $k$  o fator de massas girantes.

De maneira análoga, é possível escrever o peso equivalente como:

$$W' = 1,20 W \quad (28)$$

em que  $W'$  é o peso do veículo que considera as massas girantes [tf].

Com isso, admitindo um movimento uniformemente acelerado, obtém-se que:

$$\gamma_A = \frac{F}{g W} = \frac{m' a}{g W} = \frac{1000 W' a}{g W} = D a \quad (29)$$

onde  $\gamma_A$  é a aceleração parametrizada [kgf/tf],  $F$  é a força [N],  $g$  é a aceleração gravitacional [ $m/s^2$ ],  $a$  é a aceleração do veículo [ $m/s^2$ ] e  $D$  é a grandeza que inclui a conversão de unidades, o fator de massas girantes e a aceleração gravitacional [ $kgf.s^2/tf.m$ ].

A fim de expor a aceleração como uma função da velocidade, é possível designar que a mesma corresponde à aceleração instantânea do veículo. De acordo com Nussenzveig (2013), a aceleração instantânea é definida como:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (30)$$

em que  $\vec{a}(t)$  é o vetor aceleração variável com o tempo [ $m/s^2$ ] e  $d\vec{v}/dt$  é a derivada do vetor velocidade em função do tempo [ $m/s^2$ ].

Por se tratar de um movimento unidimensional, pode-se considerar as variáveis aceleração e velocidade como escalares e substituir a definição na Equação 29:

$$\gamma_A = D \frac{dv}{dt} \quad (31)$$

onde  $dv/dt$  é a derivada da velocidade escalar em função do tempo [ $m/s^2$ ] e as demais variáveis foram definidas anteriormente.

A Equação 31 representa a aceleração do veículo em qualquer instante. No entanto, para situações de operação em regime permanente (sem representar alterações do ponto de aceleração) é possível representar a aceleração como uma função da velocidade e da distância percorrida por meio da Equação de Torricelli (HIBBELER, 2005, p. 5):

$$a = \frac{v^2}{K_6 d} \quad (32)$$

tal que  $a$  é a aceleração do veículo [ $\text{m/s}^2$ ],  $v$  é a velocidade ao final de um trajeto [ $\text{km/h}$ ], assumindo velocidade inicial nula,  $d$  é a distância percorrida [ $\text{km}$ ] e  $K_6$  é a constante de conversão de unidades  $25920 [(\text{m}^2 \cdot \text{h})/(\text{km}^2 \cdot \text{s})]$ .

### 3 MODELAGEM DA DINÂMICA FERROVIÁRIA E METROVIÁRIA

Roditi (2005) define a dinâmica como o “Ramo da mecânica que investiga as mudanças no movimento de corpos ou partículas provocadas pela ação de forças. No limite de baixas velocidades, em que são válidas as leis de movimento de Newton, temos a dinâmica clássica;” (p.65). Posto isso, a Segunda Lei de Newton é a base de muitos estudos dinâmicos, dado que relaciona o movimento acelerado às forças agentes.

#### 3.1 DINÂMICA DE VEÍCULO FERROVIÁRIO COMO UM CORPO RÍGIDO

Para desenvolver a dinâmica do movimento, conceitualmente é possível afirmar que o momento linear (ou quantidade de movimento) de uma partícula é o produto de sua massa por sua velocidade (NUSSENZVEIG, 2013):

$$\vec{q} = m \vec{v} \quad (33)$$

onde  $\vec{q}$  corresponde ao vetor momento linear [kg.m/s],  $m$  é a massa da partícula [kg] e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade [m/s].

Assumindo que a massa é invariável com o tempo, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad (34)$$

tal que,  $d\vec{q}/dt$  é a derivada primeira do vetor quantidade de movimento em relação ao tempo [N],  $d\vec{v}/dt$  é a derivada primeira do vetor velocidade em relação ao tempo [m/s<sup>2</sup>] e  $\vec{a}$  é a aceleração da partícula [m/s<sup>2</sup>].

Além disso, pode-se reconhecer que a força é a taxa de variação temporal do momento linear:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (35)$$

em que  $d\vec{q}/dt$  é a derivada primeira do vetor quantidade de movimento em relação ao tempo [N] e  $\vec{F}$  representa a força resultante [N].

Dessa forma, tem-se a conhecida formulação da Segunda Lei de Newton, que afirma que a soma de todas as forças externas agindo sobre uma partícula é igual ao produto da sua massa pela aceleração (HIBBELER, 2005, p. 81 - 82):

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (36)$$

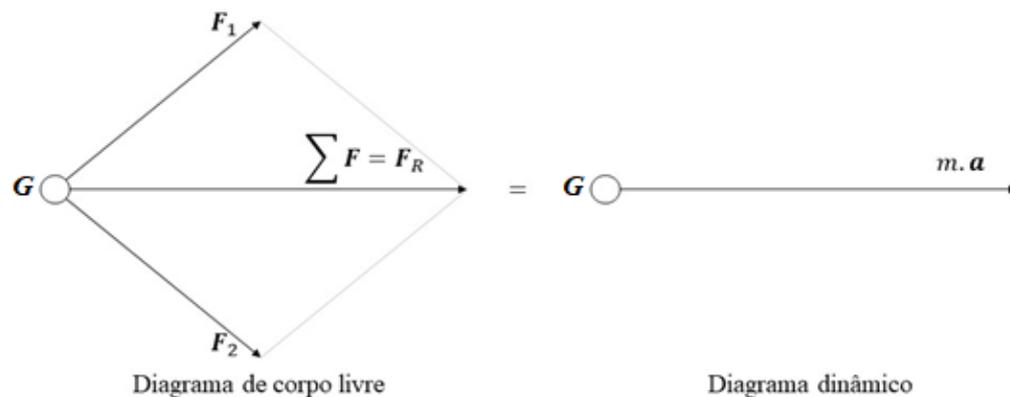
Considerando o corpo rígido um sólido admitido indeformável – definição empregada onde deslocamentos relativos podem ser ditos desprezíveis, dos pontos de vista físico e matemático (PESCE, 2009) – é possível estender o conceito da Segunda Lei de Newton aos corpos rígidos. Segundo Hibbeler (2005), a força resultante agindo em um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração de seu centro de massa<sup>1</sup>:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G \quad (37)$$

onde  $\vec{F}$  corresponde ao vetor força [N],  $m$  é a massa do corpo [kg] e  $\vec{a}_G$  é o vetor aceleração do centro de massa [m/s<sup>2</sup>].

Para modelar matematicamente o movimento longitudinal de um veículo ferroviário, Pires (2013, p. 16) afirma que é possível aplicar a Segunda Lei de Newton, considerando o veículo ferroviário um corpo rígido, como uma aproximação. A Figura 13 exemplifica vetorialmente a igualdade da lei de Newton em questão. O ponto  $G$  representa um ponto material ou o centro de massa de um corpo rígido, em que são aplicadas as forças hipotéticas  $F_1$  e  $F_2$ . A força resultante  $F_R$  respeita o princípio de superposição de forças e é descrita conforme as Equações 21 e 22.

Figura 13 – Diagrama de forças representando a Segunda Lei de Newton.



Fonte: Autoria própria (2021).

Avaliando o movimento longitudinal ferroviário (reconhecidos pela coordenada  $x$  na Figura 14), nota-se que as forças responsáveis pela locomoção do veículo são unidirecionais,

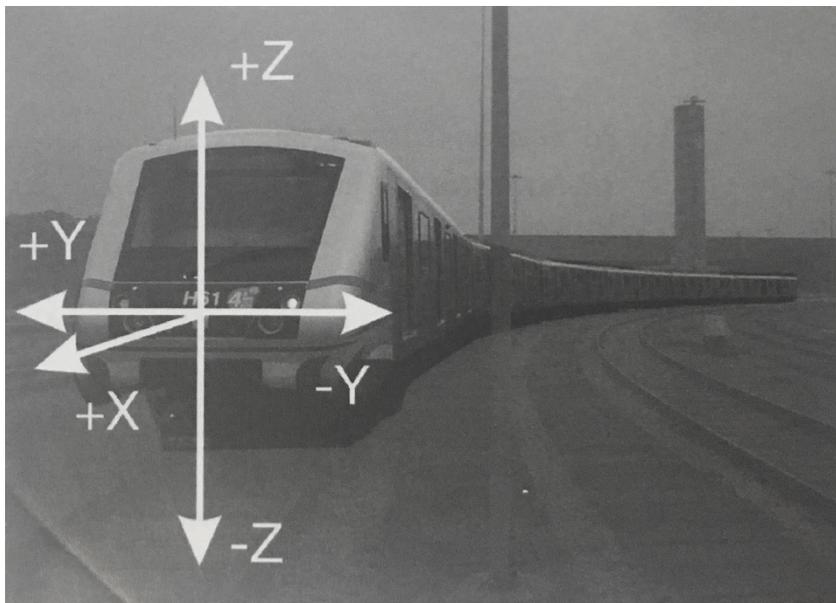
<sup>1</sup> Centro de massa é o “Ponto cuja localização depende da geometria de um corpo ou de um sistema de partículas e que se comporta como se toda a massa inercial do corpo nele estivesse concentrada, de modo que, quando há forças externas atuando sobre o corpo, a resultante é aplicada sobre este ponto [...]” (RODITI, 2005, p. 39).

ou seja, o ângulo entre quaisquer forças envolvidas será sempre 0 ou  $\pi$  radiano. Dessa maneira, é plausível assumir as forças e a aceleração como grandezas escalares na Segunda Lei de Newton, simplificando o movimento do trem ao longo da via como um movimento de translação em um plano (PIRES, 2013, p. 15 - 17). Reescrevendo a Equação 37:

$$\sum F = m a_G \quad (38)$$

em que  $F$  é o módulo da força [N],  $m$  é a massa do veículo [kg] e  $a_G$  é o módulo da aceleração do centro de massa [ $m/s^2$ ].

Figura 14 - Direções do movimento.



Fonte: Pires (2013, p. 14).

Unindo os conceitos teóricos desenvolvidos na seção 2 à Equação 38, para um veículo sob a ação de força de tração e de forças resistivas:

$$F_T - \sum F_R = k \cdot m \cdot a \quad (39)$$

em que  $F_T$  é a força de tração [N],  $F_R$  é a força resistiva [N],  $m$  é a massa [kg],  $k$  é o fator de massas girantes [adimensional] e  $a$  é a aceleração [ $m/s^2$ ].

A Equação 39 tem sua construção baseada no estudo de um único veículo ferroviário ou metroviário (seja locomotiva, carro ou vagão), considerado um corpo rígido e sem avaliar o acoplamento entre mais veículos. Neste caso, é o desenvolvimento de todas as forças envolvidas no movimento de cada veículo que propicia a geração da equação de movimento para cada caso.

### 3.2 PARAMETRIZAÇÃO DA DINÂMICA LONGITUDINAL

Mantendo o padrão da operação ferroviária, para representar a Equação 39 conforme a parametrização  $\gamma$  para uma locomotiva:

$$E_T - \sum \gamma_R = \gamma_A \quad (40)$$

onde  $E_T$  é o esforço trator [kgf/TF],  $\gamma_R$  corresponde às resistências ao movimento [kgf/TF] e  $\gamma_A$  é a aceleração [kgf/TF].

Abrindo o somatório na Equação 40 para as resistências abordadas na Seção 2, tem-se:

$$E_T - (\gamma_{R,m} + \gamma_{R,rol} + \gamma_{R,ar} \pm \gamma_{R,I} + \gamma_{R,C} + \gamma_{R,P}) = \gamma_A \quad (41)$$

E então, substituindo as resistências ao movimento (Equações 5, 8, 12, 15, 16 e 17):

$$\frac{K_5 P_{tração} \eta_{loco}}{v W} - \left[ N K_1 \mu_m \left( \frac{W - p}{W} \right) \frac{r_m}{R} + K_1 \sqrt{\frac{2\delta}{R}} + \frac{K_2 S}{W} v^2 \pm K_3 i\% + 0,2 + \frac{100}{r_c} \right. \\ \left. + (B_t + b + 3,8) + K_4 3,5 \right] = D \frac{dv}{dt} \quad (42)$$

De maneira a reduzir a Equação 42, pode-se reescrever algumas equações chave como mostra o Quadro 1:

Quadro 1 - Simplificação de equações.

Força relacionada:	Simplificação:	Equacionamento em função da velocidade:
Esforço trator ( $E_T$ )	$A = \frac{K_5 P_{tração} \eta_{loco}}{W}$	$E_T = \frac{A}{v}$
Resistência nos mancais ( $\gamma_{R,m}$ )	$B_1 = N K_1 \mu_m \left( \frac{W - p}{W} \right) \frac{r_m}{R}$	$\gamma_{R,m} = B_1$
Resistência de rolamento ( $\gamma_{R,rol}$ )	$B_2 = K_1 \sqrt{\frac{2\delta}{R}}$	$\gamma_{R,rol} = B_2$
Resistência do ar ( $\gamma_{R,ar}$ )	$C = \frac{K_2 S}{W}$	$\gamma_{R,ar} = C v^2$
Resistência em rampa ( $\gamma_{R,I}$ )	$B_3 = K_3 i\%$	$\gamma_{R,I} = B_3$
Resistência em curva ( $\gamma_{R,C}$ )	$B_4 = 0,2 + \frac{100}{r_C} + (B_t + b + 3,8)$	$\gamma_{R,C} = B_4$
Resistência na partida ( $\gamma_{R,P}$ )	$B_5 = K_4 3,5$	$\gamma_{R,P} = B_5$
Resistências ao movimento ( $\gamma_R$ )	$B = B_1 + B_2 \pm B_3 + B_4 + B_5$	$\sum \gamma_R = B$
Aceleração ( $\gamma_A$ )	-	$\gamma_A = D \frac{dv}{dt}$

Fonte: Autoria própria (2021).

E assim, a Equação 42, numa forma simplificada se torna:

$$\frac{A}{v} - B - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (43)$$

sendo  $v$  a velocidade [km/h],  $A$  a constante do esforço trator [(W.km.s.kgf)/(hp.m.h.N)],  $B$  a constante que representa as resistências ao movimento invariáveis com a velocidade [kgf/tf],  $C$  a constante que representa a resistência do ar [(kg.h<sup>2</sup>.m)/(tf.km<sup>2</sup>.s<sup>2</sup>)] e  $D$  a constante da aceleração [(kgf.s<sup>2</sup>)/(tf.m)], que varia com a derivada da velocidade no tempo.

### 3.3 CENÁRIOS CONSIDERANDO VELOCIDADE CONSTANTE

Com a finalidade de analisar a Equação 41, pode-se supor diferentes cenários de aplicação da equação de movimento, conforme o Quadro 2, a fim de verificar as componentes

atuantes em diferentes condições de trajeto. Cada um dos cenários em velocidade constante é abordado nos itens a seguir e, em todos os casos, um polinômio de grau três é obtido para cada equação de movimento.

Quadro 2 - Cenários de aplicação da equação de movimento em velocidade constante.

Nº	Regime	Velocidade	Rampa
01.	Em tangente (linha reta)	Constante	Sem rampa
02.	Em tangente (linha reta)	Constante	Com rampa ascendente
03.	Em tangente (linha reta)	Constante	Com rampa descendente
04.	Em curva	Constante	Sem rampa
05.	Em curva	Constante	Com rampa ascendente
06.	Em curva	Constante	Com rampa descendente

Fonte: Autoria própria (2021).

1. Locomotiva em tangente, com velocidade constante e sem rampa: em trajetos com estas características, a locomotiva experimenta a atuação das forças de tração e das resistências normais. Para um movimento a velocidade constante, a equação de movimento é resumida a:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2) - C v^2 = 0 \quad (44)$$

ou, reescrevendo obtém-se:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (45)$$

2. Locomotiva em tangente, com velocidade constante e em rampa ascendente: o veículo nessas condições sofre a ação das resistências normais, da resistência em rampa e do esforço trator. Novamente, o termo referente a aceleração se torna nulo, pois o movimento não é acelerado. E a equação do movimento é:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_3) - C v^2 = 0 \quad (46)$$

que pode ser escrita como:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2 + B_3)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (47)$$

3. Locomotiva em tangente, com velocidade constante e em rampa descendente: semelhante à condição anterior, o veículo se encontra sob a ação das mesmas forças. No entanto, a resistência em rampa atua a favor do movimento. Sendo assim, a equação de movimento é:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 - B_3) - C v^2 = 0 \quad (48)$$

sendo equivalente a:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2 - B_3)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (49)$$

4. Locomotiva em curva, com velocidade constante e sem rampa: além das resistências normais, conta-se com a influência da resistência de curvatura e do esforço trator. Como o movimento não é acelerado, o lado direito da equação do movimento permanece nulo, de maneira que:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_4) - C v^2 = 0 \quad (50)$$

e a equação de movimento pode ser reescrita como:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2 + B_4)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (51)$$

5. Locomotiva em curva, com velocidade constante e em rampa ascendente: veículo perante efeito das resistências normais, resistência em rampa e resistência em curva, além do esforço trator, conforme a equação:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - C v^2 = 0 \quad (52)$$

que reformulada, torna-se:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (53)$$

6. Locomotiva em curva, com velocidade constante e em rampa descendente: assim como na condição anterior, as resistências normais, de rampa e de curvatura estão presentes. Entretanto, a atuação da resistência em rampa possui efeito a favor do movimento. A equação de movimento se torna:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 - B_3 + B_4) - C v^2 = 0 \quad (54)$$

e também pode ser representada por:

$$v^3 + \frac{(B_1 + B_2 - B_3 + B_4)}{C} v - \frac{A}{C} = 0 \quad (55)$$

### 3.4 CENÁRIOS CONSIDERANDO VELOCIDADE VARIÁVEL

Para complementar o estudo, o Quadro 3 e os itens a seguir abordam cenários considerando a velocidade de operação como variável, a fim de verificar as componentes atuantes em diferentes condições de trajeto durante o movimento acelerado e, em todos os casos, uma equação diferencial de primeira ordem é obtida para cada equação de movimento.

Quadro 3 - Cenários de aplicação da equação de movimento com velocidade variável.

Nº	Regime	Velocidade	Rampa
07.	Em tangente (linha reta)	Variável	Sem rampa
08.	Em tangente (linha reta)	Variável	Com rampa ascendente
09.	Em tangente (linha reta)	Variável	Com rampa descendente
10.	Em curva	Variável	Sem rampa
11.	Em curva	Variável	Com rampa ascendente
12.	Em curva	Variável	Com rampa descendente

Fonte: Autoria própria (2021).

7. Locomotiva em tangente, com velocidade variável e sem rampa: supondo agora condições de trajeto com movimento acelerado, sob ação de resistências normais e esforço trator, tem-se a equação de movimento:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (56)$$

ou, reescrevendo obtém-se:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D} v^2 - \frac{A}{D v} + \frac{(B_1 + B_2)}{D} = 0 \quad (57)$$

8. Locomotiva em tangente, com velocidade variável e em rampa ascendente: para essas condições de trajeto, o veículo é influenciado pelas resistências normais e pela resistência em rampa, além do esforço trator e da aceleração. A equação de movimento é:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_3) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (58)$$

que pode ser escrita como:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D} v^2 - \frac{A}{D v} + \frac{(B_1 + B_2 + B_3)}{D} = 0 \quad (59)$$

9. Locomotiva em tangente, com velocidade variável e em rampa descendente: de maneira similar à condição anterior, a equação de movimento se diferencia pelo sentido oposto da resistência em rampa, pois nesse caso, a componente tangencial da força peso atua a favor do movimento, conforme mostra a equação:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 - B_3) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (60)$$

sendo equivalente a:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D} v^2 - \frac{A}{D v} + \frac{(B_1 + B_2 - B_3)}{D} = 0 \quad (61)$$

10. Locomotiva em curva, com velocidade variável e sem rampa: em situações de trajeto com essas características, tem-se a atuação do esforço trator, das resistências normais, resistência em curva e aceleração. Sendo assim, a equação de movimento pode ser escrita como:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_4) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (62)$$

e reescrita de maneira que:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D} v^2 - \frac{A}{D v} + \frac{(B_1 + B_2 + B_4)}{D} = 0 \quad (63)$$

11. Locomotiva em curva, com velocidade variável e em rampa ascendente: em trajetos com essas condições, todas as resistências descritas na seção 4 são atuantes, além do esforço trator e da aceleração. Então, a equação de movimento corresponde a:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (64)$$

que reformulada, torna-se:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D} v^2 - \frac{A}{D v} + \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)}{D} = 0 \quad (65)$$

12. Locomotiva em curva, com velocidade variável e em rampa descendente: analogamente à situação anterior, as mesmas forças atuam sobre o veículo, porém, com alteração no sentido da resistência em rampa. Pode-se escrever a equação como:

$$\frac{A}{v} - (B_1 + B_2 - B_3 + B_4) - C v^2 = D \frac{dv}{dt} \quad (66)$$

que também pode ser representada por:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{D}v^2 - \frac{A}{Dv} + \frac{(B_1 + B_2 - B_3 + B_4)}{D} = 0 \quad (67)$$

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio de pesquisa bibliográfica e documental, tem-se como foco o desenvolvimento de conceitos teóricos da dinâmica longitudinal ferroviária e metroviária, com o viés de pesquisa explicativa, para analisar as forças que influenciam o movimento de corpos rígidos. Com isso, é possível avaliar os estudos científicos já desenvolvidos sobre a temática, permitindo formar uma análise crítica e conhecer os obstáculos (acoplamento entre vários corpos rígidos) que dificultam os métodos de modelagem matemática para os sistemas reais, isto é, sistemas de vários corpos rígidos (composição ferroviária).

Utilizando o conceito de modelagem matemática é possível efetuar uma análise dinâmica do movimento longitudinal de um veículo ferroviário. Esse estudo é importante para compreender e modelar a trajetória de uma locomotiva ou até de um trem. Para isso, é necessário descrever as forças que atuam sobre o veículo: o esforço de tração e as resistências ao movimento. O esforço trator é dado pela potência da locomotiva, enquanto as resistências ao movimento são divididas entre resistências normais e ocasionais. A primeira diz respeito a forças que são presentes a todo instante da movimentação do veículo; enquanto a segunda corresponde a forças que se manifestam dependendo do traçado da via.

A modelagem matemática do movimento longitudinal tem como fundamentação científica a Segunda Lei de Newton, relacionando o movimento às forças que o causam. Unindo os conceitos teóricos a respeito do esforço trator e das resistências ao movimento e admitindo específicas condições de contorno, produz-se uma equação geral do movimento longitudinal para uma locomotiva, com base na mecânica clássica, que descreve o deslocamento e tem como variável a velocidade. A equação construída é do tipo diferencial, pois deve representar os regimes permanente e transiente de atuação, porém pode ser simplificada para diferentes aplicações.

Em estudos futuros, recomenda-se solucionar as equações cúbicas para os cenários de velocidade constante, assim como as equações diferenciais de primeira ordem obtidas para os cenários de velocidade variável, com o intuito de promover a simulação numérica do movimento de um corpo rígido. Adicionalmente, pode-se evoluir a modelagem matemática efetuando o acoplamento do sistema dinâmico para dois corpos rígidos ou até mais, realizando o equacionamento conforme sugerido por Cole (2006, p. 242) – cabe ressaltar que o autor não resolve as equações e apresenta-as de maneira simplificada. Além disso, explorar as condições de contorno (acoplamento de veículos, sistema de freio, entre outros) é importante para

aproximar futuras simulações numéricas do sistema real. O estudo das forças que influenciam o movimento é de grande relevância para contribuir com a definição de métodos eficientes e representativos de simulação, que por sua vez atuam nos aprimoramentos da operação ferroviária e de critérios de segurança e de conforto.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO*, 24., 2001, Caxambu. **Anais [...]** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <http://24reuniao.anped.org.br/tp1.htm#gt19>. Acesso em 01 nov. 2020.
- BRACCIALI, A. Railway wheelsets: history, research and developments. **International Journal of Railway Technology**, Firenze, v. 5, n. 1, p. 23-52, 2016. Disponível em: <https://www.ctresources.info/ijrt/paper.html?id=98>. Acesso em: 28 abr. 2021.
- BRINA, H. L. **Estradas de Ferro 2**. Rio de Janeiro: LTC, 1982.
- \_\_\_\_\_. **Estradas de Ferro 1**. 2. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1988.
- BORBA, J. L. Dinâmica Ferroviária. **Mecânica de Locomotivas**, Belo Horizonte, Instituto de Educação Continuada, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, v. 1, nov. 2009.
- COLE, C. Longitudinal train dynamics. *In: IWNICKI, S. Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. Boca Raton: CRC Press, 2006. p. 239-277.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, volume 1: Mecânica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para Engenharia**. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica, 1: Mecânica**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013.
- PERIÓDICOS CAPES. Disponível em: <https://www.periodicos.capes.gov.br/>. Acesso em 01 jul. 2021.
- PESCE, C. P. **Dinâmica dos Corpos Rígidos**. 2009. Monografia - Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- PIRES, C. L.; NABETA, S. I.; CARDOSO, J. R. Simulação de composição ferroviária acionada por motores de indução e inversores de tensão. **Revista Controle & Automação**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 1-12, jan./mar. 2005.
- PIRES, C. L. **Engenharia Elétrica Ferroviária e Metroviária: Do Trólebus ao Trem de Alta Velocidade**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- RODITI, I. **Dicionário Houaiss de Física**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2005.

ROSA, P. M. C. F. A roda ferroviária. **Paulo Mauricio**. São Paulo, 2015. Disponível em: <https://paulomauricioferrovia.com.br/a-roda-ferroviaria-1/>. Acesso em 04 jul. 2021.

SCIENTIFIC Electronic Library Online. Disponível em: <https://scielo.org/>. Acesso em: 01 jul. 2021.

SCOPUS. Disponível em: <https://www.scopus.com/home.uri>. Acesso em: 01 jul. 2021.

SOOMRO, Z. A. Step response and estimation of lateral and yaw motion disturbance of rail wheel set. **Journal of Engineering and Technology**, Ambala, v. 5, n. 1, 2015. Disponível em: <https://go.gale.com/ps/i.do?id=GALE%7CA399680121&sid=googleScholar&v=2.1&it=r&linkaccess=abs&issn=09768580&p=AONE&sw=w&userGroupName=anon%7Ec0df0185>. Acesso em: 01 nov. 2020.

WANG, J.; RAKHA, H. A. Longitudinal train dynamics model for a rail transit simulation system. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, Blacksburg, v. 86, p. 111-123, jan. 2018. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X1730284X?via%3Dihub>. Acesso em 01 jul. 2021.

WU, Q.; SPIRYAGIN, M.; COLE, C. Longitudinal train dynamics: an overview. **Vehicle System Dynamics**, Rockhampton, v. 54, n. 12, p. 1688-1714, sep. 2016. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00423114.2016.1228988>. Acesso em 01 jul. 2021.

YI, S. Traction calculation. *In*: \_\_\_\_\_. **Principles of Railway Location and Design**. Londres: Academic Press, 2018. p. 73-157.