BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
V SCHM
V Seminário Cearense de História da Matemática
11 e 12 de abril de 2022
FORTALEZA - CEARÁ - BRASIL

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i26.8043

O INÍCIO DOS ESTUDOS GEOMÉTRICOS DE LAZARE CARNOT

THE BEGINNING OF LAZARE CARNOT'S GEOMETRIC STUDIES

Francisco Djnnathan da Silva Gonçalves[1]; Iran Abreu Mendes[2]

RESUMO

O estudo elucidado aqui, representa um fragmento de uma pesquisa que culminou no relatório de tese de doutoramento, que tinha por objetivo de analisar os fundamentos e os métodos estabelecidos por Lazare Carnot (1753-1823) em seus escritos em torno da geometria, no período entre 1800 e 1806. Na ocasião, tomamos como referência e suporte investigativo quatro publicações desse autor, priorizando as epistêmicas, a análise de conteúdo para esboçar os contributos de um ensino pautado no diálogo entre história da geometria conceitos geométricos e tecnologias da informação e comunicação. Assim, esse excerto configura-se pelo objetivo de apresentar o primeiro escrito de Lazare Carnot sobre geometria, além de mencionar aspectos relacionados a busca para a composição do enredo de pesquisa, possibilitada pelas referências utilizadas por tal personagem. Como aporte teórico fazemos o uso dos Saberes a ensinar e Saberes para ensinar, preconizadas como uma reinterpretação e a pesquisa documental direcionada à análise histórico-epistemológica. Dessa forma, as contribuições dos escritos, seja nos aspectos relativos à parte histórica, seja pelos desdobramentos advindos para seu uso, especialmente da primeira publicação, dos conceitos geométricos no ensino de matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Lazare Carnot; Saberes a ensinar; Saberes para ensinar; História e Epistemologia da Matemática.

ABSTRACT

The study elucidates here represents a fragment of a research that culminated in the doctoral thesis report, with the objective of analyzing the foundations and methods established by Lazare Carnot (1753-1823) in his writings on geometry, in the period between 1800 and 1806. On that occasion, we took four publications by this author as a reference and investigative support, prioritizing the epistemic, the content analysis to outline the contributions of a teaching based on the dialogue between the history of geometry, geometric concepts and information and communication technologies. Thus, this excerpt is configured by the objective of presenting Lazare Carnot's first writing on geometry, in addition to mentioning aspects related to the search for the composition of the research plot, made possible by the references used by such character. As a theoretical contribution, we make use of Knowledge to teach and Knowledge to teach, recommended as a reinterpretation and documentary research aimed at historical-epistemological analysis. In this

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente do Departamento de Matemática no Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), São Paulo do Potengi/RN, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Potengi, São Paulo do Potengi - RN, 59460-000. Email: djnnathan@yahoo.com.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1257-5173.
[2] Doutor em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular Livre (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Trav. Padre Eutíquio, 2564, Edifício Porto de Gênova,apto. 2001, bairro Batista Campos, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66033-728..E-mail: iamendes1@gmail.com.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7910-1602.

way, the contributions of the writings, whether in the aspects related to the historical part, or for the developments arising from their use, especially from the first publication, of geometric concepts in the teaching of mathematics in Basic Education.
Keywords: Lazare Carnot; knowledge for teaching; Knowledge to teach; History and Epistemology of Mathematics.

Introdução

Quando direcionamos a nossa atenção para a pesquisa, embarcamos em um ambiente que nos permite imaginarmos o uso de vários recursos, desde os mais simples cujos passos são pré-estabelecidos, até os mais complexos que nos levam a situações desconhecidas. O simples, não precisa de um detalhamento específico para o entendimento de todas as ações, visto que o pesquisador já conhece as informações que possam ser úteis para a concretização do objetivo. Já o mais complexo, instiga no início da trajetória o reconhecimento de um caminho, além da possibilidade de regresso ou avanço, caso julguemos necessário. Esse percurso desconhecido e animador constitui no que denominamos como investigações históricas, por contemplar ações que esmiuçam as principais características e nos direcionam para os possíveis contributos que o objeto investigado. E a configuração, de fato, permeada pelas escolhas estabelecidas, expõe a importância, o cuidado com as fontes de pesquisa e os encaminhamentos para a utilização na Educação Básica.

É importante esclarecer que a investigação histórica em matemática não contempla, necessariamente, desdobramentos do objeto de estudo para o ensino. Isso porque cada pesquisador direciona o seu olhar para um determinado caminho e aquilo que deve ser exposto como ideia central de sua pesquisa. Assim, quando fizemos nossas buscas, seja nos documentos impressos, seja nas plataformas digitais, tivemos a oportunidade de filtrar as principais informações e reconhecer os pontos que fossem úteis ao entendimento das características de Lazare Carnot (1753-1823) sobre geometria.

Para efeito, quando enviou uma correspondência a Charles Bossut (1730-1814), cujo texto que apresentaremos a seguir, contemplou os conceitos de geometria, direcionado ao desejo de Carnot em fazer parte do Curso de Matemática, observando que o escrito não tinha relação com o que havia sido exposto acerca das máquinas em geral, destinado ao uso na guerra como lugar de defesa. É sabido que a discussão inserida na carta a Bossut, a qual era compreendida como novidade, à época, na pesquisa em geometria, levava em consideração o papel da trigonometria em construções correlativas, a partir de uma figura primitiva.

O uso de fontes originais advindas da investigação histórica, sobretudo aquelas centradas em inquietações acerca das construções geométricas e da organização inserida, particularmente na correspondência de Carnot endereçada a Bossut, iniciamos as nossas considerações analíticas de pesquisa. O debate se direcionou aos pressupostos metodológicos assumidos pelo autor para que o examinador pudesse compreender suas confirmações matemáticas. Assim, levando como base os argumentos trigonométricos para a apresentação de uma geométrica analítica e sintética, nos moldes do que era desenvolvido nos estudos do início do século XIX. Isto é, tal argumentação, mesmo que não esboçasse elementos de difícil abstração, possibilitava indicações diferentes ao uso dos conceitos relacionados às construções geométricas, visualizado no decurso da carta.

Para situar os investimentos da nossa pesquisa e o alcance do objetivo, a partir dos documentos, utilizamos a consulta de páginas de outros escritos desse autor, bem como as referências, os índices, folha de rosto, entre outros, que oportunizaram a composição do cenário de debate acerca da geometria nesse primeiro escrito de 1800. Dessa forma, a seguir, fizemos uma descrição analítica desse objeto de estudo, pautados nas considerações concernentes aos *saberes a ensinar e os saberes para ensinar*, Hofstetter; Schneuwly (2017), com a apresentação dos primeiros encaminhamentos, relativos aos conteúdos e conceitos matemáticos evidenciados pelos estudos de Carnot (1800).

A correspondência de Carnot a Bossut

A carta intitulada *Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut, contenant quelques vues nouvelles sur la trigonometrie* (1800), aborda elementos geométricos via aspectos trigonométricos, de modo a sintetizar os principais conhecimentos descritos no material e elucidar as relações existentes entre os saberes *a* e *para* ensinar. Para tanto, fizemos um instrumento de análise, pautado na pesquisa documental, com considerações apoiadas nos estudos de Godoy (1995) e Cellard (2008) e as ponderações propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). Assim, a carta tem como objeto particular – os problemas e as resoluções em torno dos triângulos. Destaca-se que a constituição das relações entre os ângulos e os segmentos de um triângulo, para a exposição dos aspectos das trigonometrias plana, retilínea e esférica, por meio de doze teoremas explicitados e demonstrados no decurso da carta.

O modo como a explicação esmiuçada na carta, remete-nos aos encaminhamentos que atualmente caracterizam os textos para uma aula nos moldes da Educação à Distância (EaD), talvez por apresentar uma linguagem clara, objetiva e sucinta, mas com detalhes que possibilitam a compreensão dos significados relativos aos conteúdos propostos. Isto é, os fundamentos do pensamento geométrico, com a figura primitiva (triângulo), com a independência das quantidades angulares. Caso contrário, dados dois deles, o terceiro poderia ser determinado, o que resultaria em absurdo, uma vez que qualquer triângulo torna necessário a apresentação de três, dos seis elementos que o compõe.

Para corroborar com o entendimento do escrito, expomos abaixo um quadrilátero, com a explicação posicional dos segmentos que estão relacionados à construção desse objeto geométrico, que serve como fundamento para outras figuras, como pode ser visualizado na imagem 1, quadrilátero formado pelos pontos BCDF (destacado em cor preta),

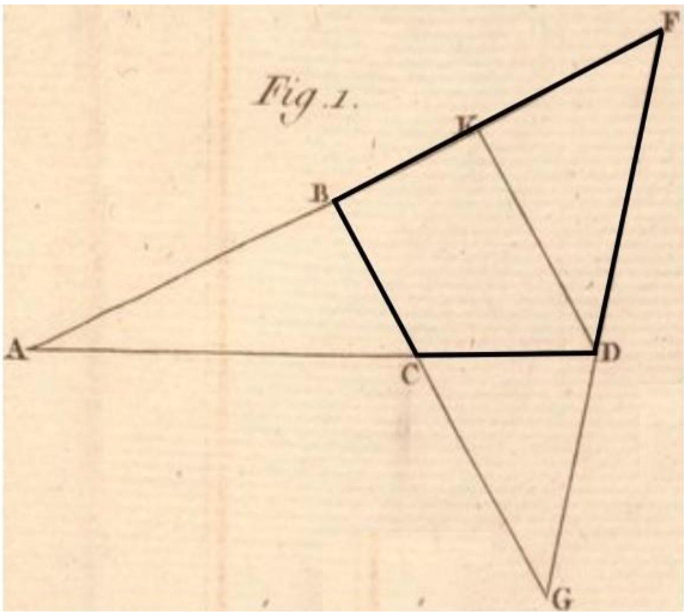
> [...] concevons tous ses côtés indéfiniment prolongés; ils se couperont réciproquement, et il en résultera visiblement une figure dans laquelle il y aura douze quantités linéaires à considérer; savoir, les quatre côtés BC, CD, DF, FB, du quadrilatere [sic], et les huit segments formés deux à deux sur chacun de ces côtés; savoir, BG et CG pour le côté FD; et enfin AB et AF pour le côté BF. Or de ces douze quantités il est facile de voir que cinq étant connur [sic] indépendantes les unes des autres, les sept autrés [sic] seront déterminées. Donc il existe entre les côtés du quadrilatere [sic] et leurs segments respectifs sept rapports nécessaires, c'est-à-dire sept équations au moyen desquelles, cinq de ces quantités étant connues, on peut trouver toutes les autres: mais de ces sept équations il y en a déja [sic] quatre qui résultent évidemment de la construction même; ces quatre équations expriment que chacun des côtés du quadrilatere [sic] proposé est égal à la différence de ses segments: ce sont $BF = AF - AB, BC = BG - CG, CD = AD - AC, DF = GF - GD$ (CARNOT, 1800, p. 433)[3].

Isto é, a configuração da descrição nos remete a imagem 1, com o destaque inserido em segmentos de cor preta, conforme afirmamos anteriormente.

---

[3] [...] projetar todos os seus lados indefinidamente estendidos; eles se cruzarão reciprocamente e resultará, visivelmente em uma figura na qual haverá doze quantidades lineares a serem consideradas; isto é, os quatro lados BC, CD, DF, FB do quadrilátero e os oito segmentos formados dois a dois em cada um desses lados; a saber, BG e CG para o lado FD; e finalmente AB e AF para o lado BF. Agora, dessas doze quantidades é fácil ver que cinco são conhecidas, independentes uma da outra, as outras sete serão determinadas. Portanto, existem, entre os lados do quadrilátero e seus respectivos segmentos, sete relações necessárias, ou seja, sete equações por meio das quais, sendo conhecidas cinco dessas quantidades, podemos encontrar todas as outras: mas dessas sete equações já existem quatro que obviamente resultam da própria construção; essas quatro equações expressam que cada lado do quadrilátero proposto é igual à diferença de seus segmentos: são BF = AF-AB, BC = BG-CG, CD = AD-AC, DF = GF-GD (CARNOT, 1800, p.433, tradução livre).

Imagem 1 – Quadrilátero e os segmentos posicionais.



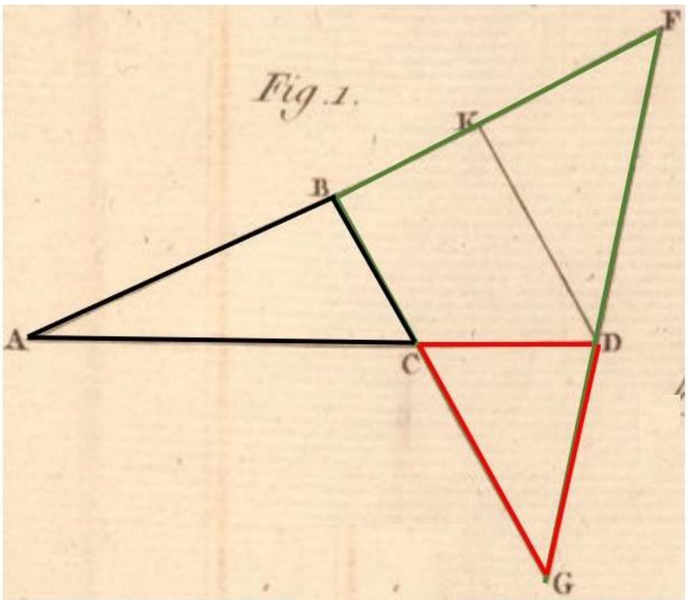
Fonte: Gonçalves (2021, p. 53).

Evidenciamos a importância quanto as construções em torno da figura primitiva BCDF, quando inserimos outros pontos e, consequentemente, outros segmentos de reta para colaborar na determinação dos valores correspondentes à figura inicial, com propriedades geométricas para tal situação. É sabido que se considerássemos a imagem 1, como uma reescrita e se fosse apresentada de forma sequenciada, esclaresseríamos mais a sua dinâmica de construção. Isto é, a linguagem apresentada possibilitou a visualização do passo a passo, mesmo que o desenho geométrico fique limitado apenas ao resultado final da figura proposta.

Acrescenta-se que emergiram outras equações, com cálculos de senos dos ângulos da figura dada, que se constituiu no primeiro método[4]. De fato, ao observarmos os triângulos ABC, BFG e CDG (cf. Imagem 2, realçados em cores cada um deles) que nos fornecem as proporções $\frac{AB}{AC} = \frac{sin.C}{sin.B}$, $\frac{FG}{BF} = \frac{sin.B}{sin.G}$ e $\frac{CD}{GD} = \frac{sin.G}{sin.C}$, respectivamente.

[4] Carnot (1800) apresentou em seu escrito, dois métodos para a relação existente no quadrilátero, tendo por base as estruturas trigonométricas.

Imagem 2 – Triângulos formados pelo primeiro método.



Fonte: Gonçalves (2021, p.54).

Para compreendermos as equações que são fornecidas por meio dessas proporções, a seguir apresentamos a reorganização de suas escritas, com o produto dos extremos sendo igual ao produto dos meios. Devemos lembrar que a explicação dada deixou a primeira proporção indicada anteriormente para servir de comparação com a reorganização das outras duas, além do resultado em função dos senos dos ângulos B e C, respectivamente, isto é:

$$\frac{FG.\sin.G}{BF} = \sin.B \quad ; \quad \frac{GD.\sin.G}{CD} = \sin.C \quad ; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{\sin.C}{\sin.B} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{GD.\sin.G}{CD}}{\frac{FG.\sin.G}{BF}}$$

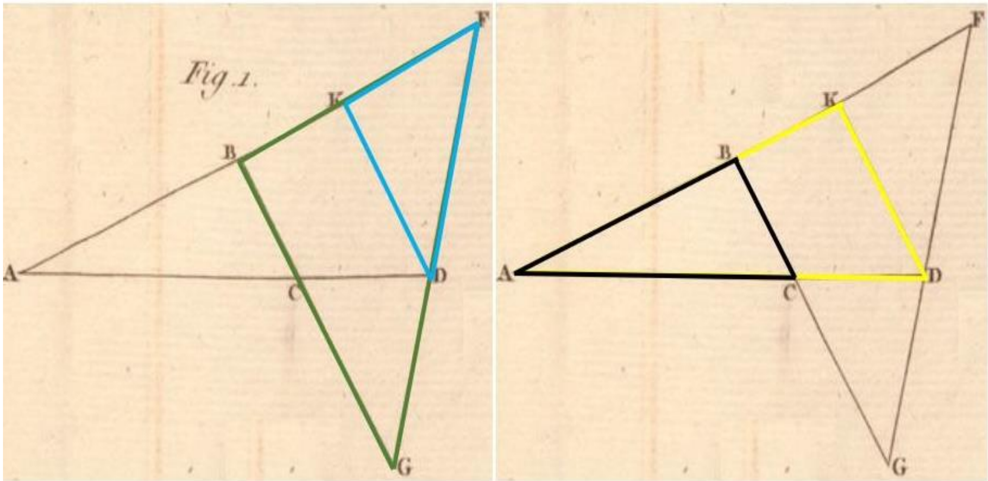
$$\Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{GD.\sin.G}{CD}.\frac{BF}{FG.\sin.G} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{GD.BF}{CD.FG} \quad \Leftrightarrow \quad AB.FG.CD = AC.BF.GD$$

Assim, podemos obter outras três equações, da mesma maneira que a anterior, a saber: $BC\,.AF\,.GD = CG\,.AB\,.FD$, $DF\,.GB\,.CA = GF\,.CB\,.DA$, $AF\,.CD\,.BG = BF\,.AD\,.CG$.

E por comprovar que essas quatro equações existem, logo entre as grandezas lineares da imagem 2, há uma relação que implica necessariamente ao escolhermos uma, dentre as quatro, e ao multiplicarmos os três primeiros entre eles, o produto será o último. Assim, essas quatro equações são reduzidas a três, que representam as equações procuradas, procedimento orientado pelo primeiro método.

Quanto ao segundo método, o autor considerou outros quatro triângulos semelhantes na imagem 3, FKD e FBG (verde e azul), além dos ABC e AKD (preto e amarelo), com a confirmação da existência dos segmentos paralelos, DK e GB.

Imagem 3 – Triângulos formados pelo segundo método.



Fonte: Gonçalves (2021, p.55).

Desse modo, a partir dessas semelhanças, pode-se apresentar as seguintes proporções, respectivamente: $\frac{FD}{KD} = \frac{FG}{BG}$; $\frac{KD}{AD} = \frac{BC}{AC}$. Assim, ao isolar o segmento KD em cada uma das proporções e em seguida ao multiplicar tais expressões obteremos:

$$\frac{FD.BG}{FG} = KD\ ;\ KD = \frac{BC.AD}{AC};\ \frac{FD.BG}{FG} = \frac{BC.AD}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad FD.AC.BG = AD.FG.BC$$

Ainda, a apresentação das demais equações encontradas pelo primeiro método. Além dessa confirmação, Carnot (1800) direcionou tais equações para formar um teorema que consiste em prolongar os lados de qualquer [quadrilátero] $BCDF$, de modo a exibir um triângulo ABC cujos lados prolongados e cortados por FG (transversal comum), possibilitam a visualização do quarto lado do quadrilátero. Em outras palavras, o Teorema I é enunciado da seguinte maneira:

> Les trois côtés d'un triangle quelconque (ABC) étant prolongés indéfiniment, si l'on mene [sic] une transversale indéfinie (FG) qui les coupe tous trois (aux points F, D, G), il résultera de cette construction sur chacun des côtés du triangle deux segments: (savoir, pour le côté AB, les segments AF, BF; pour le côté AC, les segments AD, CD; et pour le côté BC, les segments BG, CG). Or de ces six segments le produit formé de trois d'entre eux comme fracteurs est égal au produit formé des trois autres, en prenant ces facteurs de maniere [sic] qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle, ou un même point de la transversale (c'est-à-dire que l'on a AF.CD.BG = BF.AD.CG; où l'on voit qu'aucune des lettres A, B, C, D, F, G, qui forment les angles du triangle et les intersections des côtés avec la transversale n'entre deux fois dans le même produit) (CARNOT, 1800, p. 434)[5].

[5] Os três lados de qualquer triângulo (ABC) sendo estendidos indefinidamente, se um liderar um [segmento]

Isso implica que ao resolver o problema relativo a esse quadrilátero, pode-se determinar por analogia, para outros polígonos de um número maior de lados, cuja ideia seja apresentar as relações existentes entre as grandezas lineares que os compõem, sem a necessidade das grandezas angulares. Sequencialmente, no Teorema II há um retorno aos elementos que formam os polígonos com mais de cinco lados, percebendo a relação com o segmento transversal apresentado para tal situação.

Na continuidade, na próxima seção, apresentamos informações acerca do Teorema III, relacionado a composição e reformulação de triângulos.

O Teorema III de Lazare Carnot (1800)

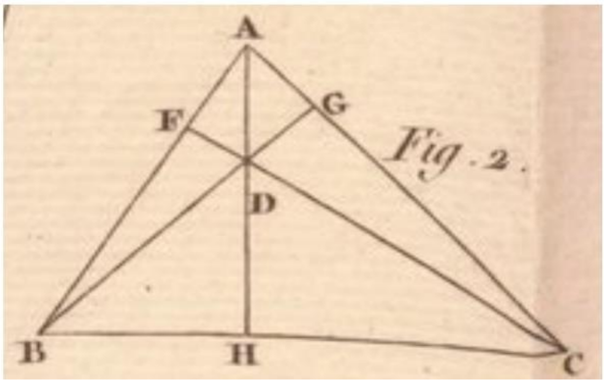
Ainda em sua carta, Carnot (1800) apresentou o Teorema III, com ideias acerca das principais relações de um plano com um triângulo qualquer, em especial aqueles que foram considerados (ABC) nas imagens 4 e 5. Assim,

> Si dans le plan d'un triangle quelconque (ABC) (Fig. 2 et 3), on prend à volonté, soit sur l'aire de ce triangle, soit en dehors, un point (D), et qu'on mene [sic] de ce point à chacun des angles du triangle une droite prolongée, s'il est nécessaire, jusqu'à la rencontre du côté opposé, il résultera de cette construction six segments formés sur les côtés du triangle; deux pour chacun (savoir AF et BF pour le côté AB; AG et CG pour le côté AC; BH et CH pour le côté BC). Cela posé, de ces six segments le produit formé par trois d'entre eux comme facteurs est égal au produit formé des trois autres, en les prenant de maniere [sic] que dans chacun de ces produits il n'y ait pas deux facteurs qui aient pour extrémités un point commun, c'est-à-dire qu'on aura AF.BH.CG = BF.CH.AG (CARNOT, 1800, p. 437)[6].

transversal indefinido (FG) que corta todos os três (nos pontos F, D, G), resultará dessa construção em cada um dos lados do triângulo, dois segmentos: (ou seja, para o lado AB, AF, BF; para o lado AC, AD, CD; e para o lado BC, - BG, CG). Ora, desses seis segmentos, o produto formado por três deles como fraturadores é igual ao produto formado pelos outros três, considerando esses fatores para que não haja dois no mesmo produto que tenham o mesmo ângulo do triângulo nas extremidades, ou o mesmo ponto do transversal (ou seja, temos $AF.CD.BG = BF.AD.CG$; em que vemos que nenhuma das letras A, B, C, D , F, G, que formam os ângulos do triângulo e as interseções dos lados com o transversal não entram duas vezes no mesmo produto) (CARNOT, 1800, p. 434, tradução livre).

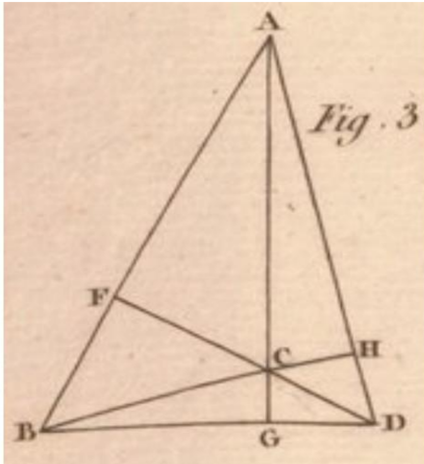
6 [...] tomamos à vontade, na área desse triângulo, ou fora, um ponto (D), e conduzimos desse ponto para cada um dos ângulos do triângulo, uma linha reta estendida, se necessário, até a reunião do lado oposto, essa construção resultará de seis segmentos formados nas laterais do triângulo; dois para cada (veja AF e BF para o lado AB; AG e CG para o lado AC; BH e CH para o lado BC). Dito isto, desses seis segmentos, o produto formado por três deles como fatores é igual ao produzido formado pelos outros três, levando-os de modo que em cada um desses produtos não haja dois fatores que terminam em um ponto comum, ou seja, teremos $AF.BH.CG = BF.CH.AG$ (CARNOT, 1800, p. 437, tradução livre).

Imagem 4 – Triângulo ABC com ponto D interno.



Fonte: Goncalves (2021, p. 57).

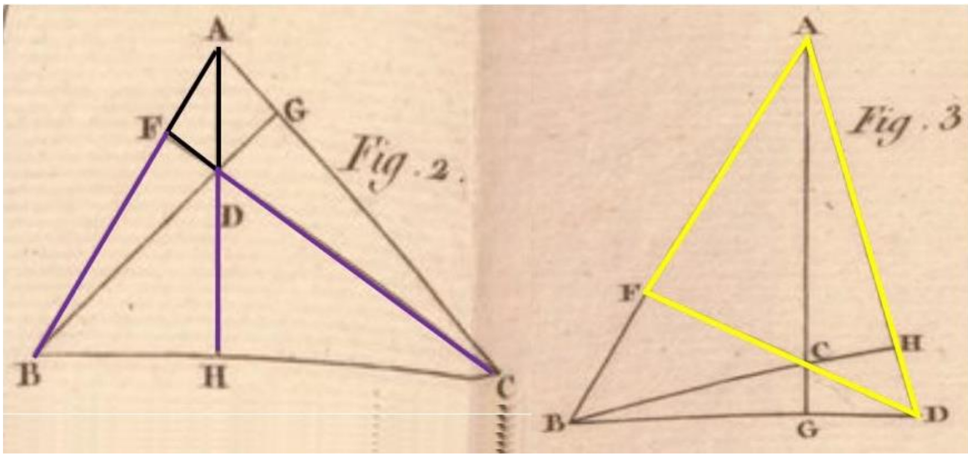
Imagem 5 – Triângulo ABC com ponto D externo.



Fonte: Gonçalves (2021, p.57).

Com essas afirmações, e com o apoio no Teorema I, o triângulo AFD, cujos três lados são intersectados (prolongamento em roxo) pela linha BC, como podemos ver na imagem 6 (lado direito, triângulo com destaque em preto), fornece a equação: $AB.DH.FC = BF.AH.DC$.

Imagem 6 – Triângulo ABC com ponto D (interno e externo, respectivamente).



Fonte: Gonçalves (2021, p.58).

E consequentemente, de forma análoga, os triângulos FBD, BDH, CDH, CDG, ADG fornecerão, respectivamente:

$$AF.BG.DC = AB.DG.FC; DG.BC.AH = BG.CH.AD; BH.CF.AD = BC.DF.AH;$$
$$AC.FD.BG = AG.CF.BD; CG.AH.BD = AC.DH.BG.$$

Para finalizar a prova e garantir a existência do Teorema III, o autor evidenciou que ao multiplicar essas seis equações entre si e reduzi-las, obtém-se:

$$AF.BH.GC = AM.CH.AG.$$

Dessa forma, torna-se necessário compreender que esse modo de apresentação dos teoremas e as respectivas demonstrações conduzem a um processo de ensino que pode promover a aprendizagem de conceitos matemáticos como, por exemplo, algébricos e geométricos, visto que o direcionamento dado constitui em algo simples e direto. Um dos fatores que permite inferir tal afirmação, relaciona a figura primitiva, como descrita no início da carta, como sendo o triângulo. A partir dessa figura geométrica, se observarmos as descrições feitas nos teoremas citados, será possível identificar que as demonstrações de outros polígonos têm por base a construção e visualização de triângulos, que possuem características conhecidas e servem de comparativo para as demais situações. Em outras palavras, tendo por base a estrutura triangular, a partir da semelhança entre triângulos, podemos equacionar as relações geométricas, além de generalizar as comprovações para quaisquer polígonos, desde que eles possam ser decompostos em formas triangulares.

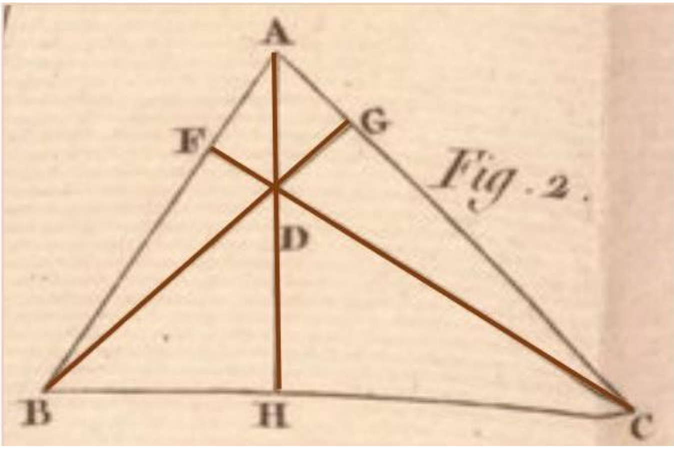
A seguir, expomos o detalhamento das características gerais estabelecidas na carta de Carnot (1800), principalmente quanto a demonstração de seus Teoremas.

Resultados e Discussões

Como mencionado anteriormente, o triângulo se constitui representativamente nos teoremas de Carnot (1800), como um elemento basilar para as confirmações, de modo que ao apresentar o Teorema IV, recorreu a figura 2 da carta, para elucidar os ângulos emergentes do triângulo ABC. De fato, por meio do lado oposto aos ângulos internos de ABC, traçou as perpendiculares AH, BG, CF (realçado na cor marron), como pode ser conferido na imagem 7.

Quanto à conceituação dos segmentos apresentados como perpendiculares, não há uma consideração separada para essa informação. Na realidade, como se pode observar, a apropriação do conceito ocorre por intermédio da compreensão e significado atribuído pelo autor ao longo do seu escrito. Destaca-se, assim, uma organização do pensamento de Carnot, mesmo que seja de forma indireta, de uma abordagem que possibilita um ensino pautado na investigação, sem ser considerado um espaço definido para a exposição do conceito, mas que o estudante possa estabelecer linhas de raciocínios que assegurem o sentido e o significado atribuídos a cada ente matemático. Não obstante, salientamos que os indícios elencados pelo autor configuram em uma explicação sintética, sem perder os detalhes que sejam pertinentes para a apropriação das ideias contidas em seu escrito.

Imagem 7 – Segmentos perpendiculares no triângulo ABC.

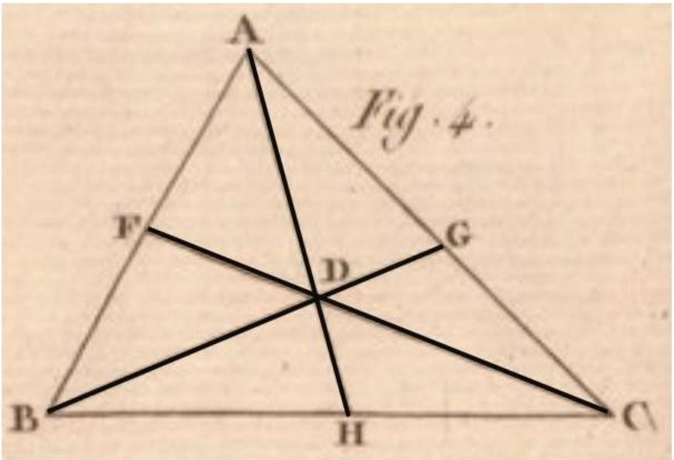


Fonte: Gonçalves (2021, p.59)

Quanto a apresentação do Teorema V que relaciona, a partir dos ângulos internos de um triângulo ABC (imagem 8), dado um segmento de reta de origem no vértice até o ponto médio do segmento oposto, com as seguintes características

> 1º. Ces trois droites AH, BG, CF, se croiseront toutes en un même point D; 2º. La somme des quarrés des distances de ce point aux angles A, B, C, sera le tiers de la somme des quarrés des trois côtés du triangle, c'est-à-dire qu'on aura $\underline{AD}^2 + \underline{BD}^2 + \underline{CD}^2 = \frac{1}{3}(\underline{AB}^2 + \underline{AC}^2 + \underline{BC}^2)$ (CARNOT, 1800, p. 438)[7].

Imagem 8 – Segmentos internos de um triângulo.

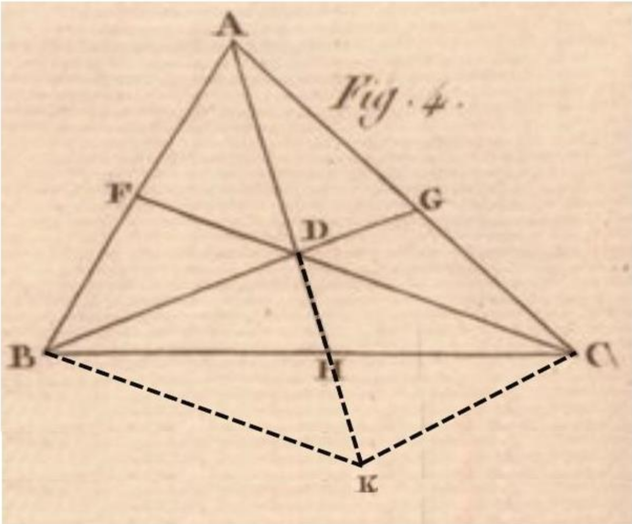


Fonte: Gonçalves (2021, p.62)

[7] 1º. Esses três [segmentos] AH, BG, CF, todos se cruzarão no mesmo ponto D; 2º. a soma dos quadrados das distâncias deste ponto aos ângulos A, B, C, será o terço da soma dos quadrados dos três lados do triângulo, ou seja, teremos AD2+BD2+CD2=13(AB2+AC2+BC2). (CARNOT, 1800, p. 438, tradução livre).

De modo geral, pode-se perceber que o Teorema V apresenta informações acerca da importância do ponto D e sua relação com os segmentos que o determinam. Para tanto, se considerarmos os pontos médios F e G, como descritos na imagem 8, e traçarmos um segmento com origem em F e término em G (segmento FG), possibilitamos a visualização do aspecto paralelo entre FG e a base do triângulo primitivo, denominada de BC. Acrescenta-se a compreensão em torno do quadrilátero apresentado e discutido por Carnot (1800) como elemento antecedente ao Teorema I, que relaciona os segmentos AF com BF, AG com GC, BH com HC e a possibilidade do prolongamento do segmento AH. Isso pode ser observado na imagem 9, a seguir:

Imagem 9 – Prolongamento do segmento AH, de modo que AD = DK.



Fonte: Gonçalves (2021, p.63)

Assim, a partir do quadrilátero ABCK formado na imagem 9, podemos expor as relações que auxiliam a compreensão do ponto D para a estrutura triangular (triângulo primitivo). Constata-se que pares de segmentos CK e BD, BK e CD são paralelos, tendo por base a figura geométrica formada BDCK que constitui em um paralelogramo e tem o ponto H como a intersecção entre suas diagonais. Isto é, AH é uma mediana do triângulo ABC, o que faz de D o ponto de intersecção às três medianas desse triângulo, que corresponde à primeira parte do Teorema V, que consta no escrito de Carnot (1800).

Para a segunda parte do Teorema V, deve-se observar a correspondência existente entre o ponto D e os segmentos AH, BG e CF (medianas do triângulo ABC de lados BC, AC e AB, respectivamente). De fato, ao utilizarmos as informações fornecidas por Carnot

(1800), evidencia-se uma estrutura conhecida atualmente por lei dos cossenos, que ao aplicarmos nos triângulos primitivos ABC e ABH, simultaneamente, confirmaremos a validade da fórmula $\underline{AD}^2 + \underline{BD}^2 + \underline{CD}^2 = \frac{1}{3}(\underline{AB}^2 + \underline{AC}^2 + \underline{BC}^2)$, por meio da simples manipulação algébrica. Nesse contexto, consideramos essencial a relação entre a figura primitiva com os procedimentos trigonométricos, mesmo que se compreenda outro método para a ocorrência da segunda parte. Acrescenta-se que o ponto D, na imagem 8, representado a partir do encontro dos segmentos internos, configura-se em um ponto notável do triângulo ABC, denominado por baricentro[8].

Posteriormente, emergiram as primeiras informações acerca das formulações das tabelas [trigonométricas] com a perspectiva de comparações correlativas, tendo por base a figura geométrica denominada triângulo retângulo. E isso pode ser visualizado pelos encadeamentos das explicações dadas por Carnot (1800), a saber:

> Soit une droite quelconque prise pour terme de comparaison: représentons cette droite par 1, et sur cette même droite comme hypothénuse, construisons des triangles rectangles, en attribuant successivement aux angles aigus toutes les valeurs possibles depuis ou jusqu'à l'angle droit. Formons maintenant un tableau de tous ces triangles (CARNOT, 1800, p. 441-442)[9].

Os procedimentos a serem executados (passo a passo) para a formulação da tabela constitui em informações claras, sem exagero, de modo a permitir sua visualização, mesmo antes de sua efetivação – a construção total da tabela.

Para esclarecer e atribuir uma relação mais efetiva entre as discussões pautadas na geometria e as elaborações correlativas, Carnot (1800) mencionou os aspectos relativos a um problema algébrico com a existência de três dados e três incógnitas. Esclarece que em um triângulo é possível considerar seis elementos, com três informações dadas, torna-se válido a identificação dos outros, de modo a formar equações e as reduzir, obtendo o resultado desejado (apresentação dos outros três elementos procurados). Essa explicação constitui em um primeiro aspecto a ser atribuído à propriedade conhecida do triângulo, descrita pelo autor, que corresponde a "cada um dos lados é igual à soma de cada um dos

[8] Utilizamos a palavra baricentro pela característica que observamos entre os segmentos interno do triângulo ABC (medianas) e o ponto D, mesmo que no escrito de Carnot (1800) esse termo tenha sido mencionado.

[9] Seja qualquer linha reta tomada como termo de comparação e representado por 1, além de considerarmos tal linha reta como hipotenusa, construímos triângulos retângulos e atribuindo sucessivamente aos ângulos agudos todos os valores possíveis de zero ao ângulo reto. Vamos agora formar uma tabela de todos esses triângulos. (CARNOT, 1800, p. 441-442, tradução livre).

outros dois lados, multiplicado pelo cosseno de ângulo que forma com o primeiro" (CARNOT, 1800, p. 443-444, tradução livre).

Como pode ser visualizado, as três equações descritas sinalizam os seis elementos comuns em triângulo, de modo que ao conhecermos três desses valores, facilmente determinaremos os demais, pelas propriedades comuns à álgebra. Vejamos, por exemplo, se soubermos três valores e desejarmos determinar o $Cos\ A$, ou seja,

$$a = b.cos.C + c.cos.B. \text{ (multiplicar por a)}$$
$$b = a.cos.C + c.cos.A. \text{ (multiplicar por b)}$$
$$c = a.cos.B + b.cos.A. \text{ (multiplicar por c)}$$

obtendo-se

$$a^2 = a.b.cos.C + a.c.cos.B. \qquad (1)$$
$$b^2 = a.b.cos.C + b.c.cos.A. \qquad (2)$$
$$c^2 = a.c.cos.B + b.c.cos.A. \qquad (3)$$

em seguida, com as novas equações, deve-se somar a segunda com a terceira equações,

$$b^2 + c^2 = a.b.cos.C + a.c.cos.B + b.c.cos.A + b.c.cos.A \qquad (4)$$

e prosseguir com a subtração da primeira com essa nova equação (4), isto é,

$$a^2 - (b^2 + c^2) = a.b.cos.C - (a.b.cos.C + a.c.cos.B) + a.c.cos.B - (b.c.cos.A + b.c.cos.A)$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = a.b.cos.C - a.b.cos.C - a.c.cos.B + a.c.cos.B - b.c.cos.A - b.c.cos.A$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -b.c.cos.A - b.c.cos.A$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2.b.c.cos.A \Leftrightarrow 2.b.c.cos.A = -a^2 + b^2 + c^2$$

$$cos.A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2.b.c} \qquad (5)$$

Torna-se evidente que se quiséssemos deixar a equação escrita de outra forma, não mudaria seu sentido e nem o significado dos termos associados a tal, como podemos visualizar, a seguir: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos.A$.

Na continuação do escrito, com relação aos senos dos ângulos de um triângulo e a equação firmada anteriormente, Carnot exibiu a troca e os procedimentos para se reduzir mais uma equação. Deve-se ressaltar que aparece a expressão matemática $\sqrt{1 - (sin.A)^2}$, em substituição ao $cos.A$, sem nenhum aparato que confirme sua exequibilidade. Contudo, observamos que a ideia emergiu da identidade fundamental da trigonometria[10], mesmo que o escrito não exista a confirmação desta ponderação. Em substituição na equação (2), obtemos

$$\sqrt{1-(sin.A)^2}=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2.b.c}$$

$$\left(\sqrt{1-(sin.A)^2}\right)^2=\left(\frac{(-a^2+b^2)+c^2}{2.b.c}\right)^2$$

$$1-(sin.A)^2=\frac{(-a^2+b^2)^2+2.(-a^2+b^2).c^2+(c^2)^2}{4.b^2.c^2}$$

$$1-(sin.A)^2=\frac{a^4+2.(-a^2).b^2+b^4-2.a^2.c^2+2.b^2.c^2+c^4}{4.b^2.c^2}$$

$$-(sin.A)^2=\frac{-2.a^2.b^2-2.a^2.c^2+2.b^2.c^2-4.b^2.c^2+a^4+b^4+c^4}{4.b^2.c^2}$$

$$(sin.A)^2=\frac{2.a^2.b^2+2.a^2.c^2+2.b^2.c^2-(a^4+b^4+c^4)}{4.b^2.c^2}$$

$$sin.A=\sqrt{\frac{2.a^2.b^2+2.a^2.c^2+2.b^2.c^2-(a^4+b^4+c^4)}{4.b^2.c^2}}$$

$$sin.A=\frac{1}{2bc}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)} \qquad (6)$$

Observa-se que o procedimento para o ângulo A, pode ser feito para os demais, com apenas a modificação de sua nomenclatura. Para melhor organização, o autor solicitou que abreviássemos o radical e denominássemos de K. Logo,

$$sin.A=\frac{K}{2bc}\ ;\ \ sin.B=\frac{K}{2bc}\ \ ;\ sin.C=\frac{K}{2bc}.$$

Além disso, ao considerarmos, ainda, a relação entre a primeira e a segunda equações relativas aos senos de A e B, por meio da divisão, teremos $\frac{sin.A}{sin.B}=\frac{a}{b}$, que corresponde ao princípio da proporção dos senos dos ângulos com seus lados opostos, ou seja, $\frac{a}{sin.A}=\frac{b}{sin.B}=\frac{c}{sin.C}$. Na sequência, com os auxílios das proposições anteriormente discutidas e considerando A e B como dois ângulos quaisquer, segundo Carnot (1800), obtém-se $sin.(A\ +\ B)\ =\ sin.A.cos.B\ +\ sin.B.cos.A.$

A inserção de elementos trigonométricos por Carnot (1800), caracteriza-se pela simplicidade e objetividade, sem a necessidade de um aparato mais denso e com prerrogativas mais elaboradas. O que se observa, no escrito, constitui em uma forma concisa de elencar e relacionar os aspectos geométricos com a trigonometria, de modo que os conceitos emergem a partir das demonstrações dos teoremas, mobilizados por

[10] $Sin^2.A+Cos^2.A=1 \Leftrightarrow Cos^2.A=1-Sin^2.A \Leftrightarrow Cos.A=1-(Sin.A)^2.$

estruturas similares a investigação matemática em situações problemas. O aparato algébrico permite que a consolidação da ideia conceitual seja assimilada, mesmo que o autor tenha suprimido alguns dos procedimentos para se determinar a lei que comprove o item creditado em cada um dos teoremas (sem perda de sentido e de significado).

Algumas considerações

Com as informações contidas na carta de Carnot (1800), evidenciou uma relação efetiva entre os conceitos geométricos e a trigonometria. Isso porque a organização de suas demonstrações para apresentar as expressões ou fórmulas vincula-se aos aspectos trigonométricos pautados nas construções de triângulos e circunferências. Em outros termos, cada figura proposta no decurso do escrito, estabeleceu uma linha de raciocínio que conduziu a compreensão conceitual de pontos, segmentos, relação entre estes entes, além de confirmar, de forma simples, os objetos investigados e descritos pelo autor. As relações trigonométricas constituem nas bases que sustentam a estrutura do escrito, primordialmente por ser o elemento das confirmações de prova dos entes matemáticos relativos à geometria.

Dessa forma, podemos afirmar que o primeiro escrito de Carnot sobre os elementos geométricos, especificamente relacionado às novas visões de trigonometria da época, sendo estruturado em forma de uma carta direcionada ao Bossut. Neste sentido, o objetivo do autor consistia em apresentar uma possibilidade de encontrar separadamente e sem recorrer às quantidades angulares, às relações existentes entre as quantidades lineares de qualquer figura proposta. Observa-se ainda que as regras da trigonometria, por meio do cálculo dos senos de determinados ângulos de uma dada figura, além de servir como comparação das grandezas lineares. Acrescenta que as equações e as relações que existem entre os ângulos e os lados da figura, depois de combinado essas equações pelas regras comuns da álgebra, com o intuito de eliminar aquelas incógnitas. Para exemplificar, exibiu a figura mais simples (o triângulo), de modo a explicar as considerações pertinentes para que esta sirva de apoio aos estudos a serem desenvolvidos na sequência de sua carta.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (Terceira Versão). Ministério da Educação, Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em 10/02/2021.

CARNOT, Lazare Nicolas Marguerite. **Lettre du citoyen Camot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie**. *In* Bossut. A. C: Cours de Mathematiqués: géométrie et application de l'algébre à la géométrie. Paris, 1800.

CELLARD, André. A análise documental. *In*: POUPART, Jean et al. **A pesquisa qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008 (Coleção Sociologia).

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GONÇALVES, Francisco Djnnathan da Silva. **Uma análise epistemológica dos trabalhos de Lazare Carnot sobre geometria e suas potencialidades para o ensino**. 2015. 221f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Exata e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. *In*. **Saberes em (trans)formação**: tema central da formação de professores. Orgs. HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. 1ª Ed. São Paulo/SP: Editora Livraria da Física, 2017.

Recebido em: 01 / 03 / 2022
Aprovado em: 18 / 03 / 2022