Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Experiencia en torno a la enseñanza de las aplicaciones del cálculo integral en un Instituto de Formación Docente: tratamiento algebraico vs reconstrucción de las nociones fundamentales del análisis

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

José Nicolás Balmaceda y Micaela Alejandra Ferreyra

Supervisión de práctica profesional e informe final: Aníbal Darío Giménez y José Nicolás Gérez Cuevas.

Equipo responsable de MyPE: Aníbal Darío Giménez, Araceli Coirini, José Nicolás Gérez Cuevas y Silvina Smith.

Carrera: Profesorado en Matemática.

Fecha: 22-11-22

Clasificación

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras claves

Técnicas de integración. Contrato didáctico. Coordinación de registros semióticos de representación. Tratamiento del registro algebraico. Nociones geométricas y variacionales.

Resumen

En este trabajo se describe y analiza la implementación de una secuencia didáctica destinada a la enseñanza de las técnicas de integración y al cálculo de áreas y volúmenes en un Instituto Superior de Formación Docente. Tanto en el diseño como en su implementación se abordan algunas problemáticas relativas a la enseñanza del cálculo infinitesimal. En particular, desde la Teoría de Situaciones Didácticas, se estudia la incidencia del contrato didáctico en la resolución de tareas matemáticas por parte de los estudiantes. A lo largo de este informe se pondrán en tensión la manipulación simbólica necesaria para el cálculo de integrales indefinidas al interior de un registro algebraico y la coordinación con el registro gráfico de las funciones para no obturar los sentidos geométricos y variacionales que dieron lugar al desarrollo del análisis matemático.

Keywords

Integration techniques. Didactic contract. Coordination of semiotic registers of representation. Treatment of the algebraic register. Geometric and variational notions.

Abstract

This paper describes and analyzes the implementation of a didactic sequence aimed at teaching integration techniques and calculating areas and volumes in a Higher Institute for Teacher Training. Both in the design and in its implementation, some problems related to the teaching of infinitesimal calculus are addressed. In particular, from the Theory of Didactic Situations, the incidence of the didactic contract in the resolution of mathematical tasks by students is studied. Throughout this report, the symbolic manipulation necessary for the calculation of indefinite integrals within an algebraic register and the coordination with the graphical register of the functions will be put in tension so as not to obstruct the geometric and variational senses that gave rise to the development of the mathematical analysis.

«Si doy la definición de mamífero y a continuación, después de examinar un camello, digo: he ahí un mamífero, no cabe duda de que con ello se ha traído a la luz una nueva verdad, pero es de un valor limitado».

Friedrich Nietzsche.

«Veo las cuestiones de la fundamentación del análisis infinitesimal sin tristeza, enojo o irritación. Lo que hicieron Weierstrass y Cantor fue muy bueno. Así tenía que hacerse. Pero si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra consciencia, eso es otro asunto. Me salta una brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las justificaciones y demostraciones. Se debe ser muy estúpido para no ver esto de inmediato, y muy irresponsable si, habiéndose percatado de ello, uno se acomoda a esta atmósfera lógica artificial olvidándose de esa brutal contradicción».

Nikolái Nikoláyevich Luzin.

«Alumno: «El coche tiene una velocidad de 50 millas por hora, ¿qué quiere decir esto?»

Profesor: «[...] (Según Cauchy, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1} = 50$ **quiere decir que ...) dado ε > 0, existe un δ tal que si** $(t_2 - t_1) < \delta$, **entonces:** $\frac{e_2 - e_1}{t_2 - t_1} - 50 < \varepsilon$ **»**

Diálogo publicado en el American Mathematical Monthly en 1986.

Índice

1. Introducción

En el presente informe exponemos los detalles relativos a la práctica preprofesional llevada a cabo en un Instituto Superior de Formación Docente (en adelante ISFD) de la provincia de Córdoba durante el año 2022. Dicho trabajo se inscribe en el marco del espacio curricular Metodología y Práctica de la Enseñanza del Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba (FaMAF).

1.1 Contexto institucional

El ISFD en el que desarrollamos nuestras prácticas ofrece tanto carreras de formación docente como de formación técnica; se dictan las siguientes carreras:

- Profesorado de Educación Especial con orientación en Discapacidad Intelectual,
- Profesorado de Educación Inicial,
- Profesorado de Educación Primaria,
- Profesorado de Educación Secundaria en Lengua y Literatura,
- Profesorado de Educación Secundaria en Matemática,
- Trayecto pedagógico para graduados no docentes
- Tecnicatura en psicopedagogía.

1.1.1 Infraestructura de la institución

La institución posee dos pisos. A continuación detallaremos cada uno de ellos.

En la planta baja se encuentran los siguientes espacios:

- Aulas.
- Secretaría, la cual se divide en dos secciones: administrativa y área contable.
- Área de bedeles y relaciones institucionales.
- Biblioteca.
- Laboratorio de informática.
- Área de coordinación.
- Baños femeninos y masculinos.
- Salón de eventos, llamado “Teatrino”.
- Sala de espera.

- Puerta de acceso al patio en donde se halla la escalera que conduce al primer piso.

En el primer piso se encuentran los siguientes espacios físicos:

- Aulas
- Área de bedelía
- Sala de profesores
- Depósito de limpieza.
- Baños femeninos y masculinos
- Teatrino

Es apropiado observar que los estudiantes deben trasladarse al laboratorio de informática en caso que, para desarrollar alguna actividad, requieran hacer uso de las computadoras que les permita trabajar con algún software específico (como GeoGebra). Por lo general no es necesario pedir permiso para usar este laboratorio, pues suele estar desocupado.

1.1.2 Descripción del aula en la que trabajamos

El aula en que realizamos nuestras prácticas está ubicada en el primer piso de la institución, cuenta con nueve bancos dobles (las sillas no se encuentran adheridas a las mesas). Además, posee un televisor conectado a una computadora de escritorio que se encuentra junto a la puerta de ingreso al recinto. El docente puede mostrar a través del televisor su pantalla. Asimismo, el televisor fue usado durante el periodo de observaciones por la institución en al menos una ocasión para emitir una transmisión referida a un evento institucional. En el aula hay, además, una pizarra, en la que se puede escribir con fibrón, y un pequeño pizarrón ocupado por algunos carteles.

En la Figura 1 mostramos un esquema del aula descrita en esta sección. En el mismo se señalan los elementos que hemos destacado con el objetivo de favorecer la comprensión del lector.

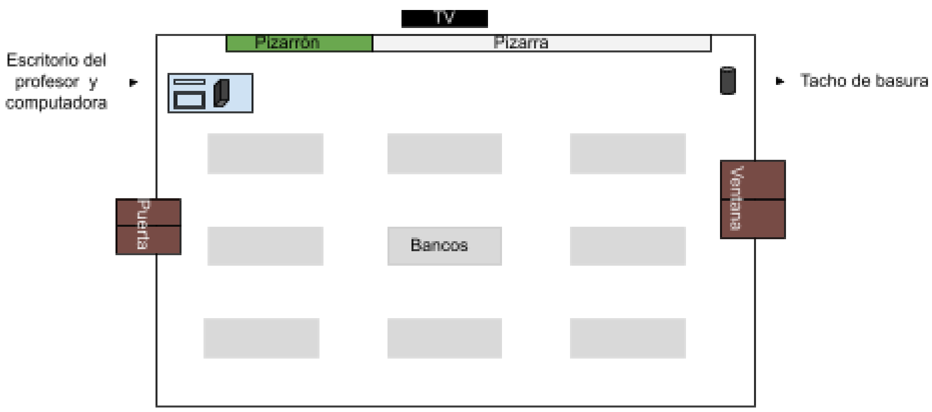


Figura 1: Salón de clases

1.2 Unidad curricular

1.2.1 Aspectos generales

Desarrollamos nuestras prácticas en la unidad curricular Problemáticas del Análisis Matemático II del tercer año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Según el Diseño Curricular para la Provincia de Córdoba (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2010, p. 57), los contenidos de este espacio se organizan siguiendo el formato curricular de asignatura o materia, el régimen de cursado es anual y posee una carga horaria de seis (6) horas cátedra. Sin embargo, en la institución sólo se dan cinco (5) horas cátedra por semana. Durante el primer cuatrimestre, la materia se dictó los días martes de 17:00 a 18:30 (comprendiendo dos módulos), y jueves desde las 18:30 hasta las 20:40 (comprendiendo así tres módulos). En cambio, al comenzar el segundo cuatrimestre y a raíz de una reordenación del personal de la institución, después del receso de invierno las clases se dictaron los días martes y viernes: las clases de los martes conservaron el horario del primer cuatrimestre, mientras que las de los viernes se iniciaban a las 16:20 y finalizaban a las 18:30, comprendiendo tres módulos.

1.2.2 Marco orientador

Como se señala en el Diseño Curricular (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2010), en esta unidad curricular se desarrollan nociones en torno a las herramientas del cálculo integral, partiendo de problemáticas epistemológicamente significativas, sustentadas en aproximaciones intuitivas y modos de comprensión dinámicos, con el fin de asimilar la potencialidad de las mismas para el modelado de fenómenos variacionales, geométricos y numéricos. Mediante esta perspectiva, y al trabajar con el problema de la razón de cambio, se recuperan los sentidos que dieron origen a la disciplina del análisis matemático, pudiendo apreciar así las transformaciones de su formulación a lo largo del tiempo en distintos lenguajes, reconociendo el alcance y limitación de cada uno de ellos. Este tratamiento permite superar una presentación técnica de los contenidos del cálculo integral, superando así también una perspectiva formalista, y favoreciendo la construcción de significados de los objetos matemáticos introducidos en Problemáticas del Análisis Matemático I. Este tipo de abordaje permite la articulación con los espacios curriculares como Modelización Matemática en la Ciencia y Didáctica de la Matemática II.

1.2.3 Evaluación de la unidad curricular

Según la planificación anual del curso, "la evaluación de esta unidad curricular consta de cuatro instancias evaluativas en aula, a las que se suman otras instancias de evaluación formativa".

Cada instancia evaluativa se aprueba con una nota no inferior a 4 (cuatro), que representa una respuesta satisfactoria al 60% de los puntos planteados en cada instancia.

La obtención de la regularidad y la acreditación de esta unidad curricular se rigen por el Régimen Académico Institucional, cuyos requerimientos exponemos en la siguiente tabla (tabla 1). En la misma se contemplan tres posibles condiciones para los estudiantes: regular, promocionable y libre, que a su vez dependen de ciertas condiciones como la asistencia, las calificaciones de las instancias parciales y de las instancias finales. Se detallan, asimismo, cuáles son las formas de acreditar la unidad curricular según la condición del estudiante.

	Regular	Promocionable	Libre
Asistencia	Entre el 50% y el 75%.	Más del 75%.	Menos del 50%.
Instancia Evaluativa Parcial	Aprobar con nota mayor o igual a 4 Se pueden recuperar dos distintas por inasistencia o aplazo.	Aprobar todas las instancias con nota mayor o igual a 7. No haber aplazado ninguna instancia. No haber faltado a ninguna instancia.	Más de dos instancias con nota menor a 4. Más de dos instancias ausentes. Dos instancias aplazadas y alguna ausente.
Instancia Evaluativa Final Integradora ante el profesor durante el período de cursado	Aprobar con nota mayor o igual a 4. En caso de inasistencia o aplazo se deberá recuperar esta instancia para acceder a la regularidad.	Aprobar con nota mayor o igual a 7. Si se aprueba con una nota menor a 7 se queda en condición de estudiante regular.	No es necesario que se presente a esta instancia.
Forma de acreditación de la materia	Examen final ante comisión evaluadora. Se aprueba con nota mayor o igual a 4.	Mediante la Instancia Evaluativa Final Integradora si la misma se aprueba con nota mayor o igual a 7.	Aprobar ante una comisión evaluadora, una instancia escrita y una instancia oral con nota mayor o igual a 4.

Tabla 1: regularidad y acreditación de Problemáticas del Análisis Matemático II

El Régimen Académico Institucional señala que la Instancia Evaluativa Final Integradora deberá estar diferenciada para quienes opten a la promoción y para quienes estén en condición de ser estudiantes regulares. En ambos casos, no obstante, la Instancia Evaluativa Final Integradora deberá tener un carácter integrador, no pudiendo evaluarse en la misma sólo un tema o unidad.

1.3 Modalidad combinada

Tras la experiencia de la Formación Docente Inicial transitada en el contexto de pandemia, la Dirección General de Educación Superior (DGES) plantea en las “Orientaciones para una modalidad combinada – bimodalidad en la formación docente” (Dirección General de Educación Superior, 2022) algunas pautas y criterios para que en las propuestas de formación inicial de los ISFD se combinen las modalidades presenciales y virtuales, lo que se conoce como modalidad combinada o bimodalidad. Entre ellos podemos destacar la configuración de una cursada que incluya encuentros combinados (tanto presenciales como virtuales o remotos), ofrecer instancias de encuentro presencial con asistencia al ISFD en todas las unidades curriculares, vincular la modalidad presencial a la asistencia física en la institución así como a la participación activa del cuerpo de estudiantes en los encuentros sincrónicos virtuales. Cada institución ha de definir criterios comunes relativos al porcentaje de presencialidad y de virtualidad en los distintos formatos curriculares, tales como asignaturas, seminarios, ateneos, tutorías, talleres, entre otros. Asimismo, se sugiere asignar distintas cantidades de tiempo de modalidad presencial o virtual para cada espacio curricular dependiendo del campo de formación al que pertenezca dicho espacio. Se toma como base la siguiente distribución: para el campo de la Formación General un 40% de cursada presencial y un 60% de cursada virtual; 60% de la cursada física y 40% de cursada remota para los espacios del campo de la práctica docente (estos porcentajes no se refieren a las prácticas docentes que se desarrollan en las escuelas asociadas), y para el campo de formación específica un 50% de cursada presencial y otro tanto de cursada con modalidad virtual. Cuando los criterios estén determinados para cada carrera, la institución deberá indicar las exigencias y características de la cursada.

Siguiendo las recomendaciones expuestas en el párrafo anterior, al comienzo de cada cuatrimestre, los coordinadores de carreras del ISFD planifican y distribuyen a docentes y estudiantes un cronograma en el que se indica en qué semanas se trabajará de manera presencial o virtual, según sea el curso y la unidad curricular. Cabe destacar que durante la etapa de planificaciones no contábamos con esta distribución, ya que la institución aún no había emitido la grilla correspondiente al segundo cuatrimestre.

1.4 Aspectos particulares del curso

1.4.1 Asistencia y realidades de los estudiantes

Durante el periodo de observaciones previas a la realización de las prácticas docentes, comprendido entre el 17 y el 25 de mayo, pudimos apreciar que a las clases asistían alrededor de quince estudiantes, siendo veintiséis la cantidad de inscriptos. Esta cantidad no se mantuvo constante, variando entre los doce y dieciocho estudiantes, según fuese el día. El docente había anticipado esta realidad propia del curso, comentando que varios de ellos compaginan su formación docente con otras actividades, tanto académicas como laborales.

Por otra parte, en la segunda semana de observaciones se presentó una medida de fuerza que generó un paro de transporte público para el día martes 24 de mayo. Debido a que se encontraba próxima la primera instancia evaluativa, requiriendo la misma que los estudiantes pudiesen contar con una clase de repaso, el docente pasó la clase del martes 24 al viernes 27 de mayo. En esta clase presenciamos una notoria disminución de la asistencia

Al comienzo de una de las clases observadas, llevada adelante en modalidad remota, obtuvimos el siguiente diálogo[1], que pone de manifiesto que algunos estudiantes cursaban en paralelo materias correspondientes a otros años. En dicha clase se registró un total de diecisiete estudiantes que se sumaron de manera paulatina a la videoconferencia después del horario pautado para el inicio de la misma.

> D: Vamos a esperar un ratito mientras se siguen incorporando. (Inmediatamente a continuación pregunta a los estudiantes presentes en la clase virtual). ¿Tienen algo? ¿Algún evento especial hoy, que se están retrasando?
> Paloma**:** No, yo creo que algunos compañeros están cursando Análisis I que empezó a las 16:20.

Como hemos señalado con anterioridad, entre el primer y segundo cuatrimestre se produjo un cambio en el horario de cursada de la asignatura, lo que afectó de manera sensible la asistencia, ya que en nuestro periodo de prácticas advertimos una media de entre ocho y doce estudiantes por clase.

1.4.2 Recursos

Aula virtual

El aula virtual es un entorno digital brindado por la institución, en el que el docente se comunica de manera remota con los estudiantes, gestionando los materiales de lectura, las tareas que deben realizar y las producciones asociadas a las mismas.

Bibliografía

[1] En lo sucesivo se indicará con la letra D las intervenciones del docente de la cátedra.

En el programa de la unidad curricular se establece que la bibliografía de base para los estudiantes estará constituida por las siguientes:

- Gramaglia, Héctor, Textos de lectura. Apuntes de cátedra
- Stewart, James, Cálculo, Trascendentes Tempranas, Sexta Edición, Thomson Internacional, 2002.
- Herramientas TIC: Plantillas desarrolladas en Geogebra. Graficadores on-line.

Guías

El docente confecciona documentos que contienen tanto tareas prácticas que los estudiantes deben desarrollar como materiales de lectura que abordan algunas nociones teóricas en las que se fundamentan las actividades propuestas. A estos documentos se los denomina “guías”. Los estudiantes acceden a éstas a través del aula virtual.

Pizarra de velcro

Uno de los practicantes es una persona con ceguera. Debido a esto, la FaMAF proveyó de un dispositivo de escritura semejante a una pizarra elaborada con velcro en la que se escribe mediante otro dispositivo, un lápiz de lana, misma que se adhiere a la superficie de la pizarra permitiendo reconocer al tacto la traza dejada por el hilo. Además del lápiz de lana, el practicante empleó tiras de velcro con formas de flecha para representar ejes cartesianos y segmentos de madera para construir algunas figuras geométricas en la pizarra. Dicho dispositivo se colgó mediante agarraderas metálicas a la pizarra del aula.

1.4.3 Actividades en las clases virtuales

Como señalamos antes, las clases podían darse en modalidad presencial o virtual; a su vez, las clases virtuales podían ser sincrónicas (a través de una videoconferencia por la plataforma Google Meet), o asincrónicas (en las que los estudiantes debían enviar algunas actividades seleccionadas e indicadas por el docente a través del aula virtual).

1.4.4 Dinámica de trabajo

En relación con la metodología de trabajo del docente, observamos que las tareas presentadas en las guías constituyeron el hilo conductor de las clases

En la primera clase que observamos (con modalidad virtual), el docente hizo una revisión de las producciones que los estudiantes enviaran durante la semana anterior, y finalizada la misma dio lugar a una discusión en torno a una tarea que había sido presentada en una de las guías previas.

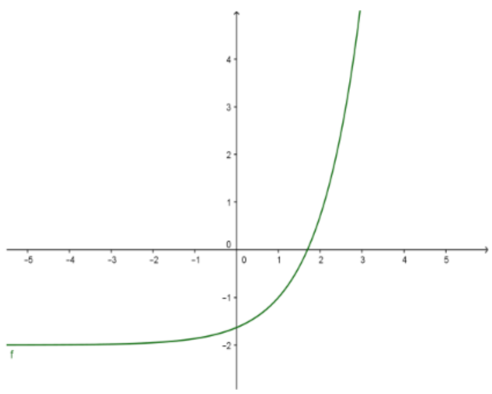
Esta dinámica se sostuvo también durante las siguientes clases observadas, ya con modalidad presencial. Notamos que en estas clases era frecuente que los estudiantes trabajasen en grupos las consignas y que luego se hicieran puestas en común.

El docente gestionó la mayoría de las actividades dando lectura a las consignas de las tareas y comentándolas. En ocasiones relataba la situación descrita y en otras agregaba a la actividad alguna variante.

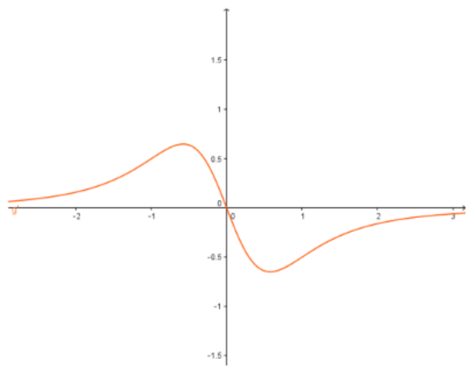
En lo que sigue, presentamos un fragmento de los registros para ejemplificar la metodología descrita en el párrafo anterior. El docente ha dado por finalizada una actividad y pasa a otra, cuyo enunciado precede al registro en cuestión.

Actividad 3 presentada por el docente de la cátedra

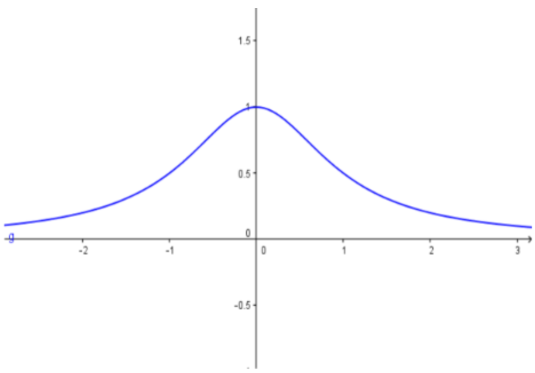
3) Las funciones F1, F2, F3 y F4 tienen como derivadas a las funciones D1, D2, D3 y D4, pero sin respetar el orden. Asocie cada función con su derivada. Justifique de la manera más completa posible.



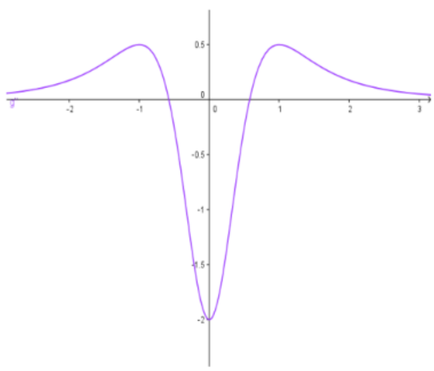
F1



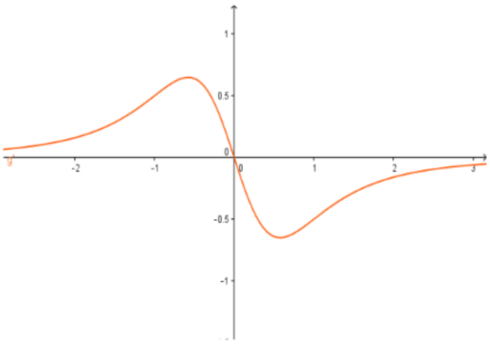
D1



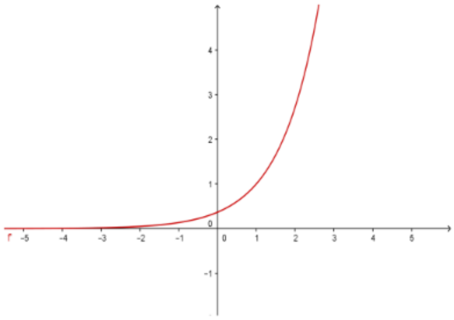
F2



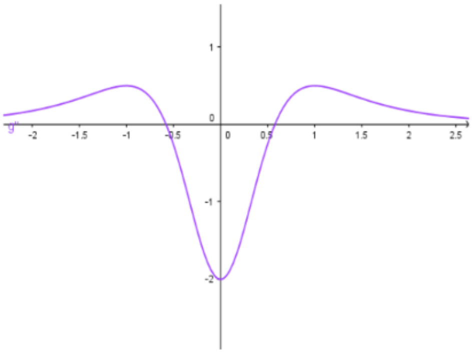
D2



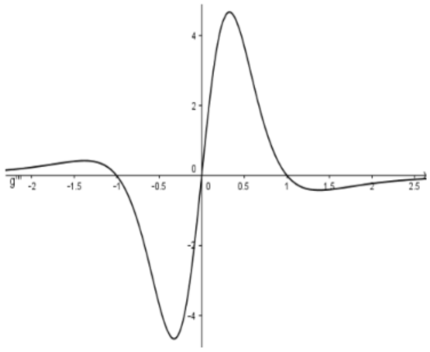
F3



D3



F4



D4

D: Bueno, dejemos esto por hoy. Ustedes ahora en un momento de introspección, de a dos, de a tres, o como estén, asocian en el punto tres funciones con derivadas. (Aquí el docente se refiere a la actividad que presentamos antes; sigue hablando el docente). Hay cuatro funciones a la izquierda y cuatro funciones a la derecha. Las cuatro funciones de la derecha son derivadas de las funciones de la izquierda. Tienen que justificar la asociación con por lo menos tres características. Me tienen que justificar la asociación con por lo menos tres características.
Magdalena: Eso no dice en la copia.
D: (responde jocosamente) Eso lo digo yo, efectivamente no está en la actividad. Por ejemplo, veo que la función entre 1 y 2 es creciente y entonces veo que la derivada asociada es positiva. Veo que la función entre tres y cuatro es cóncava hacia arriba y observo que la derivada es creciente. Veo que hay un máximo y observo … (hace una pausa enfática) lo que corresponde para el máximo. Comenzamos ya.

1.4.5 Relación de los estudiantes entre sí y con el docente

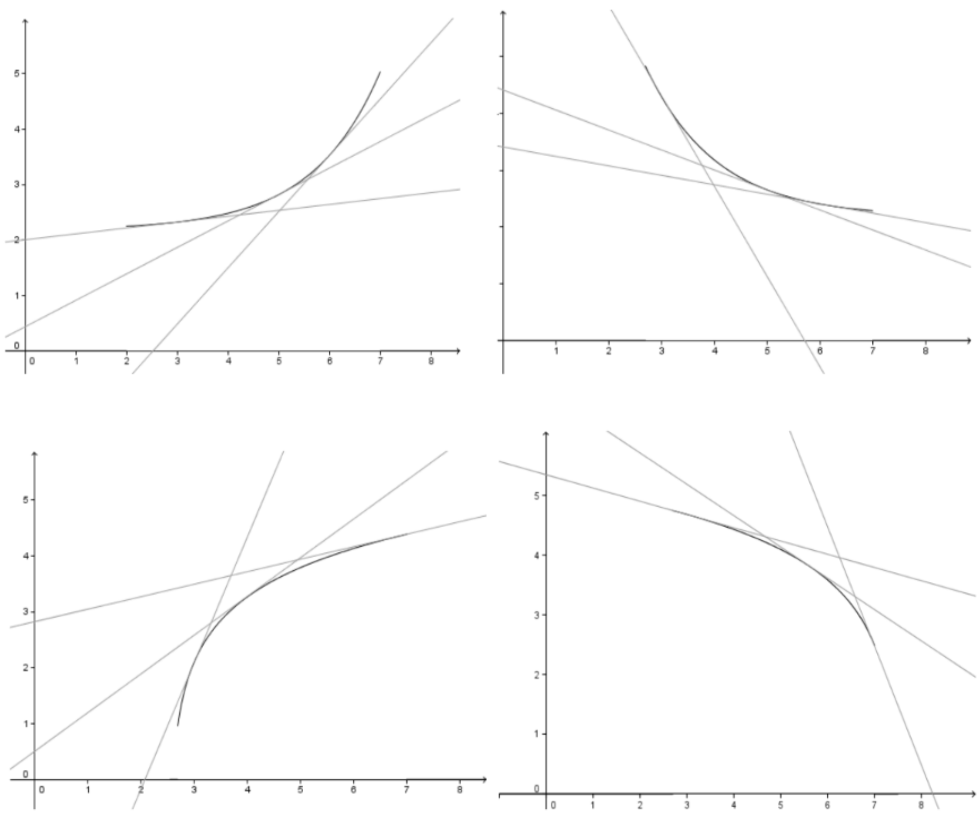
Durante el desarrollo de las actividades el docente charlaba con algunos estudiantes sobre sus propuestas o dificultades. En ciertas oportunidades la discusión quedaba entre el estudiante y el docente, pero en otras ocasiones el docente elevaba un poco la voz para llamar la atención del curso a una puesta en común, tomándose de alguna idea o pregunta que hubiera escuchado. También, y debido a que el aula tenía dimensiones reducidas, fue habitual que este tipo de transiciones entre un diálogo individual a uno grupal se diese por la intervención de algún otro compañero.

En el siguiente fragmento se puede ver cómo el docente gestionaba algunos momentos del desarrollo de la actividad en diálogos colectivos. Están trabajando en torno a la actividad presentada a continuación.

<u>Actividad 2 presentada por el docente de la cátedra</u>

2) En cada caso, analice cuáles de las siguientes propiedades es satisfecha por f ',
la derivada de f, asumiendo que se muestra el gráfico de f.

- f' es positiva
- f' es negativa
- f' es creciente
- f’ es decreciente.



En función de las relaciones establecidas complete

- f es creciente ⇔ f' es ....
- f es decreciente ⇔ f' es ....
- f es cóncava hacia arriba ⇔ f' es .... ⇔ f'' es ....
- f es cóncava hacia abajo ⇔ f' es .... ⇔ f'' es ....
- f tiene un máximo en x ⇔ f' (x) = ... y f ' (x) ....
- f tiene un máximo en x ⇔ f' (x) = ... y f '' (x) ....
- f tiene un mínimo en x ⇔ f' (x) = ... y f ' (x) ....
- f tiene un mínimo en x ⇔ f' (x) = ... y f '' (x) ....
- f tiene un punto de inflexión en x ⇔ f'' (x) = ... y f' ....
- f tiene un punto de inflexión en x ⇔ f''(x) = ... y f'' ....

> D: Vayamos a analizar ahora el crecimiento de la derivada. Esa es la parte un poco más difícil. Miremos el gráfico de la izquierda. Y miren qué sucede cuando vamos tomando valores más grandes de x, qué sucede con las pendientes de la recta tangente.
>
> María Paula: ¿En cuál de los dos?
>
> D: En el de la izquierda (haciendo referencia a las figuras de la actividad).

Después de esto los estudiantes comienzan a discutir entre sí. En un grupo cercano escuchamos cómo una estudiante le dice a otro qué es lo que pide la consigna. Se produce un murmullo de varias conversaciones. En este tiempo el docente ha dialogado con una estudiante sentada en uno de los bancos más cercanos a la pizarra. Pasan algunos minutos y nadie ha respondido la pregunta que dejó el docente. Vuelve a tomar la palabra, haciendo uso de la pizarra.

> D: Quizá conviene que dibujemos sólo dos rectas. Tomemos sólo dos valores. Un valor a y un valor b (véase Figura 2). Recta tangente en a, recta tangente en b. ¿Qué valor es más grande?

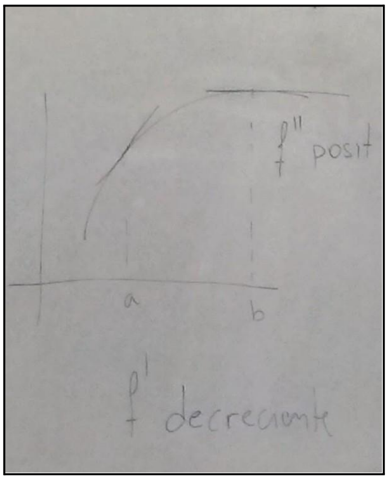


Figura 2: Gráfica realizada por el docente en la pizarra de una función cóncava hacia abajo en la que se destacan las pendientes de las rectas tangentes decreciendo desde el punto a hacia el punto b.

Ante esta pregunta, una estudiante sentada en nuestras cercanías murmuró por lo bajo “En b”.

No obstante, un estudiante dice en voz más alta, dirigiéndose al docente y permitiendo que sus compañeros también escuchen su respuesta: “En a”. Un par más de estudiantes dicen también que en a. El docente se queda con esta respuesta y prosigue.

> D: Entonces cuando crece el valor en x decrece el valor de la derivada. En este dibujo (señala la pizarra). Entonces tenemos que f prima (refiriéndose a f’) es decreciente.

Para finalizar una actividad, el docente daba lugar a una puesta en común a través de algunas preguntas dirigidas a que los estudiantes pudieran decir a sus compañeros a qué conclusiones habían arribado. En esta instancia, el docente exponía, la mayoría de las veces en forma oral, las ideas centrales presentes en la resolución de las actividades, dialogando con algunos estudiantes sobre las dudas que surgieron y las dificultades que presentaron ciertos conceptos.

1.4.6 Relación de los estudiantes con el objeto de estudio

En particular, durante el periodo de observaciones el objeto de estudio era la relación entre el fenómeno variacional y las derivadas de las magnitudes implicadas en el mismo. La principal dificultad que advertimos en los estudiantes la constituyó el pasar entre distintas representaciones de las funciones, en concreto, aquellas actividades en las que, dada una representación variacional, la misma debía asociarse a una representación analítica y viceversa. Esto es, por ejemplo, tomando la descripción de un movimiento rectilíneo, determinar cuáles serían las propiedades de las derivadas primera y segunda de la función que relaciona la posición del cuerpo en función del tiempo de marcha.

Si bien algunas de las tareas propuestas durante las clases tendían a generar una producción que sintetizara algunos de los resultados relativos al objeto de enseñanza, no pudimos constatar que los estudiantes llevasen un registro escrito de dichos resultados. Observamos esto en algunas discusiones sobre las nociones de crecimiento y concavidad de una función asociadas al signo y al crecimiento de su derivada respectivamente. En tales discusiones pudimos apreciar que muchos estudiantes no participaban o bien mostraban ciertas dificultades para expresar sus ideas y preguntas. Notamos también ciertas confusiones entre las características de la función que se quería analizar y las características de sus derivadas. Comprendemos, no obstante, que el objeto de enseñanza en sí mismo comporta un alto grado de complejidad puesto que se pone en juego una gran cantidad de información a lo largo de estas actividades.

En general, pudimos apreciar que los estudiantes constituían un grupo heterogéneo sobre distintas dimensiones. Un ejemplo de esto es el grado de participación durante el desarrollo de la clase. Había algunos cuantos estudiantes que solían proponer ideas y formular preguntas, mientras que varios otros no intervenían en las discusiones grupales o las puestas en común. A pesar de esto, observamos cierto grado de compromiso en el trabajo con las actividades, ya que cuando el docente las planteaba, los estudiantes solían trabajar sobre ellas en grupos de a dos (entre compañeros de un mismo banco). También apreciamos intervenciones de estudiantes que por lo general no participaban demasiado en las que se evidenciaba una elaboración paulatina y provisoria de los conocimientos referentes al objeto de aprendizaje.

Mostraremos una actividad propuesta por el docente y un extracto que representa el intercambio de él con los estudiantes al momento de abordarla.

<u>Actividad 4 propuesta por el docente de la cátedra el 27 de mayo</u>

4) Considere las siguientes propiedades de la función C(t):

(A) Para todo t: $C''(t) > 0$

(B) Para todo t: $C'(t) < 0$

(C) $\left|\frac{C(2) - C(0)}{2}\right| < 1$

Suponiendo que la misma representa la cantidad de líquido (medido en miles de litros, o sea, unidad=1000 litros) que tiene un tanque, que pierde parcialmente su contenido desde t=0 hasta t=2 (horas). ¿A cuáles de las siguientes situaciones corresponde? (puede corresponder a más de una).

Situación 1 El tanque comienza perdiendo poco líquido, y luego con el tiempo aumenta la velocidad de pérdida.
Situación 2 El tanque pierde en todo momento más de 1000 litros por hora.
Situación 3 El tanque comienza perdiendo mucho líquido, y luego con el tiempo disminuye la velocidad de pérdida.
Situación 4 El tanque tiene inicialmente 3000 litros, pierde 1000 litros en la primer hora, y los recupera en la segunda.
Situación 5 El tanque tiene inicialmente 3000 litros, pierde 1000 litros en la primer hora, y 500 la segunda.

Rodrigo: Profe, entonces, de las situaciones de abajo … ¿Se supone que tienen que cumplir las tres? ¿Tienen que cumplir las tres?
D: No, alguna de ellas. Uno tiene que ver … Situación uno. Describe una forma de pérdida, y entonces esa forma de pérdida que describe la situación uno arroja ciertas características analíticas de la función c. Entonces hay que ver si la descripción de la función C satisface las propiedades. Hagamos uno para que se comprenda. Dice: El tanque comienza perdiendo poco líquido, o sea que uno asume que tiene cierta cantidad, y que después, con el tiempo, aumenta la velocidad de pérdida. (Luego repite la descripción). Comienza perdiendo una cierta cantidad. ¡Poco! En principio no está cuantificado, pero lo importante es que después de un tiempo de perder esa cantidad, aumenta la velocidad de pérdida. Bueno, ahora analicemos las propiedades. La primera propiedad dice para todo t, C segunda de t es mayor que cero (en símbolos $C''(t) > 0$). ¿Qué me dice esto?
Rodrigo: (lentamente) Eso nos diría que C prima (C') es creciente
D: (repite lo que dijo el estudiante). Se produce una pausa que es rota por el docente. Bueno, ¿podría la función C de la situación 1 satisfacer la propiedad a?
Tomás: (habla después de una breve pausa y lentamente) … va diciendo … La situación dice que el tanque va perdiendo poco líquido … o sea que si nosotros pensamos gráficamente a c prima … (C') sería como … baja esa velocidad de pérdida … y al tiempo, como aumenta la velocidad de pérdida,

sube.

D: ¡Bien! ¿Qué opina el resto? (Los estudiantes no responden). Vamos a ir anotando. C''(t) > 0. Por supuesto, estamos considerando los t entre cero y dos, donde tiene sentido el fenómeno (anota en el pizarrón). Bueno, ¿alguna otra opción? ¿algún otro análisis? (los estudiantes siguen en silencio mientras el docente propone un gráfico en la pizarra). Bueno, repasemos tu análisis (se lo dice a Tomás). C segunda de t mayor que cero, ¿eso corresponde con qué cosa?

Tomás: Con C prima creciente.

D: ¡Sí! Yo te dije que sí, pero no. ¿Cuál es la situación que tenemos acá? ¿Cómo es C? Si C representa la cantidad del líquido que tiene el tanque, ¿cómo es la función C de la situación uno?

Paloma: La C en función de t tiene valores que van decreciendo.

D: Primero que va decreciendo, ¿eso está?

Paloma: Si decrece tiene pendientes negativas (refiriéndose a las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función estudiada).

D: Si decrece lo que sabemos es que tiene pendientes negativas. No sabemos nada de la derivada segunda.

Paloma: Solamente sabemos que tiene pendientes negativas la derivada primera.

D: Entonces ahí vamos con la situación uno. La situación uno dice que comienza perdiendo poco y después empieza a perder cada vez más. ¿Eso lo veo reflejado en la curva de qué manera? ¿con qué característica geométrica?

Paloma: Que va a haber un puntito de inflexión…

D: Mmm no veo que vaya a haber un cambio de… (se detiene y pregunta). ¿Por qué punto de inflexión?

Paloma: Porque varía la velocidad, o sea va a haber una variación en la velocidad.

D: Sí, pero … (La estudiante Paloma interrumpe y completa la idea de antes).

Paloma: La pendiente va a hacerse más empinada negativa.

A raíz de lo observado también pudimos intuir que algunos de los estudiantes contaban con algún tipo de formación previa en análisis matemático, mientras que para otros los contenidos vistos resultaban novedosos. Aun así, la forma en que las actividades estuvieron planteadas y el tipo de trabajo que fomentaban resultaron desafiantes, debido a que las mismas implicaban un acercamiento más conceptual a los elementos del cálculo infinitesimal, apartándose del esquema de exposición tradicional (Molfino y Testa, 2010) en el que se presentan las herramientas de una forma lógica deductiva. Así, para abordar las actividades, se requería que los estudiantes apelasen a una comprensión intuitiva del concepto formal de integral como área por debajo de una curva o de acumulación total de la variación instantánea de una magnitud.

Por otra parte, al analizar las guías del docente, tal y como señalamos en la Sección 1.4.2, apreciamos que en ellas se hacía alguna pequeña recapitulación teórica que fungía como material de lectura. En las clases pudimos observar que el material en cuestión sustentaba buena parte del trabajo con las actividades.

Síntesis

En esta sección hemos presentado al lector el contexto institucional y áulico en el que se desenvolverían nuestras prácticas. A través de los diálogos, se pone de manifiesto cuál era la metodología de trabajo propiciada por el docente en torno a las actividades de los estudiantes, las vinculaciones de los estudiantes con el conocimiento matemático y el clima de mutuo respeto y cordialidad que se mantenía entre el docente y cada estudiante del curso. En la próxima sección abordaremos, teniendo como referencia el marco planteado en esta introducción, el diseño de la planificación y su implementación efectiva en el aula.

2. Diseño de la práctica e implementación en aula

En esta sección desarrollaremos una descripción analítica del periodo de prácticas. Durante el mismo, abordamos las aplicaciones del cálculo; en particular, las técnicas de integración y la aplicación de la integral al cálculo de áreas y de volúmenes. Este tema se inscribe dentro del tercer eje de contenidos propuesto en el programa de la asignatura. De esta manera, al comenzar nuestras prácticas, los estudiantes habían abordado ya los contenidos del primer y segundo eje, en los que se estudió, respectivamente, la noción de integral en su sentido variacional y geométrico y la formalización de este concepto a través de los teoremas centrales del cálculo.

Para llevar a cabo las planificaciones de estas clases tuvimos en cuenta dos aspectos centrales. El formato de las actividades planteadas por el docente, la gestión que durante las clases hacía de las mismas y la dinámica de trabajo de los estudiantes fomentaba un abordaje intuitivo de los objetos propios del análisis, apartándose así de la exposición y secuenciación clásica de estos temas (Artigue, 1998). Por otro lado, al analizar el diseño curricular para la provincia de Córdoba, observamos que este documento sugiere que el tratamiento de los contenidos de la asignatura se sustente en modos de comprensión dinámicos, centrándose así la atención en el significado de los objetos matemáticos introducidos previamente (Diseño Curricular para el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Provincia de Córdoba, 2011). Teniendo en cuenta que los contenidos que trabajaríamos habrían de ser aplicaciones y técnicas de cálculo, el principal desafío que nos planteamos fue el de introducir los mismos de manera tal que no se produjese una ruptura en relación con la secuencia trabajada durante el primer cuatrimestre y a la vez no proponer reglas de cálculo que no estuvieran justificadas o motivadas en los conocimientos previamente desarrollados. En suma, que los estudiantes no terminasen percibiendo a las técnicas y aplicaciones del cálculo como una temática ajena y apartada de las construcciones de sentido que habían desarrollado hasta el momento.

2.1 Programa de la asignatura

Con el fin de situar al lector, presentamos a continuación el programa de la asignatura, destacando con color naranja aquellos contenidos que se dictaron mientras realizamos las observaciones indicadas en la introducción a este trabajo, y con verde los que desarrollamos en el periodo de práctica.

Eje temático I: Sentidos/Significados geométricos y variacionales

Módulo I: Significados geométricos y variacionales de los descriptores fundamentales de las funciones.

- Funciones elementales, sus gráficas y su expresión algebraica. Relación entre los registros gráficos y algebraicos. Relación entre aspectos variacionales de un fenómeno particular y aspectos geométricos de la curva. Relación entre las notaciones sobre asíntotas con el comportamiento del gráfico. Función racional. Grado del numerador, grado del denominador, signo de los coeficientes, etc. Su relación con las características del gráfico.

Módulo II: Significados geométricos y variacionales de los conceptos centrales.

- Nociones de razón de cambio promedio e instantánea y cambio acumulado. Relaciones entre aspectos variacionales y geométricos, expresados a través de la derivada y la integral definida. Sentido del TFC desde los fenómenos de variación.

- Vinculación entre las características de las funciones derivada y derivada segunda con la gráfica de la función original, y las características del fenómeno que modelan.

Eje temático II: Aspectos formales de la Teoría del Cálculo Infinitesimal

Módulo I: Problema del cociente de infinitésimos y la noción de límite.

- El problema del cociente de infinitésimos de igual orden.
- El concepto de límite

Módulo II: Formalización de los conceptos centrales.

- El concepto de continuidad. El concepto de derivada. Aproximación del área bajo la curva mediante suma de áreas de rectángulos. Sumas inferiores y superiores, su existencia para funciones continuas.
- La definición de integral definida.

Módulo III: La Teoría del Cálculo Infinitesimal.

- Teorema de los valores extremos. Teorema de Fermat, Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio. El Teorema Fundamental del Cálculo.

Eje temático III: Las Técnicas y las aplicaciones del Cálculo

Módulo I

- Cálculo de límites, derivadas e integrales indefinidas

Módulo II

- La integral para el cálculo de área de figuras, el volumen de sólidos y las series numéricas.

Eje temático IV: Elementos del análisis multivariable

Módulo I

- Funciones definidas en el plano. Superficies.

Módulo II

- Los conceptos de derivadas parciales, direccionales y gradiente: sus significados geométricos. La integral iterada y su significado geométrico.

2.2 Objetivos

En función de los desafíos expuestos con anterioridad, nos planteamos los siguientes objetivos, que se sostuvieron a lo largo de las prácticas y en los que se fundamentaron la mayoría de nuestras decisiones curriculares.

En principio, introducir las técnicas de integración como herramientas para el cálculo de antiderivadas, presentando la integral indefinida como el proceso inverso de la derivación. Para ello, nos remitimos fuertemente al Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal, notando que el mismo proporciona una forma válida de calcular integrales definidas conociendo alguna antiderivada del integrando. Esto nos permitió relacionar las técnicas de integración con las reglas de derivación, por lo que tanto la evaluación diagnóstica como una parte de las actividades previstas fueron conducidas a hacer una revisión de estas últimas. Por otro lado, esta forma de exposición nos permitió introducir la problemática del cálculo de integrales indefinidas de manera que estuviese directamente relacionada con la problemática que motivó el estudio de la integral definida como objeto matemático en tanto que área por debajo de una curva a través del Teorema Fundamental del Cálculo.

Por otra parte, el segundo objetivo que formulamos fue el de generar ambientes de aprendizaje mediante la formulación de tareas inscriptas dentro del paradigma de los problemas con referencia a la semirrealidad y a la matemática pura (Skovsmose, 1999) donde los estudiantes tuvieran que recuperar los sentidos variacionales y geométricos estudiados en el contexto del primer eje del programa. Esto nos llevó a incluir en la secuencia varias actividades, por lo general después de la introducción de cada nueva técnica de integración, en las que se planteasen situaciones con referencia a la semirrealidad (como la descripción de un movimiento rectilíneo con aceleración no constante) e intramatemáticos (cálculo de áreas de figuras), a fin de recuperar nociones tales como la acumulación del cambio instantáneo y las sumas de Rieman. Esto nos permitió también fomentar la coordinación entre los registros de representación (Duval, 2006). En efecto, para ser abordadas, las técnicas de integración requieren del registro algebraico de las funciones. Pensamos entonces en tareas en las que, a partir de la expresión algebraica de una función que representara el movimiento de un cuerpo puntual sobre una recta de acción, se tuviese que elaborar la descripción del movimiento de dicho cuerpo (registro variacional), mediante el estudio del crecimiento y el signo de las derivadas de la función dada (registro analítico).

Es necesario destacar además que tuvimos en consideración la formación previa de los estudiantes en las asignaturas en las que estudiaron los conceptos centrales del cálculo infinitesimal. Puesto que, según el diseño curricular, la exposición de los contenidos temáticos del análisis no se realiza de manera clásica, es decir, que no se presentan los objetos de estudio mediante definiciones formales y secuenciando los resultados a través de un sistema lógico-deductivo, abordamos las técnicas de integración como herramientas de cálculo, sin buscar ahondar en las demostraciones rigurosas de las mismas. Aún a pesar de esto último, ligamos las reglas de derivación y las técnicas de integración cuando fue posible, exponiendo así algunos argumentos en los que se justificaban las técnicas de integración asumiendo la validez de las reglas de derivación en tanto objeto de estudio previo.

2.3 Objeto de estudio

Iniciamos el estudio de las técnicas de integración, que constituyeron el principal objeto de enseñanza de las prácticas, con el cálculo de antiderivadas de ciertas funciones elementales fundamentales, como las funciones polinómicas, la exponencial y ciertas trigonométricas, que pudieron ser deducidas a partir de las reglas de derivación para dichas funciones. Se abordaron también las técnicas de sustitución y el método de integración por partes como inversos de la regla de la cadena y del producto de derivadas. Finalmente, presentamos algunos casos particulares del cálculo de integrales de funciones racionales a través de la descomposición en fracciones simples (en particular, aquellos en los que se pudiera inferir con cierta naturalidad el principio que justificaba la descomposición), así como una variante de la técnica de sustitución aplicada al cálculo del área de un círculo con radio arbitrario. Según las planificaciones que habíamos formulado, teníamos previsto trabajar con el cálculo de áreas y el de volúmenes de sólidos de revolución para finalizar con el periodo de prácticas. No obstante, y debido a las necesidades que percibimos en los estudiantes de reforzar la técnica de descomposición en fracciones simples ante la tercera instancia evaluativa, sólo pudimos abordar el cálculo de áreas y no se pudieron gestionar todas las actividades previstas para el tema relativo a los volúmenes de sólidos de revolución, pudiendo solamente plantear una actividad introductoria al método de integración por discos para sólidos de revolución.

2.4 Material curricular empleado

Ahora bien, para orientar nuestro trabajo confeccionamos cinco guías de actividades, una evaluación de diagnóstico y una instancia evaluativa. Puesto que el canal habitual por el que el docente del curso se comunicaba con los estudiantes era el aula virtual, decidimos usar también este medio para remitir las guías que trabajaríamos en cada una de las semanas, si bien en la primera clase que dictamos decidimos llevar el material en fotocopias para que los estudiantes pudieran escribir sobre las mismas sus producciones a fin de dejar un registro escrito en el que pudiera sustentarse su trabajo posterior (particularmente, que los estudiantes tuvieran a mano las reglas de derivación básicas y algunos ejemplos significativos de derivadas que serían usados en las clases siguientes).

En tanto que en las páginas siguientes será frecuente referenciar las mismas, presentamos aquí una breve descripción de las guías elaboradas (véase Tabla 1), señalando los temas vistos en cada una de ellas.

	Guía 1	Guía 2	Guía 3	Guía 4	Guía 5
Tema	Integrales de funciones elementales.	Método de sustitución.	Integración por partes y fracciones simples.	Aplicaciones de la integral: cálculo de área.	Aplicaciones de la integral: cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.
Objetivos	- Repaso de reglas de derivación. - Cálculo de integrales indefinidas de funciones lineales. - Integrales de polinomios. - Integrales de sumas de funciones. - Integrales de exponenciales y trigonométricas.	- Repaso de la regla de la cadena. - Introducir la regla de sustitución. - Resolver integrales indefinidas aplicando el método de sustitución.	- Repaso de la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones. - Calcular integrales mediante la técnica de partes. - Introducir la descomposición en fracciones simples. - Resolver integrales de funciones racionales.	- Reconocer regiones determinadas por las gráficas de funciones. - Calcular el área de dichas regiones. - Calcular el área del círculo aplicando sustitución inversa.	- Reconocer curvas generatrices y ejes de rotación. - Aplicación del método de discos para calcular el volumen de un sólido generado a partir de la rotación en torno al eje de abscisas de la gráfica de una función.

Tabla 1: Temas de las guías

Varias de las actividades prácticas que planteamos en las guías fueron extraídas del libro de texto que el docente había usado durante la primera parte del año y que aparecía dentro de la bibliografía recomendada, la séptima edición de Cálculo de una variable de James Stewart, a la que los estudiantes tenían acceso mediante una versión digital. Algunas actividades fueron extraídas de documentos sobre experiencias en torno a la enseñanza del cálculo diferencial e integral en contextos educativos y adaptadas según los objetivos que habíamos planteado, mientras que otras fueron diseñadas por nosotros y ampliamente discutidas con el docente a cargo del curso y nuestro mentor. Finalmente, y debido a que deseábamos que las guías sirviesen como material de lectura autocontenido, desarrollamos algunas secciones teóricas en las que introdujimos las definiciones de antiderivada, revisamos los teoremas fundamentales del cálculo e hicimos un desarrollo expositivo de las técnicas de integración sirviéndonos de ejemplos y de algunas argumentaciones teóricas.

2.5 Cronograma

2.5.1 Proyección inicial

Como señalamos en la introducción, la materia alternaba el dictado de clases de manera presencial con la modalidad virtual. Puesto que este aspecto incidió fuertemente en la planificación de las clases, y con el fin de situar convenientemente al lector, presentamos en la siguiente tabla (Tabla 2) las actividades previstas inicialmente para cada semana, distinguiendo la modalidad de las clases.

Fecha	**Modalidad de la clase**	**Horas cátedras**	**Temas a trabajar**	**Actividades** **Guía 1**, **Guía 2**, **Guía 3**, **Guía 4**, **Guía 5**
Viernes 19 de Agosto	Presencial	3	Introducción al cálculo de integrales indefinidas. Propiedades de la integral.	Lectura correspondiente a la Guía 1. Resolución de Actividades 0, 1, 2 y 3 de la Guía 1.
Martes 23 de Agosto	Virtual asincrónica	2	Cálculo de integrales indefinidas de funciones elementales. Relación entre los registros analíticos, geométricos y variacionales de una función a partir del análisis de sus derivadas.	Visualización del vídeo “devolución de autoevaluación” Se habilitará un espacio en el aula virtual (del martes 23 al miércoles 24) para la entrega de las Actividades 4 y 6 de la Guía 1. Durante la clase presencial del viernes 19 diremos que se abrirá un foro el martes 23 hasta el miércoles 24 para trabajar la Actividad 5 de la Guía 1, tanto oralmente como en la

				consigna se indicará que cada estudiante deberá subir su producción como comentario, y que se espera que emplee el foro para hacer preguntas e intercambios. Con esto queda cerrada la Guía 1.
Viernes 26 de Agosto	Virtual asincrónica	3	Introducción y cálculo de integrales mediante la regla de sustitución.	Lectura de la regla de sustitución y visualización del material que subiremos al aula. Se habilitará un espacio (del viernes 25 al sábado 27) para la entrega de las Actividades 2 y 3 de la Guía 2. Se abrirá un foro (del viernes 26 hasta el sábado 29) para trabajar la Actividad 4 de la Guía 2. Tanto oralmente como en la consigna se indicará que cada estudiante deberá subir su producción como comentario, y que se espera que emplee el foro para hacer preguntas e intercambios.
Martes 30 de Agosto	Virtual sincrónica	2	Introducción al método de sustitución inversa Introducción y cálculo de integrales mediante el método de integración por partes.	Lectura referida al método de sustitución inversa y resolución de Actividades 5, 6 y 7. Hasta aquí estaría concluida la Guía 2. Lectura del material teórico de la Guía 3 acerca del método de integración por partes. Resolución de la Actividad 1 y 2 de la Guía 3. Quedaría concluido el método de integración por partes.
Viernes 2 de Septiembre	Presencial	3	Introducción y cálculo de integrales mediante la regla de fracciones simples.	Lectura de la Guía 3, correspondiente al método de fracciones simples.

			Aplicación de la integral al cálculo de áreas.	Resolución de Actividades 3 y 4 de la Guía 3. Hasta aquí concluido el tema de integración por fracciones simples. Cerrada la Guía 3. Lectura de la Guía 4 sobre el cálculo de áreas. Resolución de las Actividades 1, 2 y 3 de la Guía 4.
Martes 6 de Septiembre	Presencial	2	Cierre del cálculo de áreas. Introducción a las aplicaciones de la integral en el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.	Resolución de las Actividades 4 y 5 de la Guía 4. Cerrada la Guía 4. Lectura de la Guía 5 correspondiente al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Resolución de las Actividades 1 y 2 de la Guía 5
Viernes 9 de Septiembre	Presencial	3	Instancia Evaluativa	Grupos de a dos, no tendrán más de 10 minutos para explicar una actividad de una guía entregada previamente. Dicha actividad se dará mediante bolilla/sorteo. Además cada estudiantes deberá entregar la guía completa. Durante la explicación el docente podrá hacer algunas preguntas.
Martes 13 de septiembre	Presencial	2	Devolución de la instancia evaluativa. Cierre del cálculo de volúmenes. Cierre de las prácticas.	Devolución de las guías escritas con comentarios. Resolución de las Actividades 3, 4 y 5 de la Guía 5. Cerrada la Guía 5.

				Fin de las prácticas.

Tabla 2: Cronograma inicial de las prácticas

2.5.2 Supuestos iniciales y modificaciones posteriores

Es conveniente destacar que, al elaborar las planificaciones, contábamos con que las cuatro primeras clases de las prácticas serían presenciales y darían comienzo el martes 9 de agosto. Sin embargo, tras el receso invernal, el docente encargado del curso destinó las primeras dos clases del cuatrimestre a repasar los temas que entrarían en la segunda instancia evaluativa del 16 de agosto. Puesto que, de esta forma, comenzamos las prácticas el viernes 19 de agosto, tuvimos que modificar el cronograma para introducir la técnica de sustitución de manera asincrónica, al tiempo que algunas de las actividades que habíamos proyectado trabajar en la presencialidad se terminaron proponiendo como tareas que los estudiantes debían enviar a través del aula virtual. Esto nos llevó también a generar materiales audiovisuales para complementar el material de lectura referido a la regla de sustitución y discutir algunos aspectos relevantes que encontramos al corregir las evaluaciones diagnósticas.

Amén de lo anterior, durante el desarrollo de las prácticas existieron otros factores que afectaron de manera directa a la reorganización de las actividades previstas.

En las entregas que realizaron los estudiantes durante la semana de trabajo asincrónico apreciamos distintas dificultades[2] en la resolución de los ejercicios, por lo que destinamos la clase del martes 30 de agosto para hacer una revisión de los puntos conflictivos que consideramos más pertinentes.

Por otro lado, en la primera formulación de la planificación, la segunda guía trataría sobre la regla de sustitución y constaría de dos partes. En la primera se plantearían las actividades introductorias y fundamentales, mientras que en la segunda se estudiaría la técnica de sustitución trigonométrica, que permitiría calcular el área de un círculo. Sin embargo, el docente de la cátedra nos indicó que suele abordar este tema después del trabajo con fracciones simples, por lo que decidimos aceptar su sugerencia y modificar la guía correspondiente a la regla de sustitución, eliminando la segunda parte, y ubicando la actividad referida al cálculo del área del círculo en la guía de aplicación de la integral al cálculo de áreas.

Finalmente, debido al feriado decretado por el Gobierno nacional tras el intento de magnicidio en contra de la vicepresidenta de la Nación, el viernes 2 de septiembre no se dictaron clases en la

[2] Estas dificultades serán desarrolladas en la tercera Sección del presente trabajo.

institución; esto propició que las actividades previstas para ese día pasaran al siguiente martes, de manera que contamos con un módulo menos para desarrollar el tema en cuestión.

A causa de estos corrimientos en el calendario, hubimos de tomar la tercera instancia evaluativa el viernes 16 de septiembre (difiriendo de la fecha prevista en el cronograma original), lo que nos impidió hacer una devolución personal a los estudiantes acerca de su desempeño en dicha instancia.

2.5.3 Cronograma efectivo

Así pues, antes de entrar en detalle sobre los contenidos matemáticos desarrollados, las actividades propuestas para su abordaje y algunas de las ideas y preguntas que emergieron durante las clases, además de algunas reflexiones en torno a ciertas decisiones curriculares, presentamos el cronograma real de este periodo (véase Tabla 3).

Fecha	Modalidad de la clase	Horas cátedra	Temas	Contenidos vistos	Actividades Guía 1, Guía 2, Guía 3, Guía 4 y Guía 5
Viernes 19 de Agosto	Presencial	3	Introducción al cálculo de integrales indefinidas.	Teorema Fundamental del Cálculo. Definición de antiderivada. Familia de antiderivadas. Definición de integral indefinida. Integrales de funciones polinómicas.	Comentamos lo que se trabajaría durante nuestras prácticas. Lectura correspondiente a la Guía 1. Resolución de Actividades 0, 1, 2 y 3 de la Guía 1.
Martes 23 de Agosto	Virtual asincrónica	2	Cálculo de integrales indefinidas. Relación entre los registros analíticos,	Integrales de funciones trigonométricas. Integrales de función exponencial e hiperbólica. Linealidad de la integral con respecto a la suma de	Visualización del vídeo “devolución de autoevaluación” Se habilitó un espacio en el aula virtual del martes 23 al viernes 26 para la entrega de

			geométricos y variacionales de una función.	funciones y a la multiplicación por un escalar. Análisis de la variación de la posición de un móvil: pasaje de la representación algebraica al registro analítico y a la descripción del fenómeno modelado.	las Actividades 4 y 6 y se abrió un foro para trabajar la Actividad 5, correspondientes a la Guía 1. Nota: Avisamos a los estudiantes durante la clase presencial que dichas actividades servirían para conmutar la asistencia. Con esto quedó cerrada la Guía 1.
Viernes 26 de Agosto	Virtual asincrónica	3	Regla de sustitución.	Composición de funciones. Regla de la cadena para la derivada de una composición de funciones. Técnica de sustitución. Manipulación algebraica de la expresión del integrando para completar derivadas. Manipulación con diferenciales.	Lectura de la regla de sustitución y visualización del material que subimos al aula. Se habilitó un espacio del martes 24 al viernes 26 para la entrega de las Actividades 2 y 3 y se abrió un foro para trabajar la Actividad 4, correspondientes a la Guía 2. Nota: Avisamos a los estudiantes durante la clase presencial que dichas actividades servirían para conmutar la asistencia.
Martes 30 de Agosto	Virtual sincrónica	2	Regla de sustitución. Introducción al método por partes.	Cálculo del área por debajo de la gráfica de una función definida a trozos. Linealidad de la integral con respecto al dominio de	Puesta en común y resolución de la Actividad 4 de la Guía 2. Hasta aquí quedó concluida la Guía 2. Lectura del material teórico de

				integración. Aplicación del segundo Teorema Fundamental del Cálculo para calcular la integral definida. Regla de Leibniz para la derivada de un producto. Demostración del método de integración por partes. Integral del producto entre una función cuadrática y exponencial.	la Guía 3 acerca del método de integración por partes. Desarrollamos un ejemplo de este método: $\int x^2 e^x dx$
Martes 6 de Septiembre	Presencial	2	Método de integración por partes. Integración de funciones racionales mediante la descomposición en fracciones simples.	Aplicación del método de integración por partes. La integral del logaritmo natural. Linealidad con respecto al dominio de integración. Integral como área por debajo de una curva. Descomposición de una función racional en suma de fracciones irreducibles: caso de descomposición en factores lineales no repetidos y en factores lineales por un factor cuadrático irreducible. Resolución del sistema lineal.	Planteo y resolución de las Actividades 1 y 2 de la Guía 3. Lectura del teórico sobre descomposición en fracciones simples. Ejemplo. Planteo y resolución de la Actividad 4 de la Guía 3. Ejemplo de integral de función racional con denominador en cuya factorización un polinomio irreducible de grado dos.

Viernes 9 de Septiembre	Presencial	3	Integración de funciones racionales. Aplicación de la integral al cálculo de áreas de regiones determinadas por curvas.	Ejemplo de integral de una función racional: Caso del polinomio cuadrático irreducible en la factorización del denominador. La derivada de la tangente inversa. Sustitución trigonométrica: aplicación para el cálculo del área de un círculo. Intersección entre curvas. Cálculo de áreas entre curvas mediante la integral definida de la diferencia entre las curvas.	Exposición de un ejemplo de integral de funciones racionales en el que se debe de calcular $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x)$ Planteo del problema del cálculo del área del círculo mediante la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$ para usar la sustitución $x = rcos(t) \Rightarrow dx = -rsen(t)dt$ Planteo y resolución de las Actividades 3, 4 y 5 de la Guía 4. Cerrada la Guía 4.
Martes 13 de Septiembre	Presencial	2	Aplicación de la integral al cálculo de regiones determinadas por curvas. Introducción al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.	Aplicación de los contenidos relativos al cálculo de áreas. Introducción de las nociones de curva generatriz y eje de rotación. Definición de sólido de revolución. Método de los discos para el cálculo de su volumen.	Revisión de ejercicios de fracciones simples. Planteo y resolución del problema del crecimiento neto de una población dadas las tasas de natalidad y mortalidad. Planteo y resolución del cálculo del volumen de un cono truncado.
Viernes 16 de septiembre	Presencial	3	Tercera instancia evaluativa.	Las técnicas de integración. Cálculo de áreas. La integral como cambio acumulado de la	Exposición individual de los estudiantes de los ejercicios del trabajo práctico (tercera

				variación de una magnitud. Cierre de las prácticas.	instancia evaluativa). Fin de las prácticas.

Tabla 3: Cronograma de clases

2.6 Diagnóstico

Como hemos señalado con anterioridad, los objetivos que planteamos sirvieron para tomar ciertas decisiones curriculares, antes y durante el periodo de prácticas, tales como la selección de las actividades y el enfoque que se les darían. No pudimos dejar de reconocer, sin embargo, que el tema que constituiría el objeto de enseñanza (las técnicas de integración) requería de los estudiantes cierto manejo del registro algebraico de las funciones, y en particular con los procesos de diferenciación.

Durante el periodo de observaciones, como hemos reseñado en la introducción de este informe, constatamos que se hacía un fuerte trabajo en la coordinación entre el registro gráfico y analítico de las funciones. Así pues, con el fin de obtener cierta información de base que nos permitiese calibrar el repaso que deberíamos hacer de ciertos temas, antes del comienzo de nuestras prácticas propusimos de manera asincrónica una evaluación de diagnóstico, cuya resolución fue enviada por cada estudiante a través del aula virtual.

2.6.1 Objetivos del diagnóstico

Presentamos a continuación los objetivos que tuvimos en cuenta para la elaboración de la evaluación de diagnóstico.

- Revisar las reglas de derivación.
- Conocer qué posibles dificultades se presentan en el cálculo de las derivadas de funciones elementales.
- Repasar los contenidos vistos durante el primer cuatrimestre en relación con la descripción de gráficos de funciones a partir de sus derivadas, que permiten su esbozo aproximado.
- Comprobar cuál es el dominio que tienen sobre la información que aportan las derivadas primera y segunda de una función en relación con las propiedades de monotonía y concavidad.

Cabe destacar que el documento que el docente a cargo del curso envió a los estudiantes a través del aula virtual contenía la formulación de estos objetivos. Esto no fue algo que hubiésemos previsto, pues sólo habíamos pensado dar a los estudiantes las tareas que constituían la evaluación diagnóstica.

2.6.2 Actividades del diagnóstico

Actividad 1: Calcule la derivada de las siguientes funciones. Indique cómo obtener las mismas.

a) $f(x) = \ln(\cos(x)) + \sqrt{x}$
b) $g(x) = e^{x}(x^4 + 4)^4$

Actividad 2: Considere la función h dada por $h(x) = x^3 + x^2 - 2x$

A. Obtenga h' y h''.
B. A partir de las derivadas obtenidas en (a), sin realizar ningún gráfico, indique periodos de crecimiento o decrecimiento de h, intervalos de concavidad, sus cortes con los ejes coordenados, puntos críticos y otros elementos que usted considere pertinentes para graficar la función.
C. Sin utilizar Geogebra, y con la información obtenida en el punto (b), elabore una gráfica de la función h.

2.6.3 Observaciones

El primer ejercicio requería (para ser resuelto) del conocimiento de las propiedades de la derivada y de las reglas de derivación: la linealidad de la derivada con respecto a la suma de funciones, la derivada de un exponente, la regla de la cadena para la composición de funciones y la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones.

La segunda tarea estaba pensada de manera intencional para que los estudiantes empleasen el registro analítico (las derivadas de una función a partir de su expresión algebraica) para obtener datos asociados a algunas características del gráfico de la misma (como intervalos de crecimiento y tipos de concavidad, entre otros). La restricción impuesta en el inciso C de esta actividad (i.e. no emplear ningún software de geometría dinámica para elaborar la gráfica de la función a través de su expresión algebraica), forzaría a los estudiantes a recurrir al trabajo realizado en los incisos previos de esta actividad. Cabe destacar que las función elegida en esta última actividad, por tratarse de una función polinómica de tercer orden sin términos independiente, tenía como virtud el que se pudiera factorizar con cierta facilidad para calcular los puntos de corte con el eje de las abscisas y poder analizar también las derivadas primera y segunda (una función cuadrática y una función afín, respectivamente), para obtener información sobre el signo de estas funciones o sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

2.6.4 Resultados del diagnóstico

Las actividades del diagnóstico fueron enviadas a través del aula virtual por el docente del curso el día 29 de julio y el espacio destinado a la entrega permaneció abierto hasta el 7 de agosto. La realización de esta actividad no se presentó como obligatoria, debido a que los estudiantes se encontraban en periodo de receso y exámenes finales. De los veintiséis estudiantes inscriptos obtuvimos un total de siete respuestas.

A partir de las producciones de los estudiantes apreciamos lo siguiente:

1. La totalidad de los estudiantes que hicieron la entrega dominaban la propiedad de linealidad de la diferenciación.
2. Todos los estudiantes derivaron correctamente los polinomios.
3. Fueron pocos los estudiantes que presentaron alguna dificultad con la regla de la cadena. Observamos que en la primera actividad al menos dos estudiantes tuvieron alguna confusión al plantear la derivada del logaritmo natural.
4. Al derivar el producto de funciones del inciso b de la primera actividad, la regla de Leibniz es la que presentó más dificultades a los estudiantes.
5. Privados de la posibilidad de graficar las derivadas primera y segunda de la función h del inciso c de la Actividad 2, los estudiantes presentaron distintas estrategias para obtener información sobre la primera derivada, basándose en su mayoría en el conocimiento previo de la función cuadrática. Obtuvieron las raíces de la función (que asociaron con los puntos críticos de la función h), y analizaron la concavidad de h’ a través del signo del coeficiente cuadrático para determinar la concavidad de la parábola e inferir a partir de esto el punto de máximo de h.

En general las resoluciones de los estudiantes fueron correctas. Como hicimos notar, deseábamos obtener información de base sobre el dominio de algunas reglas de derivación y la información aportada por las derivadas primera y segunda de una función en relación con la gráfica de la misma. Sobre esto último, notamos una mayor apropiación del vínculo entre el crecimiento y la concavidad de h con el signo de sus derivadas primera y segunda (respectivamente) en comparación con el dominio que tenían de este tema durante las clases observadas en el mes de mayo.

2.6.5 Tratamiento de tres problemáticas en las producciones de los estudiantes

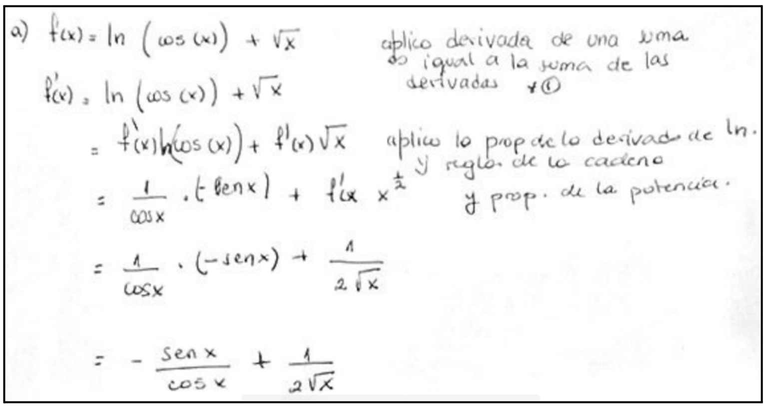
Al corregir las resoluciones de los estudiantes percibimos la aparición en reiteradas ocasiones de algunas problemáticas en sus producciones que destacamos en una devolución general hecha a través de un formato audiovisual que estuvo a disposición del curso durante la semana de trabajo asincrónico. En el video expusimos algunas de estas producciones para analizar los aspectos que fueron de nuestro interés. En las siguientes subsecciones detallamos los mismos.

1. Relativos a la notación.
2. Relativos a la presentación de las actividades.
3. Relativos al análisis de las funciones.

2.6.5.1 Relativos a la notación

Observamos en las producciones de los estudiantes que aplicaban en general dos formas para indicar la derivada de una función: la función primada, que consiste en emplear el símbolo ‘ para representar que se deriva la expresión que precede al mismo, y la notación mediante el operador diferencial respecto de la variable independiente de la cual depende la función. Es decir, si $f : R \to R$ es una función derivable entonces $f'(x)$ y $\frac{df}{dx}(x)$ representan ambos a la derivada de la función f en x elementos del conjunto de los números reales.

En algunos casos los estudiantes aplicaron de manera errónea estas notaciones con el objetivo de explicitar cuáles eran las reglas de derivación que utilizaban al resolver la primera actividad (véase Figuras 6 y 7).


a) $f(x) = \ln(\cos(x)) + \sqrt{x}$ aplico derivada de una suma igual a la suma de las derivadas

$f'(x) = \ln(\cos(x)) + \sqrt{x}$

$= f'(x)\ln(\cos(x)) + f'(x)\sqrt{x}$ aplico la prop de la derivada de ln. y regla de la cadena y prop. de la potencia.

$= \frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) + f'(x)\, x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Figura 6: Resolución de la Actividad 1a del diagnóstico de Paloma.

En la resolución de Paloma (Figura 6) expresa que f(x)=f'(x). Luego distribuye f'(x) en ambos términos como si estuviera usando la notación mediante diferenciales, lo cual no es correcto para la manipulación con el signo prima.

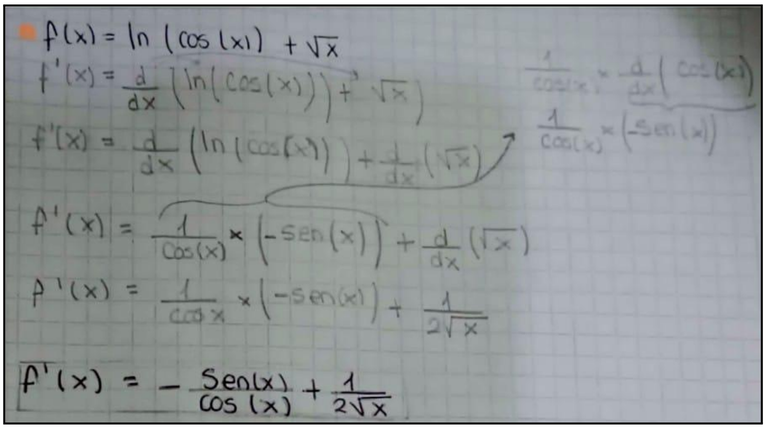


Figura 7: Resolución de la Actividad 1a del diagnóstico de Milagros.

En la producción de Milagros (Figura 7) se muestra el uso de dos notaciones para derivadas, la primada y mediante diferenciales. Identificar que esta última no es utilizada correctamente pues la función a derivar debe estar en el numerador, por ejemplo: $\frac{d\ (ln(cos(x))}{dx}$.

Por ello nos pareció apropiado establecer cuáles son las "normas" de uso de estas notaciones, la ventaja que tiene una sobre otra en distintos contextos y la relación que las vincula, a saber, que si $y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ pues esta relación sería empleada luego al introducir la regla de sustitución.

2.6.5.2 <u>Relativos a la presentación de los resultados</u>

En no pocas de las producciones escritas que analizamos percibimos que tanto en la primera como en la segunda actividad los estudiantes presentaban sus resultados apelando a esquemas o diagramas como los que se muestran en las Figuras 8 y 9.

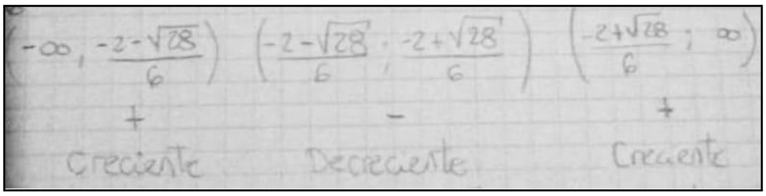


Figura 8: Resolución de la Actividad 2a del diagnóstico de Antonio, monotonía de la función h en relación con el signo de h'.

En la Figura 8 se puede ver cómo el estudiante analiza la función observando lo que sucede en tres intervalos que él distingue ubicándolos en la primera fila. A cada uno de ellos los asocia con un signo (+, -, +) en la segunda fila del arreglo, y en la tercera indica la propiedad de monotonía correspondiente. Sin embargo nunca especifica qué función es la que decrece o crece ni que significan los signos +,-,+.

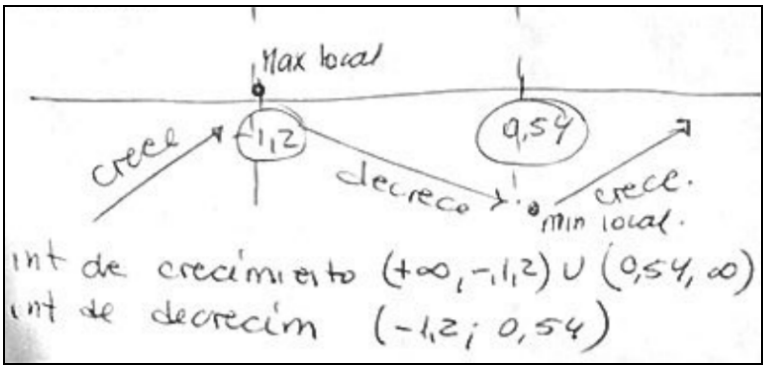


Figura 9: Resolución de la Actividad 2a del diagnóstico de Paloma, indica con flechas los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En la Figura 9 se aprecia una representación del crecimiento y decrecimiento de la función a través de flechas debajo de una recta donde se marcaron los puntos críticos (máximo y mínimo). Luego analiza qué sucede en la función antes y después de estos puntos, y según sus valores establece con flechas hacia arriba o hacia abajo si crece o decrece.

Si bien valoramos estos esquemas en tanto síntesis de los resultados expresados en un registro figural que ayuda a tener una mejor comprensión del fenómeno, no podemos dejar de advertir que en la mayoría de estos trabajos se notaba la ausencia de un texto que abundase en indicaciones de los procedimientos, cálculos y resultados seguidos para exponer la resolución. Como mencionamos antes, varios estudiantes pudieron enunciar de manera parcial algunos teoremas que relacionan monotonía de una función con su derivada, tales como que h es creciente si y sólo si h'(x) > 0 (más adelante volveremos sobre este resultado, con relación a la formulación expuesta de esta manera). Sin embargo, notamos que no muchos estudiantes podían indicar en dónde empleaban este teorema y en varias oportunidades debimos asumir a qué hacían referencia ciertas indicaciones en los manuscritos.

En otras producciones observamos ciertos usos de notaciones que están de alguna manera estandarizados en la notación habitual y que (por esto mismo) no se hacían explícitos en el contexto del problema. En la siguiente producción (Figura 10) se puede ver lo dicho.

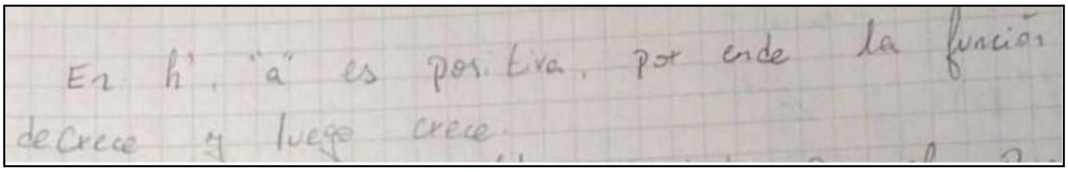

En h', "a" es positiva, por ende la función decrece y luego crece.

Figura 10: Resolución de la Actividad 2a del diagnóstico de Tomás.

A continuación transcribimos el texto que aparece en la Figura 10 para facilitar su comprensión:

> " En h', "a" es positiva, por ende la función decrece y luego crece ".

Interpretamos en lo anterior que el estudiante apela a la escritura polinómica de la función cuadrática, una de cuyas representaciones algebraicas es por convención la dada por $ax^2 + bx + c$, y que al indicar que a > 0 hacía referencia al signo del coeficiente cuadrático.

Nos pareció oportuno hacer algunas recomendaciones en lo relativo a la presentación de las producciones. Si bien esto no se inscribe dentro de un contenido matemático explícito, no es menos cierto que la comunicación de los resultados forma parte tanto de la actividad docente como de la actividad científica. En tanto que los estudiantes del curso están realizando su formación inicial docente nos pareció apropiado indicarles en su momento que en los espacios curriculares del campo disciplinar no debe de estar presente sólo el contenido matemático. En torno a las nociones matemáticas aparece de manera tangencial la necesidad de comunicar resultados de manera clara y precisa. Para resaltar esto, realizamos una reformulación de algunos de los trabajos que enviaron los estudiantes, con el fin de mostrar de qué forma podría mejorarse la exposición de algunas ideas. En la figura (Figura 11), una de las diapositivas usadas en la presentación del video, se muestran las modificaciones que hicimos sobre el trabajo presentado en la Figura 8. La tabla (Tabla 4) es una transcripción de la figura (Figura 11) que incluimos en el cuerpo de este trabajo debido a un posicionamiento explícito en favor del mejoramiento del acceso a textos digitales mediante el uso de lectores de pantalla.

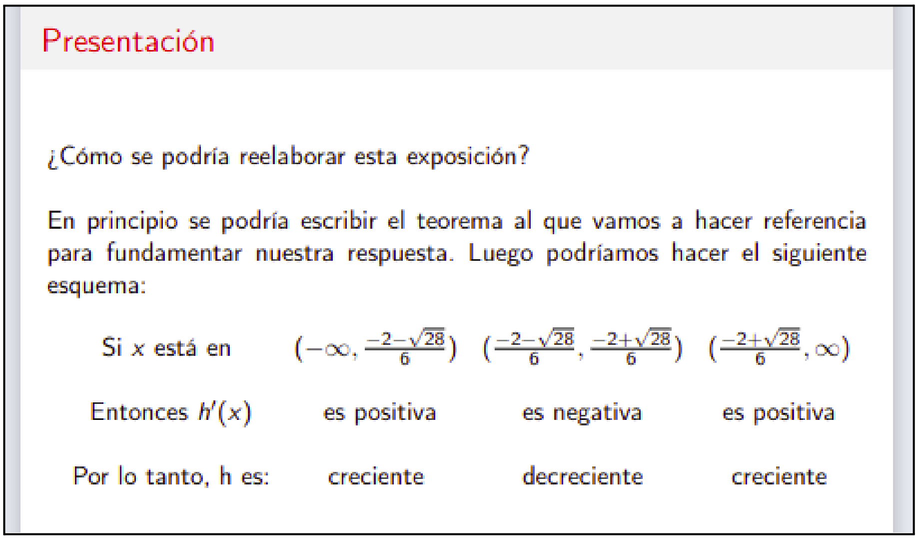


Figura 11: Diapositiva de la presentación exhibida en el material audiovisual

Si x está en	$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{28}}{6})$	$(\frac{-2-\sqrt{28}}{6}, \frac{-2+\sqrt{28}}{6})$	$(\frac{-2+\sqrt{28}}{6}, \infty)$
Entonces h'(x)	es positiva	es negativa	es positiva
Por lo tanto, h es:	creciente	decreciente	creciente

Tabla 4: positiva-negativa-positiva/creciente-decreciente-creciente expuesta en el material audiovisual.

Más adelante veremos cómo esta intervención sustentó el trabajo de algunos estudiantes en producciones posteriores.

2.6.5.3 Relativos al análisis de funciones: La noción de crecimiento de una función asociada al signo de su derivada.

Observamos en las producciones de varios estudiantes una asociación entre el signo de la derivada de una función y la monotonía de la misma. En efecto, este conocimiento se hizo presente en varias de las clases que observamos durante el primer cuatrimestre, de lo cual hemos dejado constancia en la introducción de este trabajo mediante algunos diálogos obtenidos del registro de dicho periodo (Sección 1.4.6). Como se ha mencionado, uno de los objetivos de la evaluación diagnóstica fue conocer qué dominio poseían los estudiantes de coordinación entre el registro algebraico y analítico de las funciones. Puesto que habíamos comprobado que la mayoría de las actividades que observamos consistían en extraer información del gráfico de una función y contrastarla con las propiedades de su derivada, propusimos un ejercicio en el que se debiese establecer una relación directa entre la expresión algebraica de una función, sus propiedades analíticas y la representación gráfica de la misma, sin pasar por esta última. Más aún, debiendo coordinar la expresión algebraica con las propiedades analíticas de la función para arribar a su registro gráfico.

En general comprobamos que los estudiantes podían hacer uso de resultados del análisis que establecen condiciones suficientes y necesarias para el crecimiento o decrecimiento de una función en la medida en que la imagen de su derivada toma valores positivos o negativos respectivamente. No obstante aplicar correctamente este resultado, la forma en que los estudiantes probaban que una derivada fuese negativa o positiva devino en una noción llamativa del crecimiento de una función. (Véase Figura 12).

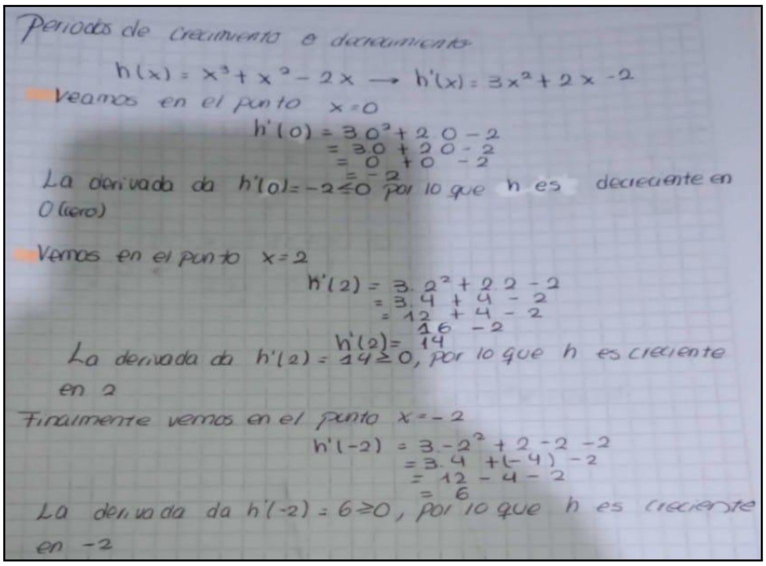


Figura 12: Resolución de la Actividad 2b del diagnóstico de Milagros.

Como se aprecia en la imagen anterior (Figura 12), para emplear el teorema la estudiante ha evaluado la derivada de h en x=0, x=2 y x=-2, obteniendo que h'(0) < 0, h'(2) > 0 y h'(-2) > 0; en consecuencia, plantea que "h es decreciente en 0", "h es creciente en 2" y "h es creciente en -2", que no es correcto en términos matemáticos.

Nos pareció apropiado recuperar este detalle de no menor relevancia, tanto en la devolución individual que hicimos a cada estudiante como a través del material audiovisual. Recuperamos en estas instancias la definición de crecimiento de una función.

<u>Definición:</u> Sea $f : I \rightarrow R$ una función a valores reales, con $I \subset R$ un intervalo. Se dice que f es creciente en el intervalo I, si, y sólo si, se cumple que para cualesquiera a y b en I, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

Pusimos énfasis en recuperar que el crecimiento o decrecimiento de una función no es una propiedad puntual. Por el contrario, es una propiedad que describe el comportamiento de los valores de la imagen de una función en un intervalo.

En párrafos anteriores hemos dado un enunciado parcial del teorema que garantiza la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función. Presentamos a continuación el enunciado completo del teorema.

Teorema: Sea $I \subset R$ un intervalo. Considérese $f : I \to R$ una función derivable en el intervalo I.

Son equivalentes:

1. La función f es creciente en I.
2. Para todo $x \in I$, se cumple que $f'(x) > 0$.

Observamos aquí que el enunciado que manejan los estudiantes no toma en consideración que la derivada de f ha de tomar valores positivos para todos los puntos del intervalo.

Puesto que, según la planificación anual, debíamos introducir las técnicas de integración y las aplicaciones del cálculo integral, no introdujimos nuevas actividades para trabajar esta noción de crecimiento durante las clases. En la devolución audiovisual enunciamos la definición, el teorema anterior y mostramos cómo podría probarse que la derivada de h era positiva o negativa en ciertos intervalos sin apelar a la representación gráfica de la misma. El ejercicio de probar esto, tanto con argumentos que emplean la derivada segunda como con aquellos que invocan el teorema de los valores extremos, sin embargo, fue expuesto a título informativo, pues la dificultad de tales pruebas excede los objetivos y alcances del curso y por lo tanto no esperábamos que adoptasen y reprodujesen este conocimiento en particular.

Finalmente, y como cierre de esta discusión, planteamos aquí algunas posibles interpretaciones que hicimos en torno al trabajo con esta noción de crecimiento.

En primer lugar, una posible justificación matemática de la afirmación “la función h es creciente en 2” — de donde después se concluye que h es creciente en un intervalo no acotado de R — se fundamenta en que h es una función polinómica y, por lo tanto, es derivable con derivada continua. Por ser h’ continua, se tiene que si h’(2) > 0, entonces existe un entorno de 2 en donde h’ es positiva.

Por sí sola esta afirmación no basta para asegurar que h’ será positiva en el intervalo que consignaron los estudiantes. Hemos pensado también que aquí interviene cierta intuición acerca de la gráfica de h’, ya que su expresión algebraica responde a un polinomio de grado 2, y los estudiantes han tenido experiencias previas con las gráficas de funciones cuadráticas. Esto nos conduce a pensar que los estudiantes perciben como evidente cuál es el signo de h’ en los distintos intervalos de la recta real y por ello no consideran necesario proporcionar una justificación sobre este hecho. Además, este tipo de tarea no forma parte del trabajo que realizan habitualmente en las clases.

2.7 Actividades propedéuticas

En lo que refiere a la secuenciación didáctica nos pareció apropiado establecer un puente entre los contenidos tratados durante el primer cuatrimestre y el tema que constituiría el eje central de nuestras prácticas. Es de vital importancia, por lo tanto, referir aquí las tareas planteadas en la primera guía, que sustentarían el trabajo dentro del aula, su diseño e implementación.

2.7.1 Repaso del Teorema Fundamental del Cálculo

Como establecimos antes en este trabajo, confeccionamos las guías intercalando un material de lectura teórico y tareas prácticas.

La primera actividad propuesta en la clase presencial del viernes 19 de agosto fue la lectura de los teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal.

<u>Texto extraído de la Guía 1</u>

Repaso

<u>Definición:</u>

Sea f una función continua. Si se considera g tal que $g'(x) = f(x)$, entonces se dice que g es una “antiderivada” de f.

Repaso del Teorema Fundamental del Cálculo

Parte 1

<u>Enunciado:</u>

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a,b], y se define para todo x en [a,b] la función $f:[a,b]\to R$ dada por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Entonces F es derivable en (a,b) y se cumple que $F'(x)=f(x)$

Observaciones:

- La función F es una antiderivada de f, pues satisface la definición dada.
- La variable *t* que aparece en el argumento de f es un número real tal que $a\leq t\leq x, \forall x[a,b]$.

Parte 2

Enunciado:

Si $g':[a,b]\to R$ es una función continua en el intervalo [a,b], entonces $\int_a^b g'(t)dt=g(b)-g(a)$.

La docente practicante a cargo de esta etapa gestionó dicha lectura en común, alternando la lectura del teórico por parte de los estudiantes con algunos comentarios sobre lo leído: en particular, preguntando al curso qué se había comprendido del material, haciendo aclaraciones y pidiendo o proponiendo ejemplos para focalizar la formulación abstracta de estos resultados en aplicaciones concretas.

A continuación presentamos un fragmento del registro de clase en el que se ejemplifica lo anterior. Micaela ha pedido a uno de los estudiantes que lea la definición de antiderivada.

> Micaela: Bueno, vamos con la primera definición del repaso, no sé si alguien la quiere leer.
> Paloma: Bueno, definición. Sea f una función continua. Si se considera g tal que la derivada de g de x es igual a f de x, entonces se dice que g es una antiderivada de f.
> Micaela: Perfecto. ¿Cómo ven esta definición? ¿Está clara? ¿Complicada?
> Paloma: No, está clara.
> Micaela: ¿Está clara? (le responde a Paloma. En este momento ingresa una estudiante al aula y saluda a la docente practicante, quien responde): Hola, ¿qué tal? Bueno, ¿me podrían dar un ejemplo? Armar un ejemplo de la definición, para que quede más claro todavía.

Antonio: f puede ser … (se produce una pausa larga). Luego toma la palabra otra estudiante).

Isabel: x cuadrado (haciendo referencia a la función que a cada valor de x le asigna x^2) por ejemplo f …

Micaela: Como f x cuadrado (elevando un poco el tono de la voz para indicar que se ha aceptado la sugerencia de la estudiante y que hay que seguir con el ejemplo).

Isabel: A ver … ¿Y la antiderivada sería de f? Si es x cuadrado, la antiderivada sería tres x al cubo … (Aquí otro estudiante habla casi al mismo tiempo).

Antonio: No, vos ahí tenés que …

Isabel: … ¿Sobre tres?

Micaela: Claro, acá lo que conviene pensar, pensemos en la g, ¿cómo nos dice la definición? Se considera una g, entonces busquemos una g, la que ustedes quieran elegir.

Antonio: Por ejemplo x al cuadrado. La derivada sería dos x.

Micaela: x al cuadrado, bien. ¿La derivada cuál es? (mientras la docente practicante formulaba la pregunta el estudiante había indicado ya cuál sería la derivada, hablan casi al mismo tiempo. Luego el mismo estudiante responde):

Antonio: Dos x.

Isabel: Dos x.

Micaela: Dos x (confirmando la respuesta). Y entonces esa dos x sería nuestra … (eleva el tono de la voz para indicar pregunta).

Antonio: Nuestra f.

Micaela: F, exactamente. Entonces g, que era x al cuadrado, es una antiderivada de …

Antonio: De f.

Micaela: Dos x, sí, que es nuestra f.

2.7.2 Reorganización del contenido

Deseamos que el lector advierta que la presentación de este resultado (el Teorema Fundamental del Cálculo) difiere de la forma en que el docente del curso lo enunció en su momento. En el siguiente fragmento se puede leer dicha formulación, proporcionada en una de las guías que se trabajaron durante el periodo de observaciones previo al diseño de la planificación, y que apela a una comprensión de la noción de variación de una magnitud para llegar a la expresión que relaciona la integral definida de la variación con el cambio total de la magnitud en cuestión.

Material de la clase 26 de mayo

Teorema Fundamental del Cálculo en su sentido variacional

Si v(t) es una función que representa la razón de cambio puntual o instantáneo de una magnitud dada por m(t), entonces el cambio acumulado de la magnitud en un intervalo [a,b] (o sea la diferencia m(b) − m(a)), está dado por el área bajo la curva v(t), matemáticamente representada por la integral definida:

$$\int_a^b v(t)\ dt = m(b) - m(a)$$

Este resultado se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo. El TFC brinda una herramienta fundamental para la obtención de poder predictivo sobre los fenómenos de variación. El hecho fundamental expresado por el TFC es que integrando la función razón de cambio obtenemos el cambio acumulado, es decir la variación total de la magnitud m.

En nuestro diseño, el teorema se enunció en término de funciones en lugar de magnitudes, mientras que la variación de una magnitud se encuentra representada por la derivada de la función. Además, y siguiendo la presentación del libro de texto recomendado en la bibliografía del curso, hemos dividido el Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal en dos partes bien diferenciadas.

Nos parece adecuado señalar que la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal corresponde a la regla de Barrow. La diferencia estriba en la hipótesis sobre la derivada de g en el teorema. Tras la definición de integral mediante las sumas superiores e inferiores de Darboux y la consecuente definición de lo que es una función Darboux integrable dentro de la teoría, la condición suficiente para la g’ es que sea Darboux-integrable. El resultado es válido para funciones continuas. Por un lado, se puede probar que una función continua es una función Darboux-integrable. Si esto no se tiene en cuenta, se puede probar de manera independiente (mediante el primer teorema fundamental) que si g’ es continua, entonces se satisface que la integral definida entre a y b de esta función está dada por g(b) - g(a).

También es de destacar que se hace la misma consideración en la formulación de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo. Aplicando la definición de Darbox-integrable, el enunciado del teorema toma esta forma:

<u>Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal:</u> Sea $f:[a,b] \to R$ acotada.

Si f es Darboux-integrable, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$ definida como $f:[a,b] \to R$ es continua en [a,b]. Además se cumple que si f es continua en un punto c del intervalo (a,b), entonces F es derivable en c y se obtiene que $F'(c) = f(c)$.

Ambas modificaciones en los enunciados responden a los objetivos formulados en la planificación anual del curso y en el Diseño Curricular para el Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de la Provincia de Córdoba. Si bien los estudiantes estudiaron una definición formal de la integral mediante las sumas superiores e inferiores de Darboux, la diferencia entre funciones continuas e integrables responde a una sutileza técnica que excede por mucho la comprensión intuitiva de los resultados del análisis matemático y no aporta a la misma, resultando más bien propia del modelo tradicional de la enseñanza del cálculo (Molfino, 2010). Puesto que esta digresión podría ser formulada en otros contextos y a través de tareas que no tendrían una relación directa con el objeto de estudio de las prácticas optamos por una formulación que respondiera a la gran mayoría de los fenómenos que pueden ser modelizados a través de los elementos del análisis matemático (por ejemplo, magnitudes en cuyas variaciones no se presentan discontinuidades, tales como la temperatura en función del tiempo o del lugar, la posición de un objeto en movimiento, la cantidad de líquido en un recipiente).

Por último, hemos de resaltar que una de las observaciones al primer teorema fundamental estaba destinada a esclarecer alguna posible confusión generada por el uso de la variable t en el argumento del integrando, ya que a priori tanto t como x son números reales que pertenecen al intervalo [a,b]. Contrario a lo que habíamos anticipado en las planificaciones, los estudiantes no manifestaron dificultades con relación a este particular.

2.7.3 Cálculo de antiderivadas

Finalizado el repaso del Teorema Fundamental del Cálculo proseguimos con la lectura conjunta del siguiente apartado del material de lectura.

<u>Extraído de la Guía 1</u>

Aplicación práctica del Teorema Fundamental del Cálculo

Supongamos que se desea calcular $\int_a^b f(x)\,dx$. Por la primera parte del teorema, existe $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tal que $F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a,b)$. Por lo tanto se tiene que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx$. Por la segunda parte del teorema se tiene que $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Con esto hemos llevado el problema de calcular una integral definida de una función f a hallar la antiderivada de f y evaluarla en los extremos de integración.

Para dar cierre a esta introducción, enfatizamos las siguientes ideas:

- Para calcular la integral definida entre a y b de una función f, se busca alguna antiderivada de f y se la evalúa en los extremos del intervalo de integración.
- Gracias al TFC podemos llevar un problema de cálculo de una integral definida a la búsqueda de una antiderivada, proceso que llamaremos "integración".

Estos comentarios, manifiestos en el diseño de la planificación, nos permitieron abordar las siguientes actividades teniendo como referencia el problema de calcular la integral definida de funciones continuas, dándonos pie a hablar sobre el proceso que más adelante, en el material de lectura, llamamos "integrar", y que se refiere a encontrar antiderivadas de una función.

En el siguiente fragmento del material de lectura abordamos estas definiciones. Cabe destacar que no se hizo una lectura conjunta del mismo, como estaba previsto (por falta de tiempo), por lo que indicamos al curso que parte de las tareas que tendrían durante la siguiente semana de clases, en modalidad asincrónica, sería volver sobre las ideas aquí presentadas y leer las propiedades de las integrales para realizar las últimas tareas de la primera guía.

<u>Extraído de la Guía 1</u>

Familia de antiderivadas

Por lo visto hasta aquí se tiene que la integración es el "proceso inverso" de la derivación, puesto que al integrar una función f se obtiene una función F que, al ser derivada, da por resultado la f.

No obstante, debemos aclarar que si bien al derivar se obtiene una función, cuando integramos obtenemos una familia de antiderivadas. Supongamos que se tiene una función continua f y se define la función F como en la primera parte del TFC dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, esta función satisface que $F'(x) = f(x)$ (es decir, F es antiderivada de f).

Ahora bien, si consideramos $g(x) = F(x) + c$, es fácil ver que g también es una antiderivada de f, ya que $g'(x) = F'(x) = f(x)$, pues la derivada de la constante c es cero.

Así, obtenemos el siguiente resultado: Si g es una antiderivada de f, entonces $g(x) - F(x) = c$. Este resultado depende del teorema del valor medio y se basa en que si la derivada de una función es cero, entonces dicha función es constante.

Conclusión

Lo anterior indica que existen infinitas antiderivadas de f. En efecto, si a la función F se le suma cualquier número real c se obtiene una función g que resulta ser también antiderivada de g.

Observación

La función F definida en la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo por $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, es la única de las infinitas antiderivadas de f que satisface que $F(a) = 0$.

Notación

Si se tiene una función f continua, entonces el signo $\int f(x)\ dx$ representa a cualquier función g(x) que sea antiderivada de f y se llama integral indefinida de f.

2.7.4 Integrando por primera vez

A continuación exponemos una de las primeras actividades previstas en la planificación, en la que presentamos además los objetivos, la solución anticipada y las dificultades y propuestas que adelantamos. Inmediatamente después incluimos algunos registros de esta clase para mostrar la forma en que se gestionó la actividad y reflexionar sobre las soluciones aportadas por los estudiantes.

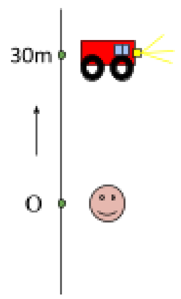
Actividad 2 de la Guía 1

Actividad 2: Para un móvil que parte del reposo y se mueve en línea recta, la función v(t)=9t permite determinar su velocidad v medida en m/s, respecto del tiempo de marcha t, medido en segundos.

a) ¿Cuántos metros recorre el móvil después de quince segundos (15s) de estar en continuo movimiento?

b) Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de t segundos de marcha.

c) Suponiendo que a tiempo t=0 el móvil se hallaba a 30m a la derecha del observador O, ¿A qué distancia se hallará después de un tiempo t de marcha? Grafique la función que describe la posición del móvil respecto de dicho observador O.



d) Suponga que el móvil tiene una velocidad dada por la función v(t)=kt y que en el tiempo t=0 se encuentra en la posición c respecto de un observador. ¿Cuál es la función que describe la posición del móvil respecto del tiempo?

Destacamos aquí los objetivos de esta actividad propuestos en el diseño de la planificación.

- Reconocer que el inciso (b) es análogo a los incisos de la actividad anterior, pues se trata de encontrar la función de acumulación.
- Reconocer el problema geométrico. La integral es el área de la figura que está determinada por la curva y el eje horizontal del sistema cartesiano. Notar que dichas figuras son triángulos rectángulos. Apelar al conocimiento del cálculo de áreas de triángulos para hallar una fórmula general.
- Reconocer que lo requerido en el inciso (a) puede ser planteado en términos de una integral definida;
- Hallar que, en general, si la velocidad de un móvil se describe mediante una función lineal, entonces la función de posición de dicho móvil será una función cuadrática.

Resolución prevista

---

a) La integral de una función, en este caso v, que representa la razón de cambio instantáneo de la posición de un cuerpo en función del tiempo *t*, da por resultado la variación de la posición en el intervalo de tiempo considerado. En este sentido, se puede plantear que el espacio recorrido en 15s de marcha estará dado por $\int_0^{15} v(t)\ dt$. Ahora, si usamos el conocimiento geométrico de la integral como área por debajo de la curva, esperamos que los estudiantes representen la función v en un sistema de ejes coordenados, observando a continuación que la figura geométrica que queda determinada por esta función y el eje de abscisas es un triángulo de base 15 y altura 9.15 (Figura 13). Así pues, la $\int_0^{15} v(t)\ dt$ es igual al área de este triángulo. De esta manera $\int_0^{15} v(t)\ dt = \frac{15(9.15)}{2}$.

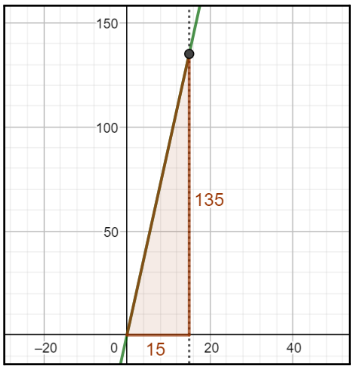


Figura 13: Resolución 2a de la Guía 1.

b) Esperamos aquí que los estudiantes puedan reconocer que la cantidad de espacio recorrido por el móvil para cualquier tiempo t > 0 está relacionado con el análisis geométrico y posterior cálculo aritmético que hicieron en el inciso anterior. Aquí se considera, pues, el cálculo del área de un triángulo de base t y altura 9t. El área de esta figura está dada por la expresión $9\frac{t^2}{2}$

c) Puesto que el móvil se encuentra a 30m del observador, y sabiendo por el inciso anterior que el espacio recorrido por el móvil está dado por $9\frac{t^2}{2}$ después de un tiempo t, entonces la distancia a la que se encuentra el móvil del observador después de un tiempo *t* de marcha será la distancia inicial (30) a la que se hallaba más el espacio recorrido $9\frac{t^2}{2}$. Es decir que la respuesta será $30+9\frac{t^2}{2}$, se puede apreciar en la Figura 14.

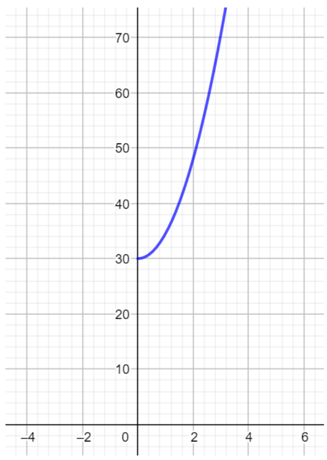


Figura 14: Resolución 2c de la Guía 1.

d) En este inciso se espera que los estudiantes reconozcan que la constante k que multiplica al tiempo t no afecta la figura geométrica de la gráfica en cuestión, siendo la misma una recta que pasa por el origen, y que por lo tanto el problema geométrico del espacio recorrido por el móvil es análogo al planteado con anterioridad. Así, el espacio recorrido después de un tiempo t de marcha es el área de un triángulo de base t y altura kt, quedando así que el espacio recorrido en función del tiempo t será de $k\frac{t^2}{2}$. Si además se considera que en tiempo t = 0 el móvil se hallaba a una distancia *c* del observador, por analogía con el inciso anterior, los estudiantes pueden inferir que la función que describe la posición del móvil respecto de dicho observador es $p(t) = k\frac{t^2}{2} + c$.

Posibles dificultades pensadas en el diseño

- Que no se perciba cuál es la relación entre la función de velocidad instantánea y el espacio recorrido por el móvil.
- Que traten de usar la actividad previa de la siguiente manera para resolver la integral: Puesto que la integral de 9 es 9t, ahora la integral de 9t será $9\frac{t^2}{2}$. Poner a prueba esta idea con el Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Qué relación tiene que cumplir E(t) con V(t)?. El TFC indica que $\int_0^{15} v(t)\ dt = e(15) - e(0)$, siempre que la velocidad v sea la razón de cambio instantáneo de la magnitud E, o en términos formales su derivada. ¿Se cumple? ¿Qué falla?. Es posible que al derivar la función y obtener que E'(t)=18t vean que 18 es el doble de 9 y que por lo tanto faltaría dividir por 2 toda la expresión. En cuyo caso se les invitaría a precisar la respuesta y a corroborarla.
- Es posible que, si bien comprendan que para obtener la función de posición deben calcular una integral, no vean en este proceso el hecho de obtener una función que varía respecto del tiempo, en cuyo caso

deberíamos apelar al recurso que usamos en la actividad anterior. Hacer variar el extremo superior de integración, preguntar por el área de los triángulos, encontrar alguna regularidad, llegar a una fórmula explícita de la integral.

Registro de la clase donde se muestra cómo se gestionó la actividad

Después de dar cierre a la Actividad 1 de la Guía 1, el docente practicante prosigue con la Actividad 2 de la misma guía, en lo que se produce el siguiente intercambio.

Nicolás: Bien, avancemos. ¿Quién puede leer la segunda actividad?
Magdalena: La puedo leer yo.
Nicolás: Adelante.

La estudiante lee el enunciado de la Actividad 2, presentada anteriormente en el informe.

Nicolás: Bien, vamos a trabajar primero con los dos primeros incisos y después le mandamos con los últimos dos. Hasta acá, ¿dudas sobre las consignas? (después de un breve silencio una estudiante emite la interjección "Eehm". Denota algún tipo de inseguridad). A ver … tenemos una expresión … ¿Qué expresión tenemos? ¿Qué datos tenemos?
Tomás: La función de velocidad es igual a nueve por t.
Nicolás: Nueve por t (9t). Está medida la velocidad en …(eleva el tono de su voz para indicar que espera que los estudiantes respondan. De manera inmediata, una estudiante toma la palabra).
Magdalena: Metros sobre segundos.
Nicolás: Muy bien. Estos son los datos que tenemos. El móvil, por otro lado, esto también es uno de los datos que tenemos, se desplaza en línea recta.
Magdalena: Y parte del reposo.
Nicolás: Y parte del reposo, perfecto. ¿Qué significa que parte del reposo?
Magdalena: Que está frenado.
Nicolás: O sea que, a tiempo cero, ¿cuál es la velocidad?
Magdalena: Cero.
Nicolás: Bueno, ¿qué es lo que les pide el inciso a?
Magdalena: ¿Cuántos metros recorre el móvil después de quince segundos

de estar en continuo movimiento?

Nicolás: Es decir, arrancar el móvil, pasan quince segundos, quiero saber cuánto recorrió. ¿Y el inciso b?

Magdalena: Encuentre una función que le permita hallar el espacio recorrido por el móvil después de t segundos de marcha.

Nicolás: Perfecto, trabajen un ratito.

En este momento la clase queda en silencio durante uno o dos minutos. Luego comienza a escucharse un murmullo de conversaciones entre los grupos de estudiantes. No llega a registrarse lo que se dicen entre ellos.

Pasados estos dos minutos, el murmullo comienza a subir de volumen, y una estudiante dice en voz alta "¡Una pregunta!", a lo que el docente practicante se acerca y dialoga con la estudiante. Nuevamente, este diálogo queda entre el docente practicante y la estudiante y sus compañeros de banco. En el aula comienzan a hacerse más notorias las voces de los demás grupos de estudiantes y se pueden escuchar términos como "derivada" y "posición".

En el diálogo que sostiene el docente practicante con la estudiante que formuló la pregunta el docente practicante hace la siguiente observación: "¿Cuál es la relación entre la velocidad y la posición de un móvil?", a lo que la estudiante replica que es el tiempo. El docente practicante dice: "Ajá. Bueno, tratemos de recordar. El cuatrimestre pasado vimos varias actividades en las que intervenían estas magnitudes, había un vínculo entre estas magnitudes. ¿Qué hacía que un objeto variase su posición?". La estudiante dice: "¡La velocidad es la derivada de la posición!". El docente practicante repite lo que ha dicho la estudiante en voz alta y añade: "¿Qué enunciaba el Teorema Fundamental del Cálculo? Respecto de las derivadas". Para este momento el rumor de las conversaciones se ha atenuado. La estudiante dice: "Y … respecto a la posición … la diferencia entre la posición final y la posición inicial … era la integral de la posición … no, de la velocidad". El docente practicante asiente y le indica a la estudiante y su compañera que sigan trabajando.

En los siguientes minutos dialoga con otros dos grupos. En algunas oportunidades se puede escuchar varias veces "teorema fundamental" y "sentido de cambio de la velocidad". Tras este tiempo el docente practicante llama a la clase a la puesta en común mostrada a continuación.

Nicolás: Bueno, gente, ¿cómo vamos?

Paloma: Bien.

Magdalena: Bien.

Nicolás: ¿Podemos hacer una pequeña puesta en común, les parece?

Paloma: Sí.

Nicolás: Bueno, cuéntenme, ¿qué han hecho? ¿Qué han podido hacer … en el inciso a?? (Inmediatamente después, sin dar lugar a la respuesta del curso). ¿Cómo lo pensaron al inciso a?

Magdalena: Ehm … pensamos que como tenemos la fórmula de la velocidad, que sería de la posición, y nosotros queremos en metros, entonces pensamos cuál es, digamos, la ecuación de la posición. Entonces pusimos es nueve medios t cuadrado $(\frac{9}{2}t^2)$.

Tomás: Porque cuando nosotros derivamos esa función posición nos queda nueve t (9t), que es la velocidad.

Nicolás: Ajá, correcto.

Magdalena: Y ahí evaluamos la t en quince, que era los segundos que decía el problema, entonces nos quedaría nueve medios por quince cuadrado $(\frac{9}{2}(15)^2)$, y nos dio 1012,5 metros que sería lo que recorrió el móvil después de quince segundos.

Nicolás: ¡Bien! Por ahí veo … también por el otro lado … que lo hicieron parecido, ¿verdad? (refiriéndose al grupo con el que el docente practicante había hablado antes de la puesta en común, a lo que los estudiantes del grupo señalado asienten al unísono). ¿Alguien lo hizo distinto? (Se produce un silencio). ¿Alguien lo pensó por otro lado? Por ejemplo … la pregunta que realmente les estoy haciendo es cómo sabían que la función de posición … va a estar dada por nueve t cuadrada, todo partido por dos $(9\frac{t^2}{2})$.

Reflexión sobre las soluciones aportadas por los estudiantes

Las últimas preguntas que el docente practicante realizase al curso en el diálogo precedente fueron formuladas debido a lo anticipado en la planificación.

Introducimos aquí un fragmento del autorregistro que el docente practicante realizó al finalizar la gestión de la clase:

"Observé también que al encarar la Actividad 2 los estudiantes prefirieron enfrentar el inciso a usando el inciso b. Esto llamó mi atención e insistí en dos o tres oportunidades para que me explicasen cómo habían obtenido que la función que describe el espacio recorrido a tiempo t estaba dada por $E(t) = 9\frac{t^2}{2}$ Los estudiantes pudieron justificar esto diciendo que la derivada del espacio recorrido daba la función de velocidad del móvil que partía del reposo, pero si bien esto era cierto no conseguí encontrar que me diesen algún argumento geométrico o variacional sobre este hecho. El argumento variacional esperado era que la velocidad del móvil representaba la variación infinitesimal de la posición, y que el espacio recorrido, por lo tanto, estaba dado por la integral definida entre dos puntos temporales de la función velocidad. Luego, si se analizaba la gráfica de la función velocidad, se obtenía que la figura que quedaba determinada al plantear la integral era un triángulo de altura y bases conocidas, lo que permitía obtener la expresión que se les pedía. Planteé este argumento gráfico para no perder la oportunidad de retomar el sentido geométrico de la integral".

Consideramos de cierta relevancia detenernos en algunas reflexiones en torno a la actividad realizada por el curso, pues serán retomadas más adelante para realizar algunas discusiones finales.

En principio observamos que ningún estudiante graficó la función de velocidad dada, algo que durante la planificación habíamos considerado como una opción. Esto puede deberse a ciertas nociones en torno al trabajo matemático, en particular, que la representación algebraica de una función aporta la suficiente información como para abstraer el problema y resolverlo de forma mucho más sencilla y eficiente. Parecería existir al respecto cierta creencia según la cual abstracción a lo simbólico (Davis y Hersh, 1989) aporta un grado de rigor y exactitud que no se alcanza con otros tipos de registros de representación (Macías Sánchez, 2014) tales como los figurales, los gráficos o los tabulares.

Es posible que si en la tarea propuesta se hubiese indicado de manera explícita que se graficase la función de velocidad la visualización de la misma a través de un software de geometría dinámica o de la construcción con lápiz y papel podría haber sugerido el cálculo de la integral como el área del triángulo formado por la gráfica de la función, el eje de las abscisas y la ordenada[3] a t = 15.

Advertimos además que la actividad del curso pudo estar fuertemente atravesada por la primera definición proporcionada en el material de lectura, relativa a la antiderivada de una función. En

[3] Se usa aquí "ordenada" en el sentido que le daba Poincaré: una recta paralela al eje de las ordenadas.

efecto, establecido que la velocidad de un móvil es la derivada de la posición del mismo respecto del tiempo, el grupo de estudiantes pudo haber inferido el proceso de antiderivación para obtener la expresión analítica de la posición como sucedió de manera efectiva. Advertimos que al pedir ejemplos sobre antiderivadas al comienzo de esta clase, el curso respondió en general anticipando a la integral como el proceso que "deshace" la diferenciación.

En el fragmento que sigue podemos observar cómo algunas estudiantes se anticiparon a la formulación de una regla general para el cálculo de la integral indefinida de un monomio de grado n. Durante el proceso de planificación, en efecto, pensamos que una de las posibles conjeturas que podrían realizar los estudiantes después de estas actividades introductorias estaría referida al aumento de grado del polinomio en el cálculo de la integral indefinida en el decurso de la discusión siguiente, previa a la Actividad 3 de la guía. El haber tenido en cuenta esta posibilidad permitió al docente practicante que en ese momento gestionaba la clase tomar una decisión que se muestra a continuación.

> Nicolás: ¡Bien! Por ahí veo … también por el otro lado … que lo hicieron parecido, ¿verdad? (refiriéndose al grupo con el que el docente practicante había hablado antes de la puesta en común, a lo que los estudiantes del grupo señalado asienten al unísono). ¿Alguien lo hizo distinto? (Se produce un silencio). ¿Alguien lo pensó por otro lado? Por ejemplo … la pregunta que realmente les estoy haciendo es cómo sabían que la función de posición … va a estar dada por nueve t cuadrada, todo partido por dos ($9\frac{t^2}{2}$) Más allá de que cuando lo derivo me da la velocidad.
> Paloma: Porque era la antiderivada.
> Nicolás: ¿Y cómo la calculaste?
> Paloma: Pusimos nueve por t cuadrado sobre dos ($9\frac{t^2}{2}$).
> Nicolás: (bromeando) Pero … ¿bajó del cielo? ¿Se la bajaron de google? Cuál sería la.
> Sara: Aplicamos la regla de derivación.
> Nicolás: Aplicaron la regla de derivación, pero ¿por qué no dijeron nueve t a la quinta sobre cinco ($9\frac{t^5}{5}$) ?
> Magdalena: Porque la derivada … Nosotros sabemos que cuando tenemos un exponente, si lo vamos a derivar, le vamos a restar uno. Si nosotros queremos buscar la antiderivada al exponente que tenemos le vamos a

sumar uno.

Paloma: Y dividir por ese mismo exponente.

Nicolás: ¡Me encanta eso! ¡Vos!

Magdalena: ¿Yo?

Nicolás: Sí, vos. ¿Magda, verdad? Pasá a escribir esto en un recuadro en el pizarrón.

Presentamos en lo que sigue una observación hecha en el diseño de la planificación para la posterior discusión de este ejercicio:

"En las actividades anteriores obtuvimos algunas antiderivadas de funciones a través de las propiedades geométricas de las mismas. Es decir, sabemos calcular el área de rectángulos y triángulos, conocida sus bases y alturas, y esto nos permitió decir cuánto daba la integral indefinida de una función constante y de una función lineal. Si bien este método se verifica útil en estos casos, existen funciones de las que nos gustaría hallar sus antiderivadas (calcular la integral indefinida) y que no poseen cualidades geométricas que nos permitan hacer lo mismo que antes. Podríamos recurrir, para obtener la integral definida, al cálculo de sumas superiores e inferiores, pero también se ha visto que este método es bastante largo y su dificultad puede variar según sea la función que estamos integrando".

A partir de esta observación, formularíamos el siguiente criterio, que sería usado para justificar los resultados hallados, así como para construirlos en caso necesario.

"*Criterio:* Para saber si una función g es la integral indefinida de f, basta con derivar g y ver si así se obtiene f".

En una primera formulación del diseño de planificaciones planteamos el siguiente escenario posible para capitalizar el trabajo con las primeras tareas:

"En la Actividad 1 obtuvimos que si $f(x) = 3$, entonces $\int f(x)\ dx = 3x$.

En la Actividad 2 vimos que si $v(t) = 9t$, entonces $\int v(t)\ dt = 9\frac{t^2}{2}$

Pregunta: ¿Cuál será el resultado de $\int t^2\ dt$?

Al hacer la pregunta por la integral indefinida de un polinomio de grado 2 no esperamos que puedan resolverlo de forma geométrica. Más aún, es de desear que observen la dificultad que implicaría llevar adelante esta cuenta usando sumas superiores e inferiores, método al cual tuvieron una aproximación durante el eje temático II según el programa del curso. Pretendemos con esta pregunta ver si emerge una conjetura tentativa basada en un razonamiento analógico: la integral del polinomio constante da el polinomio lineal, la del lineal da el cuadrático, la del cuadrático podría dar el cúbico".

Sigue el registro de clase:

Tras la invitación del docente practicante, la estudiante se acerca a la pizarra y comienza a escribir mientras indica qué es lo que está anotando con el fibrón.

> Magdalena: F de x es igual a x al cuadrado, f prima de x … Ah, no, tendría que hacerlo con m. (En este momento borra una parte de lo que había escrito antes, $f(x) = x^2$, quedando $f(x) = x^m$). F prima de x es m menos uno…
>
> Antonio: No, m por x.
>
> Isabel: No, m por x a la…
>
> Gran parte del curso (le dicta a Magdalena): M por x a la m menos 1.
>
> Magdalena (a la par que el coro): Ah, m por x a la m menos uno. (Queda escrito en la pizarra $f'(x) = mx^{m-1}$).
>
> Sara: Pero ahí tendrías que aclarar que m tiene que ser distinto de uno.
>
> Nicolás: ¿Por qué m debería ser distinto de uno?
>
> Algunos estudiantes se ríen nerviosos.
>
> María Paula: No, ¿eso no es cuando hacés la división? Porque no lo podés dividir por cero.

Aquí se produce una discusión grupal en la que participan exclusivamente los estudiantes del curso. Tras esto el docente practicante indica:

Nicolás: Hay un caso en el que no se puede, pero no es el uno.

María Paula: El cero.

Nicolás: ¡Nop!

Magdalena: El menos uno. (Silencio). Seguían tirando el signo (en broma).

Nicolás: (también en broma) Seguían tirando fruta.

Magdalena: Bueno, sigamos, porque creo que no importa qué condiciones tiene la m, ¿no?

Nicolás: De momento no.

Magdalena: Perfecto, gracias. Entonces si nosotros tenemos al revés, o sea si nosotros partimos de una …

María Paula: Derivada.

Magdalena: Claro, de una derivada, por ejemplo g prima de x, que es x a la n ($g'(x) = x^n$), nosotros vamos a saber que la g, que sería la antiderivada, va a ser g de x igual a x a la n más uno, porque hacemos el proceso inverso.

Antonio: Sobre n más 1.

Magdalena: Sobre n más uno, porque en el otro multiplicábamos el exponente, y ahora se lo vamos a dividir.

María Paula: Y ahí sí tiene que ser distinto de 1.

Nicolás: Acá tiene que ser distinto de menos 1.

María Paula: (rectificando mientras el docente practicante habla) De menos 1.

Nicolás: Porque si tuvieras eso, acá en el denominador del cociente ¿qué te queda?

María Paula: Menos 1 más 1.

Nicolás: … y eso no puede pasar.

Magdalena: O sea, ¿eso sería la uno sobre x?

Nicolás: De momento lo dejamos hasta ahí. ¡Bien! ¡Perfecto! Excelente. (Magdalena se retira a su asiento). Digamos que al inciso a lo hicieron resolviendo el inciso b. ¿Alguien lo hizo distinto? ¿Por allá, por atrás?

María Paula: ¡No! Lo mismo.

Nicolás: Una forma de calcular esto es pensar, también, que la velocidad es la variación instantánea … ¿le decimos así, no? de acuerdo, la variación instantánea de la posición. Luego, la integral en un periodo de tiempo va a representar el cambio total del espacio. Y bueno, podríamos ver que si dibujamos de velocidad, sabemos que es una función afín con pendiente nueve. Qué pasa si yo digo "Bueno, quiero ver el intervalo entre cero y quince". O sea, entre acá, y póngale un quince acá. Y ustedes me dicen "Ésta es la integral entre 0 y 15", pero nuevamente, ¿cuál es el sentido de la integral? Que la vimos muy al comienzo cuando empezamos a ver integración.

Magdalena: Es el área por debajo de la curva.

Nicolás: El área por debajo de la curva.

Magdalena: Y eso sería un triángulo.

Nicolás: Esto sería un triángulo, ¿de base?

Magdalena: Quince.

Nicolás: ¿Y altura?

Magdalena y María Paula dudan.

Tomás: Nueve por quince.

Nicolás: ¡Nueve por quince! No me hagan la cuenta de eso que me mareo. Entonces, cuál es el área de esto, según la geometría que conocemos.

Antonio: Nueve por quince al cuadrado.

Nicolás: ¿Nueve por quince al cuadrado…?

Antonio: Sobre dos.

2.7.4.1 Integrales de funciones elementales

El lector encontrará en la Actividad 3 de la Guía 1 (en su correspondiente anexo) el cuadro que se indicó a los estudiantes que debían completar en el que se calculan integrales indefinidas de polinomios partiendo de casos concretos hasta su generalización. Como se describió antes, en la gestión de la actividad previa emergió la conjetura relativa al grado del monomio al ser integrado, lo que permitió el desarrollo de esta actividad con cierta naturalidad.

Observamos que, a raíz del trabajo previo, el grupo también adoptó con mayor facilidad a la integración como el proceso inverso de la derivación. Si bien la clase pudo construir las propiedades de linealidad de la integral, a saber, $\int c\ f(x) + g(x)\ dx = c\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$, en el caso puntual de los polinomios, no es seguro que se apoyasen en la linealidad de la diferenciación en tanto operador derivada (esto es, $\frac{d(cf+g)}{dx} = c\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$, en donde f y g son funciones derivables).

2.8 Modificaciones en la formulación y la gestión de la Actividad 5 de la Guía 1

En el cronograma efectivo, presentado en esta misma sección del trabajo, se puede observar que entre alguna de las tareas previstas a realizarse de manera asincrónica se había pedido la entrega de la Actividad 5 de la Guía 1, que mostramos a continuación.

Actividad 5 de la Guía 1

Actividad 5: Una partícula se mueve en línea recta. La función v, cuya expresión analítica está dada por $v(x) = x^2 - 3x + 2$, representa la velocidad en metros sobre segundos de dicha partícula respecto del tiempo medido en segundos durante el intervalo $[0,\ 3]$. Teniendo esto en cuenta, resuelva:

A. Esboce el gráfico de la función de posición de la partícula, indicando periodos de crecimiento o decrecimiento, intervalos de concavidad, puntos críticos y otros elementos que usted considere pertinentes. Justifique de manera analítica.

B. Elabore una descripción del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo considerado. Señale en esta descripción los momentos en que la partícula avanza o retrocede, si lo hace frenando o acelerando, si se detiene o no. Indique además cuál fue el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo propuesto así como el recorrido total que hizo.

Hemos de recordar aquí que esta tarea fue pensada durante el diseño de la práctica para ser trabajada de manera presencial con el curso. Debido al desfase de calendario que mencionamos en la Sección 2.5.2, tuvimos que decidir qué haríamos con esta actividad, ya que en el primer diseño de la planificación habíamos presentado una gran variedad de discusiones en torno al problema, mientras que el tratamiento del mismo de manera remota (posiblemente) no se adecuaría a dichas proyecciones. No obstante tener esto presente, decidimos que esta actividad formase parte del trabajo asincrónico, pues consideramos que si esperábamos al retorno del trabajo presencial para plantearla no tendríamos el tiempo suficiente como para abordar el método de integración por partes y de fraccione simples.

En las secciones siguientes presentamos algunos extractos del diseño de la planificación en que planteamos la solución a la tarea, así como las propuestas y dificultades que anticipamos y el objetivo general de la actividad. Asimismo, el lector hallará en lo sucesivo algunas resoluciones propuestas por los estudiantes a través del foro en el aula virtual con sus correspondientes análisis y devoluciones.

2.8.1 Resolución

Puesto que la función v representa la velocidad de la partícula respecto del tiempo, se tiene que $p'(x) = v(x)$, siendo p la función que describe la posición de dicha partícula para cada instante de tiempo $x \in [0, 3]$.

Análisis de la concavidad de la función de posición

Puesto que la función p es derivable, se tiene que p es cóncava hacia arriba (respectivamente cóncava hacia abajo) en un intervalo I, si y sólo si, p’’(x) > 0 (respectivamente, p’’(x) < 0) para todo x en I.

Puesto que p’(x)=v(x), se tiene que p es cóncava hacia arriba (respectivamente cóncava hacia abajo) en I, si, y sólo si, v’(x) > 0 (respectivamente v’(x) < 0) para todo x en I.

Si $v(x) = x^2 - 3x + 2$, entonces $v'(x) = 2x - 3.$

Por lo tanto $v'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$

Por la misma equivalencia se tiene que $v'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$

De esto se concluye que $\forall x \in [0, \frac{3}{2}), v'(x) < 0,$ mientras que $\forall x \in (\frac{3}{2}, 3], v'(x) > 0.$

Por lo tanto se sigue que p es cóncava hacia abajo en el intervalo [0, 3/2) y cóncava hacia arriba en el intervalo (3/2, 3].

Puesto que en $x = \frac{3}{2}$ hay un cambio de concavidad, dicho punto resulta un punto de inflexión.

Análisis de la monotonía de p

Por teorema, p es creciente (decreciente) en un intervalo I, si, y sólo si, p’(x) > 0 (p’(x) < 0) para todo x en I.

Como p’(x) = v(x), entonces se reformula de la siguiente manera: p es creciente (decreciente) en I, si y sólo si, v(x) > 0 (v(x) < 0) para todo x en I.

Si $v(x) = 0,$ entonces:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0 \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$(x - \frac{3}{2})^2$

$= \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \vee x = 2.$

Puesto que v’(x) < 0 para todo x en [0, 3/2), se tiene que v es decreciente en dicho intervalo.

Así, si $0 \leq x < 1 \Rightarrow v(x) > v(1) \Rightarrow v(x) > 0.$

Si $1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow v(x) < v(1) \Rightarrow v(x) < 0.$

Y puesto que v’(x) > 0 para todo x en (3/2, 3], v es creciente en dicho intervalo.

Por lo tanto, si $\frac{3}{2} < x < 2 \Rightarrow v(x) < v(2) \Rightarrow v(x) < 0.$

Mientras que si $2 < x \leq 3 \Rightarrow v(x) > v(2) \Rightarrow v(x) > 0.$

Dado que v es una función continua, se tiene que v(x) < 0 para todo x en (1,2), mientras que v(x) > 0 para todo x en [0, 1) y en (2,3].

Luego p es decreciente en (1,2) y creciente en [0,1) y en (2,3].

Puntos críticos

Como v se anula en x=1 y en x=2, se tiene que estos son puntos críticos de p.

Como p es creciente antes de x=1 y decreciente después de este punto, entonces en x=1 p alcanza un máximo local.

Y como p es decreciente antes de x=2 y creciente después de dicho punto, entonces en x=2 p alcanza un mínimo local.

Esbozo de la gráfica

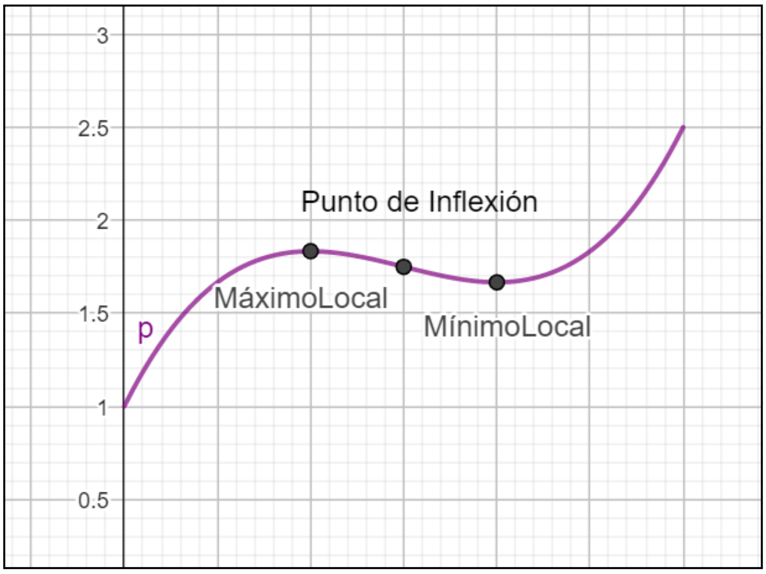


Figura 15: Función p correspondiente a la posición.

Descripción del movimiento

El móvil parte del tiempo x=0 con una velocidad de dos metros sobre segundo desde una cierta posición inicial (desconocida por falta de datos del problema). Avanza frenando hasta el tiempo x=1, en que permanece inmóvil por un instante para luego comenzar a retroceder. En el tiempo x=3/2 el móvil acelera, y sigue retrocediendo hasta x=2, momento en que permanece quieto antes de avanzar nuevamente hasta el tiempo x=3, donde alcanza una posición final con la misma velocidad con la que inició el movimiento. El desplazamiento del móvil está dado por la diferencia entre la posición final y la posición inicial. Para calcular esto se recurre al TFC, viendo que v(x)=p'(x). Por lo tanto $\int_0^3 v(x)\ dx = p(3) - p(0)$ Luego se utiliza el cálculo de integrales aprendido para ver que $\int_0^3 v(x)\ dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c = p(x)$, donde c representa la posición inicial de la partícula. Así se obtiene que $p(3)\ - p(0)\ = \frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 + 2.3 + c - [\frac{1}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 2.0 + c] = \frac{27}{3} - \frac{27}{3} + 6 + c - c = 1,5$. Es decir que el móvil se desplazó, desde su posición original, un total de 1,5m En cuanto al recorrido total hemos de considerar que cuando el móvil retrocede la integral está restando esta cantidad de espacio recorrida. Por lo tanto podemos considerar el intervalo de tiempo en que v(x)<0 y hacerlo positivo, multiplicando por -1. Es decir que debemos calcular:

$$\int_0^1 v(x)\ dx + \int_1^2 v(x)\ dx + \int_2^3 v(x)\ dx = 0.83 + 0,17 + 0,83 = 1,83$$

2.8.2 Otro camino

Puesto que v representa la velocidad de la partícula se tiene que p'(x)=v(x).

Por otro lado, v es una función cuadrática.

Puesto que el coeficiente cuadrático de v es 1, su gráfica será una parábola con ramas hacia arriba.

Por otro lado, si v(x)=0, entonces x=1 o x=2.

Luego la gráfica de v cortará al eje de las abscisas en x=1 y en x=2.

Puesto que el x del vértice se expresa como $x_v = \frac{-b}{2a}$, se tiene que $x_v = \frac{3}{2}$.

Así se tiene que:

$$y_v = v(x_v) \Rightarrow y_v = v(\frac{3}{2}) \Rightarrow y_v = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 \Rightarrow y_v = 2 - \frac{9}{4} \Rightarrow y_v = \frac{-1}{4}.$$

Con estos datos, se elabora el siguiente gráfico (Figura 16):

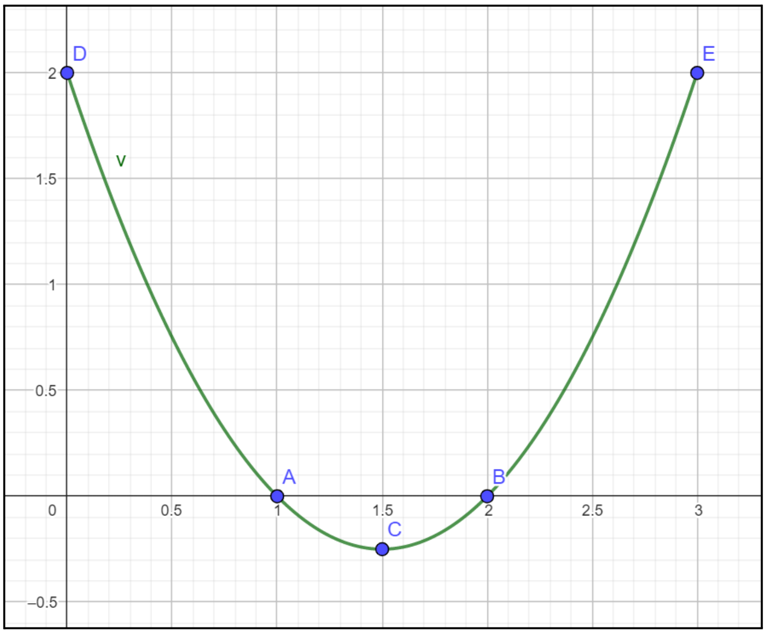


Figura 16: Función v correspondiente a la velocidad

Análisis de monotonía

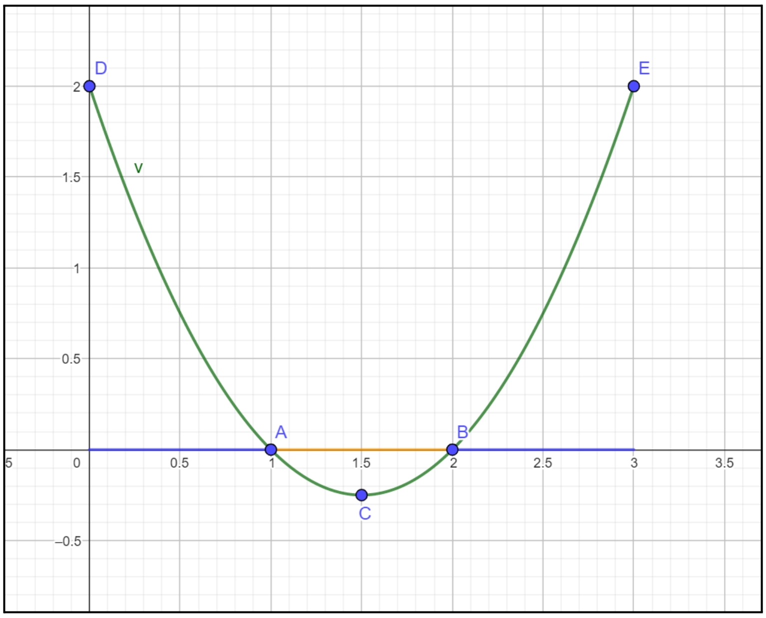


Figura 17: Función v resaltando sus intervalos de crecimiento/decrecimiento.

En el intervalo (1,2) —que en la figura está marcado con anaranjado— la función de velocidad es negativa. Por lo tanto la función de posición p será decreciente en este intervalo.

Por otro lado, la función de velocidad toma valores positivos en los intervalos que en la figura están señalados con azul, es decir en la unión $[0,1) \cup (2,3]$. Por lo tanto la función de posición será creciente en este conjunto.

Como la gráfica corta al eje de las abscisas en los puntos A y B de la figura por ende x=1 y x=2 son puntos críticos de p. Pero como se ha visto que p es creciente antes de x=1 y decreciente después, entonces en x=1 p tiene un máximo local, mientras que en x=2 posee un mínimo local.

Análisis de concavidad

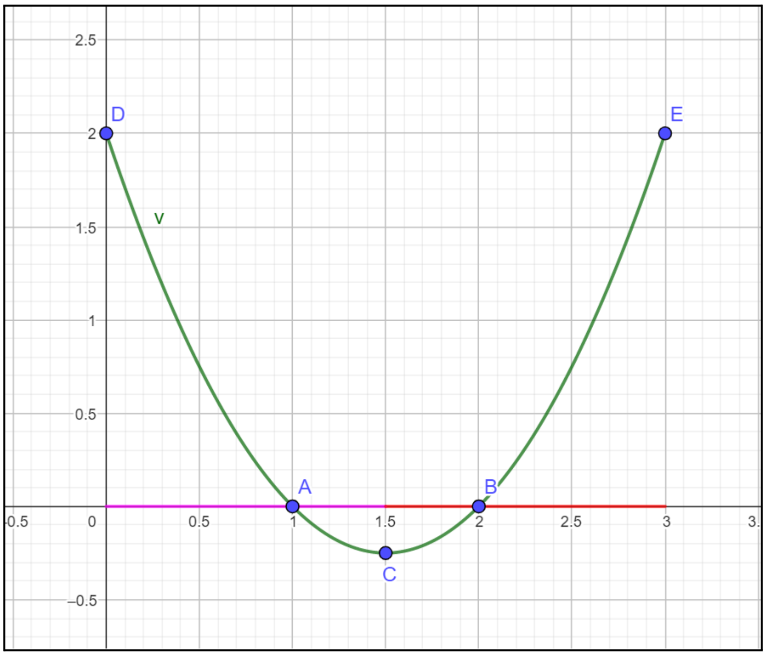


Figura 18: Función v resaltando sus intervalos de concavidad

En esta figura se puede observar que la función de velocidad es decreciente en el intervalo [0, 3/2) (marcado con violeta), y creciente en el (3/2, 3] (marcado con rojo). Por lo tanto la función de posición es cóncava hacia abajo en el intervalo [0, 3/2) y cóncava hacia arriba en (3/2, 3].

Puesto que en el punto C de la gráfica se alcanza un mínimo de la función, hay un cambio de concavidad en este punto, y así se tiene que x=3/2 es un punto de inflexión de p.

2.8.3 Producciones de los estudiantes

A continuación presentaremos algunas de las producciones realizadas por los estudiantes en torno a esta tarea. En las mismas pueden apreciarse también las observaciones que hicimos sobre algunos aspectos del trabajo. Esta presentación nos dará pie a comentar ciertos aspectos vinculados al análisis de las funciones que podrían devenir en modificaciones de la presente actividad. Véase figuras 19, 20, 21, 22, 23 y 24

A diferencia de lo que habíamos previsto, los estudiantes no plantearon preguntas o dudas relativas al significado de la expresión "dar una justificación analítica" que aparece en uno de los incisos de la consigna. Usaron el foro sólo para remitir la resolución de la actividad. No apreciamos ningún otro intercambio entre ellos por este medio ni una retroalimentación hacia nosotros.

Resolución de Antonio (Figuras 19 y 20)

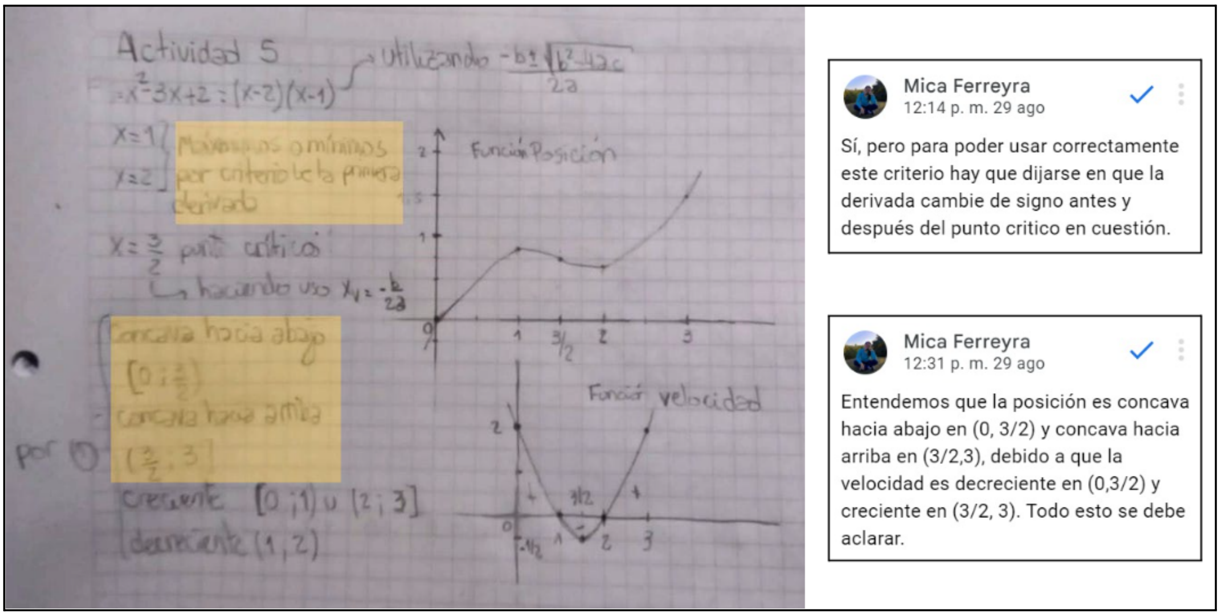


Figura 19: Resolución de Actividad 5 por Antonio

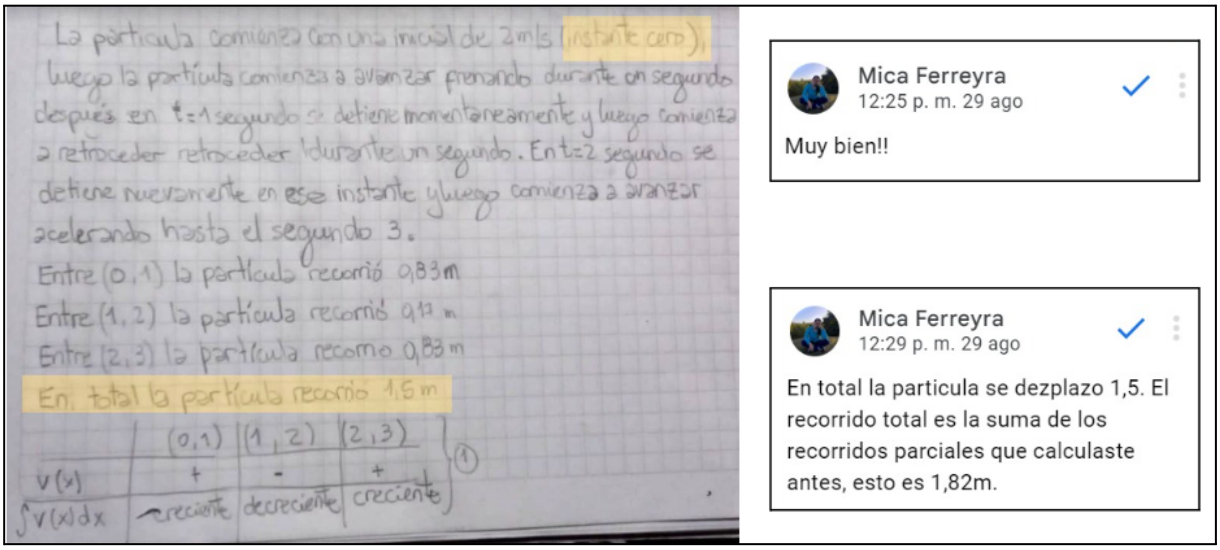


Figura 20: Resolución de Actividad 5 por Antonio.

Análisis de la resolución de Antonio

El estudiante proporciona otra expresión algebraica para la función de velocidad. No deja por escrito cuál es el tratamiento al interior del registro que realiza, si bien señala mediante una flecha que ha usado la fórmula resolvente de Bhaskara. Interpretamos que de esta manera obtiene las raíces de la función cuadrática y con ellas escribe la forma factorizada de la expresión.

Luego indica que las raíces encontradas son máximos o mínimos. Entendemos que al decir que usa el criterio de la primera derivada, ha visto que en estos puntos la función de velocidad se anula, lo que nos lleva a inferir que los máximos o mínimos a los que se refiere lo son de la función de posición. El criterio de la derivada primera al que alude es, posiblemente, el teorema que indica que la derivada de una función se anula en los extremos relativos de la misma.

Señala que el punto $x = \frac{3}{2}$ es un punto crítico, pero no aclara de qué función (lo es de la función de velocidad, por cuanto que es un mínimo absoluto de la función, pero no es punto crítico de la función de posición). Advertimos que liga este resultado con el hecho de ser el x del vértice, pero no deja constancia de la cuenta que lo lleva a esta conclusión.

Señala cuáles son los conjuntos en que una función (que asumimos es la función de posición) es cóncava hacia arriba o hacia abajo, creciente o decreciente. Referencia estos resultados con la Tabla 1, pero si bien en la misma se aprecia una relación entre el signo de la velocidad con la monotonía de la posición, no llega a justificarse en dónde ve el signo de la función de velocidad.

En la columna derecha del texto el estudiante ubica dos gráficos. Cada uno de ellos está encabezado por un título que indica de qué gráfico se trata. En ambos gráficos ha marcado un sistema de ejes cartesianos X e Y. Sólo ha indicado el sentido del eje Y. En el eje X ha destacado los valores x=1, x=2 y x=3.

El gráfico de la función de posición puede describirse como una curva continua que crece en el intervalo [0,1). En x=1 toma un valor máximo y luego decrece en el intervalo (1,2). Alcanza su mínimo en x=2 y luego crece nuevamente en el intervalo (2,3]. Se aprecia claramente que para $x = \frac{3}{2}$ la función tiene un cambio de concavidad: antes de este punto la curva es cóncava hacia abajo y después de él es cóncava hacia arriba.

La representación gráfica de la función de velocidad corresponde con una parábola. La curva es cóncava hacia arriba. Tiene un periodo de decrecimiento en el intervalo $[0, \frac{3}{2})$, mientras que la función es creciente en el intervalo $(\frac{3}{2}, 3].$ La curva llega a su punto mínimo para el valor $x = \frac{3}{2}.$

La descripción del movimiento que elabora es correcta, pero incompleta en tanto que no señala qué ocurre en el instante de tiempo $x = \frac{3}{2},$ en que la partícula comienza a acelerar, pareciendo así que considerase que la partícula acelera a partir del instante de tiempo x=2.

Al referirse al recorrido total de la partícula, indica de manera adecuada la cantidad de espacio recorrido en cada subintervalo de tiempo, pero luego dice que el espacio recorrido totalmente es igual al desplazamiento. En ningún momento deja por escrito cómo obtiene estos resultados.

Comentarios

Notamos que en el gráfico de la función de velocidad el estudiante ha consignado tres signos. Ha escrito cada uno de ellos en la región limitada por el eje de las abscisas y la gráfica de la función. En la primera región ha colocado un “+”, en la segunda un “-” y en la última un “+”. Interpretamos que aquí hace un uso del registro figural para señalar que la función de velocidad toma valores positivos, negativos y positivos en cada región señalada.

Resolución de Tomás (Figuras 21 a 24)

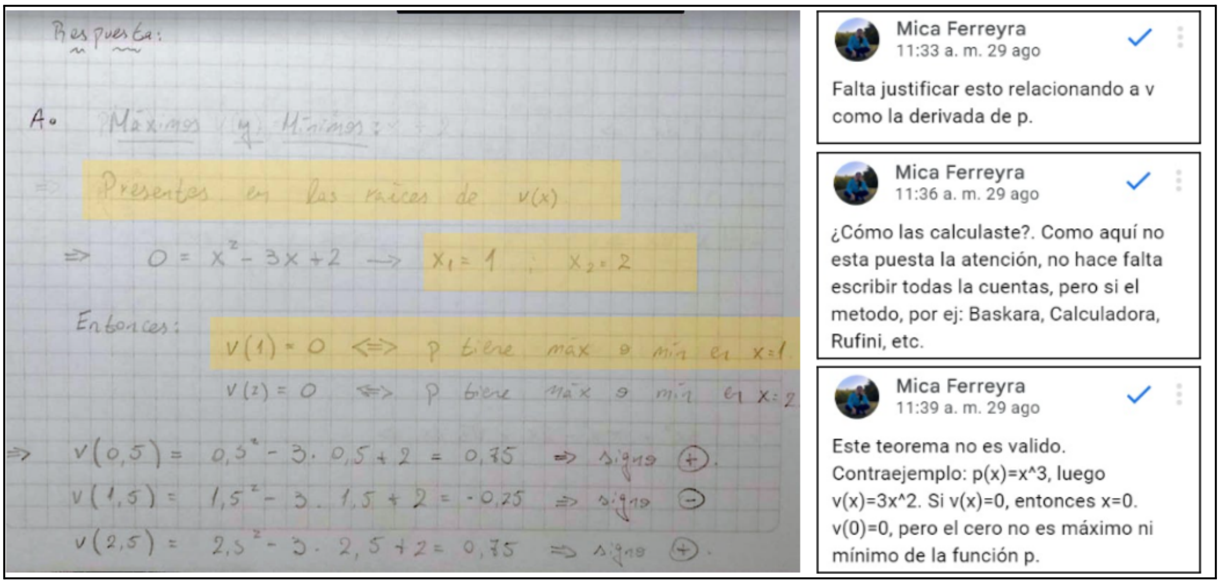


Figura 21: Resolución de Actividad 5 por Tomás.

Figura 22: Resolución de Actividad 5 por Tomás.

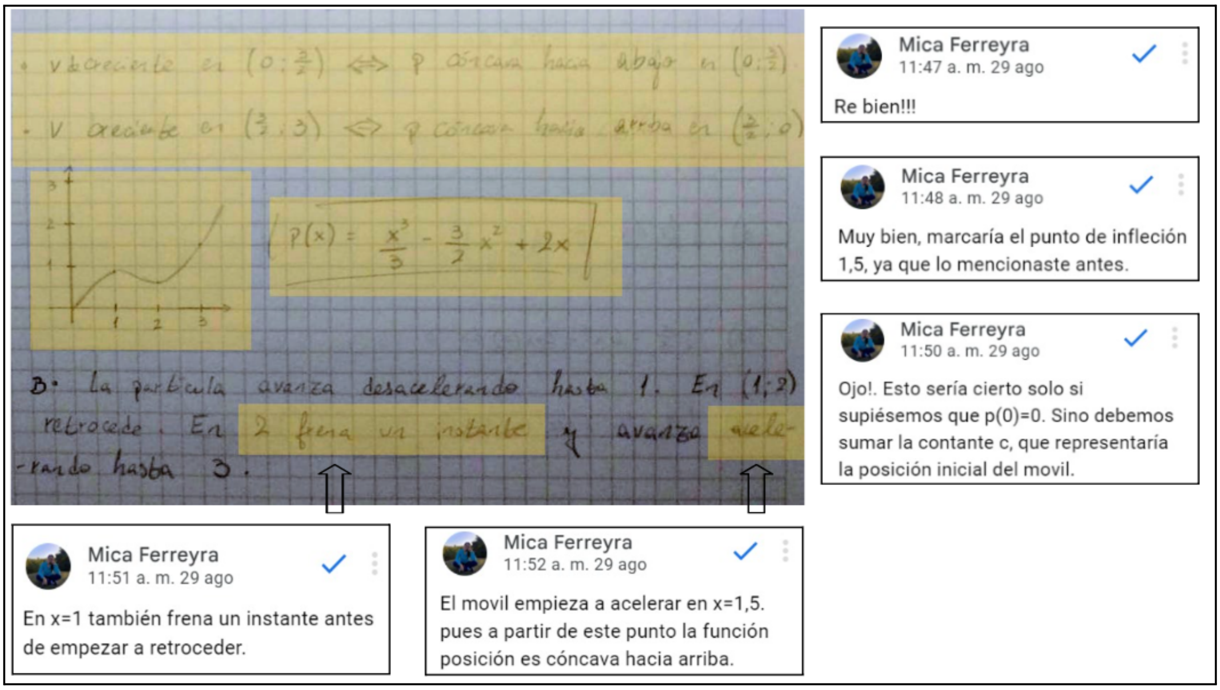


Figura 23: Resolución de Actividad 5 por Tomás.

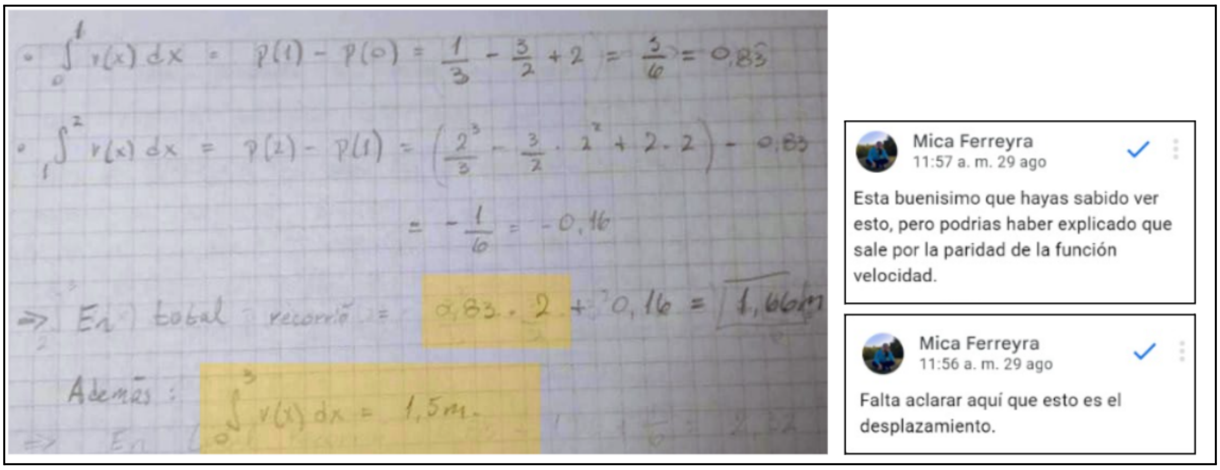


Figura 24: Resolución de Actividad 5 por Tomás

Análisis de la resolución de Tomás

El estudiante escribe la función velocidad igualada a cero y detalla que x=1 y x=2 son sus raíces, sin mencionar el método utilizado para calcular las mismas. Luego evalúa v en dichos puntos y establece que allí p tendrá un máximo o mínimo a través de un si y sólo si. A continuación evalúa v en x=0.5, x=1.5 y x=2.5, realiza la cuenta y mediante un implica/entonces expresa signo +, signo - y signo +, respectivamente. Con ello dice: “v(1)=0 y pasa de - a +si y sólo si p tiene un máximo en 1”, lo mismo para v(2)=0. Avanzando con tu resolución, bajo su título periodos de crecimiento exhibe que: v es positiva en (0,1) y (2,3) si y sólo si p creciente en (0,1) y (2, 3). Mismo argumento para el intervalo (1,2). Para la concavidad busca el vértice de v(x) y obtiene que v es decreciente

(creciente) en (0,3/2) ((3/2,3)) si y sólo si p cóncava hacia abajo (arriba) en dichos intervalos. Por último para finalizar el inciso A grafica la función p, sin destacarla, y a su lado escribe la expresión algebraica $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

En el inciso B describe el movimiento comentando que "la partícula avanza desacelerando hasta 1. En (1,2) retrocede. En 2 frena un instante y avanza acelerando hasta 3". Después calcula dos integrales definidas de v, los extremos de la primera son 0 y 2 mientras que los de la segunda 1 y 2, estableciendo que es igual a realizar p(1)-p(0) y p(2)-p(1), respectivamente. Por último establece que en total recorrió el móvil 0,83.2 + 0,16=1, 66 y que la integral de 0 a 3 de v es igual a 1,5 m.

Resolución de Paloma

La siguiente actividad que presentaremos fue la única devolución de la tarea que no fue subida al foro mediante un documento de imagen. Reproducimos aquí el texto de la misma y la correspondiente respuesta que dio uno de los docentes practicantes.

A_ Como la función velocidad de la partícula es v(x)=x^2-3x+2, y sabemos que la función velocidad es la derivada primera de la función posición pedida, para poder esbozar un gráfico de esta última, lo que hago es igualar v(x) a cero, y de esa manera obtengo los puntos críticos, que en este caso son en x=1 y x=2, en esos puntos la función posición, tiene máximos o mínimos.

Para determinar si son máximos o mínimos, analizó el signo en alguno de los puntos perteneciente a los tres intervalos que determinan los puntos críticos.

Dándome por resultado que en el intervalo (0;1) y (2;3) obtuve valores positivos, por lo tanto esos intervalos corresponden a intervalos de crecimiento en la función posición. Y en el intervalo (1;2) obtuve valores negativos, por lo tanto corresponde intervalo de decrecimiento en el gráfico de la función posición.

Para analizar concavidad, derivé la función velocidad, es decir obtuve la derivada segunda de la función posición.

A esta derivada segunda la iguale a cero y al despejar x , lo que obtuve es el punto de inflexión de la función posición pedida, y analice el signo en los intervalos que ése punto determina.

El punto de inflexión se ubica en x=3/2.

En el (0 ; 3/2) obtuve valores negativos, lo que quiere decir que en ese intervalo la función posición es cóncava hacia abajo.

En (3/2 ; 3) obtuve valores positivos, por lo tanto la función en dicho intervalo es cóncava hacia arriba.

(hice toda esta explicación porque no se como subir una foto al foro de la gráfica que hice, la mostraré en la clase presencial, perdón)

B_ La partícula en en el tiempo cero, viene con una velocidad inicial de 2m/seg.

Desde ese momento la partícula avanza frenando, en el segundo 1, se detiene y comienza a retroceder frenando hasta el segundo 2, donde vuelve a detenerse para luego avanzar acelerando hasta el segundo 3.

El recorrido de la partícula fue en (0,1) recorrió 0,83 m.

En (1;2) recorrió 0,83 m.

En (2;3) recorrió 1,5 m.

Recorrió en total 3,16 m.

Entre el segundo cero y el segundo 2, no hubo desplazamiento, volvió al origen, solo hubo desplazamiento desde el segundo 2 al segundo 3 que se desplazó 1,5 m.

Saludos a todos.

Devolución a la respuesta de Paloma

La presente devolución fue hecha a través de un comentario del foro habilitado a tal efecto.

¡Hola Paloma! Antes que nada, ¡muchísimas gracias por responder! En general el análisis que hacés de la función está muy bueno. Supiste ver que para encontrar los puntos críticos bastaba con igualar a cero la función de velocidad. Lo que quizás faltó ahí, después de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la posición, fue precisar si los puntos críticos eran máximos o mínimos y decir por qué.

Otra cosa importante que querríamos hacer notar en este punto es sobre la justificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Está bien que busques en dónde la velocidad es positiva y en dónde es negativa para establecer crecimiento y decrecimiento de la posición, ¡muy bien! Fijate que igual estás diciendo que evaluaste la función de velocidad en tres puntos y de ahí te salió positiva en el [0,1), negativa en el (1,2) y positiva en el (2,3]. Acá tenés la opción de graficar la función de velocidad, que quizás te sirva para poder afirmar, por ejemplo, que la velocidad es negativa en todo el intervalo abierto (1,2). No hay problema con que no puedas subir fotografías aquí, pero sí podrías contarnos cómo será la gráfica de la función velocidad, haciendo énfasis en los intervalos en que la misma toma valores positivos y negativos. Y también podés volver a echarle un vistazo al video que subimos con la devolución de los diagnósticos, a partir del minuto 17, ahí empezamos a hablar un poco sobre este tema de "probar" que la función sea negativa/positiva en todo un intervalo.

Respecto al inciso b, en general está muy bien la descripción del movimiento de esta partícula. Pregunta: ¿la partícula comienza acelerar en el tiempo x=2? ¿Qué es lo que nos indicaría los intervalos de aceleración/desaceleración?

Sobre el desplazamiento, nos interesaría saber cómo calculaste el mismo, así como el recorrido total. Es decir, qué tuviste en cuenta para dar tus respuestas, e invitarte a revisarlas nuevamente. Esperamos que tus compañeros también puedan sumarse a la discusión, ya sea comentando tu respuesta o indicando cómo han resuelto ellos este punto. Quizás sea bueno recuperar cuál es la noción de desplazamiento y de recorrido total de la partícula.

¡Buen trabajo!

Análisis de la resolución de Paloma

Destacamos aquí la capacidad en el registro verbal de la estudiante. En efecto, elabora una narrativa de su resolución describiendo el cómo, el por qué y el para qué de su actividad. Este tipo de registro favorece la comprensión de la producción y ayuda a interpretar qué es lo que la estudiante hace para resolver la tarea.

En general su descripción es clara y acude a los conocimientos matemáticos adecuados para dar respuesta al problema. No obstante lo anterior, presenta dos errores que fueron destacados a manera de pregunta en la devolución. El primero de ellos, y del que hemos hablado con minuciosidad en la Sección 2.6.5.3 del presente trabajo, referido al análisis de las funciones. Aquí se pone de manifiesto que el uso de la derivada como criterio para conocer la monotonía de la función lleva a considerar esta última como una propiedad puntual en lugar de describir el comportamiento de la función a lo largo de un intervalo.

Por otro lado, al elaborar la descripción del movimiento, asocia el retroceso de la partícula al regreso a su punto de partida y considera así que en el intervalo de tiempo en que retrocedió, perdió todo el camino recorrido durante la primera parte del movimiento.

2.8.4 Comentarios generales

En términos generales las producciones dan cuenta de un buen dominio del registro variacional, analítico y algebraico de las funciones asociadas al fenómeno del movimiento rectilíneo.

Podemos destacar que, a diferencia de lo que hacen Paloma y Tomás en sus producciones, Antonio grafica la función de velocidad, algo que habíamos anticipado como posible. Por otro lado, en las tres producciones seleccionadas los estudiantes hacen uso de las propiedades algebraicas asociadas a la función cuadrática para obtener puntos críticos de la función de posición, y los terminan asociando a los instantes de tiempo en que el móvil se detiene (velocidad cero). Dos estudiantes incluyen la velocidad inicial de la partícula en la descripción del movimiento.

En las tres producciones se puede apreciar que aparece alguna dificultad en la parte decreciente del movimiento de la partícula. Esto se pone de manifiesto al resolver la pregunta por la distancia recorrida y por el desplazamiento, pero también notamos que ninguno de los estudiantes interpretó al punto de inflexión de la función posición como el instante en que la partícula acelera. De esta manera, podemos ver cómo en dos producciones se indica que el móvil retrocede en el intervalo de tiempo (1,2), y sólo cuando la función de velocidad es creciente y positiva se asocia esto a que la partícula avance acelerando. Lo cierto es que el móvil retrocede durante el intervalo (1,2), pero a partir de $x = 1{,}5$ el móvil comienza a acelerar.

Esta contradicción quizás queda de total manifiesto al señalar Paloma que al considerar el intervalo [0,2] no hubo desplazamiento. Indica que todo lo que avanzó durante el primer segundo de marcha lo pierde al retroceder, y sólo en el último tramo es que recorre 1,5 m. Hubiera sido valioso volver sobre este resultado para señalar que el área por debajo de la gráfica de la función velocidad entre 0 y 1 es igual al área entre 2 y 3, por la simetría de la gráfica.

Además observamos que en su producción, Antonio emplea un recuadro en el que indica la relación entre el signo de la derivada y la monotonía de la función, recuperando la observación que hiciéramos en la devolución de la evaluación diagnóstica.

Por último, señalamos que, aún a pesar de haber tenido una buena retroalimentación por cuanto que varios estudiantes del curso subieron sus producciones al foro, no contamos luego con más respuestas en torno a los comentarios y observaciones que hicimos sobre el material.

2.8.5 Posibles modificaciones

Como hemos mencionado, pensamos que podríamos haber gestionado esta actividad en alguna clase presencial posterior, contexto en el que hubiesen podido emerger más discusiones o quizás una mayor retroalimentación con el curso. Sin embargo, también reconocemos que la modalidad asincrónica nos permitió contar con varias producciones escritas en las que pudimos apreciar, sobre todo, los recursos expositivos de varios estudiantes. Asimismo, esperamos que las devoluciones realizadas sobre su material escrito hayan servido como insumo formativo dentro de la secuencia didáctica planteada durante el periodo de prácticas.

Cabe preguntarnos aquí también si la consigna propuesta en sí hubiese fomentado todas las discusiones que habíamos anticipado aún si se hubiera gestionado esta tarea en modalidad presencial. Observamos que las consignas de trabajo son de alguna manera cerradas (en la primera parte de la tarea se pide a los estudiantes que pasen de un registro algebraico a otro gráfico a través de un análisis de las derivadas), y esto no admite demasiadas discusiones. No obstante, el hecho de que en el segundo inciso se pida a los estudiantes que elaboren una descripción del fenómeno modelizado por la función de velocidad deja lugar a cierta interpretación sobre las características analíticas y geométricas observadas en el inciso anterior.

De todas formas, pensamos que esta actividad podría ser mejorada, proponiendo a los estudiantes afirmaciones relativas a la descripción del fenómeno de cuya validez tuvieran que dar cuenta, con el objeto de llevar adelante una indagación indirecta. Por ejemplo, en la segunda producción la estudiante ha dicho que no hay desplazamiento en el intervalo [0,2] pues el móvil ha retornado al lugar de donde partió. Esta respuesta es incorrecta, aunque está fundamentada en la noción de monotonía en tanto que la partícula avanza o retrocede sobre la recta de acción. Ahora bien, cabe hacer una indagación, pero tal cuestionamiento pondría en evidencia que la respuesta no ha sido correcta, por lo que se buscaría otra no ya en atención al conocimiento matemático puesto en juego, sino porque el docente ha señalado un posible error.

Así pues, dejamos aquí el esbozo de una posible reformulación de la actividad.

Variante de Actividad 5 Guía 1

Una partícula se mueve en línea recta. La función v, cuya expresión analítica está dada por $v(x) = x^2 - 3x + 2$, representa la velocidad en metros sobre segundos de dicha partícula respecto del tiempo medido en segundos durante el intervalo [0, 3]. Teniendo esto en cuenta, analice las siguientes afirmaciones relativas al movimiento de la partícula, indicando si son verdaderas, falsas o incompletas. En cada caso, justifique, corrija y complete.

a. Al finalizar el movimiento la partícula tiene la misma velocidad que al iniciar.
b. La partícula se detiene en tres instantes de tiempo.
c. La partícula recorre 1,5 m entre x=2 y x=3.
d. La partícula avanza frenando entre x=0 y x=1 y luego retrocede frenando hasta x=2.
e. En el tiempo x=0 la partícula está en la posición p=5.
f. El recorrido total de la partícula está dado por $\int_0^3 v(x)\,dx.$

2.9 Técnicas de sustitución: negociación con respecto a la manipulación algebraica de los diferenciales.

Para presentar la técnica de sustitución hicimos una revisión de la regla de la cadena. Esto nos permitió concretar dos objetivos bien definidos:

1. Reforzar la noción de la integración como proceso “inverso” al de derivación. La técnica de sustitución, pues, deshace la derivada que se obtiene a través de la regla de la cadena.

2. Que a través del análisis de la estructura de una composición de funciones y de su derivada pudieran reconocer una “estructura”, referido esto a la forma en que se presenta la expresión algebraica de una función, asociándola a la técnica de sustitución en caso de tener que

integrar dicha función.

Esta técnica fue introducida durante la semana de trabajo asincrónica (viernes 26 de agosto). Realizamos un video que dejamos a disposición del curso en el aula virtual, accesible a través de la plataforma YouTube, en el que dimos lectura al material teórico que habíamos sugerido, haciendo comentarios y desarrollando ejemplos mediante filminas.

Destinaremos los siguientes apartados a destacar la relevancia del diseño previo de las prácticas.

2.9.1 Diseño de la práctica correspondiente al método de sustitución.

En esta sección se pone a disposición del lector la Actividad 1 de la Guía 2.

Actividad 1 de la Guía 2

Actividad 1: En cada caso, escriba la función compuesta en la forma f(g(x)). Identifique la función interior u=g(x) y la exterior y=f(u). Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de ellas.

A. $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}.$

B. $h(x) = sen(x^2)$

C. $h(x) = sen(x)^2$

D. $h(x) = tan(\pi x)$

E. $h(x) = e^{cos(x)}$

F. $h(x) = ln(\sqrt{x})$

G. $h(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$

Posibles dificultades

Al tratarse de un ejercicio de repaso estimamos que, en general (para todos los incisos de esta actividad), no se presentarán dificultades en cuanto a la tarea a realizar. Si bien ésta es la situación ideal esperada, contemplamos aún así que los estudiantes hagan emerger las siguientes problemáticas:

1. Que al identificar la función exterior f no sepan calcular la derivada de la misma, pues no ha sido una función que han repasado previamente con nosotros, si bien se encuentra en la evaluación

diagnóstica prevista.

2. Que no sepan describir cuáles son las funciones f y g que constituyen esta composición de funciones.

Intervenciones

Creemos conveniente a los fines del objeto de enseñanza tratar de salvar la primera de las dificultades identificadas con una respuesta directa. La función raíz cuadrada de u se puede expresar como la variable u elevada al exponente ½. Aquí se procede a usar la regla de la derivación ya conocida para estos casos: a saber, el exponente baja como factor y se le resta un grado al exponente.

De manera que $f'(u) = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$

Cabe aclarar que cuando la variable u está elevada a un exponente negativo se trata del inverso de la variable elevada al exponente con signo positivo. Si percibimos durante el monitoreo de esta actividad que las y los estudiantes se topan en su mayoría con esta dificultad consideramos pertinente atraer la atención de la clase al frente y explicar esto en el pizarrón. Indicaremos además que éste es un tema de repaso y que será bastante usado en el resto de las clases, por lo que conviene que vuelvan a leer las reglas de derivación y reaprenderlas para tenerlas a la mano.

Consideramos que la segunda de las dificultades que preveemos tiene mayor relevancia, en tanto que es prioritario que sepan identificar correctamente en una composición de funciones cuales son las funciones que se están componiendo, ya que en esto se basará el método de sustitución.

Podrían ocurrir dos grandes grupos de eventos. En el primer grupo, los estudiantes realizan un intento de identificación de funciones equívoco. V.g. deciden que $f(u) = \sqrt{u^2}.$

Aquí podríamos señalar que la raíz "cancela" el cuadrado, y por lo tanto la función f es la identidad, cosa que no pareciera tener mucho sentido en apariencia. Se les podríamos indicar que, si ellos sostienen que ésta es la función exterior, deben proponer un candidato a función interior y al componer ambas deben obtener la función que se dio en el ejercicio.

El segundo grupo de eventos posibles es que las y los estudiantes no reaccionen de ninguna manera ante el ejercicio. Es decir, ante el enunciado "indique cuáles son las funciones f y g", no sepan qué hacer y, en consecuencia, no hagan nada.

En este caso optaríamos, si percibimos que es una dificultad generalizada, por reconducir la atención de la clase a una puesta en común de las dificultades. Es decir, preguntar y que las y los estudiantes puedan expresar qué es lo que no entienden.

Pensamos que revisando con mayor detenimiento el ejemplo que planteamos antes de esta actividad podríamos orientarlos mejor hacia lo que tienen que hacer. Existe, sin embargo, la posibilidad de que el problema sea aún más básico, cómo no comprender qué está representando una composición de funciones. En consiguiente es posible que entiendan el enunciado de la regla de la cadena, pero que no dispongan de las herramientas cognitivas para identificar f y g. En este caso deberemos detenernos para explicar cómo funciona una composición de funciones.

Observaremos que la función h depende de una variable x. Una composición de funciones ha de entenderse como un encadenamiento de procesos que se realizan sobre la variable x. Cada uno de estos procesos se corresponde con una función. Así, la expresión (f°g)(x) se define como f(g(x)) se indica la siguiente sucesión de "pasos": A la variable x se le aplica primero una función g (un primer proceso o proceso interno). En términos computacionales, x es la entrada y g(x) es la salida, el resultado del proceso. En nuestro ejemplo, el primer proceso que se le aplica a x no es tomarle la raíz cuadrada. Tampoco es sólo elevarla al cuadrado. Podemos identificar al primer proceso como aquel que, dada la variable x devuelve el polinomio $x^2 + x$.

Al finalizar este proceso se obtiene dicho resultado (el polinomio anterior), y a este nuevo objeto g(x) se le aplica un nuevo proceso más exterior (la función f), que en nuestro caso es aquí la raíz cuadrada.

Lo anterior puede ser expresado en el siguiente esquema, en el que la flecha a la derecha indica el resultado del proceso al que se somete la variable x en cada paso de la composición $x \xrightarrow{g} x^2 + x \xrightarrow{f} \sqrt{x^2 + x}$.

En general, de esta interpretación se deduce una forma de encontrar las funciones f y g de una composición.

Se busca en principio la variable y se observa en la estructura de la función a qué proceso se ha sometido primero. Al obtener este resultado obtenemos la función interior g. Luego hay que seguir preguntando a la estructura de la composición qué operación o proceso actúa sobre g(x) para obtener la función exterior f.

La forma de verificar que se ha identificado correctamente a f y g en una composición es seguir el esquema de las flechas, estableciendo claramente qué es lo que hace g sobre x, y qué es lo que hace f sobre g(x). Si el encadenamiento de estos procesos da por resultado la función h entonces hemos hallado las componentes f y g de nuestra h.

2.9.2 Registro de la clase del 19 de agosto.

Durante la primera clase (viernes 19 de agosto), la docente practicante que gestionaba la misma propuso la realización de ejercicios de repaso en torno al cálculo de derivadas de un producto y de una composición de funciones. En este episodio, una estudiante del curso mostró tener dificultades para aplicar la regla de la cadena, por lo que la docente practicante pudo recurrir al guión previsto para el trabajo con la regla de sustitución (Sección 2.9.1).

Presentamos aquí el intercambio que sostiene la docente practicante con la estudiante que presentó la dificultad.

Después de un cierto tiempo tras haber propuesto la tarea al curso, la docente practicante llama la atención de los estudiantes para revisar los resultados de la actividad.

> Micaela: Bueno, ¿cuánto les dio el seno de x al cubo? (Se refiere con ello a la derivada de la función dada por $f(x) = \sin(x^3)$).
> Antonio: Coseno de x al cubo por tres x al cuadrado (refiriéndose a que la derivada está dada por $f'(x) = \cos(x^3)3x^2$).
> Micaela: (Ha repetido lentamente lo que respondió Antonio). ¿A todos les dio eso? (Varios estudiantes del curso responden "Sí" al unísono). ¿Por allá al fondo? (Se refiere a las dos estudiantes que acaban de llegar, María Paula y Milagros, a quienes se acercó antes para explicarles en qué consistía la tarea que estaban realizando).
> María Paula (confusa): No había que hacer…
> Micaela: Sólo la regla de Leibniz y de la cadena.
> María Paula: Ah… yo estaba…
> Micaela: Bueno, pero si tienen el seno de x al cubo, ¿cómo harían? (Las estudiantes ya habían visto que la consigna de la tarea consistía en derivar algunas funciones). Tienen que aplicar la regla de la cadena.
> Se produce un silencio algo largo.
> María Paula: La derivada del seno es el coseno. (Se escuchan algunos movimientos de hojas. La docente practicante espera un momento más).
> Micaela: ¿Cómo es, entonces?
> María Paula: Coseno de x al cubo por seno de x (lo dice con cierta duda en su voz).
> Micaela: Coseno de x al cubo por seno de x. Okey. Ustedes ahí tienen que elegir f y g, ¿no es cierto? Para hacer la composición. ¿Quién es su f y quién

es su g? ¿Saben cómo identificar f y g?

María Paula: Sí, pero g es …

Micaela: Ésta es una composición de funciones, o sea que aquí en esta función habrá una f y una g. Entonces tenemos en el seno de x al cubo tenemos una f y una g. Me habías dicho que para vos … g es el seno de x al cubo? (La estudiante responde muy bajito, no se escucha lo que dice). Bueno, vamos a hacer lo siguiente para que puedan identificar siempre quién es f y quién es g en una composición de funciones. Cuando tengamos una composición de funciones tenemos que pensar que es una maquinita. ¿Qué es lo que le hacemos a la x? Yo tomo cualquier x, pensemos si quieren en un x particular, el número dos, y consideremos ese ejemplo, el seno de x al cubo. Tenemos el dos, ¿qué le hacemos a ese dos primero?

Antonio: Lo elevamos al cubo.

Micaela: Lo elevamos al cubo, ¿están de acuerdo? Si yo pongo x igual a dos, primero lo elevamos al cubo, ¿y a ese resultado qué le hago?

Paloma: Le aplicas el seno.

Micaela: Le aplicamos el seno. Entonces, justamente, la primera función es la función interna, y ésa va a ser la g, y la segunda función es la función externa, y ésa va a ser la f. Entonces así se identifica una composición. Si tengo el seno de x al cubo, como primero le aplicó el cubo eso es g, y después le aplicó el seno, eso es f.

2.9.3 Análisis global del aprendizaje de la técnica de sustitución

Al analizar las producciones que enviaron algunos estudiantes como tarea encontramos que en general pudieron dominar bien la técnica de sustitución en los distintos ejercicios propuestos.

Tales ejercicios fueron secuenciados siguiendo un criterio que establecimos de la siguiente manera:

1. En los primeros ejercicios se les pediría a los estudiantes que identificasen siempre en una función h un producto de funciones: uno de los factores sería una composición entre dos funciones, mientras que el otro factor estaría dado por la derivada de la función interior del primero. En símbolos, cada función h fue expresada como $h(x) = f(g(x))\, g'(x)$. Procuramos que en estos casos siempre estuviera presente la expresión de la derivada de g.

2. Escribimos de manera intencional los cocientes como productos entre funciones. Por

ejemplo, si $h(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, entonces escribimos $h(x) - e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$.

3. Intercambiamos algunos factores para que los estudiantes viesen como algo natural el conmutar los términos en un producto. Por ejemplo, propusimos $h(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^3$, que debía ser reescrita como $h(x) = (\ln x)^3\frac{1}{x}$. De esta manera, la integral por calcular queda expresada como $\int (\ln x)^3 \frac{1}{x}\, dx$. Por lo tanto, si $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$. Así se podría "reemplazar" la expresión $\frac{1}{x}\, dx$ por du en la integral.

4. Asimismo, introdujimos de forma gradual casos en que la derivada de la función g no se hallase completa (es decir que faltase alguna constante multiplicando a la expresión). Por ejemplo, para calcular $\int x^2\sqrt{x^3+2}\, dx$, se puede ver que si $u = x^3 + 2$, entonces $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Sin embargo, en el integrando no aparece $3x^2$, mas sí aparece x^2, por lo que, para que "aparezca" g', como en las primeras integrales, ha de multiplicarse toda la expresión por una constante.

   En el último ejemplo, esperábamos que tomasen alguno de estos dos caminos:

   a. $$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+2}\,3x^2dx =$$
   $$\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du.$$

   b. $$u = x^3 + 2 \Rightarrow du = 3x^2\, dx \Rightarrow x^2\, dx = \frac{du}{3} \Rightarrow$$
   $$\int \sqrt{x^3+2}x^2\, dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\, du.$$

No obstante, varios estudiantes dieron solución a las integrales despejando el dx de las ecuaciones en derivadas, algo que no habíamos previsto. Esto devino en que tuviésemos que replantearnos si daríamos por correctas las soluciones obtenidas a través de este tratamiento.

2.9.4 ¡Despejaron el dx!

En las siguientes producciones apreciamos que varios estudiantes realizaron una manipulación que no habíamos tenido en cuenta, a saber:

Si $du = g'(x)\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{g'(x)} \Rightarrow \displaystyle\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,g'(x)\,\frac{1}{g'(x)}\,du =$

$\displaystyle\int f(u)\,du$.

Aplicada esta estrategia al ejemplo anterior, los estudiantes declararon que si $u = x^3 + 2$, entonces $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$. Por lo tanto $du = 3x^2\,dx$, de donde se concluye que $dx = \dfrac{du}{3x^2}$. Así pues, reescribieron la integral original reemplazando el dx por la expresión obtenida, quedando que

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx = \int x^2\sqrt{u}\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{x^2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du.$$

En la siguiente producción (Figura 25) se puede apreciar en la columna derecha del texto la estrategia ya comentada para resolver $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx.$

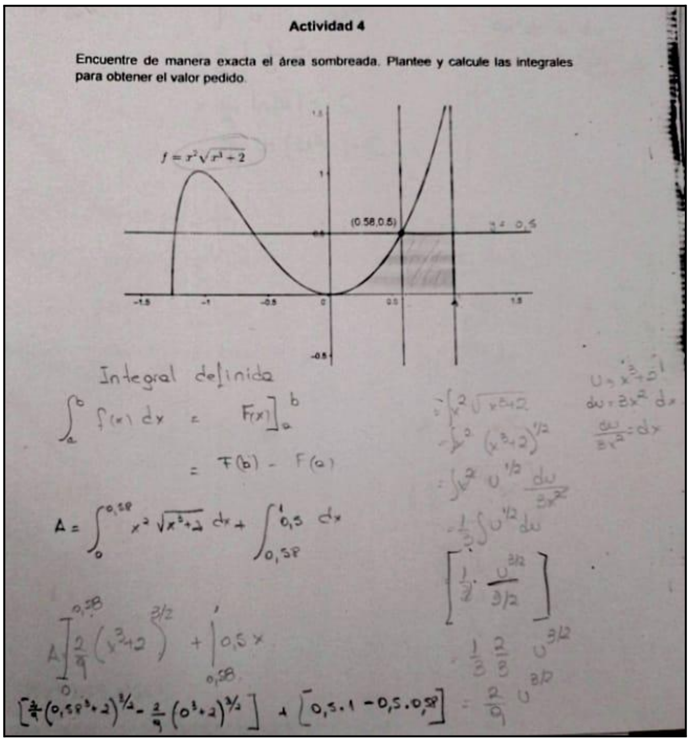


Figura 25: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por Sara

A quienes aplicaron este tratamiento al interior del registro algebraico, indicamos que la estrategia es válida en tanto que permitía llegar a una solución, pero insistimos en que evitasen dividir la igualdad por una función pues podría ocurrir que existiese algún valor de x en el que la función se anule.

Cuando en la clase siguiente retomamos estos comentarios, varias estudiantes señalaron que no importaría que la función se anulase en algún x, puesto que la derivada de g se simplificaría.

Teníamos en claro que consideraríamos como válido el procedimiento que habían aplicado, pero aún así nos dirigimos al docente del curso por correo electrónico para conocer su opinión al respecto. En su respuesta manifestó que era algo habitual y que él también solía darlo por válido, por lo que con los estudiantes establecimos el criterio de que era algo que podían hacer, y que la sustitución estaría bien siempre que, terminado este procedimiento, en la expresión de la integral no apareciese por ningún sitio la variable x.

2.9.5 Consideraciones teóricas

Nos parece relevante detenernos aquí para presentar al lector algunas consideraciones con relación al episodio descrito en la sección anterior, pues volveremos sobre él en la última sección de este trabajo.

En la discusión con los estudiantes se pusieron en tensión dos puntos de vista. Uno, formal, en el que no se admitiría fácilmente multiplicar por el inverso de una expresión sin antes validar que dicha expresión fuese distinta de cero. Otro, práctico, en el que una estudiante expone con claridad que no le parece importante que se haga cero porque dicha expresión se simplifica. En retrospectiva, tal planteo nos parece potente, puesto que la estudiante apela a la manipulación que hace de los objetos matemáticos para cuestionar una corrección y defiende así la forma en que realizó el ejercicio. Este tipo de cuestionamientos favorecen el desarrollo de ciertas discusiones sobre lo que está y no está permitido hacer cuando se resuelve un ejercicio de matemáticas, manifestando así que debe haber una razón que valide o invalide tal o cual proceder. Baste observar, por el momento, que este tipo de actividad no se ciñe a cómo resolver el ejercicio, sino que se acerca al tipo de actividad que realiza un matemático.

Al elaborar el diseño de la planificación realizamos un profundo análisis respecto de la manipulación de las expresiones diferenciales. La expresión $\frac{du}{dx}$ se refiere a la derivada de u respecto de x, lo que introduce cierta idea de dependencia entre estas variables (u es una función de x). Si asociamos esta expresión por medio de una igualdad a la notación que usa el signo ‘ para representar a la derivada (si u depende de x a través de g, entonces g’ representa a la derivada de g), entonces es “tentador” considerar que la primera notación de la derivada es un cociente de diferenciales y puede comportarse como una expresión algebraica susceptible de un tratamiento algebraico estándar. es decir, si $u = g(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx}\,dx = g'(x)\,dx \Rightarrow du\,\dfrac{dx}{dx} = g'(x)\,dx \Rightarrow du = g'(x)\,dx.$

Hemos visto que este tratamiento algebraico es generalmente aceptado en distintos contextos. En varios libros de texto sobre cálculo se aplica con cierta frecuencia y es habitual ver este uso en clases de física. No obstante, la expresión $\dfrac{du}{dx}$ no es un cociente de diferenciales, sino un símbolo que representa a la derivada. Cabe preguntarse entonces qué sentido tiene el símbolo dx cuando aparece en otros contextos, por ejemplo en la expresión $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Puesto que la técnica de sustitución pone en movimiento este particular tratamiento algebraico de las expresiones en que se ve involucrado el símbolo dx, indagamos sobre la génesis de este concepto en el contexto del cálculo infinitesimal.

La notación de la derivada como “cociente” de diferenciales fue introducida por Leibniz a finales del siglo XVII y su uso se extendió debido a la potencialidad simbólica del cálculo. Por ejemplo, si y es una variable que depende de x, entonces $\dfrac{dy}{dx}$ representa la variación que experimenta la variable y si la variable x varía de manera “infinitesimal”. Luego, se tiene que $\displaystyle\int \frac{dy}{dx}\,dx = \int dy = y,$ con lo que se reconstruye el Teorema Fundamental del Cálculo. Leibniz no aportó ninguna definición rigurosa sobre el símbolo dy. Antes bien se basó en una comprensión intuitiva del concepto de variación infinitesimal para justificar las operaciones algebraicas en las que intervenían estos símbolos. Si bien esta notación favorecía el planteo de ecuaciones diferenciales y su resolución, la imprecisión en el concepto generó varios cuestionamientos al interior de la comunidad de matemáticos de la época.

En los albores del siglo XIX, Cauchy presentó una formulación de la derivada y la integral partiendo de la definición del concepto de límite de una función, lo que hizo innecesario lidiar con las imprecisiones de los diferenciales. Si Δy representa la variación que de la variable y cuando se ha producido una variación $\Delta x,$ entonces la derivada de y respecto de x se define como $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$ Por otro lado, Cauchy proporcionó una definición formal de diferencial. Si y=f(x), entonces dy es una función de dos variables que depende de x y de dx dada por $dy = f'(x)\,dx.$ Aunque el diferencial ya no era necesario en términos formales, los físicos seguían usándolo para resolver problemas y por ello se propuso una definición precisa de este concepto. No obstante, tal definición no llega a capturar el sentido pleno que poseía la diferencial en la exposición de Leibniz (Martínez Torregrosa et al., 2002).

Frente a estas perspectivas se antepone la formulación de Fréchet. Si se considera la definición de función diferenciable, se puede definir de manera formal el diferencial de modo que esté justificado el tratamiento algebraico de ecuaciones en derivadas. Al mismo tiempo la definición de Fréchet del diferencial conserva la noción intuitiva de variación infinitesimal de una magnitud. Sin embargo, debido a la complejidad de esta última teoría, optamos por trabajar de manera informal con la ecuación en derivadas $\frac{du}{dx} = g'(x).$ Es decir, la expresión $\frac{du}{dx},$ que a priori es una notación para la derivada de u respecto de x, simboliza ahora también un cociente de diferenciales.

Así pues, y a causa de esta decisión, no podíamos proporcionar un argumento por el cual no estuviese permitido despejar el diferencial de x de la expresión $\frac{du}{dx} = g'(x).$ En sí, ya el "despejar" el diferencial de u de la misma era algo que no se había definido.

Preferimos, en consecuencia, no imponer una regla que no pudiera ser justificada mediante las herramientas de las que disponían los estudiantes dentro del vagaje de su formación matemática, y aceptamos finalmente que este tipo de tratamiento algebraico con los diferenciales sería válido.

2.10 Método de integración por partes

Al igual que con la técnica de sustitución, presentamos el método de integración por partes asociándolo a la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones. En el material de lectura correspondiente hicimos un sucinto repaso de esta última mediante el enunciado de la regla y la resolución de un ejemplo. A partir de la misma expusimos una deducción del método de integración por partes y dimos también un ejemplo resuelto que pudiera servir como modelo para los siguientes ejercicios.

No apreciamos grandes dificultades en la aplicación de esta técnica por parte del curso, aunque podemos señalar que algunos estudiantes buscaron otras fuentes de información, como videos de YouTube, para calcular la integral del logaritmo natural.

Destinamos un módulo a la revisión de los ejercicios que habían quedado pendientes, e insistimos en varias oportunidades en que, de la manera en que abordábamos el método, esta técnica presentaba una componente que no podía reducirse a un algoritmo de cálculo. Es decir, una parte del método consiste en la elección, entre dos funciones, de una que fungirá como la derivada de otra, y esta elección no responde a un criterio prefijado, sino sólo a la simplificación, cuando sea posible, de una segunda expresión que ha de integrarse en la siguiente etapa del método.

2.11 Integrales de funciones racionales a través de la descomposición en fracciones simples

A diferencia de lo que hicimos para los anteriores métodos de integración estudiados, no pudimos abordar la descomposición en fracciones simples desde una regla de derivación previa debido al carácter de la técnica, que se basa en una propiedad algebraica del anillo de polinomios, a saber que todo polinomio admite una única descomposición en polinomios irreducibles. La dificultad principal de esta técnica está en comprender el proceso por el cual una función racional se descompone en suma de funciones racionales simples o irreducibles. Por lo tanto, a la hora de presentar esta técnica diseñamos una estrategia consistente en plantear a la descomposición en fracciones simples como el proceso inverso a la suma de funciones racionales a través de un ejemplo que la docente practicante expuso durante la gestión de la clase.

Por tal motivo, sólo presentamos dos de los cuatro casos posibles que podrían darse en este tipo de ejercicios.

Primer caso

Aquel en el que dada una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, el polinomio q admite una factorización en polinomios irreducibles de grado uno con raíces distintas. Es decir que $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$, en donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Segundo caso

Aquel en el que en la factorización prima del polinomio aparecen polinomios irreducibles de segundo grado junto con polinomios irreducibles de primer grado con raíces distintas. Es decir, $q(x) = p_1(x)p_2(x) \ldots p_r(x)c_1(x)c_2(x) \ldots c_s(x)$. En donde $p_i(x) = (x - x_i)$, cumpliéndose la misma condición que en el caso 1 para las raíces; y en donde $c_i(x)$ es un polinomio cuadrático sin raíces reales y con término cuadrático 1, tales que $i \neq j \Rightarrow c_i(x) \neq c_j(x)$.

Por otro lado, todas las tareas que propusimos con relación a este método de integración estuvieron inscriptas dentro del paradigma del ejercicio con referencia a la matemática pura. En los mismos siempre procuramos que el grado del polinomio p fuese menor que el grado del polinomio q con la intención de no saturar la técnica de integración con un paso adicional como podría serlo el ejecutar una división de polinomios. Además, todas las funciones racionales para integrar las elegimos de manera tal que los polinomios de la descomposición prima fuesen siempre mónicos (i.e. con el coeficiente principal igual a 1), teniendo en mente el mismo objetivo.

En general, el grupo de estudiantes sabía resolver sistemas de ecuaciones lineales, con lo que optamos, a la hora de planificar las clases, por no insumir tiempo en la resolución de los sistemas para centrarnos en el cálculo de las integrales obtenidas.

Como hemos señalado más arriba, el docente responsable del curso, al analizar los ejercicios propuestos, observó que no se daba ninguno en el que se tuviese que aplicar el arcotangente para resolver alguna integral. Como además durante el diseño de las prácticas introdujimos la derivada de la arcotangente para ser usada en este tipo de actividades, añadimos algunos ejercicios en los que se presentase esta situación de una clase a la siguiente, y antes de dar por cerrado el tema de fracciones simples uno de los docentes practicantes añadió un ejemplo ($\int \frac{dx}{x^2+1}$) que realizó en frente de la clase para exponer cómo debía procederse ante un caso análogo.

2.12 El área de un círculo: Aplicación de la sustitución trigonométrica

Durante el diseño de la planificación consideramos la necesidad de abordar el cálculo del área de un círculo como una de las aplicaciones de la técnica de sustitución debido a su relevancia histórica y a la frecuencia con que se emplea esta magnitud en el contexto de varios problemas geométricos.

Planteamos esta intención al docente encargado de la cátedra quien nos dijo que él suele abordar este tema después de la introducción del método de integración por fracciones simples.

Creemos conveniente señalar que, si bien el método de sustitución empleado para hallar el área de un círculo de radio r no difiere en su formulación teórica, es necesario realizar alguna aproximación práctica a este tipo de problemas, pues entrañan una dificultad conceptual que escapa a una primera presentación de la técnica de sustitución. El teorema que sustenta la aplicación es el cambio de variable, enunciado a continuación:

<u>Teorema del cambio de variable</u>: Sea $g : [a, b] \longrightarrow I$ continua en $[a, b]$ y

derivable en (a, b) con derivada continua, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I.

Entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En la secuencia que planteamos al curso, enseñamos a reconocer la estructura de una composición para aplicar el teorema del cambio de variable en tanto que la integral de la izquierda de la igualdad se transforma en la integral de la derecha. Sin embargo, como ocurre con la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición en el conjunto de los números reales $(\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}, a(b+c) = ab + ac)$, la igualdad vale también de derecha a izquierda. En este caso se habla de una "sustitución inversa", o de sustitución trigonométrica, como lo presenta James Stewart. Siguiendo con la analogía planteada anteriormente, el "inverso" de la propiedad distributiva es "extraer factor común".

Así pues, debido a que priorizamos la técnica de integración por partes y la descomposición en fracciones simples, no dimos la teoría ni las tareas previstas para abordar el tema de sustitución trigonométrica, sin renunciar, pese a ello, a ofrecer el caso del área del círculo a modo de caso de aplicación de esta técnica.

Por lo demás, presentamos este ejemplo en la guía referida a la aplicación de la integral para el cálculo de áreas de regiones del plano, por lo que lo pensamos de manera introductoria al tema.

En lo que sigue presentamos el diseño de la resolución de la tarea, que fue presentada por uno de los docentes practicantes, y algunos comentarios en torno a lo ocurrido en el curso.

Después que el docente practicante expusiera la resolución de una integral racional a través del uso de la descomposición en fracciones simples y del arcotangente, se expuso delante del curso la siguiente tarea: calcular el área de un círculo de radio r. Las posibles soluciones que se habían pensado para exponer se presentan a continuación.

2.12.1 Resolución

El área de una figura no se ve afectada por los movimientos rígidos aplicados a esta figura. Por lo tanto podemos calcular el área del círculo de radio r con centro en el origen de coordenadas. Empleamos aquí lo que sabemos sobre geometría analítica, viendo que el conjunto que describe al círculo de centro (0,0) y radio r está dado por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Si observamos el dibujo de este conjunto podemos apreciar que hay una simetría entre el semicírculo superior y el inferior. Por lo tanto, bastará que calculemos el área del semicírculo superior y que a este resultado lo dupliquemos para obtener el área del círculo. Así pues nos centraremos en calcular el área del conjunto dado por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y \geq 0\}$.

Podemos ver este problema de la siguiente manera: deseamos calcular el área por debajo de la semicircunferencia superior. Entonces, si conseguimos expresar esta curva en términos de alguna función, hallando asimismo los extremos de integración adecuados, podremos expresar el problema en términos de integrales. Observemos que la semicircunferencia superior está determinada por los puntos en el plano que satisfacen que $x^2 + y^2 = r^2 \wedge y \geq 0$.

Si se despeja de la primera ecuación la variable y se obtiene que $y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Pero como y es positiva, se tiene finalmente que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si decimos que $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces el área de la semicircunferencia superior estará dada por la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$. Hemos de resolver, pues, la integral indefinida $\int \sqrt{r^2 - x^2}dx$. para usar la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo y evaluar en los límites de integración. Tal y como mencionamos en la introducción, declaramos que:

$$x = r\cos(u) \Rightarrow \frac{dx}{du} = -r\sin(x) \Rightarrow dx = -r\sin(u)ddu.$$

Por lo tanto:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int -\sqrt{r^2 - (r\cos(u))^2}r\sin(u)du.$$

Si se opera dentro de la raíz se puede sacar factor común el cuadrado del radio, quedando que:

$$\int -\sqrt{r^2 - (r\cos(u))^2}r\sin(u)du = \int -\sqrt{r^2 - r^2\cos(u)^2}r\sin(u)du = \int -r\sqrt{r^2(1 - \cos(u)^2)}\sin(u)du =$$
$$\int -r\sqrt{r^2}\sqrt{1 - \cos(u)^2}\sin(u)du = \int -rr\sqrt{1 - \cos(u)^3}\sin(u)du = -r^2\int \sqrt{1 - \cos(u)^2}\sin(u)du.$$

Ahora bien, si se recuerda la identidad pitagórica, se puede deducir de ella lo siguiente:

$$\cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 1 \Rightarrow \sin(u)^2 = 1 - \cos(u)^2 \Rightarrow \sin(u) = \sqrt{1 - \cos(u)^2}.$$

Aquí hemos tomado la raíz cuadrada positiva, pues los puntos de la semicircunferencia superior están asociados a los valores positivos de la función seno.

Si reemplazamos esta expresión en la última integral planteada, queda que debemos resolver finalmente $-r^2 \int \sin(u)^2 du.$

Por el ejemplo 3 de la página 472 de Stewart se conoce el resultado de esta integral y se obtiene que $-r^2 \int_{\pi}^{0} \sin(u)^2 du = r^2 \int_{0}^{\pi} \sin(u)^2 du = r^2(\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}) + c|_0^{\pi} =$

$-r^2 \int \sin(u)^2 du = -r^2(\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}) + c$, con c una constante de integración.

Para poder usar el TFC y evaluar esta primitiva en los extremos de integración que planteamos al comienzo del ejercicio, debemos observar que antes la variable x se movía entre -r y r. Se debe descubrir ahora entre qué valores se mueve la variable u, recordando que puesto que $x = r\cos(u) \Rightarrow u = \arccos(\frac{x}{r}).$

Luego se tiene que:

$$-r \leq x \leq r \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{r} \leq 1 \Rightarrow \arccos(-1) \leq u \leq \arccos(1) \Rightarrow \pi \leq u \leq 0.$$

Por lo tanto ha de calcularse:

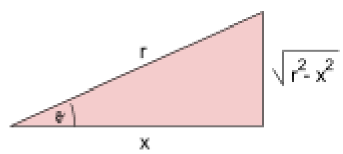
$$r^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4})$$

$$+ c - r^2(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \times 0)}{4}) - c = r^2(\frac{\pi}{2} - \frac{0}{4}) = r^2\frac{\pi}{2}.$$

Se ve entonces que el área del semicírculo de radio r está dada por $\frac{\pi}{2}r^2$, de donde se tiene, por la simetría observada al comienzo de este problema, que el área del círculo de radio r será πr^2.

2.12.2 Resolución alternativa

Se puede devolver la integral indefinida a una función dependiente de x si se usa la figura del triángulo rectángulo.



Se observa lo siguiente: Por identidad trigonométrica de la página 472 de Stewart se ve que $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$.

Además se tiene que si $x = r\cos(u) \Rightarrow u = \arccos(\frac{x}{r})$.

Por lo tanto se concluye que:

$$r^2(\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}) = r^2(\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{r}) - \frac{1}{4}2\sin(u)\cos(u)) = \frac{r^2}{2}(\arccos(\frac{x}{r}) - \sin(u)\cos(u)).$$

Si se ve el triángulo rectángulo de la figura anterior se observa que $\cos(u) = \frac{x}{r}$, mientras que $\sin(u) = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - x^2}$.

Por lo tanto:

$$\frac{r^2}{2}(\arccos(\frac{x}{r}) - \sin(u)\cos(u)) = \frac{r^2}{2}(\arccos(\frac{x}{r}) - \frac{1}{r^2}x\sqrt{r^2 - x^2}).$$

Se concluye finalmente que:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}(\arccos(\frac{x}{r}) - \frac{x}{r^2}\sqrt{r^2 - x^2})|_{-r}^{r}.$$

Al evaluar esta función en los extremos de integración se obtiene:

$$\frac{r^2}{2}(\arccos(1) - \frac{r}{r^2}\sqrt{r^2 - r^2}) - \frac{r^2}{2}(\arccos(-1) - \frac{-r}{r^2}\sqrt{r^2 - (-r)^2}) = -r^2\pi\frac{1}{2}.$$

2.12.3 Comentarios generales

Al exponer la resolución de esta actividad el docente practicante prefirió emplear la segunda estrategia planteada por considerarla en aquel momento más accesible a los estudiantes. El docente practicante usó la pizarra de velcro descrita en la Sección 1.4.2 para dibujar la figura del triángulo rectángulo presentada en la resolución. El docente practicante consideró en aquel momento que, puesto que no habían enunciado el teorema del cambio de variable teniendo en cuenta el cambio en los extremos de integración, y puesto que al presentar la técnica de sustitución se había insistido en volver a expresar la integral en función de la variable original (en este caso, la variable x), era más compatible con la secuencia apelar a la transformación de la última expresión mediante las relaciones trigonométricas expresadas en la figura.

El docente practicante dio comienzo a su exposición a través de la pizarra de velcro previamente mencionada, pero luego, para llevar adelante el desarrollo de las transformaciones algebraicas, observó que varios estudiantes del curso se habían perdido. Decidió llamar a uno de los estudiantes para que escribiese en la pizarra del aula en caracteres visuales las transformaciones algebraicas que han sido presentadas en estas páginas. Aquí reconocemos que, ante una situación semejante, sería favorable contar con el desarrollo algebraico por escrito para seguirlo y comentarlo durante la gestión de la clase.

La implicación de uno de los estudiantes en el proceso de escritura en la pizarra merece cierta atención por nuestra parte.

En principio pudimos observar que durante la exposición del docente practicante los estudiantes estuvieron atentos a los pasos en "las cuentas", así como en la explicación que sustentaba la validez de dichas transformaciones algebraicas. Por otro lado, la experiencia resultó novedosa para el docente practicante, quien pidió al estudiante que escribiera y narrase el desarrollo con una doble finalidad: por un lado de control sobre la producción y por otro de índole didáctica. Hemos de señalar aquí que esta petición pudo haber llegado a tener cierto grado de dificultad, en tanto que el estudiante tenía que escribir y narrar al mismo tiempo, cosa a lo que no estaba acostumbrado, y que ocasionó en varias oportunidades que hubiera cierto desfase o superposición en la información proporcionada por el docente practicante de manera oral y por el estudiante de manera escrita.

Por último, este tipo de gestión nos permitió detectar cierto error en la notación y enfatizar la necesidad de apelar a un texto de tipo expositivo para presentar un resultado.

En un momento el estudiante escribió en el pizarrón:

$$\ldots \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \ldots$$

Esto pasó inadvertido por el docente practicante, ya que el estudiante sólo indicó oralmente que calcularía la integral indefinida. Sin embargo, un tiempo después se generó una cierta discusión cuando una estudiante señaló que no entendía lo que había escrito su compañero, comentando que como durante la semana anterior no había podido asistir a clases tal vez se había perdido de algo.

Ante este cuestionamiento, el docente practicante interpretó que la dificultad radicaba en el uso del Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal, y explicó en breves palabras que primero debían calcular la integral indefinida de la función para luego evaluarla en los extremos de integración.

En aquel momento, el docente de la cátedra intervino, y observó que quizás Magdalena tenía alguna dificultad con el signo de igualdad que vinculaba la integral definida con la integral indefinida. Advertido por este comentario, el docente practicante consultó a Antonio por lo que había puesto, y él procedió a leer el fragmento.

Cuando el docente practicante corrigió la equivocación, señalando que no se puede convertir una integral definida en una integral indefinida de aquella manera, Magdalena preguntó entonces cómo habría de escribirse. El docente practicante respondió que se podía dejar expresada la integral definida, finalizando la oración con un punto, y luego escribir algo como "Se calculará a continuación la integral indefinida para luego usar el TFC", luego escribir la integral sin los extremos y comenzar a resolver esa antiderivada. El docente practicante insistió en el uso del texto en castellano para comunicar con la mayor claridad y precisión posibles las ideas.

Durante la instancia evaluativa el docente practicante volvió sobre este detalle cuando Antonio expuso la resolución de la tarea que debía realizar. al hacerle una devolución, el docente practicante le dijo que se había quedado pensando en el problema de notación, y que una posible forma de pasar de la integral definida a la indefinida sería la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\int f(x)\,dx)|_a^b$$

La única advertencia que realizó el docente practicante fue que esto sobrecargaba la notación, ya que en cada transformación algebraica sobre la integral debería indicarse con la barra vertical que dicha función debería evaluarse en los extremos de integración.

2.13 Aplicación al cálculo de áreas

Al plantear las tareas para introducir el cálculo de áreas de regiones determinadas por curvas mediante la integral retornamos al sentido geométrico con el que se plantea la misma: la integral es el área por debajo de una curva.

A través de la siguiente actividad pudimos consolidar esta noción.

<u>Actividad 4 de la Guía 4</u>

Actividad 4: Dada f(x)=cos(x), g(x)=sen(x), grafique la región determinada por f, g y la curva x=0 y la región determinada por f, g y la curva x=$\frac{\pi}{2}$. Luego, calcule el área de la unión de las regiones.

El docente practicante que gestionaba en ese momento la clase empleó la pizarra de velcro descrita en 1.4.2 para hacer la gráfica de ambas curvas y marcar el punto de intersección entre ellas. Se pudo explicar mediante el recurso visual que el área deseada (el área que quedaba entre las curvas), podía calcularse obteniendo el área de la curva superior y quitándole el área determinada por la curva inferior.

2.13.1 Posible reorganización en la secuencia didáctica

Hemos de observar en este apartado que las tareas propuestas en la guía correspondiente al tema de cálculo de área fueron pensadas por nosotros como problemas con referencia a la semirrealidad para recuperar nuevamente algunas discusiones sobre ciertos fenómenos variacionales. No obstante, el curso en general comprendió rápidamente la forma de enfrentarse a los problemas (mediante el cálculo de integrales de una diferencia de funciones), y nos resultó difícil propiciar las discusiones en torno al significado de los resultados obtenidos.

Además notamos que la mayoría de fenómenos que modelizamos a través de esta aplicación de la integral podrían haber sido trabajados sin haber visto antes el método de integración por partes ni la descomposición en fracciones simples. Es por ello que en una posible reformulación de la secuencia, nos plantearíamos ciertamente como posible abordar el cálculo de áreas de regiones después de haber introducido la técnica de sustitución.

2.13.2 Uso de tecnologías digitales

El objeto de enseñanza (las técnicas de integración) nos restringió el uso de algunas tecnologías digitales. En efecto, nuestro interés se centraba en que los estudiantes pudieran calcular integrales indefinidas a través de las técnicas propuestas y que esto les permitiera resolver integrales definidas mediante el Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal. Al elaborar el diseño de la planificación consideramos que ninguna de las tareas se prestaba para el uso de algún software específico que reorganizara el trabajo en el aula. Muchos programas y aplicaciones pueden calcular integrales definidas e incluso proporcionar las expresiones algebraicas de las integrales indefinidas. Nuestro objetivo era que pudieran aplicar estas técnicas sin recurrir a ningún medio informático. Sin embargo, cuando dimos este tema nos percatamos de que el uso de alguna aplicación que permitiese el cálculo de integrales podría agilizar las discusiones en torno a las nociones puestas en juego dentro de los problemas, dejando libre la atención para plantearse otras cuestiones relativas a los fenómenos modelizados.

2.14 Presentación del instrumento de evaluación

En esta última sección ponemos a disposición del lector el instrumento que empleamos para realizar la evaluación de carácter sumativo.

Para realizar dicha evaluación elaboramos dos guías de tareas en las que planteamos 4 ejercicios semejantes a los propuestos durante el periodo de prácticas y que abordaban todos los tópicos estudiados. Entregamos los enunciados a los estudiantes para que desarrollasen por escrito las actividades y las enviasen por correo electrónico. Sin embargo, no obtuvimos respuesta de ningún estudiante. El último día de prácticas se tomó la instancia evaluativa, que consistió en la exposición oral de un ejercicio seleccionado al azar por parte de cada estudiante. De esta manera, no solo evaluamos los conocimientos matemáticos requeridos para la resolución de los mismos sino también la claridad en la comunicación de los resultados como parte fundamental de la formación docente inicial.

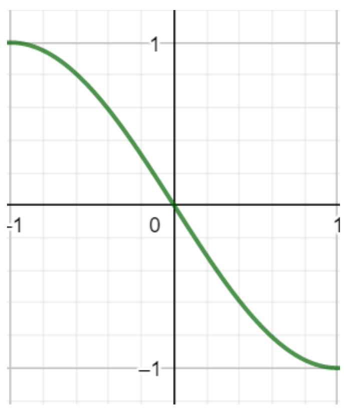
Para evaluar tuvimos en cuenta los siguientes dos criterios:

1. Conocimiento matemático aplicado en la resolución de la tarea.
2. Claridad en la exposición oral y uso apropiado del soporte visual.

En lo que sigue dejamos al lector los enunciados de la instancia evaluativa.

Instancia Evaluativa A

Actividad 1: Sea $g(x) = \int_{-1}^{x} - sen(\frac{\pi}{2}t)\, dt$.



Sin calcular la integral indefinida responda:

a) Evalúe g(-1) y g(1).
b) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?

c) ¿Dónde g tiene un valor máximo?

d) ¿Cuál es la concavidad de la función g?

e) Calcule g, es decir, dé una expresión analítica para esta función.

f) Calcule g(x), para x = - 1/2, -⅓, 0, ⅓, ½.

g) Grafique la función g en el intervalo [-1,1].

Actividad 2: Calcule las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int \ln(\tan(x))(\sec(x))^2 dx.$

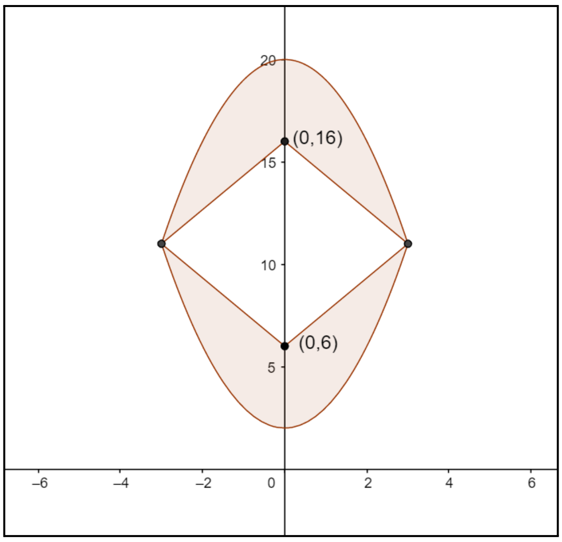
b) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\, dx.$

c) $\displaystyle\int (x+7)^3 \ln(x+7)\, dx.$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

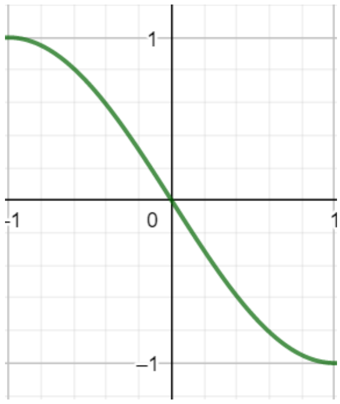
Actividad 3: Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad $v(t) = t^3 e^t$, medida en metros sobre segundos después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?

Actividad 4: Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, sabiendo que la región exterior está determinada por las funciones $f(x) = 20 - x^2$. y $g(x) = x^2 + 2.$



Instancia Evaluativa B

Actividad 1: Sea $g(x) = \int_{-1}^{x} - sen(\frac{\pi}{2}t)\, dt.$



Sin calcular la integral indefinida responda:

a) Evalúe g(-1) y g(1).
b) ¿Sobre qué intervalo es creciente g?
c) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
d) ¿Cuál es la concavidad de la función g?
e) Calcule g, es decir, dé una expresión analítica para esta función.
f) Calcule g(x), para x = - 1/2, -⅓, 0, ⅓, ½.
g) Grafique la función g en el intervalo [-1,1].

Actividad 2: Calcule las siguientes integrales indefinidas.

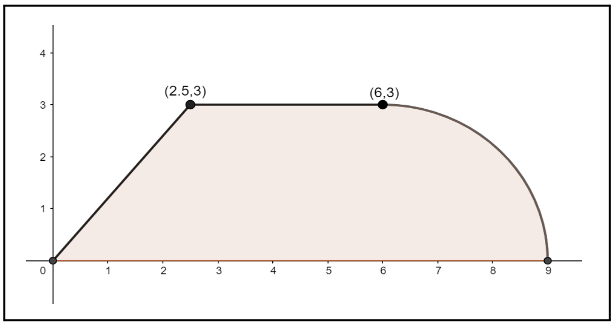
A. $\displaystyle\int \frac{-4x+4}{x^3+4x}\, dx.$

B. $\displaystyle\int 2\sin(x)\cos(x)\, e^{\sin(x)}\, dx.$

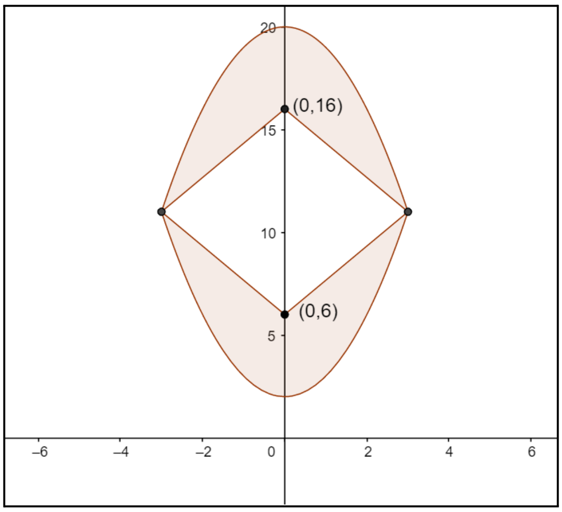
C. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx.$

D. $\displaystyle\int x(\tan^2(x)+1)\, dx.$

Actividad 3: Calcule el área de la región sombreada en la siguiente figura.



Actividad 4: Calcule el área de la región sombreada de la siguiente figura, sabiendo que la región exterior está determinada por las funciones $f(x) = 20 - x^2$. y $g(x) = x^2 + 2$.



Síntesis

A lo largo de esta sección hemos expuesto la concepción y el desarrollo de aquellas actividades que juzgamos de mayor interés en función de las nociones matemáticas que pusieron en juego y las dificultades y propuestas que generaron en los estudiantes. El lector podrá advertir que el objeto de estudio tratado durante el periodo de prácticas contiene una considerable cantidad de información. El objeto de estudio, por otro lado, no aparece desprovisto de dificultades y problemáticas, entendido tanto como un conocimiento propio de la disciplina, así como un conocimiento por enseñar. Analizamos con cierto detalle las tareas que han puesto de manifiesto estas dos dimensiones. El motivo fundamental del trabajo fue que los estudiantes, en medio del tratamiento al interior del registro algebraico, no perdiesen de vista las ideas fundamentales que dieron lugar a la formulación de la teoría del análisis matemático. En la última sección de este trabajo abordaremos más de cerca esta problemática. Mostraremos una selección de tareas que, a nuestro juicio, ponen de relieve la importancia de generar ambientes de aprendizaje que promuevan la coordinación de los distintos registros de representación de las funciones y, a su vez, permita desarrollar una capacidad crítica para extraer información del objeto estudiado de acuerdo a la situación problemática planteada.

3. Elección y análisis de una problemática de estudio

3.1 Introducción

Volveremos nuestra atención hacia ciertas tareas propuestas que resultaron significativas dentro del diseño de planificación debido a la importancia que dimos durante el mismo a las nociones fundamentales del cálculo integral.

En la Sección 2.1 presentamos la planificación anual del curso. En la misma encontramos que se abordó el concepto de integral partiendo de fenómenos geométricos y variacionales. En el tercero de los ejes temáticos debíamos introducir las técnicas de integración.

Nos propusimos desarrollar una secuencia didáctica que no representase una ruptura con el trabajo que el curso había realizado hasta ese momento. Fue éste el motivo de que sostuviésemos, en la medida de lo posible, una propuesta de trabajo que propiciase una dinámica áulica semejante a la percibida durante el periodo de observaciones. Asimismo, algunas de las tareas que diseñamos fueron pensadas para que el curso apelase a la construcción geométrica que se elaboró de la integral definida como área por debajo de una curva, así como el cambio acumulado de la variación de una magnitud, lo que se traduce en el cambio total de esta última.

Esta revisión de la implementación del diseño en clases nos ha permitido establecer ciertas comparaciones entre el trabajo efectivo realizado por el grupo de estudiantes y aquel que habíamos previsto. Estas discrepancias nos dan lugar a la formulación de algunos interrogantes relativos a las normas que enmarcan la actividad matemática al interior del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En las siguientes páginas expondremos con mayor detenimiento las producciones que suscitaron nuestro interés. Proporcionaremos también algunos posicionamientos teóricos que nos permitan reformular estas cuestiones para adquirir una mejor comprensión de las dinámicas que rigen en el aula y replantear la tarea docente y prever situaciones derivadas de la misma.

3.2 Génesis de la problemática

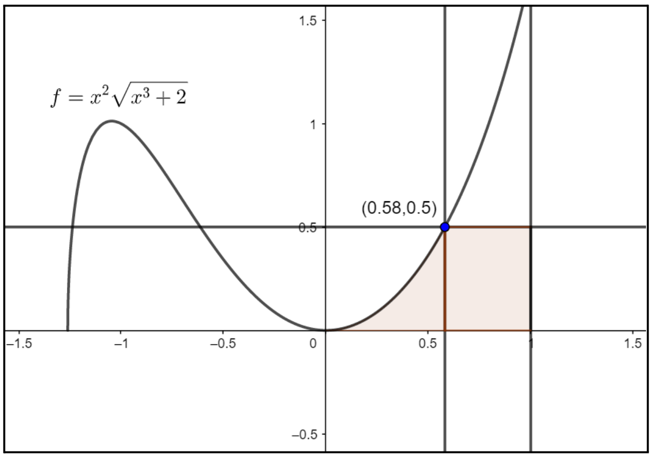
En esta sección presentamos las tareas diseñadas para la práctica docente a partir de las cuales emerge el objeto de análisis. El lector podrá encontrar los enunciados de las consignas, las producciones de los estudiantes y el correspondiente análisis.

3.2.1 Tarea 1

Esta tarea se corresponde con la Actividad 4 de la Guía 2 que se encuentra en el anexo correspondiente del presente trabajo.

3.2.1.1 Enunciado

Encuentre de manera exacta el área sombreada. Plantee y calcule las integrales para obtener el valor pedido.



3.2.1.2 Producciones de los estudiantes con sus respectivos análisis

Producción de Milagros

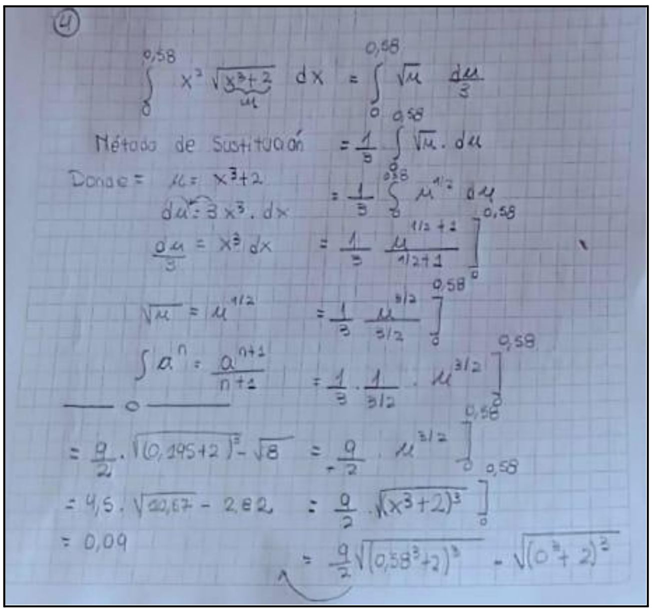


Figura 26: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por Milagros.

Análisis de la resolución de Milagros

En la producción de Milagros (Figura 26), podemos advertir que la consigna de calcular el área sombreada se relaciona con la de dar respuesta a una integral definida.

La estudiante plantea una integral definida. Dicha integral se corresponde con el área de la región que se halla por debajo de la curva $y = x^2\sqrt{x^3+2}$ en el intervalo $[0; 0,58]$.

Resuelve la integral usando la técnica de sustitución. Si bien al plantear el cambio de variable $u = x^3 + 2$ llega a un resultado equívoco al establecer que $du = 3x^3dx$, al seguir calculando la integral ignora esto y llega a que:

$$\int_0^{0,58} x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \int_0^{0,58} \sqrt{u}du$$.

Hemos de advertir aquí que en ningún momento cambia los extremos de integración al calcular. En un sentido estricto esto tampoco es correcto según el teorema del cambio de variable.

Finalmente, llega a un resultado numérico que propone como respuesta a la consigna. En ningún momento advierte que hay una parte de la región que está omitiendo.

Producción de María Paula

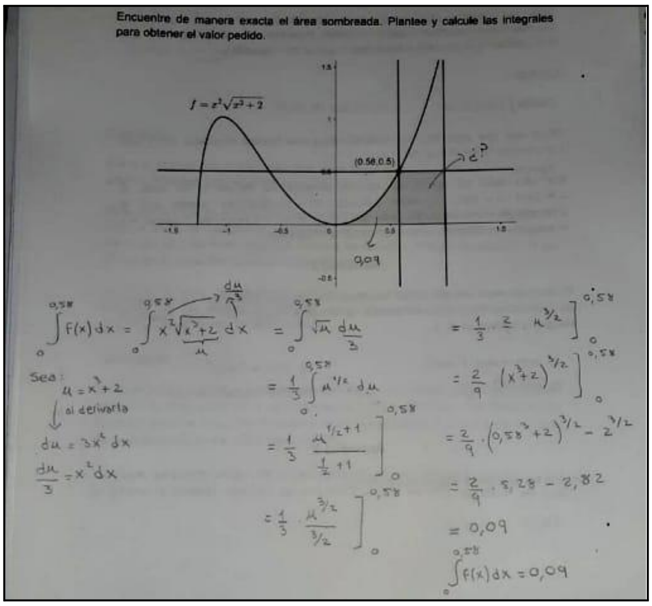


Figura 27: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por María Paula

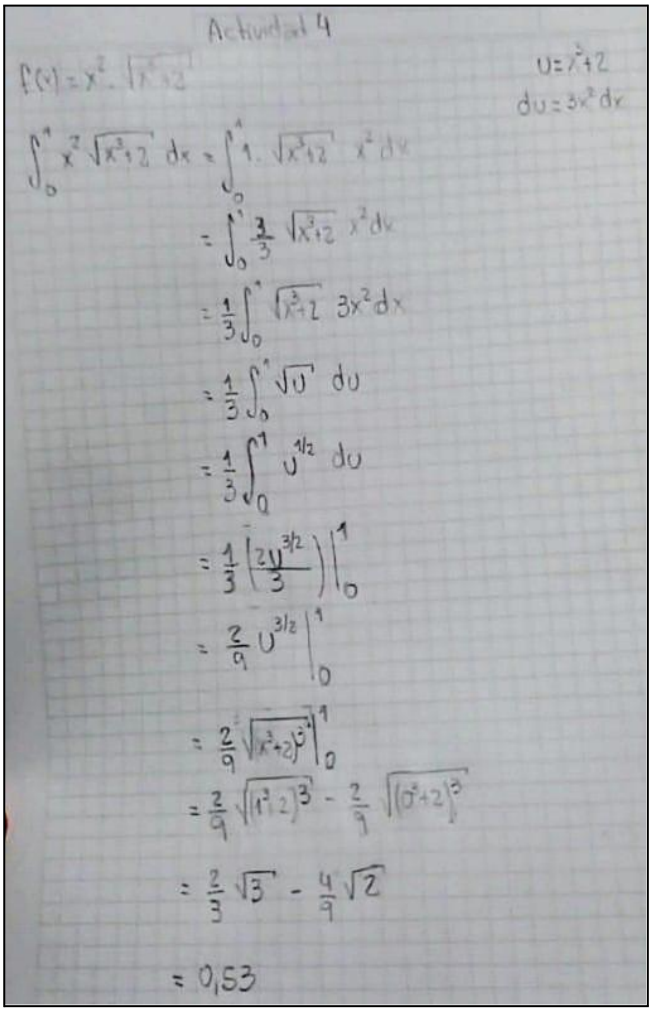
Análisis de la resolución de María Paula

Se puede observar que la estudiante María Paula ha realizado su producción (Figura 27) sobre una copia del material de lectura en el que se planteó la tarea. Esto le permite formular un interrogante mediante un esquema.

Plantea y resuelve la integral definida correspondiente al área por debajo de la curva $y = x^2\sqrt{x^3+2}$ en el intervalo $[0; 0,58]$. al igual que Milagros, no cambia los extremos de integración al hacer la sustitución, pero sí plantea correctamente que $du = 3x^2\,dx$

Más allá del correcto planteo de la integral y del cálculo de la misma mediante la técnica de sustitución y el Teorema Fundamental del Cálculo, la estudiante ha sido interpelada por una figura que muestra una región, y tras esa interpelación usa la figura para interrogar. Su pregunta no está formulada explícitamente. No podemos saber qué es lo que pregunta, pero sí sabemos que pregunta por ese algo que está en el gráfico del enunciado.

Producción de Antonio



Actividad 4

$f(x) = x^2 . \sqrt{x^3+2}$

$u = x^3+2$

$du = 3x^2\,dx$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \int_0^1 1.\sqrt{x^3+2}\;x^2dx$$
$$= \int_0^1 \frac{3}{3}\sqrt{x^3+2}\;x^2dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{x^3+2}\;3x^2dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{u}\;du$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\;du$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2u^{3/2}}{3}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{9}u^{3/2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+2)^3}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{9}\sqrt{(1^3+2)^3} - \frac{2}{9}\sqrt{(0^3+2)^3}$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{4}{9}\sqrt{2}$$
$$= 0{,}53$$

Figura 28: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por Antonio.

Análisis de la resolución de Antonio

Al igual que en las anteriores producciones el estudiante ha asociado su respuesta a una integral definida. Esta integral, por lo tanto, será el área de la figura que se le presenta.

La integral ha sido bien resuelta. La técnica de integración ha sido empleada correctamente.

Al igual que en las producciones anteriores, no se han cambiado los extremos de integración para hacer la sustitución.

Lo que vuelve a llamar la atención es el planteo de la integral definida que el estudiante realiza.

Al indicar que calculará $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ está diciendo que considera la región definida por la curva $y = x^2\sqrt{x^3+2}$ en el intervalo [0;1]. Esta no es la región propuesta en la figura.

Si se compara con la producción de Milagros, aparecen ciertas similitudes a la vez que ciertas discrepancias. Milagros indicó que los extremos de su integral serían el 0 y el 0,58. ¿Por qué hasta 0,58 y no hasta 1? Si percibió que a partir de x=0,58 ocurría algo extraño, ¿qué fue lo que advirtió? ¿Antonio notará que a partir de x=0,58 cambia la definición de la curva?

Producción de Sara

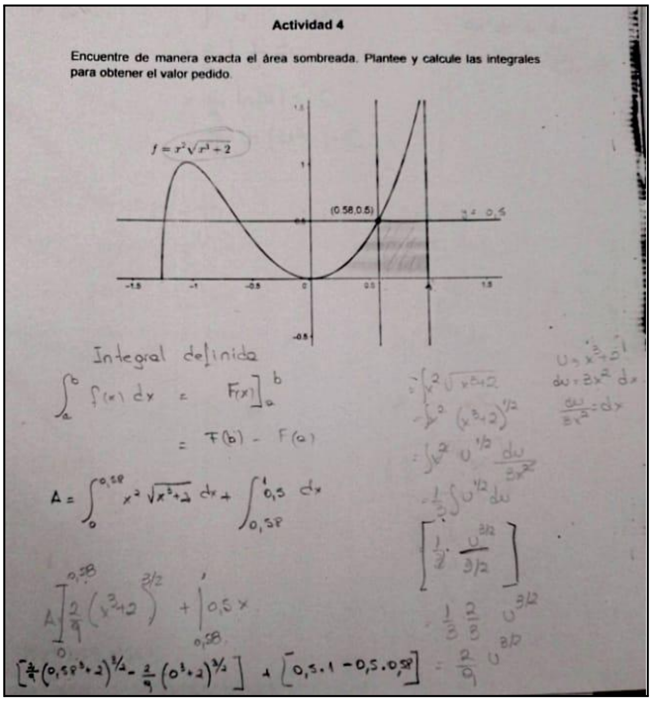


Figura 29: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por Sara.

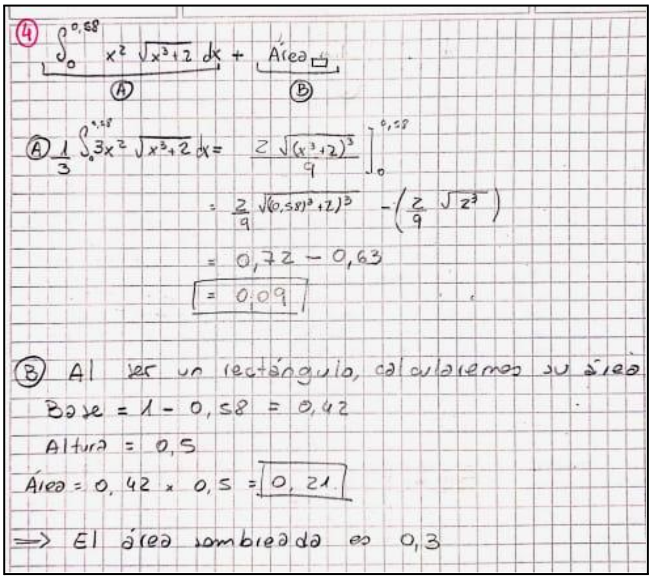
Análisis de la resolución de Sara

Se observa en la producción de Sara (Figura 29) que comienza haciendo una recapitulación del Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal. Procede luego a indicar que la magnitud A estará dada por la suma de dos integrales definidas. No lo indica en ningún momento, pero la letra "A" remite a la palabra "área".

Ella ha conseguido descomponer, a través de la integral, la región en dos subregiones del plano. Por otro lado ha planteado correctamente cada una de las integrales definidas. Para resolver la primera integral ha usado la técnica de sustitución, mientras que ha calculado la segunda de manera inmediata.

Es la primera en esta selección que ha optado por calcular primero una integral indefinida para luego evaluarla en los extremos de integración. Esto quizás sea en virtud del enunciado del teorema fundamental con el que inicia su trabajo. Para la segunda calcula la integral de la función constantemente igual a 0,5 y luego la evalúa en los extremos de integración.

Producción de Magdalena



4 $\underbrace{\int_0^{0,58} x^2\sqrt{x^3+2}\,dx}_{A} + \underbrace{\text{Área}}_{B}$

A $\frac{1}{3}\int_0^{0,58} 3x^2\sqrt{x^3+2}\,dx = \frac{2\sqrt{(x^3+2)^3}}{9}\Big]_0^{0,58}$

$= \frac{2}{9}\sqrt{((0,58)^3+2)^3} - \left(\frac{2}{9}\sqrt{2^3}\right)$

$= 0,72 - 0,63$

$\boxed{= 0,09}$

B Al ser un rectángulo, calcularemos su área

Base = 1 − 0,58 = 0,42

Altura = 0,5

Área = 0,42 × 0,5 = $\boxed{0,21}$

$\Rightarrow$ El área sombreada es 0,3

Figura 30: Resolución de Actividad 4 de la Guía 2 por Magdalena

Análisis de la resolución de Magdalena

En la producción de Magdalena (Figura 30) puede observarse un análogo en la producción de Sara, ambas descomponen la región sombreada en dos subregiones diferenciadas. Magdalena resalta más esto cuando recurre al álgebra para destacar esto. *A* es el área de la primera región, mientras que *B* es el área de la segunda.

Si bien la estudiante no deja registro de las cuentas que la conducen a resolver la integral definida para hallar el valor de *A*, ha planteado y resuelto correctamente esta integral, por cuanto que ha encontrado una antiderivada de la función y la ha evaluado en los extremos correctos.

Es la única de las estudiantes del curso que asoció el valor de B al área de un rectángulo. Evita así tener que plantear una integral definida más. En otras palabras: ataca el problema del área del rectángulo con el conocimiento que da lugar al desarrollo de la noción de integral, pues se parte de que el área de un rectángulo estará definida como el producto entre la base y la altura del mismo para poder aproximar el área de la curva por sumas superiores e inferiores.

3.2.1.3 Observaciones

El lector podrá advertir que las producciones de la sección anterior fueron dispuestas siguiendo una secuencia que se manifiesta en el análisis de la actividad desarrollada por cada estudiante.

El objeto central del análisis es el cómo enfrentan los estudiantes el problema del cálculo de un área de una figura compuesta.

Creemos necesario indicar aquí que en el diseño de la práctica habíamos pensado que las soluciones más frecuentes serían las dadas por Sara y Magdalena en sus respectivas producciones.

Tanto la respuesta de Milagros como la de Antonio nos llevan a plantearnos una variación para el enunciado de la tarea. Ambos ofrecen una respuesta numérica con respecto al problema del área. Ambas son incorrectas. La primera por defecto, la segunda por exceso. ¿Cómo interpelarlos? La respuesta la da María Paula en su producción: brindar algún tipo de recurso que permita contrastar la solución obtenida mediante el cálculo integral con el problema original. En este caso, se podría incluir una cuadrícula en los ejes cartesianos de la figura con el fin de que se pueda asociar el área de la figura a la cantidad de cuadraditos que estén contenidos en la región.

Esta última modificación también sugiere retornar a la noción primitiva de la integral como área por debajo de una curva mediante las sumas inferiores de Darboux. Esto remite a la intención primera del problema: que observasen que no había necesidad de plantear una integral para conocer el área de la segunda región.

3.2.2 Tarea 2

Esta actividad se corresponde con la Actividad 3 de la Guía 2.

3.2.2.1 Enunciado

Calcule las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

b) $\int (e^x)^2 e^x\,dx$

c) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx$

d) $\int \frac{-sen(x)}{2\sqrt{cos(x)+1}}\,dx$

e) $\int x^2 e^{x^3}\ dx$

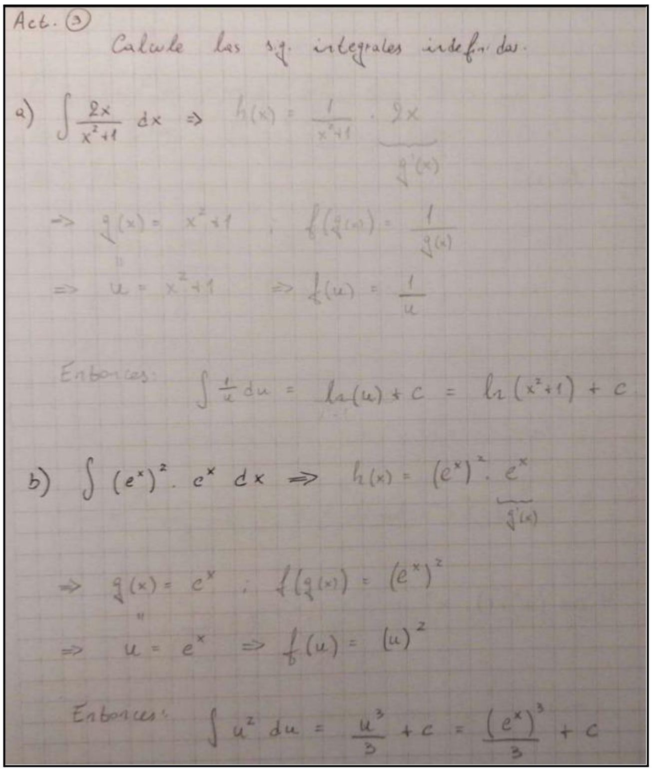
f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}\ dx$

g) $\int tan(x)\ dx$

h) $\int \frac{1}{x\sqrt{ln(x)}}\ dx$

3.2.2.2 Producciones

Producción de Tomás


Act. 3

Calcule las sig. integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx \Rightarrow h(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$

$\Rightarrow g(x) = x^2+1 \quad ; \quad f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$

$\Rightarrow u = x^2+1 \Rightarrow f(u) = \frac{1}{u}$

Entonces: $\int \frac{1}{u}\ du = ln(u) + c = ln(x^2+1) + c$

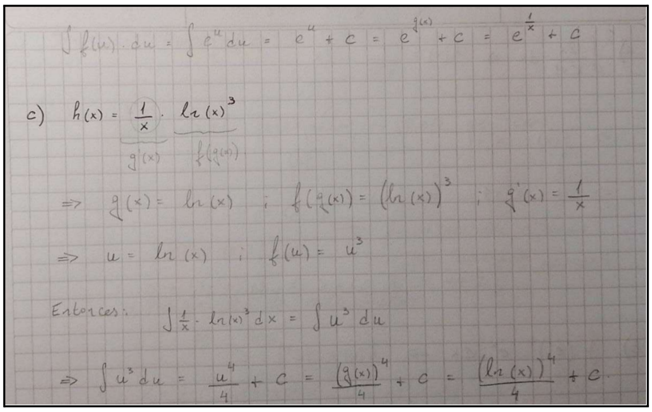
b) $\int (e^x)^2 \cdot e^x\ dx \Rightarrow h(x) = (e^x)^2 \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}$

$\Rightarrow g(x) = e^x \quad ; \quad f(g(x)) = (e^x)^2$

$\Rightarrow u = e^x \Rightarrow f(u) = (u)^2$

Entonces: $\int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(e^x)^3}{3} + c$

Figura 31: Resolución de incisos a y b de la Actividad 3 Guía 2 por Tomás.


$\int f(u)\ du = \int e^u du = e^u + c = e^{g(x)} + c = e^{\frac{1}{x}} + c$

c) $h(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{ln(x)^3}_{f(g(x))}$

$\Rightarrow g(x) = ln(x) \quad ; \quad f(g(x)) = (ln(x))^3 \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u = ln(x) \quad ; \quad f(u) = u^3$

Entonces: $\int \frac{1}{x} \cdot ln(x)^3 dx = \int u^3 du$

$\Rightarrow \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(g(x))^4}{4} + c = \frac{(ln(x))^4}{4} + c$

Figura 32: Resolución del inciso c de la Actividad 3 Guía 2 por Tomás.

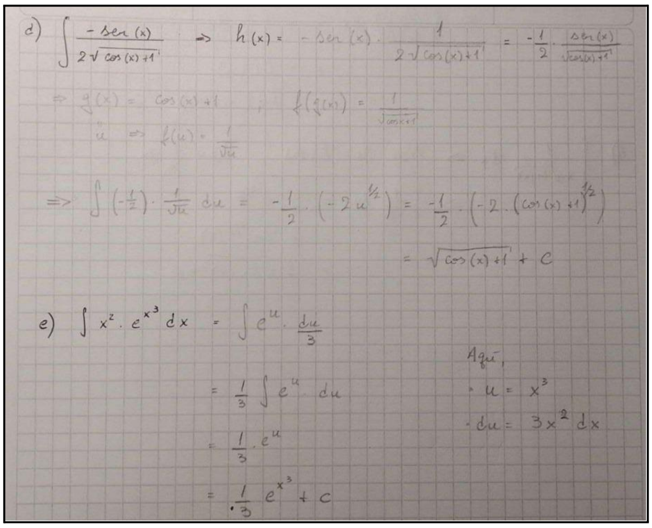


Figura 33: Resolución de incisos d y e de la Actividad 3 Guía 2 por Tomás.

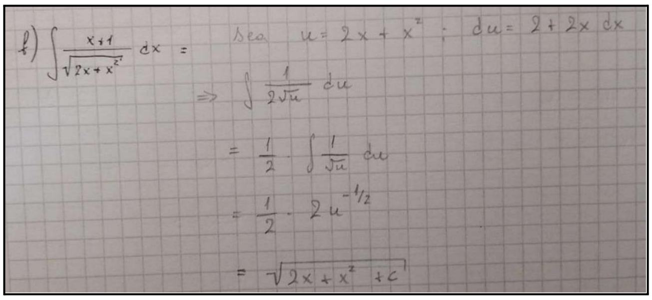


Figura 34: Resolución del inciso f de la Actividad 3 Guía 2 por Tomás.

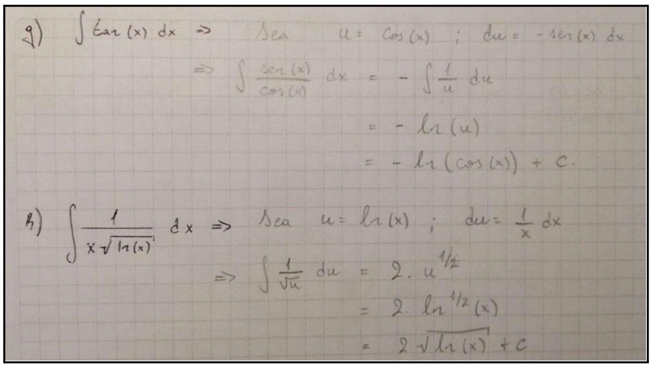


Figura 35: Resolución de incisos g y h de la Actividad 3 Guía 2 por Tomás.

Análisis de la resolución de Tomás.

Podemos reconocer, Figuras 31 a 33, que el estudiante Tomás ha visto el material propuesto para realizar dicha actividad y lo ha puesto en marcha en toda su resolución, proponiendo en un principio quiénes son *f y g*, es decir la función externa e interna, para luego identificar rápidamente *u y f(u)*. A partir del inciso e donde se debían completar las derivadas, Figuras 33 a 35, selecciona u y la deriva correctamente respecto de *x*. Es el único estudiante que deja en evidencia apropiarse del material audiovisual.

Producción de Isabel.

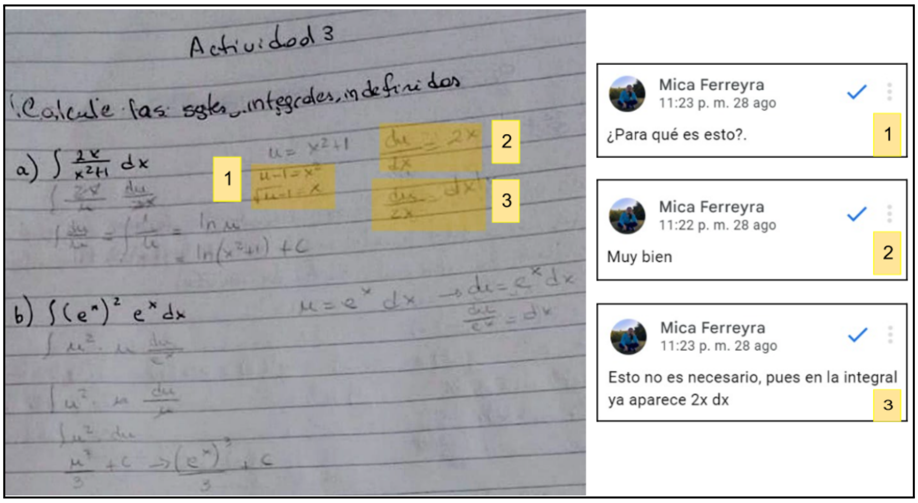


Figura 36: Resolución de incisos a y b de la Actividad 3 Guía 2 por Isabel.

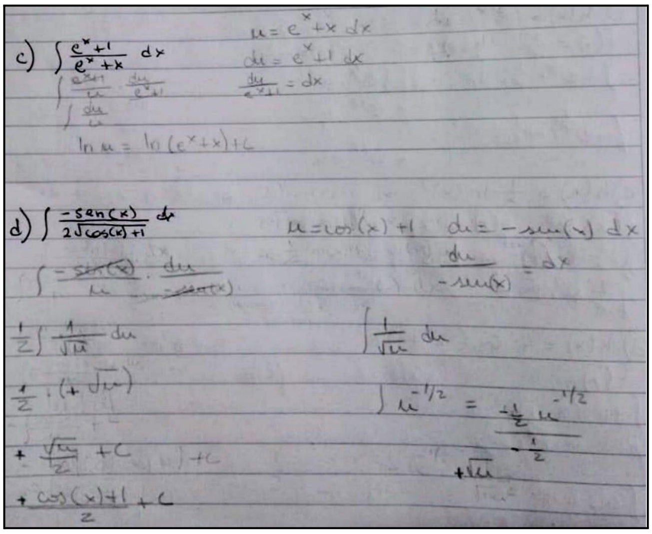


Figura 37: Resolución de incisos c y d de la Actividad 3 Guía 2 por Isabel.

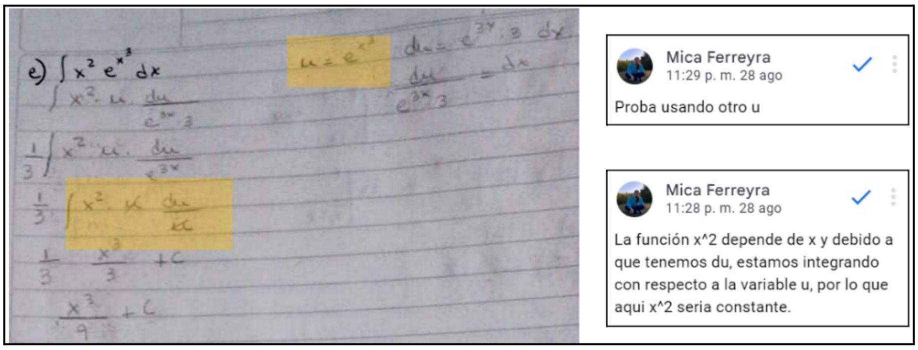


Figura 38: Resolución del inciso e de la Actividad 3 Guía 2 por Isabel.

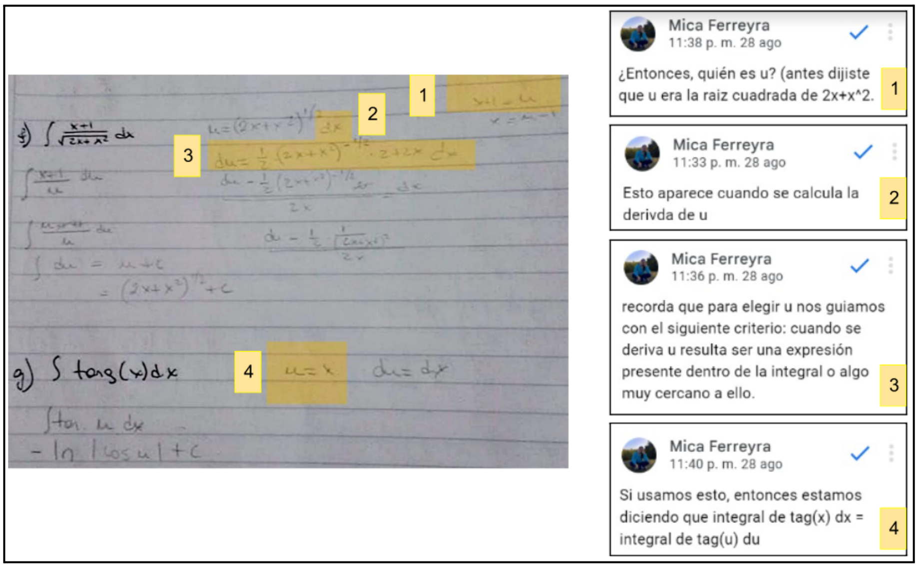


Figura 39: Resolución de incisos f y g de la Actividad 3 Guía 2 por Isabel

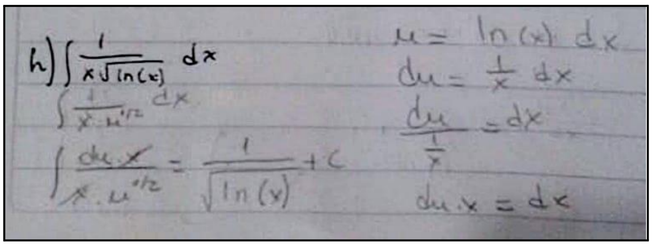


Figura 40: Resolución del inciso h de la Actividad 3 Guía 2 por Isabel.

Análisis de Isabel

Notamos aquí que la estudiante Isabel no ha visualizado el material propuesto, ha tenido dificultades en los últimos incisos de la actividad donde debían completar la derivada, no logró escoger adecuadamente *u* y por ello no ha podido resolverlos. Hemos hecho ciertos comentarios en su devolución respecto a dichas dificultades tales como: “Esto no es necesario, pues en la integral aparece *2x dx*”, “Recorda que para elegir *u* nos guiamos con el siguiente criterio: cuando se deriva u resulta ser una expresión presente dentro de la integral o algo muy cercano a ello”, “¿Entonces, quien es *u*?”, “Proba usando otro u”, entre otros.

Producción de Antonio.

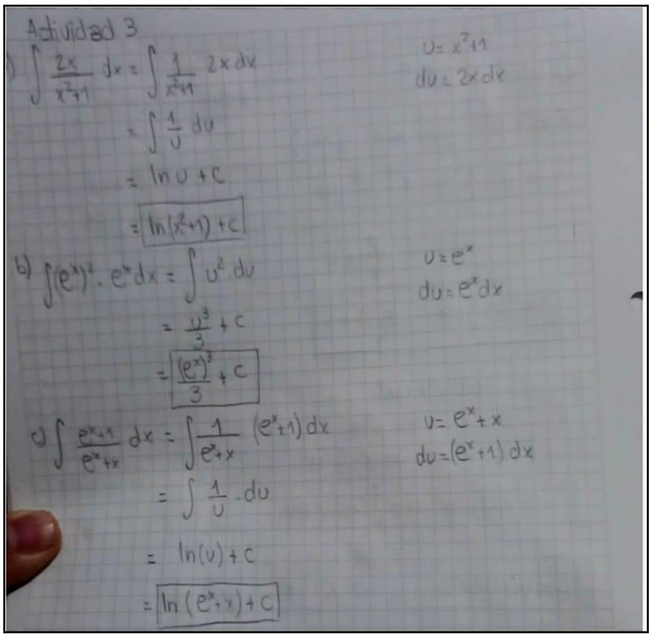


Figura 41: Resolución de incisos a, b y c de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

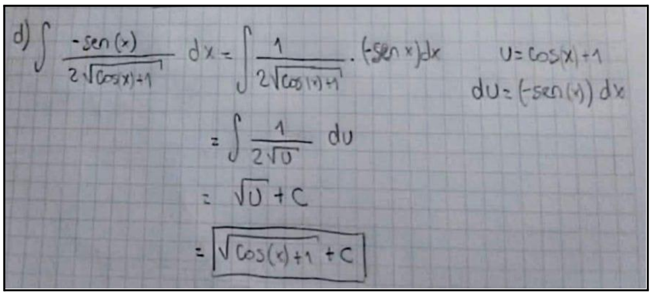


Figura 42: Resolución del inciso d de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

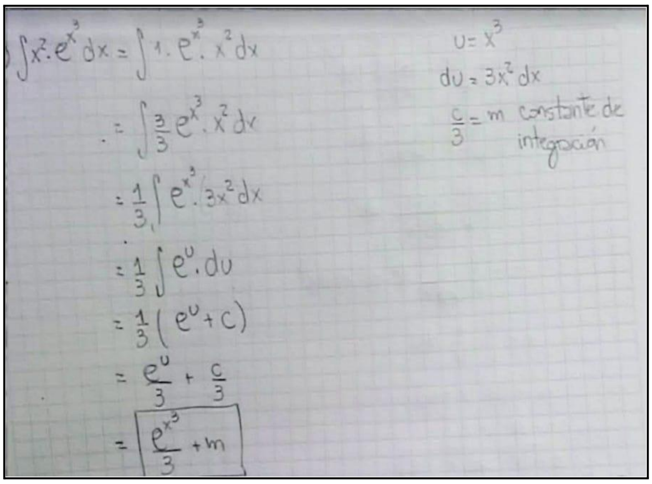


Figura 43: Resolución del inciso e de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

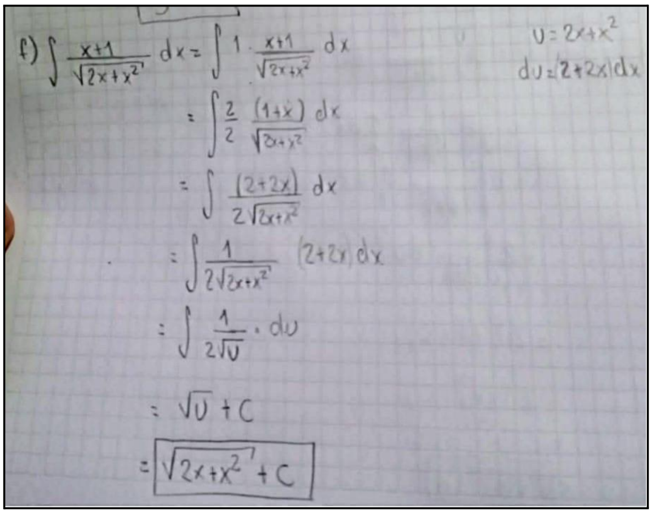


Figura 44: Resolución del inciso f de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

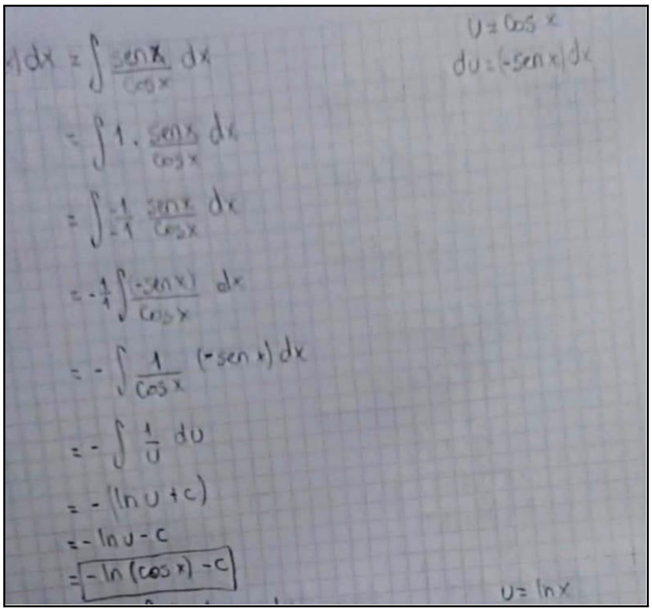


Figura 45: Resolución del inciso g de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

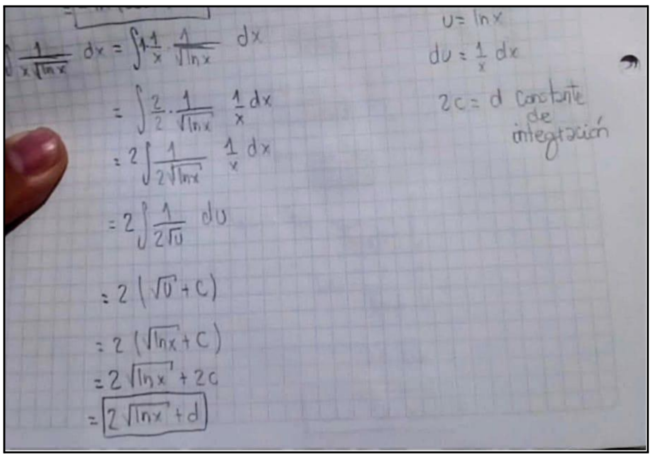


Figura 46: Resolución del inciso h de la Actividad 3 Guía 2 por Antonio.

Análisis de Antonio

Con respecto al estudiante Antonio reconocemos que ha observado el material audiovisual por el uso de ciertas metodologías sugeridas por nosotros, tales como:

- En el video mostramos como resolver el inciso e: $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

  Micaela: Así pues $\int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\, 3x^2\, dx = \frac{1}{3}\int e^{u}\, du = \frac{1}{3}(e^u + c) = \frac{e^u}{3} + \frac{c}{3}$ $= \frac{e^u}{3} + d$ (….) Aca deben prestar atención, *1/3* está multiplicando a todo, esta multiplicando al resultado de la integral, que el resultado de la integral es $e^u + c$, entonces (…) acá este *c/3* sigue siendo una constante, si, que podemos decir que es d, como para que quede aún escrito mejor y siempre aclaramos, decimos que *d* es igual *c/3* y *c* es una constante de integración.

- Búsqueda de la derivada de *u* en la integral sin necesidad de despejar *dx*.

Por último, consideramos que ha comprendido y logrado dominar correctamente el método de sustitución en toda la actividad.

Producción de Sara.

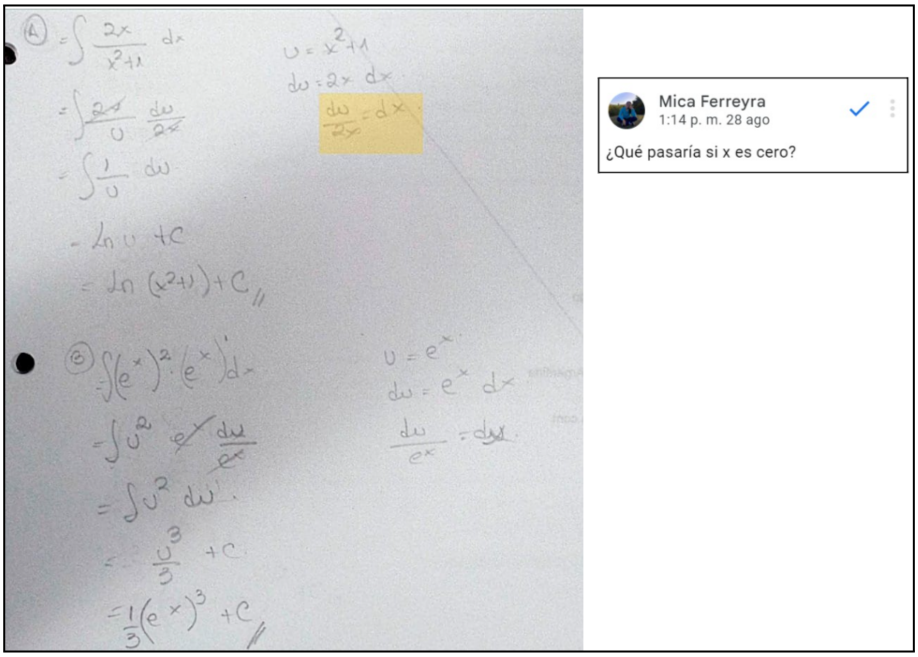


Figura 47: Resolución de incisos a y b de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

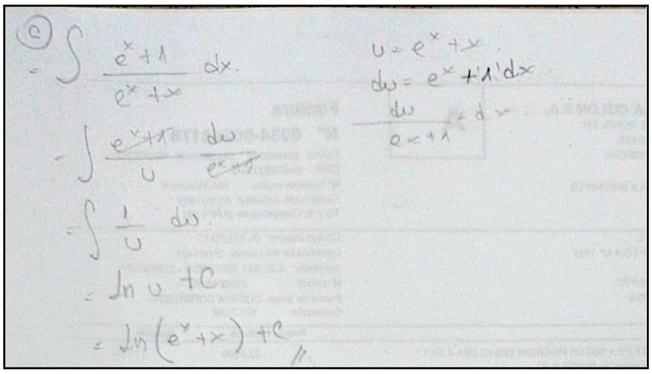


Figura 48: Resolución del inciso c de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

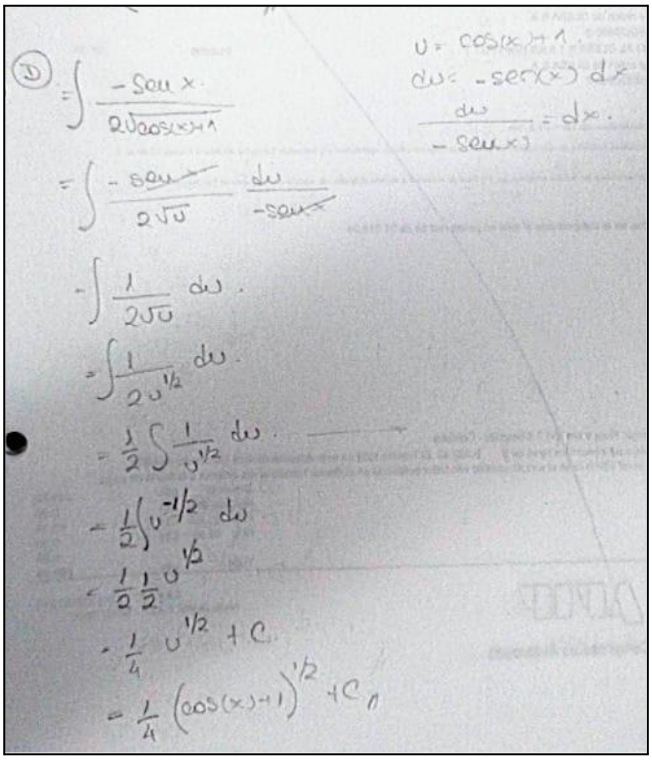


Figura 49: Resolución del inciso d de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

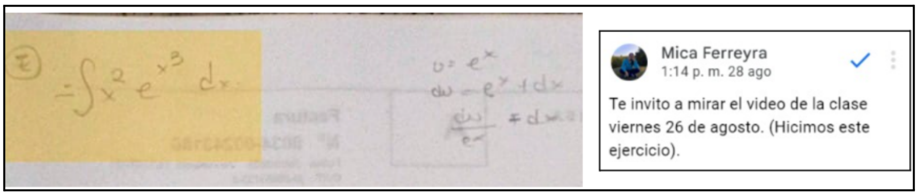


Figura 50: Resolución del inciso e de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

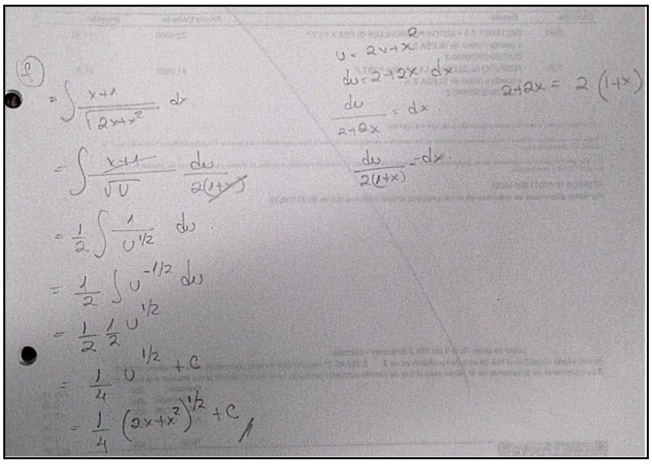


Figura 51: Resolución del inciso f de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

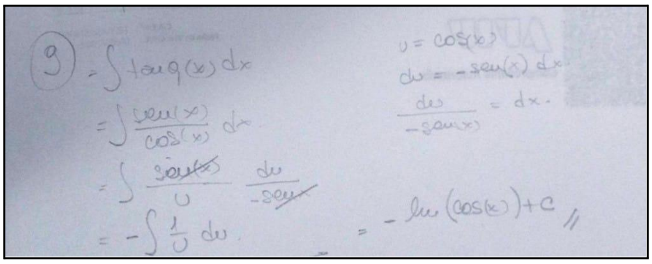


Figura 52: Resolución del inciso g de la Actividad 3 Guía 2 por Sara.

Análisis de Sara

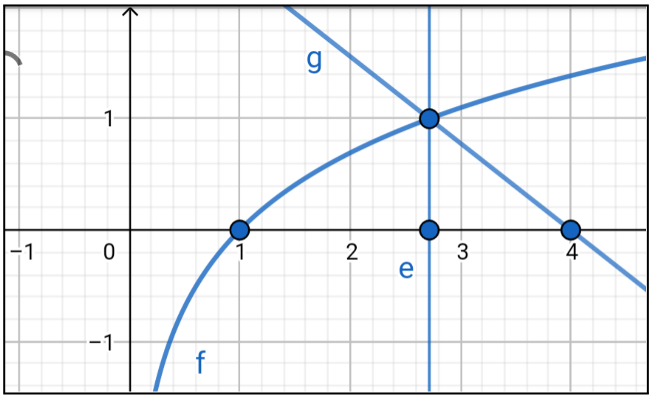
Con respecto a la estudiante Sara valoramos su correcta resolución de la actividad, lo ha resuelto mediante la manipulación que no tuvimos en cuenta mencionada en la Sección 2. Logró tomar *u* y calcular su derivada respecto de *x* adecuadamente. Sin embargo, le hicimos una pregunta como comentario con respecto al despeje de *dx*: "¿Qué pasaría si *x* es cero?", y así fomentar la manipulación presentada por nosotros en el video. Cabe destacar que dicho comentario corresponde a los incisos a, d, f y g, puesto que en lo restantes la derivada nunca se anula. Este tipo de producción nos marcó mucho, y nos dejó pensando. Se convirtió en un pilar para nuestra problemática presentada en esta sección, la cual como se ha dicho antes fue introducida en la Sección 2. Por último, se puede ver que no ha visto el video ya que el inciso e, donde no supo escoger u, lo habíamos resuelto.

3.2.3 Tarea 3

Esta tarea se refiere a la Actividad 2 de la Guía 3.

3.2.3.1 Enunciado

Calcular el área de la figura determinada por la gráfica del logaritmo natural, la recta que pasa por los puntos (e,1) y (4,0) y el eje X.



Ayuda: Se puede pensar que ln(x)=ln(x)1.

3.2.3.2 Resolución

Presentamos aquí, para situar mejor al lector, la resolución pensada para esta tarea durante el diseño de la planificación.

Ha de considerarse la región determinada por la gráfica del logaritmo, la recta que pasa por los puntos $(1, e)$ y $(4, 0)$.

De esta manera, la recta vertical $x = e$ divide a la región en dos regiones R_1 y R_2, con la propiedad de que la intersección de las mismas es un conjunto de medida cero en el plano (la recta x=e).

La región R_2 es un triángulo rectángulo de base $4 - e$ y altura 1. Por lo tanto, si A es la función que a cada figura del plano le asigna su área, se tiene que:

$$A(R_2) = \frac{4-e}{2}.$$

Por otro lado, se tiene que el área de la primera región está dada por:

$$A(R_1) = \int_1^e \ln x \, dx.$$

Para calcular esta integral aplicaremos el TFC, encontrando antes alguna antiderivada del logaritmo natural.

Obsérvese que $\int \ln(x)\, dx = \int \ln(x) \cdot 1 \, dx,$ y que así se podrá aplicar el método de integración por partes. Si $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$, mientras que si $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$.

Por lo tanto se tiene que:

$$\int \ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x.$$

Aplicando el TFC se obtiene que $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$; finalmente:

$$A(R) = 1 + \frac{4-e}{2}.$$

3.2.3.3 Registro en clase

Durante la clase del martes 6 de septiembre se retomó el tema introducido en la clase del martes 30 de agosto sobre el método de integración por partes. Como se ha señalado, los estudiantes no tuvieron clases el viernes 2 de septiembre a causa del feriado nacional decretado para ese día, por lo que nos comunicamos con el curso a través de un mensaje en el foro de novedades del aula virtual, en el que les sugerimos adelantar el trabajo con las primeras dos actividades de la Guía 3.

Al ver que la mayoría de los estudiantes no habían adelantado mucho con estas tareas para el martes 6 de septiembre, al comienzo de esta clase la profesora practicante les dio la consigna de trabajar sobre las mismas para hacer un cierre del método de partes y pasar a la técnica de fracciones simples. Durante el primer módulo de esta clase la mayor parte del curso trabajó y preguntó por la primera actividad de la guía y no fueron demasiados quienes abordaron el problema del cálculo del área de la figura.

Debido a que el trabajo en clase se hizo en grupos y a que la mayoría de los grupos no llegó a pensar la tarea en cuestión contamos con pocos registros sobre la misma. A continuación presentamos al lector la reconstrucción de la propuesta presentada por un estudiante, el diálogo que tuvo con la docente practicante y las observaciones que pudimos realizar sobre las dificultades percibidas.

Reconstrucción de la propuesta

Quienes abordaron este problema intentaron hallar la ecuación de la recta. Por sus comentarios e intervenciones notamos que desean describir la curva que delimita la región como una función a trozos para luego aplicar la linealidad de la integral con respecto al dominio de integración.

1. Obtención de la expresión de la recta que pasa por dos puntos.

   Planteo de las ecuaciones:

   $0 = 4a + b$

   $1 = e \cdot a + b$

   De donde se tiene que $b = -4a$.

   Reemplazando en la segunda ecuación se ve que:

   $1 = e.a - 4a$
   $1 = a(e-4)$
   $\Rightarrow a = \dfrac{1}{e-4}$

   Pero como el parámetro b quedó en función de a, se llega a que:

   $b = \dfrac{-4}{e-4}$

   Por lo tanto la ecuación de la recta es:

   $y = \dfrac{x}{e-4} - \dfrac{4}{e-4}.$

Advertimos aquí que cuando el estudiante comentaba a sus compañeras de grupo esta estrategia de resolución, también se hizo mención de emplear los puntos para calcular la pendiente mediante la aplicación de una fórmula general.

Si la ecuación explícita de una recta está dada por $y = ax + b,$ donde a se dice “la pendiente” de la recta, entonces:

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$ siendo (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos que pertenecen a la recta.

Tras hallar la pendiente de esa manera usaron la calculadora para estimarla, y a partir de dicha estimación consiguieron estimar también el valor de b.

Así obtuvieron que: $a = \dfrac{-1}{4-e} \approx -0,7802.$ Mientras que $b \approx 3,1208.$

Por lo tanto llegaron a qué $y = -0,7802x + 3,1208.$

Debido a que el neperiano es un número trascendental (y en particular, irracional), no puede ser expresado como el cociente entre dos números enteros y por lo tanto no admite una expresión decimal finita o periódica.

Así pues, como a y b son constantes que se obtienen a partir de operaciones algebraicas en las que interviene el neperiano, se tiene que a y b son así mismos números que no poseen una expresión decimal finita o periódica.

Al usar la calculadora para obtener estos números, obtuvieron una aproximación decimal de los mismos y llegaron a la expresión que ya se ha indicado de la ecuación de la recta, que luego intentaban integrar en el intervalo correspondiente.

Pudimos registrar que al interior del grupo la expresión resultaba laboriosa por la presencia de tantas cifras decimales y que el cálculo de una integral indefinida relacionada con esta expresión resultaba más árduo, a pesar de tratarse de la integral de una función lineal y que el cálculo de integrales de funciones polinómicas hubiera sido abordado desde el primer día de las prácticas.

¿Para qué querían obtener la ecuación de la recta?

2. Definir una función a trozos.

   El siguiente paso de la estrategia fue definir la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } 1 \leq x \leq e; \\ \frac{x}{e-4} - \frac{4}{e-4}, & \text{si } e \leq x \leq 4. \end{cases}$$

   Luego, plantear la integral para calcular el área. De esta manera el área de la región estará dada por:

$$A(R) = \int_1^4 g(x) = \int_1^e g(x)\, dx + \int_e^4 g(x)\ dx$$

   La primera integral fue resuelta por los estudiantes como se ha descrito en la sección correspondiente a la resolución, mientras que la segunda es una integral de una función lineal.

   Los estudiantes consiguieron calcular la integral indefinida del logaritmo natural y evaluarla en los extremos de integración correctos, pero también manifestaron que tenían complicaciones para calcular la integral de la función lineal, ya que la misma tenía una expresión muy complicada.

Objetivo de la tarea

Al plantear esta actividad nuestro objetivo era recuperar el sentido de la integral como área por debajo de una curva, y si bien contemplamos que podrían optar por esta vía de resolución, no contábamos con la dificultad que se presentó al usar la calculadora para hallar los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la recta.

Fragmento de diálogo de la clase

Rescatamos a continuación un fragmento de los registros de la clase que estamos analizando en esta sección. La profesora practicante se había acercado al grupo en donde se había discutido la tarea que constituye el objeto de atención de esta sección.

Al ser interpelada por uno de los estudiantes por la dificultad que tiene con el cálculo de la integral que se ha consignado, la profesora practicante tuvo en cuenta el objetivo de la tarea y orientó el trabajo del estudiante al reconocimiento de la figura geométrica a través del siguiente diálogo:

> Micaela: Justamente, la integral es un área, ¿no?
> Antonio: Sí, justamente.
> Micaela: Y bueno, este pedazo, ¿qué es eso?
> Antonio: Es la integral definida entre e y cuatro de la función g.
> Micaela: ¡Bien! Vos podrías calcular sacar la función g. Sabés sacar la función de una recta a través de dos puntos. Y tenés esos dos puntos. Pero tenés una forma mucho más sencilla que justamente me estás señalando. ¿Qué figura es ésa?
> Antonio: Un triángulo rectángulo.
> Micaela: ¿Y vos sabés el área?
> Antonio: Sí.
> Micaela: Perfecto.
> Antonio: Era más fácil.

Reflexiones finales

Como hemos mencionado más arriba, al elaborar el diseño de la práctica supusimos que (al trabajar con esta tarea) elegirían la estrategia de calcular el área del triángulo rectángulo conociendo su base y su altura.

Observamos que, al no reconocer en la región una figura geométrica, la mayor parte del trabajo se encaminó a obtener la expresión analítica de la función para calcular la integral indefinida.

El lector puede apreciar que esta situación se presentó en la Tarea 1 de esta sección. Las producciones de los estudiantes dan cuenta de una ausencia del análisis de la figura o dificultad en reconocer ciertos elementos al plantear dicho análisis.

El lector podrá advertir que esta situación se había anticipado de manera indirecta en la Sección 2.8 cuando detallamos el trabajo que realizaron los estudiantes en torno a la Actividad 2 de la Guía 1. Se recordará que, contrariamente a lo que imaginamos en los guiones conjeturales, los estudiantes no graficaron la función de velocidad para calcular el área pedida, sino que obtuvieron mediante análisis la antiderivada de la velocidad para evaluarla en los extremos pedidos.

Así pues, llamamos la atención del lector sobre este particular con el fin de observar que este tipo de planteos fue regular durante el periodo de prácticas.

3.2.4 Tarea 4

Se refiere a la Actividad 1 de la Guía 3.

3.2.4.1 Enunciado

Calcule las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int x \; sen(x) \; dx$

b. $\int \frac{ln(x)}{x^2} \; dx$

c. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2} \; dx$

d. $\int e^x \; cos(x) \; dx$

3.2.4.2 Registro de la actividad en clase

En esta sección trataremos con el inciso c de esta actividad debido a un diálogo sostenido entre el profesor practicante y un grupo de estudiantes en torno al comentado ejercicio.

Método de partes

Para dimensionar la situación expuesta hemos de referir aquí el cómo fue planteada la regla de integración a través de partes.

En la clase virtual del 30 de agosto hicimos una lectura colectiva del material de lectura Leibniz para derivar un producto de funciones. Luego de un ejemplo, hicimos una breve demostración de la técnica de partes a partir del enunciado de la regla de Leibniz. Finalmente, concluimos con un ejemplo de aplicación.

El método fue formulado de la siguiente manera en la Guía 3 del diseño:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Tanto en el material de lectura como en la clase se insistió en que la dificultad de este método estriba en la elección de f y g' cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones.

Formulación alternativa del método de partes

Durante el desarrollo de la planificación consideramos la posibilidad de presentar el método de partes mediante una formulación alternativa. A saber.

El método aparece así formulado en el libro de texto que aparece en la bibliografía sugerida en el programa de la asignatura. Se reconoce de manera por la siguiente regla mnemotécnica: "Un Día Vi Una vaca Vestida De Uniforme".

La equivalencia con la formulación anterior se da a través de una manipulación diferencial. Tanto u como v son funciones que dependen de la variable x. Luego se tiene que $dv = v'(x)\,dx.$ De forma análoga, $du = u'(x)\,dx.$

Por lo tanto se tiene que $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$ Es decir:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Decidimos finalmente no exponer de esta manera el método de integración por partes debido a una cuestión formal. En efecto, puesto que al introducir la técnica de sustitución hicimos énfasis en que tanto el integrando como el diferencial debían estar siempre en función de la nueva variable sustituida, nos pareció que esta formulación de la regla podría generar alguna dificultad al observarse que u aparece integrada respecto de la variable v por la presencia del diferencial de v después del integrando.

Diálogo con un grupo

A continuación presentamos un extracto de los registros de la clase del martes 6 de septiembre.

Dos estudiantes están conversando sobre un ejercicio (referencia Guía 3, Actividad 1 c) (…), y uno de los practicantes advierte el siguiente fragmento de diálogo:

Paloma: … entonces vos tenés acá una exponencial y una polinómica. Entonces transformamos, como la exponencial es … (aquí no se distingue lo que dice), ésta es la u, y ésta es dv.
Isabel: ¡Ahí está!

El practicante se acerca al grupo e interpela:

Nicolás: ¿Cómo es esa regla?
Isabel: (se ríe)
Paloma: (jocosamente) ¡Ah, no sé! ¡Eso es del profe Alex de Youtube!

Las estudiantes y el practicante hacen algunos comentarios en broma.

Es necesario destacar que este diálogo se dio mientras los estudiantes revisaban las primeras actividades de la Guía 3, cómo se les había indicado previamente. El diálogo tuvo lugar mientras se llevaba adelante una actividad de monitoreo por parte de los docentes practicantes. Aquí el practicante se acerca a consultar al grupo por la resolución del ejercicio debido, principalmente, a que ha advertido que las estudiantes están formulando el método de integración por partes con la regla “Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme”. El docente practicante se acerca movido por la curiosidad, ya que Paloma ha expuesto una especie de “regla” que permite decidir cuál de las funciones hará las veces de u y cuál de dv, teniendo en cuenta el tipo de funciones que se multiplican (v.g. si en el producto una función es exponencial y la otra racional).

Nicolás: Bueno, pero formula la regla.
Paloma: ¡No! Yo le copio textual lo que él dice.
Isabel: (se ríe de lo que ha dicho Paloma) …
Nicolás: (después de reír también) Bueno, sería interesante … A ver, ¿cuál están haciendo?
Isabel: Ehm … el c.
Paloma: No, estábamos haciendo la c y ella me comentaba que no se daba cuenta de cuál era la u y cuál era la v.
Nicolás: ¿Ajá?
Paloma: Entonces yo le dije lo que vi en internet.
Antonio: (interviniendo en la conversación con tono enfático) Ésa me costó un traste pensarla (refiriéndose a la integral por calcular en el inciso del que se está hablando). Yo puse que u … porque era la integral del cociente entre x por e a la dos x … ¡Sobre! uno más dos x (hace una pausa en el discurso antes de concluir) al cuadrado. Y ahí lo que yo hice fue utilizar como u el

producto entre x por e a la dos x.

Paloma: Claro. O sea que eso es una exponencial, eso sería una exponencial.

Antonio: Lo dejé así. Después puse por (hace énfasis en el “por”) uno sobre uno más dos x al cuadrado.

Paloma: Sí, exactamente.

Antonio: Y después empecé a buscar, bueno, la derivada de u respecto de x, y la dv la tomé de una forma y así fui…

Nicolás: (con interés) ¿La dv? O sea, por lo que vas diciendo, ¿la dv no debería ser uno sobre (enfatiza el sobre) uno más dos x todo eso al cuadrado por el diferencial de x?

Antonio: (revisando su trabajo) La tomé … como … dos x más uno, todo a la menos dos.

Paloma: (hablando sobre lo último que dice Antonio) Todo al cuadrado.

Nicolás: Todo a la menos dos (se dirige a Antonio). ¿Por el diferencial?

Antonio: Por el diferencial.

Nicolás: ¿Eso es tu dv?

Antonio: Exactamente.

Nicolás: Perfecto.

Antonio: Y la v me quedó un medio de m a la menos dos … y le puse más cositas para…

Nicolás: Claro, ahí calculaste.

Análisis

La situación expuesta en torno a este ejercicio parece no ser relevante en un comienzo. Más tarde, sin embargo, durante la instancia evaluativa pudimos apreciar que varios estudiantes recurrían a esta formulación del método de integración por partes. Volvimos sobre los registros de las clases para encontrar una situación en donde se hubiese advertido la presencia de “la regla de la vaca”.

Hay aquí implícita una decisión curricular. El practicante sabe qué regla están aplicando y al no decir nada en contra de la misma habilita a los estudiantes a emplearla si les resulta efectiva. Hay un reconocimiento tácito de que la regla que están aplicando es válida, de alguna forma compatible con la regla que se dio en clase.

Existe otro reconocimiento implícito en ese diálogo. La consulta de fuentes externas está de alguna manera permitido. En efecto, una de las primeras cosas que decidimos fue habilitar de alguna manera la consulta de material aparte del proporcionado por nosotros en clase. Durante la primera clase decidimos insistir en el valor del repaso de apuntes y del libro cuando no se recordase algo. Lo hicimos explícito al enunciar con claridad que ésta era una forma sutil de indicarles que podían (y en cierta forma debían) volver a estudiar las cosas que no supieran.

Reflexiones finales

En la Tarea2 los estudiantes se vieron habilitados a manipular los diferenciales en las ecuaciones en derivadas como un objeto algebraico más. Es conveniente destacar que esta práctica es usual en distintos ámbitos de enseñanza y de trabajo. También se puede deducir de la formulación que hicimos, ya que si es válido "pasar multiplicando el dx" al otro lado de la ecuación $\frac{du}{dx} = g'(x)$, ¿por qué no sería válido "pasar dividiendo" la derivada de g para "despejar" dx?

Aquí se ha planteado otro tipo de cuestionamiento. Los estudiantes han elegido emplear una cierta formulación del método que les permite trabajar con los problemas asociados al cálculo. La regla de la vaca les sirve para reconocer u y dv analizando el "tipo" de funciones que se están multiplicando. Asumen también que pueden hacer este tipo de manipulación ya que lo han consultado en una fuente externa que cuenta con un reconocimiento previo y exterior al espacio curricular.

3.3 Formulación y estudio de la problemática

Las tareas que mostramos en las secciones anteriores evidencian una tensión permanente. Dicha tensión se ve entre la expectativa y lo que termina sucediendo.

Es claro que teníamos ciertos objetivos en mente cuando planteamos estas tareas a los estudiantes. Cada una de ellas tenía una razón de ser dentro de la secuencia didáctica, aquello que propiciaría en el curso una determinada forma de trabajo.

Para resolver las Tareas 1 y 3, por ejemplo, los estudiantes debían recurrir a la noción de integral como área por debajo de una curva. Esto les facilitaría la actividad, en tanto que llegarían de una forma óptima a la resolución del problema. Los estudiantes plantearon integrales definidas pero no recurrieron al análisis de los gráficos de las funciones. ¿Llegaron con esto a respuestas correctas?

Queremos observar aquí que la problemática de este trabajo no discurre por lo que los estudiantes hicieron mal, sino que se pregunta por lo que los estudiantes hicieron efectivamente y el por qué de ese trabajo. Más aún: ¿por qué ese trabajo y no otro?

En un principio podríamos vernos tentados a formular una explicación simplista del hecho, afirmando que los estudiantes siempre plantean la integral porque saben que eso es lo que les dará resultado más allá de la complicación que les pueda generar el cálculo. Esta interpretación coloca a los estudiantes en la posición de operarios de un saber. Es decir, sólo ocupan una herramienta de forma automática a cierto tipo de situaciones en las que reconocen que su aplicación es la que mejor se ajusta a la tarea que deben realizar.

Aceptar este tipo de explicaciones, no obstante, debería de conducirnos a otra pregunta: ¿en qué posición queda el docente en tal caso? Podríamos responder que la labor del docente se limita a reproducir y distribuir herramientas apropiadas para la resolución de problemas y a señalar en qué situaciones han de emplearse y en cuáles no. Es decir, el docente se convertiría en alguien que dice qué es lo que conviene hacer en cada caso.

Esta primera aproximación no carece de fundamentos, pero no describe adecuadamente la situación. En efecto, reconocemos que las tareas no fueron planteadas fuera de un cierto marco de referencia que admite un análisis mucho más profundo. Por otro lado, si bien se podría hacer la observación relativa a la falta de "disposición" de los estudiantes a analizar la información que aportan los gráficos de las funciones en esas tareas, tal lectura genera un profundo contraste con las actividades que desarrollan algunos estudiantes en las Tareas 2 y 4. En varias de estas producciones se puede apreciar una relación distinta con el objeto de estudio. La manipulación de los diferenciales como objetos algebraicos que se "despejan" y la búsqueda de formulaciones alternativas que faciliten el trabajo con el método de partes son claros ejemplos de esto. Si aceptásemos entonces esa interpretación, ¿a qué le atribuimos tal discrepancia en las formas de vinculación con el conocimiento matemático?

Es necesario, pues, advertir que este vínculo entre el estudiante y el conocimiento matemático no se da de manera aislada. Por el contrario, el estudiante es un individuo que habita en otros espacios, y el espacio en donde se genera este vínculo tiene características y dimensiones bien definidas. Nuestros estudiantes se encontraban en un Instituto de Formación Docente, y poseían un pasado matemático, es decir, cada estudiante tenía consigo una trayectoria única y personal en su relación con el conocimiento matemático. Por sobre todo esto, también hay una trayectoria en la actividad del ser estudiante. ¿Qué es ser estudiante? ¿Cómo se ve el estudiante? ¿En dónde se ve el estudiante? Allí donde se manifieste el estudiante también se hace presente la figura del docente. Cabe formularle a él las mismas preguntas que al primero. El docente, por su parte, no aparece sólo vinculado ante el estudiante, sino que se vincula con el conocimiento matemático y es ésta la causa por la que hay una relación entre él y el estudiante. Se reconfigura así el esquema didáctico que pone en relación tres actores fundamentales del proceso de enseñanza y aprendizaje: el docente, el saber y el estudiante.

En consecuencia, es menester proporcionar un marco teórico que nos permita interpretar los hechos que destacamos en las secciones anteriores a la luz de la investigación en didáctica de la matemática. Consideramos que el enfoque más apropiado para formular la problemática, de acuerdo a las condiciones particulares en que hemos hecho emerger estas cuestiones, es la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). En la misma, G. Brousseau (1998) plantea que existe un saber sabio, gestado al interior de una comunidad científica, y que es deber del docente reorganizar y transformar este saber en lo que denomina "trasposición didáctica" con el fin de que el conocimiento adquiera un nuevo sentido para el estudiante en la devolución de un problema. Cuando el estudiante asume el desafío se opera el conocimiento. Este conocimiento debe ser despersonalizado por el estudiante, es decir, vuelto a formar parte de un texto del saber sabio, para que pueda ser usado en una situación no acondicionada con el fin de enseñar. Este tipo de situaciones reciben el nombre de "situaciones adidácticas", mientras que los medios con los que el docente intenta devolver al estudiante una situación adidáctica que provoque en él la interacción más independiente y fecunda posible es llamada "situación didáctica". La situación didáctica no puede darse sin una regla de juego denominada "contrato didáctico". Esta estrategia es el instrumento mediante el cual el docente pone en escena el problema al estudiante. Tanto el docente como el estudiante tienen ciertas responsabilidades en este contrato didáctico, pero dichas responsabilidades no están explicitadas, sino que forman parte de un equilibrio delicado en la que el docente debe tomar la responsabilidad de la devolución del estudiante, mientras que el estudiante, reconocer que el problema tiene algo para enseñarle. La situación didáctica sólo funciona cuando el estudiante considera que su hacer es una opción entre múltiples opciones y con distintas consecuencias. El docente, por su parte, se abstiene de dar respuestas a los problemas, y tanto el docente como el estudiante entran en el juego. En suma, en la situación didáctica el docente busca redisponer los medios para que el estudiante reconstruya un saber, y en esto es que de alguna manera oculta ese saber, impide el aprendizaje del estudiante para lograr antes que nada su comprensión. El estudiante, a su vez, reconoce que el problema puede resolverse pero que, si el docente le da la respuesta, él no aprenderá. Entonces corre un riesgo: si comprende puede no aprender, pero en el momento en que aprende ha desaparecido la comprensión que se dio al interior de la situación didáctica.

3.3.1 Definición de la problemática

De esta manera, definimos la siguiente problemática: "En nuestra propuesta de enseñanza de las técnicas de integración: ¿Cómo condiciona el contrato didáctico la actividad matemática de los estudiantes con la noción de integral en su sentido geométrico y variacional?".

Como hemos mencionado, el objetivo de las prácticas era introducir las técnicas de integración y las aplicaciones del cálculo integral sin perder de vista cuáles habían sido las problemáticas centrales que dieron lugar al constructo teórico del cálculo integral y de los resultados más fuertes como el Teorema Fundamental.

Debe de tenerse en cuenta que las técnicas de integración, como se ha visto, son herramientas que permiten calcular (a través de ciertos pasos) antiderivadas de funciones y, por ende, la integración consiste en un tratamiento dentro del registro de representación algebraico de las funciones (Duval, 2006). En palabras de Davis y Hersh (1989), “En un cálculo, lo que se hace es procesar una ristra de símbolos matemáticos de acuerdo con un sistema estandarizado de convenios; el resultado es otra lista de símbolos” (p. 99).

Al menos una de las técnicas estudiadas (la integración a través de la descomposición en fracciones simples) depende de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no interviene en ello ningún conocimiento perteneciente a la disciplina del análisis matemático. El método de integración por partes y la técnica de sustitución, por otro lado, resultan ambos de la manipulación algebraica que favorece el símbolo de integral, partiendo de las reglas para derivar un producto o una composición de funciones.

Este tratamiento algebraico puede llegar a obturar el sentido de lo que se está haciendo al calcular una integral indefinida. Entendemos aquí con Davis y Hersh (1989) que el cálculo integral introduce una nueva simbología, y que todo proceso en el que se represente una idea matemática en forma simbólica implica una alteración de las ideas en la que puede producirse una ganancia en la precisión y la claridad, pero que también admite una pérdida en fidelidad a los problemas que le dieron origen. Fue por ello que siempre rescatamos la importancia del Teorema Fundamental para otorgar una razón de ser al cálculo de integrales indefinidas: conocer una integral indefinida permite resolver el problema del área por debajo de una curva. El sentido variacional refiere aquí a la forma en que se enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo considerando a la derivada como la variación instantánea de una magnitud y a la integral como el proceso de acumulación de dicha variación que da por resultado el cambio total de la magnitud.

3.3.2 Análisis de las tareas

En las Tareas 1 y 3 presentadas en las secciones anteriores se puede advertir que los estudiantes asocian el cálculo de una integral definida a la obtención del área de una figura.

En la Tarea 1 se pide a los estudiantes en el enunciado de la consigna que calculen el área planteando la integral. Sin embargo, en dos de las cinco producciones presentadas se omite el análisis sobre el gráfico, limitándose estos estudiantes a calcular una integral definida mediante el Teorema Fundamental del Cálculo. En su producción, María Paula se ha cuestionado por lo que ocurre en una parte de la región sombreada (el rectángulo), mientras que para la otra parte de la región plantea la integral (quizás porque en la consigna se pedía esto).

En la Tarea 3 el estudiante sabe que ha de plantear una integral definida para hallar el área pedida. Su complicación está en hallar la expresión algebraica que describe una de las curvas que determinan la región. Después de hallarla, podemos observar que su interés se centra en calcular la integral indefinida a partir de esa expresión algebraica. Aquí la atención del estudiante ha recaído en el problema de encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos en lugar de enfocarse en el gráfico para entender mejor la situación en que se requiere su dominio del cálculo integral.

Si bien en ambas tareas se aplica el cálculo de una integral definida para resolver la pregunta por el área a través del Teorema Fundamental del Cálculo, lo que nos llevaría a pensar que se está reconociendo el problema geométrico de base, el planteo de las integrales no se corresponde con la situación descrita en el enunciado (Tarea 1), o el planteo de la integral genera un problema que se inscribe por completo dentro del registro algebraico (Tarea 3).

No es posible dejar de advertir que estas tareas fueron propuestas en cierto contexto curricular. El saber en la mira lo constituían las técnicas de integración y las aplicaciones del cálculo integral. Esto se declaró de manera explícita el primer día de las prácticas, ya que en ese momento la docente practicante manifestó cuáles serían los temas que trabajaríamos. Así pues, todos los problemas fueron medios planteados en una situación didáctica en la que llevamos a cabo una trasposición, esto es, una reorganización y transformación del saber sabio, del conocimiento gestado en el seno de la comunidad científica, para ser propuesto como objeto de enseñanza y, sobre todo, de aprendizaje.

El objeto de esta sección es reflexionar, por consiguiente, en la incidencia que tienen algunos fenómenos que se presentan al interior de esta trasposición sobre la actividad desarrollada por los estudiantes en torno a los problemas del cálculo integral que involucran volver a las ideas fundamentales que dan lugar a la formulación teórica del concepto de integral y del resultado que vincula la integral con la derivada.

Como docentes, al plantear las distintas tareas, deseábamos propiciar un entorno en el que se reprodujese una micro-sociedad científica en el aula. Esto es, que los estudiantes reencontrasen en la historia particular que constituye el tránsito por los problemas, los conocimientos constituidos dentro de la comunidad de matemáticos (v.g. técnicas de integración), y que pudiesen ver en estos conocimientos elementos económicos para plantear preguntas y zanjar debates (Brousseau, 1998).

Existió un posicionamiento implícito relativo a la responsabilidad del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje desde el diseño de la planificación y durante toda su implementación. En efecto, consideramos que la tarea de un docente no es comunicar conocimientos, sino pensar la mejor estrategia posible para hacer una devolución de un problema que sea lo suficientemente significativo como para que el estudiante asuma el desafío y consiga ganarlo (Brousseau, 1998, p. 13). Si bien este reacondicionamiento es sólo una de las responsabilidades docentes, pues también comprendimos que habíamos de aceptar la responsabilidad de los resultados, sí es una de las etapas más delicadas dentro del proceso de transposición didáctica. En otras palabras, podríamos formular esta cuestión de la siguiente manera: ¿saber integrar basta para poder, de manera espontánea, enseñar a integrar? La transposición adquiere una mayor relevancia dentro del diseño de la planificación.

Ahora bien, creemos conveniente reconocer (también) que hay otros factores que inciden en estas cuestiones, factores que exceden al contrato didáctico y que, no obstante, afectan directamente la situación didáctica planteada.

Como se ha señalado antes en este trabajo, el saber en la mira es un conocimiento instituido dentro de la comunidad y que además posee un carácter algorítmico. Esto último nos conduce a formular las siguientes observaciones.

1. Por una parte, si bien como docentes en prácticas pretendíamos que las tareas se constituyesen en una oportunidad de llevar adelante un proceso de introspección e investigación, las técnicas de integración son una colección de objetos culturales, mientras que las soluciones a los problemas clásicos del cálculo integral (área entre curvas, área de un círculo, volumen de un sólido) son ampliamente conocidas.

2. Tal y como concebimos nuestro diseño, una vez comunicada la técnica, la misma ya se inscribía en un texto del saber.

Este último punto fue una preocupación constante durante la etapa de planificación del proyecto y aún durante su implementación, por lo que tratamos de encontrar un punto intermedio entre la comunicación de un conocimiento científico y una aproximación al mismo a través de sucesivos ejemplos y ciertas manipulaciones válidas dentro de los distintos contextos.

Es posible que la presentación de las técnicas de integración haya sesgado, al menos de manera parcial, el posterior trabajo realizado por los estudiantes en cada tarea. En efecto, comprendemos que “el alumno no distingue de entrada, en la situación que vive, lo que es de naturaleza adidáctica y lo que es de origen didáctico” (Brousseau, 1998, p. 12). A pesar de ello, también hemos de admitir que esta pauta desaparece conforme los estudiantes avanzan en los niveles educativos, de suerte que existe un aprender a ser estudiante, que en este contexto se interpreta como “aprender a leer las claves didácticas presentes en los medios provistos por el docente”.

Hasta aquí, podemos apreciar que en este vínculo atravesado por cláusulas implícitas existe una constante tensión entre la expectativa de los docentes sobre el hacer de los estudiantes, y del hacer de los estudiantes sobre la expectativa del docente. En nuestro caso, por ejemplo, deseábamos que los estudiantes, enfrentados a los problemas de cálculo de área, empleasen una integral definida para proporcionar una respuesta. Si bien esto sucedió así en todos los casos, las producciones presentadas en las Secciones 3.2.1 y 3.2.3 podrían indicar que tal proceder por parte de los estudiantes no fue inspirado por lo que hubiera de matemático en el problema, sino por los indicios didácticos que lo rodeaban.

Las Tareas 1 y 3, que constituyen la génesis de una parte de esta problemática, son también tareas en donde se puso como condición no sólo saber calcular una integral definida. Antes bien, se esperaba de parte de los estudiantes un análisis de esas regiones que les permitiera decidir qué integrales tendrían que plantear para obtener el área de la región considerada. Este *medio* fue pensado no para arribar a un saber nuevo, sino para evitar que el nuevo conocimiento introducido no sustituyese el valor del conocimiento que había sido adquirido previamente. Ahora bien, una vez planteados los problemas y hasta que los estudiantes los resolvieran, nos abstuvimos de ser oferentes de los conocimientos que esperábamos que emergiesen. Este conflicto nos llevará luego a plantear una redistribución de la interacción con el medio para contar con herramientas para “examinar la solución” (Polya, 1944).

Uno de los supuestos fundamentales del contrato didáctico establece que todo problema planteado de manera legítima por el docente ha de poder ser resuelto. Es decir, existe una solución, y para arribar a ella deben usarse todos los datos presentes en el problema. A su vez, deben de combinarse y movilizarse procedimientos y reglas que resulten familiares para aplicar correctamente estos datos (Fregona, 1996). El estudiante además sabe que hay una intención de enseñanza por detrás del problema en tanto que el mismo fue elegido para hacer aparecer un nuevo conocimiento que ha de ser aprendido, pero también debe de reconocer que puede construir este saber sin atender a razones didácticas (Brousseau, 1998, p. 12). Es lógico, teniendo todo esto en cuenta, que los estudiantes acudiesen al cálculo de las integrales definidas para la obtención del área como en las Tareas 1 y 3. En efecto, consideramos muy posible que la labor de los estudiantes haya sido motivada por la situación didáctica planteada (es decir, que se viesen de alguna forma interpelados a tener que usar el conocimiento puesto en juego), y que, a su vez, esta misma situación didáctica haya constreñido otro tipo de abordaje de los problemas en cuestión, y, en consecuencia, el análisis de las regiones resultó secundario para la gran mayoría.

No podemos dejar de considerar la posibilidad de que esta forma de trabajo también se haya visto motivada por el acercamiento a la situación fundamental, por cuanto que la integral definida de la función que delimita una región con el eje de las abscisas, sea cual fuere la curva, siempre dará por resultado el área de dicha región con independencia de la forma geométrica de la misma. Así, esto mostraría otro grado de apropiación del objeto de estudio, pasando a ser ahora una herramienta que posee cierto grado de infalibilidad ante distintas situaciones y que no requiere en sentido estricto del análisis de la figura. Esto podría interpretarse a la larga como una apropiación del elemento formal de la integral definida que hace uso del registro algebraico de las funciones sin preocuparse por el análisis de la información que proveen otros registros de representación semiótica. En cierto sentido esto es deseable, ya que se busca, mediante la relación sostenida en el contrato didáctico, quitar todo lo de didáctico que pueda tener una situación para volver a la formulación de la situación adidáctica (Brousseau, 1998), con el fin de que el saber matemático ya instituido se convierta en un saber aplicable a distintas situaciones problemáticas.

Cabe a este respecto una última objeción, referida al reconocimiento de las situaciones problemáticas en que será mejor aplicar tal o cual saber matemático. Esto quizá se pone de manifiesto en la resolución de la Tarea 3 por parte de Antonio, quien encontró en el uso del cálculo integral un instrumento que no lo llevó a economizar el planteo de una solución, sino que lo condujo a una nueva dificultad, no tanto sobre el nivel matemático como en lo procedimental. Su solución, como se ha dicho, era correcta, y quizás la intervención más favorable habría sido el reorientar su trabajo, sugiriendo que en lugar de usar aproximaciones decimales trabajase con la expresión algebraica de los valores obtenidos para la pendiente y la ordenada al origen de la recta, favoreciendo de esta manera la llegada a la misma expresión algebraica a la que habría arribado de considerar el área del triángulo. Este tipo de acción, fuertemente basada en la coordinación de los registros de representación, habría sido favorable en la medida en que hubiese podido redescubrir la expresión para el área de un triángulo (base por altura sobre dos) en la expresión obtenida por medio de la integral definida.

Creemos conveniente cerrar esta parte de la discusión haciéndonos eco de las palabras de

Brousseau cuando establece que la tarea del docente consiste en tratar de hacer saber al estudiante lo que se espera de él al mismo tiempo que lo priva de todas las condiciones para la comprensión y el aprendizaje se logra cuando el estudiante puede superar las barreras ficticias insertas en la situación didáctica sin acudir a los signos didácticos que pueda leer en su entorno.

3.3.3 Estudio de los fenómenos de variación

Lo anterior nos conduce a hacer un breve análisis sobre el abordaje de la integral a través de los fenómenos de variación.

Como se ha dicho, esta forma de acceder al Teorema Fundamental, a través de la descripción de ciertos fenómenos en los que se estudia la relación entre la variación de una magnitud y la acumulación de dicha variación fue, durante la primera parte de la asignatura, un eje central sobre el que se articuló la vinculación entre integral y derivada. El movimiento de un cuerpo sobre una recta de acción fue uno de los fenómenos modelizados a través de estas nociones centrales del análisis. En particular, se relacionó fuertemente la distancia recorrida por un objeto en movimiento con la integral definida en el intervalo de tiempo correspondiente a la función que describe la velocidad del móvil en dicho intervalo.

Uno de los ejercicios propuestos durante las prácticas consistió en calcular el desplazamiento de un móvil cuya función de velocidad estaba descrita por la función v(t)=9t. Dicha tarea fue tratada en este trabajo en la Sección 2.7.4. De allí extraemos el siguiente fragmento de diálogo:

> Nicolás: Bueno, cuéntenme, ¿qué han hecho? ¿Qué han podido hacer … en el inciso a?? (Inmediatamente después, sin dar lugar a la respuesta del curso). ¿Cómo lo pensaron al inciso a?
> Magdalena: Ehm … pensamos que como tenemos la fórmula de la velocidad, que sería de la posición, y nosotros queremos en metros, entonces pensamos cuál es, digamos, la ecuación de la posición. Entonces pusimos es nueve medios t cuadrado $(\frac{9}{2}t^2)$.
> Tomás: Porque cuando nosotros derivamos esa función posición nos queda nueve t (9t), que es la velocidad.
> Nicolás: Ajá, correcto.
> Magdalena: Y ahí evaluamos la t en quince, que era los segundos que decía el problema, entonces nos quedaría nueve medios por quince cuadrado $(\frac{9}{2}(15)^2)$, y nos dio 1012,5 metros que sería lo que recorrió el móvil

después de quince segundos.

En este intercambio podemos apreciar que los estudiantes asocian que al derivar la posición se obtiene la función que describe la velocidad del móvil. Esta relación entre posición y velocidad puede ser explicada mediante un proceso de despersonalización de la situación adidáctica. Es decir, los estudiantes han conseguido hacerse con la situación fundamental (en este caso, que la velocidad representa la variación instantánea de la posición de un cuerpo respecto de su tiempo de marcha), y pueden emplear ese conocimiento en un problema que requiera del mismo, en otra situación didáctica como la presentada.

Este fenómeno puede ser interpretado de otra manera según la Teoría de Situaciones Didácticas. Lo que nos lleva al siguiente planteo es una situación que tuvo lugar fuera de un ambiente de enseñanza y por lo tanto ha de ser dimensionado en su justa medida. Durante la instancia evaluativa con la que dimos cierre al período de prácticas una de las estudiantes hubo de resolver el siguiente problema.

Actividad 3 de Instancia Evaluativa A

Actividad 3: Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad $v(t) = t^3 e^t$, medida en metros sobre segundos después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?.

La estudiante expuso la solución que dio a este ejercicio: para resolverlo calculó la integral indefinida de la función de velocidad aplicando el método de partes, y al finalizar obtuvo una integral indefinida. Cuando dio por cerrada su actividad uno de los practicantes sostuvo el siguiente diálogo con ella.

Nicolás: ¡Bien! Eso que resolviste ahí es una integral indefinida. ¿Ése sería el final de tu ejercicio?
Isabel: Sí, de lo que yo hice sí.
Nicolás: Bien, ahí yo hago una pregunta.
Isabel: Sí.
Nicolás: ¿Qué te pedía la consigna?
Isabel: "¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?".
Nicolás: Y… ¿vos cómo lo responderías a eso?
Isabel: Es lo que no sabía. O sea, tendría que evaluar entre cero y t

segundos.

En esta situación la estudiante ha resuelto una integral indefinida para dar respuesta a la pregunta por el desplazamiento del móvil después de una cantidad cualquiera de tiempo medida en segundos. Sin embargo, ella da el ejercicio por resuelto en el momento en que finaliza la integral y obtiene una función de posición. Ha integrado, pero al ser preguntada sobre en qué medida responde su actividad a la consigna, manifiesta que eso no lo tenía claro e indica un posible camino de acción (evaluar la función que ha encontrado entre cero y t).

Aquí la estudiante reconoció adecuadamente el método que debía emplear para integrar la función y ejecutó su plan de resolución hasta obtener una antiderivada de la velocidad dada. A pesar de haber hecho esto correctamente, queremos enfatizar que el proceso de integración no estuvo relacionado con una inmersión en el problema de encontrar el cambio en la posición del móvil conociendo su velocidad, ya que entonces la integral calculada debería de haber tenido de entrada una determinada funcionalidad dentro de su resolución. Dicha integral le permitiría evaluar en los extremos de integración apropiados para obtener el desplazamiento del objeto. Al no estar segura de si debe hacer o no esto último se pone de manifiesto un nuevo fenómeno del contrato didáctico.

Según Brousseau (1998), la analogía refiere al fenómeno en el que, después de una serie de problemas más o menos similares, los estudiantes comienzan a ser capaces de resolverlos, pero tales resoluciones no son indicativas de haber comprendido la situación fundamental que subyace al problema, sino a haber leído los signos didácticos que hacen parte del medio. Esto ocurre cuando, al ser presentada la solución de problemas análogos, los estudiantes comienzan a asimilar que en cierto tipo de situaciones el docente espera que se lleve a cabo determinado tipo de actividad. Más aún, que el tipo de actividad que debe llevarse a cabo es el que permite encontrar la solución a la situación problemática. Esto significa que los estudiantes pueden reconocer la situación didáctica en la que deben aplicar un determinado conocimiento matemático, lo que difiere mucho del caso en que los estudiantes han descontextualizado la situación didáctica para poder hacer uso del conocimiento matemático en una situación adidáctica.

En el caso presente, la estudiante calcula una integral porque el ejercicio remite a muchos otros problemas en que intervenía la velocidad y en los que había que integrar. Asume que lo que se espera de ella en este ejercicio que hace parte de una instancia evaluativa es que sepa calcular la integral y es por ello que lo hace. En otras palabras, lo que la motiva a calcular la integral en lugar de derivar proviene de que está enfrentada a una situación análoga a otras en que también se calculó una integral y no a que ha vuelto a ver en este problema el sentido variacional de la integral que permitiría resolverlo.

3.3.4 El tratamiento al interior del registro algebraico de las ecuaciones diferenciales

Volveremos ahora sobre la problemática anticipada en la Sección 2.9.4. Para ello, tomaremos como marco de referencia las Tareas 1 y 2 de la Sección 3.2.

Como se deja ver en el análisis de las producciones de Sara, observamos que esta estudiante resolvía las ecuaciones en derivadas despejando el diferencial de x para sustituirlo en la expresión de la integral por calcular. El lector podrá advertir que usa esta misma manipulación para resolver la Tarea 1.

Debido a las devoluciones que tuvimos por parte del curso de la Tarea 1, decidimos destinar un módulo de la clase del martes 30 de agosto a hacer una revisión de la misma. En esta clase, la docente practicante explica cómo debía procederse para resolver el problema. En particular, en cierto momento de la clase indica el motivo de que no siempre lo más apropiado es despejar el diferencial de x de la ecuación, ya que la derivada de la variable *u* podría anularse y se estaría dividiendo por cero. En este punto, Sara interviene y se mantiene el siguiente intercambio:

> Sara: Antes de que sigamos, tengo una duda.
> Micaela: Sí, claro.
> Sara: Si puede ser, a mí también me corregiste eso cuando yo despejo du y a mí me quedaba la x abajo.

La estudiante está haciendo referencia a la solución que dio sobre la Tarea 1. Ella declaró que $u = x^3 + 2,$ de donde obtuvo que $\frac{du}{dx} = 3x^2,$ y por lo tanto $dx = \frac{du}{3x^2}.$ Cuando dice que "le queda x abajo" se refiere a que la expresión $3x^2$ está en el denominador.

> Sara: Yo no tenía problema porque en realidad esa x a mí se me cancelaba con la otra antes de resolver la integral y evaluar el valor de x en 0.

Aquí la estudiante se refiere a que al "reemplazar" dx en la integral por la expresión a la que quedó igualado ocurre lo siguiente:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+2}\, dx = \int x^2 \sqrt{u} \frac{du}{3x^2} = \int \frac{x^2}{3x^2} \sqrt{u}\, du = \int \frac{1}{3} \sqrt{u}\, du.$$

> Micaela: ¡Sí! Está perfecto. Es que por eso les comentamos, no está mal el método, pero vos ahí estás dividiendo por tres x al cuadrado y es como que matemáticamente no queda muy bien. Es como que al calcular la integral, estás utilizando el diferencial de x. O sea, estás diciendo que todo lo que

> estás integrando depende de x y, en cierto modo, ya sabes que x se mueve, en este caso, entre cero y cero coma cincuenta y ocho, por más que todavía no lo hayas evaluado. Te va a tomar ese valor. Por más que no evalúes, ya estás dividiendo por cero.

En el diálogo anterior se puede observar que la estudiante proporciona una argumentación (válida en sus propios términos) para su procedimiento. Su razonamiento se basa en que no importa que la expresión del denominador se anule ya que la misma se simplifica con la expresión del numerador. Esta respuesta no fue prevista durante el diseño de la planificación. Percibimos en esta intervención un acercamiento a la actividad matemática. Si bien no estuvo motivado por un medio planteado con esa intencionalidad, la situación de corrección llevó a la estudiante a hacer una reflexión sobre su propia actividad y hallar una razón que la validase. Queremos rescatar esto porque el trabajo propuesto y las correcciones del mismo condujeron a esta estudiante a realizar una tarea genuinamente matemática: proporcionar una respuesta, sin ser un problema por resolver planteado por el docente, que le permitiera emplear una técnica de resolución que le resultó apropiada en las situaciones planteadas. En esto encontramos que la estudiante se introdujo en la situación fundamental. No proporcionó una respuesta a un medio, teniendo en cuenta las razones didácticas. La reflexión, por lo tanto, se dio al interior del problema matemático, despojándose la situación del carácter didáctico que tuviera en un principio; esto es, la estudiante no estaba pensando en ese momento cuál era la respuesta esperada por el docente, sino por formular una pregunta al docente, una pregunta de matemática, y exponer un argumento que pudiera sostener su práctica matemática. Para ello no recurre a datos y condiciones suministrados por el docente en un problema; por el contrario, acude a su bagaje cultural, a los saberes propios de la disciplina que ha adquirido y que le son útiles en esta necesidad de defender su trabajo.

En la Sección 3.2.4 nos encontramos con una situación que muestra otra forma de apropiación de los saberes. En este grupo, el saber fue justificado por una fuente exógena, tanto al aula de clases como al conocimiento matemático en sí. Los estudiantes entendieron una clave didáctica ("Aquí hay que resolver estas integrales usando el método de integración por partes porque estamos viendo ese método"), y se mostraron proactivos en la búsqueda de una formulación alternativa del método. Esta visión retrospectiva de las prácticas en las que podemos establecer un vínculo entre la tarea de Sara y la del grupo de Antonio y Paloma nos permite preguntarnos sobre otras posibles decisiones curriculares: por ejemplo, en lugar de aceptar implícitamente la regla "Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme", cuestionar a los estudiantes por su compatibilidad (ya que no por su validez) con la formulación que nosotros proporcionamos. Una de las posibles intervenciones se habría formulado en una cuestión: "¿Y por qué esto es lo mismo que usar la regla que vimos en el material de lectura?”. Consideramos, sin embargo, que en el contexto del curso fue atinado aceptar de forma tácita una equivalencia entre ambas formulaciones sin introducirlos a la labor de justificarla.

Como anticipamos en la Sección 2.10, el tratamiento de las ecuaciones en derivada y de la manipulación del diferencial como un objeto algebraico fue una de las primeras cuestiones analizadas durante el diseño de la planificación. Siguiendo a Martínez Torregrosa et al. (2002), observamos que el problema del cálculo diferencial se remonta a los comienzos de esta disciplina, por cuanto que una de las mayores críticas formuladas a los fundadores del cálculo fue siempre el tratamiento de las magnitudes “evanescentes” o “incipientes”. Este problema fue “resuelto” por Cauchy, proporcionando una formulación del cálculo a través del límite, lo que resolvía la cuestión sobre el significado y la validez de las expresiones diferenciales. Nos parece apropiado señalar que el programa de formalización del cálculo llevado a cabo por Cauchy tuvo un fuerte impacto en la forma de hacer matemáticas y de presentar resultados “bien demostrados”. Esto respondía a una necesidad dentro de la comunidad de matemáticos, pero también era necesaria una formulación que fuese susceptible de ser enseñada (i.e. el análisis se tornaba en objeto de estudio), y la emergencia de la Teoría de Conjuntos y de las estructuras algebraicas propiciaron la adopción de la formulación de Cauchy (Artigue, 1995). Esta presentación de los elementos del análisis requiere de una apropiación de la noción de límite para llegar a una definición formal del concepto de diferencial que está vaciado de todo contenido. Basta decir aquí que las propuestas que posibilitan el tipo de manipulaciones con ecuaciones en derivadas sin la pérdida de rigor matemático ni del sentido que ocupan en la modelización de fenómenos de variación requiere del dominio de los fundamentos del análisis en varias variables.

A la luz del contrato didáctico, es posible que (en esta instancia) un mayor tratamiento de las ecuaciones en derivadas hubiese producido un efecto de deslizamiento cognitivo, entendiendo esto junto con Brousseau (1998) como el proceso en el que se comienza a crear objetos auxiliares para la enseñanza de un objeto en la mira y, finalmente, los objetos auxiliares pasan a constituirse en objeto de estudio en sí mismo, al punto de desarrollarse en torno a estos una estructura semántica.

Esto nos condujo a adoptar cierto posicionamiento en relación con este particular. Consideramos necesario explicitar este punto ya que fue el origen de la problemática que aquí hemos tratado.

Cuando preguntamos al docente supervisor y al docente del curso por el mejor plan de acción a seguir en este caso, obtuvimos del último la siguiente respuesta a través del correo electrónico: “Respecto del tipo de manipulación que hagan para implementar la técnica, yo en general considero como válida todas estas manipulaciones. La razón es que claramente estamos en un terreno de manipulación informal, cuya corrección está garantizada porque se dan ciertas condiciones (por ejemplo g'(x) distinta de 0), que uno rara vez testea independientemente de que manipulación haga. Por otro lado, ellos desde su formación en el nivel obligatorio están llenos de "dogmas" sobre que ciertas técnicas se aplican así y no asá, sin poder explicar por qué no es válido aplicarlas asá ... Sería como un posicionamiento de no seguir nutriendo con nuevas restricciones esa colección de creencias. Me parece más productivo que cuando se la aplicó de manera ilegítima y aparece un error, se analice a dónde estuvo la falla".

Nos pareció sensato, en consecuencia, adoptar este posicionamiento en lo referido al tratamiento de los diferenciales como objetos algebraicos, susceptibles de ser manipulados como tales, en tanto que dicho tratamiento les resultaba útil para aplicar la técnica de sustitución. Por lo tanto, nos limitamos a señalar que resultaba válido despejar el diferencial de x para sustituirlo en la integral por calcular, mientras que se cumplieran ciertas condiciones. Ya que insistir sobre la necesidad de garantizar que la derivada de la nueva variable fuese no nula nos pareció una complicación añadida que no reportaba verdaderos problemas en lo que al cálculo se refería, sólo lo señalamos para que tuviesen en cuenta que no siempre es posible dividir por una expresión algebraica, aunque no mostramos ningún ejemplo en el que hacer esto llevase a alguna contradicción por considerar que no respondía a los objetivos planteados ni en el diseño anual del curso ni en la propuesta que desarrollamos para esta unidad. En efecto, el "simplificar una expresión" es de uso frecuente, y sólo en los casos patológicos conduce a alguna contradicción matemática fuerte.

Queremos resaltar que el aporte del docente no sólo orientó una decisión curricular. Su comentario nos hizo percibir de una manera distinta la dimensión en la que los estudiantes se relacionan con el saber matemático.

Es posible que algunos fenómenos del contrato didáctico, como la analogía, obturen en cierta medida el acercamiento a la situación fundamental que da lugar al vínculo y que, al mismo tiempo, favorezcan otros emergentes que no están ligados específicamente al objeto en la mira. Así, los estudiantes traen consigo ciertos condicionamientos sobre lo que es estudiar y hacer matemática, en donde quizá lo primordial sea entender antes que nada qué se espera de ellos en tanto estudiantes. Esto puede movilizarlos a proporcionar cierta respuesta, no por estar convencidos de la misma, sino porque asumen que es la respuesta a la que se debía arribar. De igual manera, si la restricción no puede explicarse, se convierte en una norma de trabajo que carece de un sentido para el hacer del estudiante al enfrentarse a una nueva tarea. Se hará así porque es lo que el docente le ha indicado que debe hacerse, y no se hará de otra manera, también, porque el docente lo ha prohibido o censurado. Pensamos que este terreno es propicio para abonar otras capacidades que hacen parte del trabajo del matemático: no sólo formular buenas preguntas y proporcionar respuestas, sino establecer criterios con significación para calibrar la respuesta en una suerte de desarrollo metacognitivo (Schoenfeld, 1992).

3.3.5 Posibles modificaciones del diseño de planificación

Para finalizar esta sección de análisis, presentamos algunas modificaciones al diseño que podrían reorientar la tarea como docentes y modificar algunos de los aspectos que se han visto transversalizados por esta problemática.

Análisis del material de lectura

Como describimos en la Sección 2.7, la tarea propuesta a los estudiantes fue realizar una lectura colectiva del material teórico que versaba sobre el Teorema Fundamental del Cálculo. A pesar de haber hecho ciertas intervenciones para dinamizar esa lectura colectiva, pensamos ahora que, si uno de los objetivos fue no desvincular la noción variacional que da lugar al TFC, podríamos haber propuesto una clave más puntual de lectura. En particular, indicar a los estudiantes que intentasen reconstruir, a partir de la formulación del teorema dada en nuestra copia, la formulación del mismo en el sentido del análisis de variaciones, de manera que se estableciera una equivalencia que quedase explícita.

Grafique la función

En el análisis que hicimos de la Actividad 2 de la Guía 1 (Sección 2.8) destacamos que los estudiantes no graficaron la función de velocidad dada. Vimos luego que pocas veces acudieron durante el período de prácticas a esta estrategia. Será bueno por lo tanto tener esto en cuenta e introducir la consigna (quizás de manera oral) de graficar la función. En este aspecto, pensamos que es un indicio positivo el orientar de cierta manera el trabajo de los estudiantes hacia el objeto que queremos mediante alguna indicación puntual.

Interpelar al curso de forma distinta

Al finalizar la Sección 2.9 mostramos una variación de la actividad allí analizada. La misma se ha pensado para propiciar un tipo distinto de discusión en los estudiantes. Es la formulación de un interrogante y de un desafío: ¿Eso es cierto o no? ¿O le falta algo? ¿Y cómo me doy cuenta? ¿Qué tengo que ver?

Por otro lado, esta actividad debería haberse trabajado en la presencialidad. Se podría haber tomado esta decisión durante la primera clase (viernes 19 de agosto) al ver que algunos estudiantes parecían dominar el cálculo de antiderivadas de funciones polinómicas. De no ser éste el caso, se debería haber trasladado el problema a la siguiente clase presencial. Es probable que el aula virtual no haya favorecido el intercambio de ideas que habría tenido lugar de ser trabajada esta tarea en el aula.

Modificaciones en la Tarea 1

Como señalamos, los estudiantes no contaron con un medio que les permitiera validar su respuesta, lo que habría sido favorable en los casos presentados de Milagros y Antonio. Uno de estos medios puede constituirlo la introducción de una cuadrícula en la figura que permita hallar un área aproximada de la región considerada. Asimismo, se podría plantear una nueva secuencia a partir de esta introducción. Primero estimar el área de la figura. Luego hallar el área exacta y, finalmente, encontrar cuál fue el error de la estimación realizada.

Cambio en la secuencia

Como se ha mencionado, al revisar las tareas correspondientes al cálculo de áreas determinadas por curvas observamos que las mismas no empleaban ninguna técnica de integración posterior a la técnica de sustitución. Por tal motivo, y con el fin de volver al sentido geométrico de la integral, se podría haber reubicado este bloque de problemas después de la Guía 2 (integración por partes) para cerrar el período de prácticas con el método de fracciones simples (quizás disminuyendo la cantidad de ejercicios que se abordaron para este último método).

Modificación de la Tarea 3

Por ser análoga a la tarea presentada en la Sección 3.2.1, la Tarea 3 es susceptible de recibir las mismas modificaciones.

Intervenciones de los docentes

Recuperamos aquí, por último, algunas de las decisiones que hemos comentado a lo largo de este capítulo.

En relación con la Tarea 3, nos parecería apropiado, de hallarnos ante la misma situación, el orientar la tarea del estudiante con una sugerencia: la de no usar las aproximaciones decimales para hacer las cuentas en lugar de hacerle ver que lo que tiene es un triángulo con bases y alturas conocidas.

Por otro lado, la Tarea 4 admitía una discusión más profunda sobre el enunciado equivalente del método de integración. Esto puede ligarse con la primera modificación que hemos propuesto en esta sección y se convertiría en un contenido procedimental que hace parte de la labor matemática: comprobar que dos enunciados son equivalentes o dicen lo mismo. En este caso, consideramos que habría sido prudente llamar la atención de la clase sobre la discrepancia aparente entre las distintas formulaciones del método de partes e invitar al curso a que proporcionase un argumento en el que se viera que ambas formulaciones representan la misma regla de integración y por ello se puede emplear cualquiera de las dos.

Conclusiones

Deseamos destinar las últimas líneas de este trabajo para hacer algunos comentarios finales en relación con la particular experiencia de haber trabajado en un Instituto Superior de Formación Docente.

Existen en verdad cosas que no se pueden transmitir en virtud de un proceso expositivo. El aporte a nuestra formación inicial docente que ha dejado este trabajo de campo no podría haberse sustituido con ningún otro tipo de práctica en el aula. Esta etapa nos permitió revalorar la formación en los campos disciplinares y generales, por cuanto que pudimos llevar adelante una experiencia reflexiva acudiendo a los saberes adquiridos durante el trayecto académico señalado. Quizás la relevancia de tales conocimientos se puso de manifiesto en el periodo de observación y durante el diseño de la planificación. La formación en análisis matemático y en didáctica de la matemática favoreció la trasposición didáctica de los saberes puestos en juego.

El diseño tuvo una incidencia no menor en el proceso de residencia. Como hemos señalado en este informe, no fueron pocas las situaciones en que pudimos recurrir a la anticipación que hicimos para propiciar en el curso una dinámica que favoreciera la construcción de significados en torno al objeto de estudio. Ciertamente esto mejoró la gestión de las clases al reflexionar sobre las intervenciones que sería pertinente (o no) realizar ante las propuestas de los estudiantes y sus actividades.

Ahora bien, no existe anticipación para cualquier eventualidad. Trabajar con estudiantes de carne y hueso hizo que tomásemos conciencia de las dimensiones en que está inserto el trayecto formativo. El curso estuvo constituido por estudiantes con una amplia dispersión de rango etario, con distintas trayectorias en su formación, con otras actividades curriculares y laborales. Sumado a lo reducido del curso, tratamos de adaptar nuestra propuesta para orientar a la clase en un proceso de construcción colectiva, y en esto nos encontramos con un primer gran desafío: ¿cómo enseñamos de manera significativa a todos? Por otro lado vivenciamos también corrimientos en el cronograma cuyas causas quedaron por fuera de nuestra injerencia. Tuvimos que hacer frente sobre la marcha a estas demoras particulares.

El proceso de autorregistro y reflexión durante el periodo de prácticas nos condujo a replantearnos algunos ejercicios y formulaciones de las tareas que podrían reorientar la experiencia en otro contexto. En particular, creemos conveniente resaltar la importancia de haber tenido presente que la unidad curricular no persigue enseñar un texto del saber, sino introducir a los estudiantes a las problemáticas del análisis matemático para favorecer en ellos el desarrollo de una intuición de ciertos fenómenos que son susceptibles de modelización a través de las herramientas que el análisis provee. Resultaron valiosas las actividades en que propusimos coordinar diferentes registros de representación con el fin de no despojar de sentido el objeto matemático estudiado. De hecho, la problemática que analizamos en la tercera Sección de este informe emerge a raíz de tales medios.

Sólo la experiencia en el aula pudo mostrarnos algunas posibles aplicaciones de las tecnologías digitales en secuencias posteriores. Como hemos señalado, la ausencia de tales actividades fue ocasionada por el sesgo del objeto en la mira y la búsqueda de la adquisición de la manipulación simbólica del cálculo integral. No obstante no poder generar una reorganización de los roles tradicionales en el aula, las tecnologías digitales sí habrían sido de gran utilidad para reconducir la atención de los estudiantes hacia otros aspectos del objeto de estudio. En otras situaciones, el empleo de tecnologías digitales para hallar integrales de funciones definidas por partes resultaría en el desarrollo de capacidades en torno al tratamiento algebraico de las funciones y la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

El análisis de la problemática nos introdujo nuevamente a la didáctica de la matemática en tanto que pudimos establecer una interpretación para ciertos hechos. Estas explicaciones no son (en modo alguno) conclusivas, pero se insertan en una dialéctica en la que los hechos se leen como fenómenos. Tal acercamiento a lo sucedido en el aula es un aporte no menor en nuestra formación como docentes. Este tipo de práctica es crucial en el desempeño profesional, hace parte de uno de los pilares de la formación continua, y propicia una disposición crítica para el análisis y la autorregulación con miras a mejorar la calidad de las intervenciones. El último punto constituyó un eje central en las instancias preparatorias previas a la residencia. Cerramos, pues, esta breve discusión tal y como fue iniciada: el texto del saber sobre la relevancia que tiene la presencia de una actitud crítica de la propia actividad docente fue (a priori) un texto del saber; lo valioso ha sido poder transitar estas tres grandes instancias (de preparación, de ejecución y de reflexión) con el objeto de llevar con nosotros un saber *inalmado.*

En efecto, el proceso ha concluido, tal y como concluye este informe, con el reconocimiento de que el camino son las huellas, queriendo significar el poeta que no existen más senderos que aquellos que uno mismo se construye. Y si bien existen otras vías, ninguna de ellas tendrá el mismo valor afectivo que las abiertas por uno mismo a través de las escarpaduras. Estas últimas se recordarán siempre como la primera inmersión en un mar de aguas tumultuosas, en que no contaba tanto la pericia como la osadía y el arrojo, necesarias para enfrentar la prueba del abismo y la dura prueba del ascenso.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)

Brousseau, Guy. 1998. Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques. (Teoría de Situaciones Didácticas. Didáctica de la matemática). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Davis, Philip J. y Hersh , Reuben (1989). Experiencia Matemática. Editorial Labor/MEC.

Duval, Raymond. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME.

Martínez Torregrosa, J.1 2002, López-Gay, R.1, Gras Martí, A.2 y Torregrosa Gironés (2006). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. La Gaceta De La Rsme.

Macías Sánchez, Jesús. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. Universidad Internacional de la Rioja (UNIR)

Molfino Verónica y Testa Yacir. Diferentes perspectivas en el abordaje del cálculo infinitesimal escolar. Departamento de matemática de formación docente, Instituto de profesores artigas, Uruguay.

Polya, G. 1965. Cómo plantear y resolver problemas (How to solve it). Editorial Trillas.

Skovsmose, O. (1999c) “Undersøgelseslandkæber” (Escenarios de investigación). Serie de Documentos del Centro de Investigación en Aprendizaje de las Matemáticas de Dinamarca.

Anexo I: Guía 1

Integrales de Funciones Elementales

Repaso

Definición:

Sea f una función continua. Si se considera g tal que $g'(x) = f(x)$, entonces se dice que g es una "antiderivada" de f.

Repaso del Teorema Fundamental del Cálculo

Parte 1

Enunciado:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a,b], y se define para todo x en [a,b] la función $F: [a, b] \rightarrow \Re$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces F es derivable en (a,b) y se cumple que $F'(x) = f(x)$.

Observaciones:

- La función F es una antiderivada de f, pues satisface la definición dada.
- La variable t que aparece en el argumento de f es un número real tal que $a \leq t \leq x,\ \forall x \in [a, b]$.

Parte 2

Enunciado:

Si $g': [a, b] \rightarrow \Re$ es una función continua en el intervalo [a,b], entonces $\int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a)$.

Aplicación práctica del teorema fundamental del cálculo

Supongamos que se desea calcular $\int_a^b f(x)\, dx$. Por el primera parte del teorema, existe $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ tal que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$. Por lo tanto se tiene que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F'(x)\, dx$.

Por la segunda parte del teorema se tiene que $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Con esto hemos llevado el problema de calcular una integral definida de una función f a hallar la antiderivada de f y evaluarla en los extremos de integración.

Repaso de algunas propiedades de las derivadas

Puesto que el teorema fundamental del cálculo liga los procesos de derivación e integración, para abordar la temática de cálculo de integrales indefinidas nos parece conveniente recordar aquí algunas de las propiedades más importantes de las reglas de derivación.

	Funciones	Derivada
Regla: Derivada de la constante	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
Ejemplo	$f(x) = \frac{7}{2}\pi\sqrt{e}$	$f'(x) =$
Regla: Derivada de constante por función.	$f(x) = cg(x)$	$f'(x) = cg'(x)$
Ejemplo	$f(x) = 7x^2$	$f'(x) =$
Regla: Derivada de la suma.	$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h(x)$
Ejemplos	$f(x) = \pi x^2 + x^5$	$f'(x) =$
Regla: Derivada de la diferencia.	$h(x) = f(x) - g(x)$	$h'(x) = f'(x) - g'(x)$
Ejemplo	$f(x) = 7x - 3x^2$	$f'(x) =$
Regla de la cadena.	$h(x) = f\ o\ g\ (x)$	$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
Ejemplo	$h(x) = sen(x^3)$	$h'(x) =$
Regla de Leibniz para el producto de funciones.	$h(x) = f(x)g(x)$	$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Ejemplo	$h(x) = ln(x)(3x^2 + 2x)$	$h'(x) =$

Regla: Derivada del cociente.	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Ejemplo	$h(x) = tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	$h'(x) =$
Regla: Derivada de la inversa.	$h(x) = f^{-1}(x)$	$h'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
Ejemplo	$h(x) = arctan(x)$	$h'(x) =$

Actividad 1

Dada $f(t) = 3$ para todo t en los reales. Calcular $Z(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Grafique la función Z en toda la recta real.

Propiedades de la integral

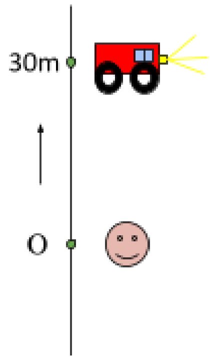
1. $\int_a^b g(t)dt = -\int_b^a g(t)dt$

2. $\int_a^b g(t)dt = \int_a^c g(t)dt + \int_c^b g(t)dt$

Actividad 2

Para un móvil que parte del reposo y se mueve en línea recta, la función $v(t) = 9t$ permite determinar su velocidad v medida en m/s, respecto del tiempo de marcha t, medido en segundos.

a) ¿Cuántos metros recorre el móvil después de quince segundos $(15s)$ de estar en continuo movimiento?
b) Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de t segundos de marcha.
c) Suponiendo que a tiempo $t = 0$ el móvil se hallaba a $30\, m$ a la derecha del observador O (quien está sobre la misma recta por la que se desplaza el móvil), ¿a qué distancia se hallará después de un tiempo t de marcha? Grafique la función que describe la posición del móvil respecto de dicho observador O.



d) Suponga que el móvil tiene una velocidad dada por la función $v(t) = kt$ y que en el tiempo $t = 0$ se encuentra en la posición c respecto de un observador. ¿Cuál es la función que describe la posición del móvil respecto del tiempo?

Familia de antiderivadas

Por lo visto hasta aquí se tiene que la integración es el "proceso inverso" de la derivación, puesto que al integrar una función f se obtiene una función F que, al ser derivada, da por resultado la f.

No obstante, debemos aclarar que si bien al derivar se obtiene una función, cuando integramos obtenemos una familia de antiderivadas. Supongamos que se tiene una función continua f y se define la función F como en la primera parte del TFC dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, esta función satisface que $F'(x) = f(x)$ (es decir, F es antiderivada de f).

Ahora bien, si consideramos $g(x) = F(x) + c$, es fácil ver que g también es una antiderivada de f, ya que $g'(x) = f(x)$, pues la derivada de la constante c es cero.

Así, obtenemos el siguiente resultado:

Si g es una antiderivada de f, entonces $g(x) - F(x) = c$. Este resultado depende del teorema del valor medio y se basa en que si la derivada de una función es cero, entonces dicha función es constante.

Conclusión

Lo anterior indica que existen infinitas antiderivadas de f. En efecto, si a la función F se le suma cualquier número real c se obtiene una función g que resulta ser también antiderivada de f.

Observación

La función F definida en la primera parte del teorema fundamental del cálculo por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es la única de las infinitas antiderivadas de f que satisface que $F(a) = 0$.

Notación

Si se tiene una función f continua, entonces el signo $\int f(x)\, dx$ representa a cualquier función $g(x)$ que sea antiderivada de f y se llama integral indefinida de f.

Actividad 3

Completar la tabla de integrales indefinidas que se presenta a continuación, probando alternativas y corroborando.

	Resultado	Justificación
$\int c\, dx =$		
$\int x\, dx =$		
$\int x^2\, dx =$		
$\int x^n\, dx =$		
$\int kx^n =$		
$\int 5x^3 + \pi x^2 - 2x + \sqrt{3}\, dx =$		
$\int c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_0\, dx =$		

Propiedades de la integral indefinida

1. Si c es un valor constante respecto de x, entonces $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

2. Si f y g son funciones continuas, entonces $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Demostraciones

1) Supongamos que $F(x) = \int f(x)\,dx$ por lo que $F'(x) = f(x)$. Si $h(x) = c\,F(x)$ entonces $h'(x) = c\,F'(x) = c\,f(x)$, y por lo tanto h es una antiderivada de cf. Es decir que $h(x) = \int c\,f(x)\,dx$. Por lo tanto $c\,F(x) = \int c\,f(x)\,dx \Rightarrow c\int f(x)dx = c\,f(x)dx$.

2) Sean F y G antiderivadas de f y g respectivamente. Definimos $h(x) = F(x) + G(x)$ .Entonces $h'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(x) = \int f(x) + g(x)\,dx \Rightarrow$ $F(x) + G(x) = \int f(x) + g(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx$.

Actividad 4

a) Complete la tabla de derivadas

$f(x) = x^n$	$f'(x) =$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) =$
$f(x) = e^x$	$f'(x) =$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) =$

b) Complete la tabla de integrales indefinidas justificando su respuesta.

	Resultado	Justificación
$\int cos(x)\,dx =$		
$\int sen(x)\,dx =$		

$\int \frac{1}{x}\, dx =$		
$\int e^{x} dx =$		

Actividad 5

Una partícula se mueve en línea recta. La función v, cuya expresión analítica está dada por $v(x) = x^{2} - 3x + 2$, representa la velocidad en metros sobre segundos de dicha partícula respecto del tiempo medido en segundos durante el intervalo $[0, 3]$. Teniendo esto en cuenta, resuelva:

a. Esboce el gráfico de la función de posición de la partícula, indicando periodos de crecimiento o decrecimiento, intervalos de concavidad, puntos críticos y otros elementos que usted considere pertinentes. Justifique de manera analítica.

b. Elabore una descripción del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo considerado. Señale en esta descripción los momentos en que la partícula avanza o retrocede, si lo hace frenando o acelerando, si se detiene o no. Indique además cuál fue el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo propuesto así como el recorrido total que hizo.

Actividad 6

Resuelva las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int 7x^{2} + 3\, dx$

b) $\int 4\, sen(x) - 5e^{x}\, dx$

c) $\int x^{\frac{-2}{3}}\, dx$

d) $\int \frac{1}{x^{3}}\, dx$

e) $\int \frac{3}{x} + 6x^{5} - cos(x)\, dx$

f) $\int 10x^{2} - 2sec^{2}(x)\, dx$

g) $\int 2x^{3} - 6x + \frac{3}{x^{2}+1}\, dx$

Anexo II: Guía 2

Método de Sustitución

Introducción

Contexto

Durante la guía anterior aprendimos a calcular integrales indefinidas de funciones elementales. Es necesario recordar que buscamos antiderivadas de funciones para aplicar el teorema fundamental del cálculo y facilitar la tarea de calcular integrales definidas.

En esta guía proseguiremos con el estudio del cálculo de antiderivadas para funciones que presentan un mayor grado de complejidad. Aprenderemos a calcular la integral indefinida de una función usando la regla o método de sustitución y a identificar los casos en que podemos aplicar esta regla.

Repaso de la regla de la cadena

Antes de introducirnos en el método de sustitución será conveniente tener presente el resultado conocido como "regla de la cadena", que se emplea para derivar composiciones de funciones.

Enunciado

Si f y g son funciones derivables, entonces $f°g$ es derivable y la forma de la derivada es $(f°g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Otra manera de escribir este hecho es que si $y = f(u)$, y $u = g(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, donde $\frac{dy}{du}$ representa la derivada de y con respecto a u, es decir $\frac{dy}{du} = f'(u)$ y $\frac{du}{dx}$ representa la derivada de u con respecto a x , es decir $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

Ejemplo

La función a derivar estará dada por $h(x) = sen(3x^4 + 7x)$. En la función h identificaremos que la función exterior f del teorema es el seno, mientras que la función interior g es el polinomio de grado 4 con variable en x. Derivaremos la función seno, evaluándola en el polinomio de grado 4 sin derivar, y multiplicando a continuación por la derivada del polinomio.

Quedará entonces que $h'(x) = cos(3x^4 + 7x)(12x^3 + 7)$.

Actividad 1

En cada caso, escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de ellas.

a) $h(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b) $h(x) = sen(x^2)$

c) $h(x) = sen(x)^2$

d) $h(x) = tan(\pi x)$

e) $h(x) = e^{cos(x)}$

f) $h(x) = ln(\sqrt{x})$

g) $h(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

Regla de sustitución

Enunciado

«Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces $\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$.

Note que la regla de sustitución para la integración se probó aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\, dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du del enunciado como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución establece: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales**». (James Stewart, Cálculo de una variable, p. 407).

Observación

De esta lectura queremos destacar el hecho de que esta regla "funciona bien" ante aquellas funciones que sean de la forma $f(g(x))g'(x)$. Es decir, un producto de funciones en el que uno de los factores es una composición y el otro es la derivada de la función interior de dicha composición.

Así pues, se puede deducir del trabajo realizado en la actividad introductoria, que la función a integrar procede de una composición de F°g, donde F es una antiderivada de f (en símbolos, $F'(x) = f(x)$). Es decir que $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

El método de sustitución se divide entonces en dos pasos:

1. Reconocer la estructura $f(g(x))g'(x)$ para ver si es posible usar la regla de sustitución.
2. Declarar que $g(x)$ es una nueva variable y que el diferencial de u es igual a la derivada de g por el diferencial de x. En tal caso, sólo ha de resolverse $\int f(u)du$.

Tiene que quedar en claro que tras haber obtenido alguna F tal que $F'(u) = f(u)$ (i.e. tras haber resuelto la integral indefinida), debemos volver a sustituir u por g(x) para obtener $F(g(x))$ como antiderivada respecto de la variable x.

Ejemplo

Calcular $\int 2\, cos(2x)\, dx$.

Obsérvese que aquí hay un producto entre una función constante (2) y una composición (el coseno de $2x$).

Por otro lado, se puede ver que la derivada de $2x$ es 2. Así pues, si $u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx$. Y como $\int 2cos(2x)\, dx = \int cos(2x)2\, dx$ puesto que el producto es conmutativo, se tiene que $\int cos(2x)2\, dx = \int cos(u)\, du = sen(u) + c = sen(2x) + c$. Donde c es una constante de integración.

Actividad 2

Para cada una de las siguientes funciones, encuentre las funciones f y g de manera tal que cada $h(x)$ pueda ser escrita de la forma $f(g(x))g'(x)$. Luego calcule la integral indefinida de $h(x)$.

a) $h(x) = sen(x)^2 cos(x)$

b) $h(x) = -\, e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}$

c) $h(x) = \frac{1}{x} ln(x)^3$

d) $h(x) = 4cos(x^4 + 1)x^3$

Actividad 3

Calcule las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

b) $\int (e^{x})^2 e^{x}\, dx$

c) $\int \frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}\, dx$

d) $\int \frac{-sen(x)}{2\sqrt{cos(x)+1}}$

e) $\int x^{2} e^{x^{3}}\, dx$

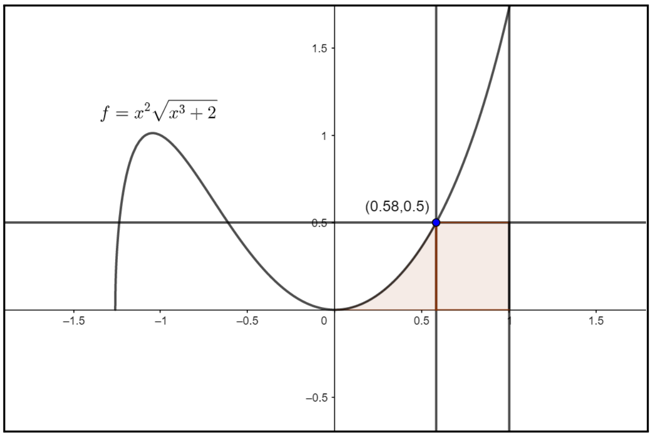
f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^{2}}}\, dx$

g) $\int tan(x)\, dx$

h) $\int \frac{1}{x\sqrt{ln(x)}}\, dx$

Actividad 4

Encuentre de manera exacta el área sombreada. Plantee y calcule las integrales para obtener el valor pedido.



Anexo III: Guía 3

Integración por Partes y Fracciones Simples

Introducción

<u>Regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones</u>

Si f y g son dos funciones derivables entonces el producto de ambas funciones es derivable y se cumple que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ejemplo de aplicación

Si se tiene la función h dada por $h(x) = ln(x)3x^5$, entonces se pueden distinguir aquí dos funciones f y g que se multiplican, dadas por $f(x) = ln(x)$ y $g(x) = 3x^5$. Ambas funciones son derivables, por lo que h lo es. Y usando la regla de Leibniz se tiene que $h'(x) = \frac{1}{x}3x^5 + ln(x)15x^4$

Integración por partes

La regla de Leibniz para la derivada de un producto nos aporta una forma de resolver integrales indefinidas de productos de funciones de la forma $\int f(x)g'(x)dx$.

Es decir, productos en donde podamos identificar que uno de los factores es la derivada de alguna función g. Esto implica que reconocemos cuál es la primitiva de alguna de las funciones que se están multiplicando. Siguiendo la regla de Leibnizs tenemos que:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x).$$

Si integramos ambos miembros de la igualdad en el lado izquierdo de la expresión aparece la integral que deseamos calcular, de la siguiente manera: $\int f(x)g'(x)dx = \int (fg)'(x) - f'(x)g(x)dx$

Además se tiene que:

$\int (fg)'(x) - f'(x)g(x)dx = \int (fg)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx$ por la linealidad de la integral.

Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que la integral de (fg)’ es fg. En símbolos queda que $\int (fg)'(x)dx = (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Por lo tanto, siguiendo esta cadena de identidades, se obtiene que $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ y esto se conoce como la regla de integración por partes.

Nótese que se aplica a un producto de funciones en donde se reconoce que una de ellas es derivada de alguna g, por lo que ya tenemos en mente cuál es su primitiva. Además, la integral de $f(x)g'(x)$ queda en términos de otra integral por calcular (la integral de $f'(x)g(x)$). Esto puede resultar confuso, pero la esencia del método de integración por partes se basa en que esta segunda integral resulta más fácil de calcular que la primera.

Ejemplo de aplicación

Calcular $\int x^2 e^x dx$.

Supondremos que $f(x) = x^2$ y que $g'(x) = e^x$. Por lo tanto $g(x) = e^x$, mientras que $f'(x) = 2x$. Aplicando el método de integración por partes se obtiene que:

$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx$.

Observemos que ahora debemos de calcular $\int xe^x dx$ y para ello volveremos a emplear el método de integración por partes.

Consideraremos ahora que $f(x) = x$, y que $g'(x) = e^x$. De esto se sigue que$g(x) = e^x$ y que $f'(x) = 1$.

Aplicando entonces nuevamente la regla de integración por partes queda que:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Si reemplazamos en la primera igualdad en la que usamos la regla de integración por partes obtenemos que:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x. = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Por lo tanto $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Actividad 1

Calcule las siguientes integrales indefinidas

a. $\int x\, sen(x)\, dx$

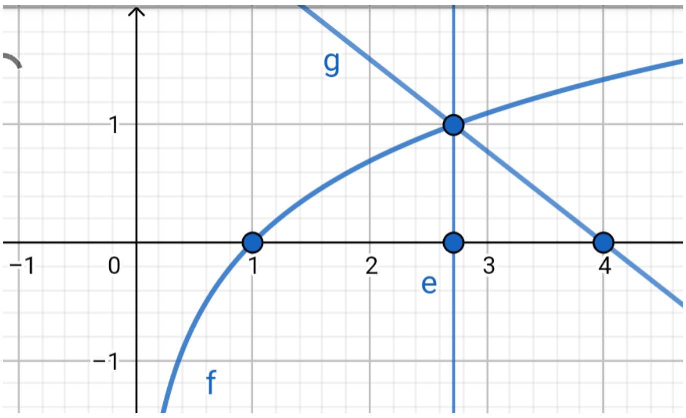
b. $\int \frac{ln(x)}{x^2}\, dx$

c. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$

d. $\int e^x cos(x)\, dx$

Actividad 2

Calcular el área de la figura determinada por la gráfica del logaritmo natural, la recta que pasa por los puntos $(e, 1)$ y $(4, 0)$ y el eje X.



Ayuda: Se puede pensar que $ln(x) = ln(x) \cdot 1$

Introducción al método de fracciones simples

Repaso de conceptos elementales

Si p y q son funciones polinómicas entonces la función f dada por el cociente $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ se llama "función racional".

El método de integración de fracciones simples se aplicará a funciones racionales. Antes hemos calculado integrales de este tipo de funciones, por ejemplo $\int \frac{2x}{1-x^2}\, dx$, empleando la sustitución:

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx \Rightarrow \int \frac{2x}{1-x^2}dx = -\int \frac{du}{u}.$$

Ahora bien, es posible hacer esta sustitución porque en el numerador de esta función racional se puede hacer "aparecer" la derivada del polinomio del denominador. Sin embargo, si tuviésemos que calcular ahora $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx$ no podríamos aplicar este método, ya que no podríamos hacer "aparecer" la derivada.

Es necesario, pues, introducir un nuevo método, que denominaremos fracciones simples, y que se basa en descomponer una función racional en suma de funciones racionales.

Repaso de suma de funciones racionales

Resolver la siguiente suma de funciones racionales: $\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$

Observación

Nótese que el resultado de la suma es la función racional dada por $\frac{3}{x^2+x+2}$.

Si se quisiera calcular $\int \frac{3}{x^2+x+2}\, dx$ se vería que no es posible aplicar aquí ninguno de los métodos vistos hasta el momento. No se puede hacer aparecer una derivada para aplicar la regla de sustitución y tampoco resulta práctico intentar el método por partes, pues en algún momento deberíamos calcular $\int \frac{1}{x^2+x+2}\, dx$, que no podríamos resolver.

No obstante, puesto que sabemos que la función racional $\frac{3}{x^2+x+2}$ procede de una suma de funciones racionales, se puede plantear que:

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\, dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+2}\, dx = \int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx.$$

Nótese que hemos reducido el problema a dos integrales que podemos calcular mediante el método de sustitución. De esta forma se obtiene que:

$$\int \frac{3}{x^2+x-2}\, dx = \ln(x-1) - \ln(x+2).$$

Planteo del problema

Aquí hemos podido calcular $\int \frac{3}{x^2+x+2}\, dx$ usando las integrales de las fracciones simples, ya que conocíamos los sumandos y llegamos a la función racional realizando la suma.

Si de entrada se nos propusiera calcular la integral anterior sin conocer los sumandos de los cuales proviene, entonces no habríamos podido aplicar esta estrategia. Así pues, el método de fracciones simples consiste en tomar una función racional y transformarla en suma de fracciones irreducibles de las que se pueda calcular la integral indefinida por separado.

Primer ejemplo de aplicación por el método de fracciones simples

Supongamos que se quiere calcular $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx$.

La primera parte del método de fracciones simples se basa en factorizar el denominador de la expresión, quedando así que:

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx.$$

Cuando se ha factorizado de esta manera, entonces se plantea que esta función racional puede ser expresada como suma de dos funciones racionales en las que los denominadores son los factores

$(1 - x)$ y $(1 + x)$.

Se formula esto de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{1+x},$$

donde a y b son constantes que debemos determinar realizando la suma de fracciones.

Realizar la suma de fracciones implica hallar un denominador común, que en este caso será el producto $(x - 1)(1 + x)$.

Es decir que:

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{1-x^2} = \frac{a+ax+b-bx}{1-x^2} = \frac{(a+b)+(a-b)x}{1-x^2}$$

Siguiendo esta cadena de igualdades se ha obtenido que: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{(a+b)+(a-b)x}{1-x^2}$

Con los polinomios de los numeradores se tiene entonces que $a + b = 1$, mientras que $a - b = 0$, ya que el polinomio constantemente 1 no tiene coeficientes lineales.

De estas relaciones se desprende que $a = b$, y por lo tanto $a + b = 2a = 1$, de donde se concluye que $a = ½$.

Sabiendo esto, se puede escribir que: $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\, dx$.

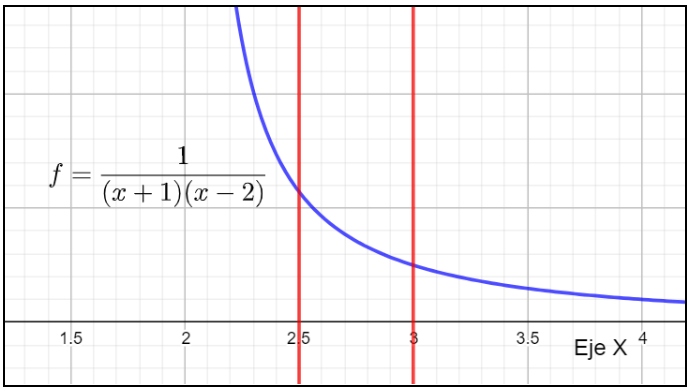
Aplicando la propiedad de suma de integrales, sacando la constante ½ fuera del signo integral y haciendo las sustitución $u = 1 - x$ y $v = 1 + x$ en cada una de las integrales, se llega a que $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} ln(1 + x) - \frac{1}{2} ln(1 + x) + c$

Observación

Por el momento, y para las actividades que siguen, bastará que podamos descomponer el polinomio del denominador en factores de polinomios lineales. Si se consigue esto, entonces se podrá aplicar el método tal y como fue pensado en el ejemplo anterior.

Actividad 3

Calcular el área de la figura delimitada por las rectas rojas, la gráfica de la función dada por $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ y el eje X.



Actividad 4

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \frac{1}{x^2-25} dx$

b. $\int \frac{1+6x}{(x-3)(x-5)} dx$

c. $\int \frac{4x}{x^3-2x^2-x+2} dx$

d. $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

<u>Segundo ejemplo de aplicación</u>

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)}\, dx$. Abordaremos este problema aplicando el método de fracciones simples.

Obsérvese que el denominador de esta función racional ya está factorizado y que el grado de dicho polinomio es 3, mientras que el grado del polinomio del numerador es 2.

Toda vez que aplicamos este método hasta ahora habíamos conseguido factorizar el denominador de la función racional en polinomios lineales. En este caso, por el contrario, uno de los factores es el polinomio cuadrático $(x^2 + 4)$, que no puede factorizarse en ningún polinomio lineal debido a que no posee raíces reales.

Así pues, al aplicar ahora el método de fracciones simples introduciremos una variante para resolver el problema.

Razonamiento analógico:

- Si al tener factorizado el denominador en polinomios lineales las fracciones simples tenían numerador constante, al tener un factor cuadrático el numerador correspondiente será una función lineal.

Es decir que en lugar de escribir que: $\frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+4}$, debemos plantear $\frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4}$.

Si resolvemos la suma, quedará entonces que:

$$\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4} = \frac{a(x^2+4)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{ax^2+4a+bx^2+bx+cx+c}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{ax^2+bx^2+bx+cx+4a+c}{(x+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+4a+c}{(x+1)(x^2+4)}$$

Nos queda que: $\frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+4a+c}{(x+1)(x^2+4)}$

Puesto que los numeradores de ambas expresiones han de coincidir, se plantea entonces que:

$7 = a + b$,

$2 = b + c$,

$20 = 4a + c$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que $a = 5,\ b = 2\ y\ c = 0$.

Luego se tiene que:

$$\frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x^2+4} \Rightarrow \int \frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} dx = \int \frac{5}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx$$

Se resuelve cada integral por separado:

$\int \frac{5}{x+1} dx = 5 \int \frac{dx}{x+1}$.

Sea $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$, entonces $5 \int \frac{du}{u} = 5\, ln(u) = 5\, ln(x + 1)$.

Mientras que para $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$, tomo $v = x^2 + 4 \Rightarrow dv = 2x\, dx$, entonces $\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \int \frac{dv}{v} = ln(v) = ln(x^2 + 4)$

Así se llega a que $\int \frac{7x^2+2x+20}{(x+1)(x^2+4)} dx = 5\, ln(x + 1) + ln(x^2 + 4) + c$, con c una constante de integración.

Actividad 5

Calcular las siguientes integrales definidas empleando el método de integración por fracciones simples.

A. $\int_3^6 \frac{x+3}{x^2-2x}dx$

B. $\int_7^9 \frac{x+2}{x^2+2x-15}dx$

C. $\int_2^\pi \frac{2x+1}{-x^3-4x^2+5x}dx$

D. $\int \frac{5x^2}{(x-4)(x^2+9)}dx$

E. $\int \frac{2x^2+17x+26}{x^3+6x^2+13x}dx$

Anexo IV: Guía 4

Cálculo de área

Actividad 1

Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{3x^2+8x+64}{(x+2)(x^2+16)}\,dx.$$

Resolución

$$\frac{3x^2+8x+64}{(x+2)(x^2+16)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+16} \Rightarrow a = 3 \wedge b = 0 \wedge c = 8.$$

$$\int \frac{3x^2+8x+64}{(x+2)(x^2+16)}dx = 3\ln(x+2)\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{4}) + c.$$

Actividad 2

Calcular el área de un círculo de radio r mediante una variante de la regla de sustitución.

Actividad 3

Dos vehículos salen de la línea de partida de una pista de carreras cuando suena el pistoletazo reglamentario. La pista es una línea recta y la función de velocidad que describe al primer vehículo está dada por:

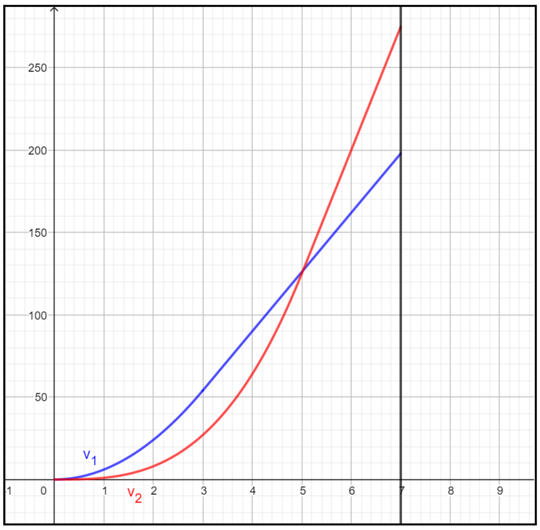
$$v_1(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ 36x - 54 & \text{si } 3 < x \leq 7. \end{cases}$$

Por otro lado, la función de velocidad del segundo vehículo está descrita por:

$$v_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 75x - 250 & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

Pasados siete segundos la carrera finaliza. La velocidad se mide en metros sobre segundos y el tiempo x en segundos. Resuelva:

a) Observe el gráfico que representa las funciones de velocidad de los móviles durante la carrera. Describa cómo será la carrera sin calcular las integrales indefinidas.



b) Indique quién ganó la carrera.

c) ¿Cuál es la distancia máxima de los móviles?

d) ¿Qué representa el área de las regiones determinadas por las gráficas?

Actividad 4

Dada $f(x) = cos(x)$, $g(x) = sen(x)$, grafique la región determinada por f, g y la curva $x = 0$ y la región determinada por f, g y la curva $x = \frac{\pi}{2}$. Luego, calcule el área de la unión de las regiones.

Actividad 5

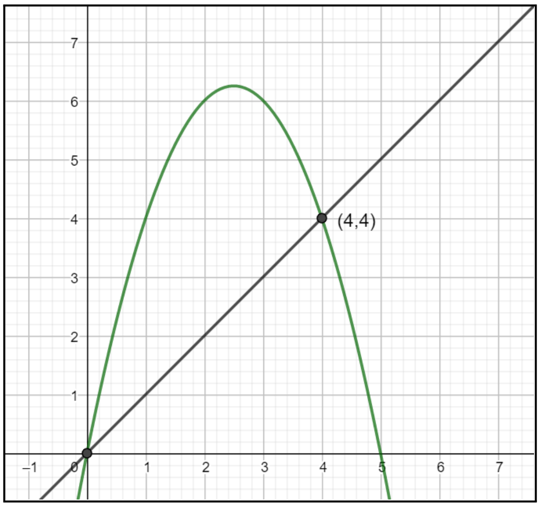
La tasa de nacimientos de una población es $n(t) = 2200e^{0,024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1460e^{0,018t}$ personas por cada año. Halle el área entre estas curvas para

$0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa esta área?.

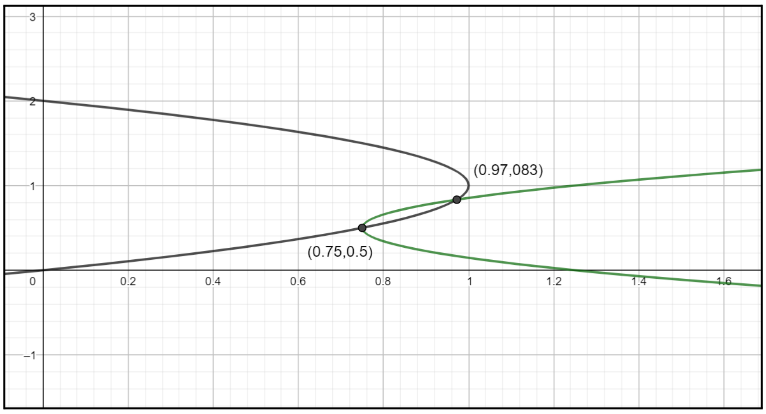
Actividad 6

Calcule el área de la región entre las curvas.

a) $y = 5x - x^2, y = x$



b) $x = 2y - y^2,\ x = 2y^2 - 2y + \frac{5}{4}$



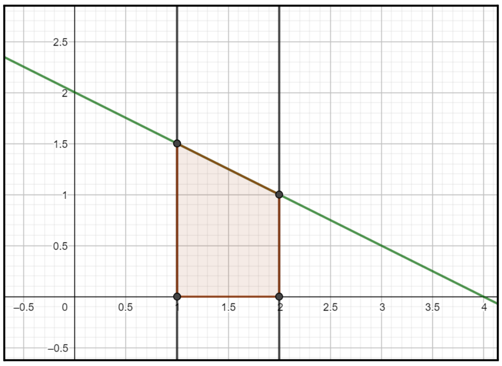
Anexo V: Guía 5

Cálculo de volumen

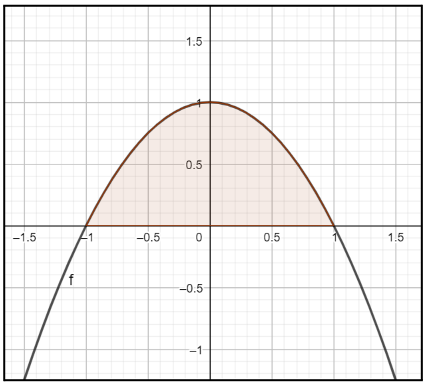
Actividad 1

Calcule el volumen de los siguientes sólidos de revolución.

a. La región está dada por $x = 1,\ x = 2,\ y = 0$ e $y = 2 - \frac{1}{2}x$. El eje de rotación es el eje X.

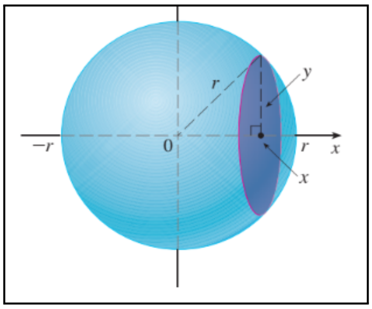


b. La región está dada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$. El eje de rotación es el eje X.



Actividad 2

Calcular el volumen de una esfera de radio r.



Actividad 3

Dar una expresión para el volumen de líquido alojado en una esfera de radio 5 en función de la altura del mismo.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.