Ciencia Latina
Revista Multidisciplinar

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.3839

Intervalo de dobleces

Erik López García[1]
erik.lg@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-2667-6474
Omar Christian Benítez Centeno[1]
omar.bc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-5756-1912
Rosember Ovando Castelar[1]
rosember.oc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-1491-7437
Enrique de Jesús Moreno Carpintero[1]
enrique.mc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-5472-1503
Eduardo Salinas Hernández[1]
eduardo.sh@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-4945-4065
Samuel Enrique Corona Palacios[1]
samuel.cp@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-1576-5132
[1]Tecnológico Nacional de México / IT de Zacatepec
Av. Tecnológico No. 27, Col. Centro, Zacatepec Morelos, C.P. 62780, México

RESUMEN

Las matemáticas hoy en día se hacen una materia compleja y muchas veces difícil por parte de los estudiantes que la cursa, es un hecho, que muchas veces esta dificultad se basa en la enseñanza que se da por parte del profesor por no poder transmitir sus conocimientos de una manera sencilla, o también por falta de interés de los mismos estudiantes. Una estrategia qué aporta gran interés a los estudiantes es doblar hojas de papel. De ahí, que existen diferentes fórmulas para encontrar el número de dobleces máximo de una hoja de un material, sin embargo, a través de este artículo encontramos una fórmula distinta que nos ayudan a calcular los dobleces. Además, llegamos a unas fórmulas que nos dan el intervalo que debe de medir una hoja de un material para alcanzar cierto número de dobleces. Luego, comprobamos las fórmulas con hojas de distintos materiales, alcanzando los dobleces señalados por las fórmulas citadas de este artículo. Por último, logramos vencer un récord mundial de dobleces de una hoja (el récord era de 13), logrando 14 número de dobleces.

Palabras clave: *Plegable; Doblado del papel; Origami.*

Correspondencia: omar.bc@zacatepec.tecnm.mx
Artículo recibido: 15 octubre 2022. Aceptado para publicación: 15 noviembre 2022.
Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

Como citar: López García, E., Benítez Centeno, O. C., Ovando Castelar, R., Moreno CarpinteroE. de J., Salinas Hernández, E., & Corona Palacios, S. E. (2022). Intervalo de dobleces. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 6(6), 5729-5795. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.3839

Fold interval

ABSTRACT

Mathematics today becomes a complex and often difficult subject for the students who study it, it is a fact that many times this difficulty is based on the teaching that is given by the teacher for not being able to transmit their knowledge in a simple way, or also due to lack of interest from the students themselves. One strategy that brings great interest to students is folding sheets of paper. Hence, there are different formulas to find the maximum number of folds in a sheet of a material, however, through this article we find a different formula that helps us calculate the folds. In addition, we arrive at some formulas that give us the interval that a sheet of a material must measure to reach a certain number of folds. Then, we check the formulas with sheets of different materials, reaching the folds indicated by the formulas cited in this article. Finally, we managed to break a world record for folding a sheet (the record was 13), achieving 14 numbers of folds.

Keywords: Folding; Paper folding; Origami.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza matemática sin lugar a duda ha sido durante todo el tiempo una problemática para los estudiantes en todos los niveles, algunas veces por como el docente transmite ese conocimiento, otras veces porque el estudiante no le gusta y no le pone interés, o simplemente porque no se le ve la importancia de analizar diversas problemáticas a partir de situaciones sencillas, dejando el pensamiento matemático y algebraico (Vergel, 2015), (Eugenia & Marfileño, n.d.) y (Girit Yildiz & Durmaz, 2021),como una opción aburrida, es por ello que la importancia de las estrategias de enseñanzas hoy en día es de vital importancia para atraer al estudiante y que reflexione, analice y de conclusiones de experimentos que se puedan hacer en sus clases de matemáticas (Jurado, n.d.).

(Vanegas & Lleida, 2013) y (Rubio, 2014), entienden la competencia de estudio didáctico como la destreza de diseñar, aplicar y valorar sucesiones de aprendizaje, al utilizar diferentes instrumentos de juicios de calidad. Mencionando fundamentalmente que la principal función es realizar tareas en donde las diversas problemáticas se examinen directamente.

(Alba, 2019) menciona que la geometría para el doblado de hojas de papel juega un punto muy importante dentro de las diversas actividades matemáticas, siendo una opción alternativa. Ya que se pueden obtener diversas vistas dentro de un plano, y nos daría idea de cuentos dobleces podríamos realizar.

Una de las actividades muy frecuentes en el análisis del pensamiento matemático es doblar hojas de papel. Pero, ¿cuántas veces se puede doblar? Quizá hayas podido doblar la hoja 7 veces (Beltrán, 2016), y si tienes mucha habilidad, probablemente hayas logrado 8 dobleces. ¿A qué se debe un mayor número de dobleces? Es ahí donde se encuentra la atención por doblar hojas de papel (Sánchez Bejarano, 2020), (Monsalve et al., 2002) y (Margot & Ramírez, 2010).

Esta investigación se basa en los estudios previos antes mencionados, en los que se encontró el máximo número de dobleces que pueden hacerse en papel. El primer récord (12 dobleces), se logró utilizando una fórmula matemática elaborada por Gallivan (Weisstein, 2001); el segundo de 13 dobleces se obtuvo con un enorme rollo de papel higiénico (16 km de longitud), (*Unos Estudiantes Baten Un Récord Al Doblar 13 Veces Un "trozo" de Papel - RT*, n.d.). Veamos cada uno de los sucesos por separado.

- *Primer récord.* Durante muchos años se pensaba que el máximo número de dobleces que se puede realizar en una hoja son 8. Sin embargo, Britney Gallivan (nacida en 1985 en Pomona, California) es conocida principalmente por haber determinado el número máximo de veces que se puede doblar un determinado papel u otro material no comprimible.

Siendo todavía estudiante de secundaria, Gallivan demostró que un único trozo de papel puede ser doblado por la mitad doce veces. El 27 de enero de 2002, después de 8 horas de trabajo duro por parte de tres personas, un papel de seda (1,219.2 m de largo, 0.008382 m de espesor) se dobló 12 veces por la mitad por primera vez en Pomona, California, (Dey & Ghosh, 2017), (*Folding -- from Wolfram MathWorld*, n.d.). ¡Esto demostró que la creencia generalizada de que no es posible doblar un pedazo de papel en la mitad más de ocho veces era falsa!

No solo realizó la demostración empírica (Arvind Gupta, 1986), sino que también dedujo una ecuación para calcular la anchura del papel W necesaria para doblar una hoja de grosor t un número dado de n-veces. Teorema del doblado de papel utilizado por Gallivan: Para un doblado en direcciones alternas de n-veces, la anchura de papel necesaria tiene un límite superior y aproximación cercana de:

$$W = \pi t 2^{\frac{3}{2}(n-1)}$$

Para dobleces en una única dirección (utilizando una tira de papel larga de grosor *t*), la longitud exacta L de papel necesaria es:

$$L = \frac{\pi}{6}(2^n + 4)(2^n - 1).$$

- *Segundo récord.* Posteriormente, el nuevo récord se estableció el 3 de abril de 2011 y se dio a conocer después de que la revista New Scientist publicara el video en el que aparece la gran longitud de papel (Carena, 2020)

  Un grupo de estudiantes utilizó papel higiénico para establecer un nuevo récord. Los alumnos estadounidenses del Colegio de San Marcos lograron doblar el papel 13 veces sobre sí mismo. Durante siete años los jóvenes se rompieron la cabeza intentando averiguar cómo conseguir este resultado final: un enorme rollo doblado de 16 kilómetros de papel higiénico en total formado por rollos de 1,2 kilómetros cada uno, encolados entre sí. El tamaño del rollo final,ya doblado, que tiene 8.192 hojas, es de 1,5 metros de longitud y 0,8 metros de altura. Los estudiantes usaron una fórmula que calcula la longitud mínima para doblar el papel sobre sí mismo cierto número de veces. El papel se hace cada vez más grande y difícil de doblar. (*(3326) TPFolding 4 3 11 - YouTube*, n.d.)
- *Número de dobleces para alcanzar el tamaño del universo.* La leyenda urbana dice que es imposible doblar una hoja de papel por la mitad más de ocho veces. En realidad, según las matemáticas, si doblamos un papel por la mitad 103 veces, su grosor sería mayor que el diámetro del Universo observable, estimado en 93.000 millones de años luz. La explicación a esta paradoja está en el crecimiento exponencial.

> Una hoja de papel normal (el típico formato a4 con un gramaje de 80 gr/m^2) tiene un grosor de 0,1 milímetros. Si la doblamos exactamente por la mitad, tendremos el doble de ese grosor (*Si Doblas Un Papel 103 Veces, Será Más Grueso Que El Universo*, n.d.)
>
> A medida que la sigamos doblando una y otra vez por la mitad las cosas se ponen interesantes (e imposibles). Doblada siete veces, la hoja tiene un grosor equivalente a un cuaderno. Si la pudiéramos doblar 23 veces, su grosor ya superaría el kilómetro. 30 dobleces nos llevarían al espacio, sobrepasando la barrera de los 100 kilómetros. En 42 pliegues llegaríamos a la luna, y en 52 al sol.
>
> El grosor del papel sigue aumentando exponencialmente. En 81 pliegues, su grosor sería casi el de la galaxia de Andrómeda, con 127 años luz. Sólo 9 dobleces más llevarían a nuestro papel imaginario más allá de los confines del Supercluster de Virgo en el que nuestra galaxia convive con al menos otras cien.
>
> Imagina que pudiéramos doblar el papel 103 veces; la cantidad de capas obtenidas nos darían un tamaño de 93 millones de años luz, lo que equivale a los límites de nuestro universo observable.

En una hoja de papel, existen 3 factores fundamentales que provocan que no haya un doblez exacto al momento de hacer varios dobleces en la misma hoja; son: grosor, largo y ancho.

Uno de esos factores, el grosor, limita el doblado, ya que al doblar una sola vez el papel (una hoja de papel estándar tiene un grosor de 0,1 mm, aunque esto puede variar dependiendo de la calidad del papel), si nos fijamos, estamos multiplicando por 2 el grosor, es decir 0,2 mm. Si realizamos de nuevo la misma operación, volvemos a doblar el grosor, 0,4 mm, y así sucesivamente con los demás dobleces.

Este problema lo podemos trasladar a potencias de 2, ya que lleva un crecimiento exponencial de base 2. Por lo tanto, doblar el papel 7 veces será equivalente a multiplicar el grosor 2^7: 128 veces el grosor original; es decir 1,28 cm.

Los otros dos factores que afectan son el largo y ancho del papel.

En esta investigación buscamos un intervalo bajo el cual puedes tener el número de dobleces que necesites, con lo cual puedes de alguna forma cambiar el largo, ancho o grosor a tu conveniencia para que tengas los dobleces que busques.

El presente trabajo de investigación tiene como principal objetivo desarrollar las fórmulas que se utilizarán en los dobleces, con sus respectivas explicaciones, así como encontrar un material con las propiedades adecuadas para conseguir romper un récord mundial de doblado de materiales sencillos, ya que el récord antes impuesto fue conseguido con cantidades enormes de material y una extensa área de trabajo.

La investigación se desarrolla con una serie de experimentos realizados en lugares distintos, para observar los diferentes factores que influyen en la realización de ésta (*(3334) 14 Dobleces Récord Mundial - YouTube*, n.d.).

METODOLOGÍA

Desarrollamos las fórmulas que ocuparemos, primero lo haremos en una sola dirección y después en ambas direcciones.

DOBLECES DE UNA HOJA EN UNA SOLA DIRECCIÓN.

Doblar una hoja es fácil, siempre y cuando el grosor del lado que vas a doblar sea menor que el mismo lado. Ver la figura 1.

Al doblar una hoja una vez, aumenta el grosor de la nueva hoja a 2t , pero disminuye la longitud de la nueva hoja en $\frac{L}{2}$. Con dos dobleces, la hoja aumento de grosor en $4t = 2^2 t$ y disminuyo la longitud en $\frac{L}{4} = \frac{L}{2^2}$. En un tercer doblez el grosor de la hoja aumento a $8t = 2^3 t$ y disminuyo su longitud en $\frac{L}{8} = \frac{L}{2^3}$. Así sucesivamente; se puede observar que la fórmula viene dada de la siguiente manera $\frac{L}{2^n}$, ver la Tabla 1.

Si una hoja puede doblarse (n − 1) veces, para que se pueda doblar una vez más, necesita que

$$2^n t < \frac{L}{2^n}.$$

Entonces necesitamos buscar los dobleces “m” que ya no se pueden hacer, es decir

$$\frac{L}{2^m} < 2^m t.$$

Simplificando la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{L}{2^m} < 2^m t \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{t} < 2^{2m} \quad \Longrightarrow \quad \log_2\left(\frac{L}{t}\right) < \log_2(2^{2m}) \quad \Longrightarrow \quad \log_2\sqrt{\frac{L}{t}} < m.$$

Así, el máximo número de dobleces (denotado por n_1) que se puede hacer es:

$$n_1 = \left\lfloor \log_2\sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor \qquad . \ . \ . \ (1)$$

Donde $\lfloor x \rfloor = f(x)$ es la función piso; es decir $\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z} \,|k \leq x\}$, el número entero menor más cercano (ejemplo $\lfloor \pi \rfloor = 3$).

DOBLECES DE UNA HOJA EN AMBAS DIRECCIONES.

Lo que se plantea es lo siguiente: doblar un número máximo de veces en una sola dirección y después un número máximo de veces en la otra dirección. Así una hoja rectangular tiene el siguiente máximo número de dobleces, primero en una dirección sobre el lado “L” y después sobre el lado “A”.

Tenemos una hoja con ancho “A”, ver la figura 2.

La función **f (L, t)**, está definida como el máximo número de dobleces en una dirección sobre una hoja de longitud “L” y grosor “t”, es decir:

$$f(L,t) = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor$$

Así, la hoja rectangular anterior tiene el siguiente máximo número de dobleces (n’), primero en una dirección sobre el lado “L” y después sobre el lado “A”, dado con la siguiente fórmula:

$$n' = f(L,t) + f(A, 2^{f(L,t)}t) \qquad . . . (2)$$

También lo podemos representar como:

$$n' = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor + \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{A}{2^{f(L,t)}t}} \right\rfloor \qquad . . . (3)$$

INTERVALO DE LONGITUD “L” EN UNA SOLO DIRECCIÓN

Tenemos tres variables; la longitud de la hoja “L”, el grosor “t” y el número de dobleces “n”. Si tenemos “L” y “t”, podemos encontrar n_1 por medio de la ecuación (1). Qué tal si conoces n_1 y t, ¿cómo conocer L? Veamos cómo resolverlo:

De la ecuación (1) tenemos $n_1 = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor$, por la función piso $\lfloor x \rfloor$, existe $0 \leq \varepsilon < 1$ tal que $\lfloor x \rfloor + \varepsilon = x$. Aplicando lo anterior en la ecuación (1), tenemos

$$\left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor + \varepsilon = n_1 + \quad \Rightarrow \quad \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} = n_1 + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{L}{t}} = 2^{n_1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{t} = 2^{2(n_1+\varepsilon)} \ . . . (4)$$

De la ecuación 4, se desprenden las siguientes dos ecuaciones.

$$L = 2^{2(n_1+\varepsilon)}t \quad . . . (5) \qquad\qquad t = \frac{L}{2^{2(n_1+\varepsilon)}} \quad . . . (6)$$

Ahora, veamos a partir de la desigualdad $0 \leq \varepsilon < 1$, lo siguiente

$$0 \leq \varepsilon < 1 \Longrightarrow 0 \leq 2\varepsilon < 2 \Longrightarrow 2n_1 \leq 2\varepsilon + 2n_1 < 2 + 2n_1 \Longrightarrow 2n_1 \leq 2(\varepsilon + n_1) < 2 + 2n_1$$
$$\Longrightarrow \quad 2^{2n_1}t \leq 2^{2(\varepsilon+n_1)}t < 2^{2+2n_1}t$$

Ocupando la ecuación (5), nos queda

$$2^{2n_1}t \leq L < 2^{2+2n_1}t \quad . . . (7)$$

Por lo tanto, el intervalo en el que se encuentra L para tener el número de dobleces n_1 es

$$[2^{2n_1}t, 2^{2+2n_1}t]$$

Que tal si conocemos n_1 y L, ¿cómo conocer a t? análogamente lo mismo hacemos para conocer el grosor desde la ecuación (6) quedándonos

$$\frac{L}{2^{2n_1}} \geq t > \frac{L}{2^{2+2n_1}} \quad ...(8)$$

Así, el intervalo en el que se encuentra t para tener n_1 dobleces es

$$\left[\frac{L}{2^{2n_1}}, \frac{L}{2^{2+2n_1}}\right]$$

INTERVALO DE LONGITUD "L" Y "A" EN AMBAS DIRECCIONES

Encontraremos la longitud "L" y el ancho "A" de la hoja, para poderla doblar n veces, primero en dirección de L y después en dirección de A. El número de dobleces en "L" la abreviamos con $\mathrm{N_L}$ y el número de dobleces en "A" con $\mathrm{N_A}$ el objetivo que queremos es $N_L + \mathrm{N_A} = n$, en ese orden correspondiente.

El grosor de una hoja doblada en dirección de L con un número de dobleces N_L (donde denotaremos el grosor resultante por g_L) es igual a

$$g_L = 2^{N_L} t \qquad ...(9).$$

Ahora, después de hacer el doblaje correspondiente en dirección de L, el grosor de la hoja doblada esta vez en dirección del ancho A con un número de dobleces N_A (donde denotaremos el grosor resultante por g_A) es igual a

$$g_A = 2^{N_A} g_L = 2^{N_A + N_L} t$$

A partir de la ecuación 7, podemos encontrar las fórmulas correspondientes de la longitud "L" y el ancho "A" para poder hacer dobleces primero en dirección de L (es decir N_L) y después en dirección de A (es decir N_A).

Para hallar L, con la ecuación 7 nos queda

$$2^{2N_L} t \leq L < 2^{2N_L + 2} t$$

Es decir, el intervalo en el que se encuentra L para tener el número de dobleces N_L es

$$[2^{2N_L} t, 2^{2N_L + 2} t] \quad ...(10)$$

Ahora, para encontrar el ancho de A después de hacer dobleces en dirección L, nos apoyamos de la ecuación 7 y 9, obteniendo el siguiente intervalo

$$2^{2N_A} g_L \leq A < 2^{2N_A + 2} g_L \quad \Rightarrow \quad 2^{2N_A}(2^{N_L} t) \leq A < 2^{2N_A + 2}(2^{N_L} t)$$

$$\Rightarrow \quad 2^{2N_A + N_L} t \leq A < 2^{2N_A + N_L + 2} t$$

Por lo tanto, el intervalo en el que se encuentra A para tener el número de dobleces n es

$$[2^{2N_A+N_L}t, 2^{2N_A+N_L+2}t] \quad . . . \ (11)$$

Se efectuaron varios experimentos en donde se examinaron los diferentes lugares y metodologías para poder plantear el escenario adecuado para conseguir el objetivo de la investigación.

Con la realización del primer experimento se designó el material a utilizar, el cual es papel film con las siguientes dimensiones: 0.304 m x 17 m; así también, el tipo de lugar en el que se tenía que desarrollar la investigación. Se ejecutó en la cancha de basquetbol del Centro de Estudios Técnicos de Huitzuco de los Figueroa, Guerrero.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Vamos a aplicar la fórmula de la ecuación 1 en hoja de papel tamaño carta, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Una hoja de papel tamaño carta tiene las siguientes características, ver Figura 3.

¿Cuántas veces puedes doblar la hoja en una única dirección sobre la longitud L?

Solución. Ocupando la ecuación 1 tenemos lo siguiente.

$$n_1 = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{215.9\,mm}{.08\,mm}} \right\rfloor = 5.$$

Por lo tanto, puedes doblar la hoja en la dirección de L hasta 5 veces. ■

Ahora, vamos a calcular el número de dobleces de una hoja tamaño carta en ambas direcciones y esto lo logramos gracias a la fórmula de la ecuación 3.

Ejemplo 2. En una hoja de papel tamaño carta, ¿Cuál es el máximo número de veces que puedo doblar, primero en dirección a lo largo y después hacia lo ancho?

Solución. Tomando en cuenta las características de una hoja tamaño carta del anterior ejemplo, tenemos los siguientes resultados utilizando la ecuación 3.

$$n' = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{L}{t}} \right\rfloor + \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{A}{2^{f(L,t)}t}} \right\rfloor = \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{215.9\,mm}{.08\,mm}} \right\rfloor + \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{279.4\,mm}{2^{f(215.9\,mm,.08\,mm)}(.08\,mm)}} \right\rfloor$$

$$= \lfloor 5.69 \rfloor + \left\lfloor \log_2 \sqrt{\frac{279.4\,mm}{2^{\lfloor 5.69 \rfloor}(.08\,mm)}} \right\rfloor = 5 + \lfloor 3.38 \rfloor = 5 + 3 = 8.$$

En total son 8 veces se puede doblar una hoja de papel tamaño carta. ■

Ahora, siguiendo lo que hizo Britney Gallivan con un gran rollo de papel higiénico, podemos calcular cual es el intervalo de longitud que debe de tener una hoja de papel para poder romper el récord de dobleces con un número de 14 veces; y esto gracias a la ecuación 7. Veámos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Si el récord de doblar una hoja de papel higiénico es de 13 veces, ¿Qué longitud necesitamos para poder doblar una hoja 14 veces, con el grosor y ancho de un papel higiénico estándar?

Solución. Una hoja de papel tamaño carta tiene las siguientes características, ver Figura 4.

Ocupando la fórmula 7 tenemos:

$$2^{2n_1}t \leq L < 2^{2+2n_1}t \Rightarrow 2^{2(14)}(.05mm) \leq L < 2^{2+2(14)}(.05mm)$$

$$\Rightarrow\ 13\,421\,772\,mm\ \leq\ L\ <\ 53687091\,mm. \Rightarrow\ 13\,421\,m\ \leq\ L\ <\ 53687\,m.$$

$$\Rightarrow\ \ 13.421\,km\ \leq\ L\ <\ 53.687\,km$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente intervalo $[13.421\ km, 53.687\ km]$ para el valor de L que puede doblar una hoja 14 veces. ■

VAMOS A ROMPER EL RÉCORD: 14 DOBLECES

EL material que vamos a ocupar para romper el récord de 13 dobleces es una hoja de papel film, el cual tiene las siguientes características, ver Figura 5.

Encontraremos la longitud “L” y el ancho “A” de la hoja, para poderla doblar 14 veces, primero en dirección de L y después en dirección de A. El número de dobleces en “L” la abreviamos con $\mathrm{N_L}$ y el número de dobleces en “A” con $\mathrm{N_A}$ el objetivo que queremos es $N_L + \mathrm{N_A} = 14$, en ese orden correspondiente.

Utilizando las cotas inferiores de las ecuaciones 10 y 11, tal que $N_L + \mathrm{N_A} = 14$, llegamos a los siguientes valores para “L” y “A”, obteniendo la Tabla 2.

Utilizando 4 rollos de papel film de $33 pesos cada uno, los cuales tienen como características una longitud L=30m, ancho A=.30m y con un grosor de t=.02mm; haremos el experimento de romper el récord en 14 dobleces. Para esto, ocuparemos la información de la primera fila de la tabla 2, ya que se adecua a nuestros datos experimentales al comprar 4 rollos de papel film. Ver la figura 6.

Primera prueba. Se realizó en el patio de una escuela de nivel medio superior (escuela del CET), con el siguiente procedimiento: primero se extendió una parte del rollo, la cual tuvimos que desechar, ya que fue afectada por las inclemencias del medio.

Los principales problemas para desarrollar dicha prueba fueron: el viento provocaba que el material utilizado se levantara del suelo y se adhiriera, creando dobleces asimétricos en el papel film; también lo fue la suciedad del suelo, como el polvo, la tierra y pequeñas piedras, hacían que el papel film perdiera su adherencia, ya que éstos se impregnaran en él. Después, con más cuidado, se extendió la parte restante del rollo que tenía 8 m de longitud, con la cual pudimos realizar 11 dobleces. Ver figura 7.

Segunda prueba. Se llevó a cabo en el auditorio Casino Municipal, ubicado entre la Calle Ambrosio Figueroa y la Avenida Insurgentes de Huitzuco de los Figueroa, Guerrero. Éste es un lugar cerrado con un amplio espacio, que nos permitió desarrollar de mejor manera el proyecto.

En esta prueba se utilizó el rollo completo, con el que se utilizó la siguiente metodología: Se extendió el rollo en su totalidad y se comenzó a doblar a lo largo y después a lo ancho, con lo que se obtuvieron 12 dobleces. Realizada por 5 personas, en un tiempo de 3 horas. Ver Figura 8.

Tercera prueba. La experimentación se llevó a cabo en el mismo sitio que la segunda prueba, pero ahora con un número de 4 personas y utilizando la metodología siguiente: se extendieron por completo 2 rollos, uno sobre el otro, para que inicialmente, éste se contará como un doblez.

Posteriormente, se comenzó a doblar de igual manera, primero a lo largo y después a lo ancho, para que finalmente consiguiéramos 13 dobleces y empatáramos el récord mundial, en un tiempo de 6 horas. Ver Figura 9.

Prueba final. La última prueba se realizó en el Salón de eventos “Dos Lunas”, el cual se encuentra en la Calle Industria, entre las calles 20 de noviembre y Agricultura, de Huitzuco, Guerrero. El número de personas con las que contamos fueron 8, tomando en cuenta al asesor y una persona encargada de documentar el logro. En este caso se extendieron 4 rollos, uno sobre otro para conseguir 2 dobleces antes de comenzar a doblar por la mitad.

Primeramente, comenzamos doblando a lo largo y después a lo ancho, y finalmente conseguimos los 14 dobleces que necesitábamos para romper el récord mundial; el tiempo invertido fue de 4 horas.

Dicho procedimiento será útil para la comprobación de las fórmulas antes planteadas, ya que los experimentos refuerzan la validez de los datos obtenidos en la realización de esta investigación. Ver Figura 10.

ILUSTRACIONES, TABLAS, FIGURAS.

Figura 1. (a) La medida t<L   (b) La medida L<t

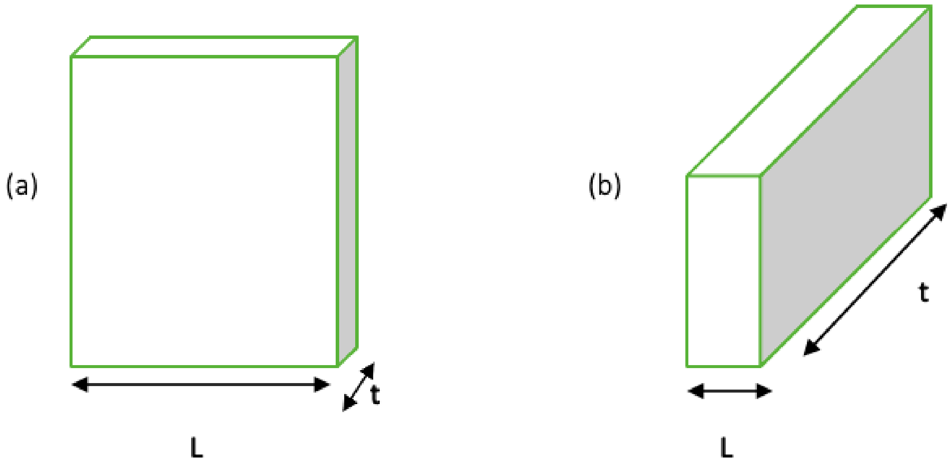

Figura 2. Parámetros de una hoja.

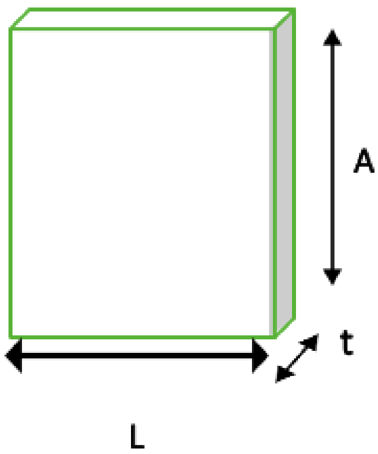

Figura 3. Características de una hoja de papel tamaño carta.

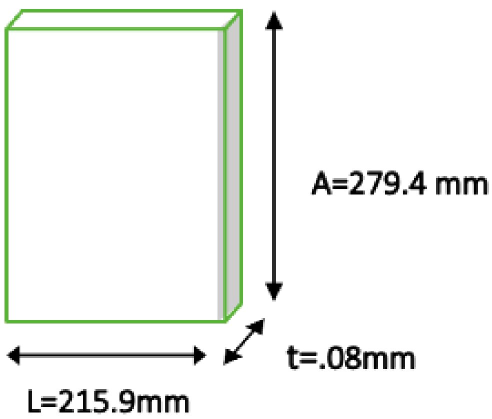

Figura 4. Características de una hoja de papel higiénico.

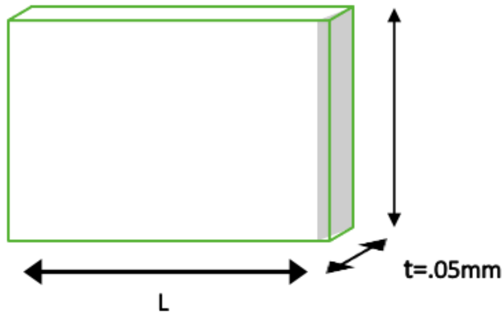

Figura 5. Características de una hoja de papel film.

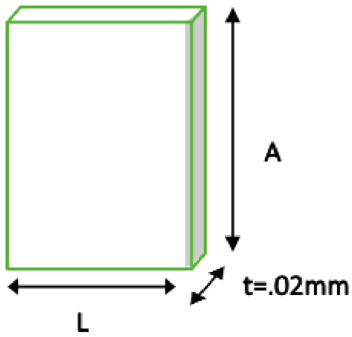

Figura 6. Rollo de papel film..

Figura 7. Prueba 1, se ocupó menos de 1 rollo.

Figura 8. Prueba 2, se ocupó 1 rollo completo.

Figura 9. Prueba 3, se ocuparon los 2 rollos completos.

Figura 10. Prueba 4, se ocuparon los 4 rollos completos.

Tabla 1. Dobleces de una hoja en una dirección.

Número de dobleces	Grosor (t)	Longitud del lado (L)
n	$2^n t$	$\frac{L}{2^n}$

Tabla 2. Medidas del papel film calculadas con las fórmulas

Número de Dobleces $\mathbf{N_L}$	L	Número de Dobleces $\mathbf{N_A}$	A
7	.327 m	7	41.943 m
8	1.310 m	6	20.971 m
9	5.242 m	5	10.485 m
10	20.971 m	4	5.242 m
11	83.886 m	3	2.621 m

CONCLUSIONES

Gracias al desarrollo de las fórmulas que se hicieron en la metodología, nos dieron pauta a diferentes datos, intervalos que podemos tener de materiales; sin embargo, aun podemos mejorar la precisión de las fórmulas al tomar en cuenta las fórmulas ya existentes de diferentes artículos.

Logramos cumplir con todos los objetivos planteados, ya que, con el papel film utilizado en los experimentos se obtuvieron los resultados esperados; aun así, nos enfrentamos con dificultades que provocaron demoras en la realización de estos, las cuales fueron las siguientes: los lugares abiertos y expuestos a las inclemencias del medio como el viento, calor y suciedad de los suelos, son malos lugares para el desarrollo del trabajo; ya que el material utilizado es muy frágil y el viento provocaba que se levantara y creará dobleces asimétricos en el papel film. Y la suciedad del suelo (polvo, tierra y pequeñas piedras) hacía que el papel film perdiera adherencia, ya que todo esto se impregnaba en él. Aunque las ventajas de este material, fue el costo y la gran manejabilidad de este, ya que se gastó alrededor de $150 pesos para poder romper el récord mundial; que, al compararlo con el costo de los otros materiales ocupados en los pasados récords, es grande la diferencia.

¿Podemos volver a romper ahora nuestro récord? Si, quizás con este mismo material o algo mejor, el material que realmente es de un grosor muy pequeño, este material es el grafeno. No obstante, dado que el costo del mismo grafeno es alto, no podemos realizarlo.

LISTA DE REFERENCIAS

(3326) TPFolding 4 3 11 - YouTube. (n.d.). Retrieved November 15, 2022, from https://www.youtube.com/watch?v=NNgxmyGPZls

(3334) 14 dobleces récord mundial - YouTube. (n.d.). Retrieved November 17, 2022, from https://www.youtube.com/watch?v=N996Vof4joQ

Alba, M. (2019). *EXPERIENCIA EN LA CLASE DE GEOMETRÍA Folding paper to unfold arguments : an experience in geometry class*. *3*, 1–10.

Arvind Gupta. (1986). *Hands on- Ideias and Activities*.

Beltrán, D. (2016). *El proceso de generalización a partir de pliegues de papel*. 198–205.

Carena, M. (2020). *´ A EL CRECIMIENTO EXPONENCIAL : UN DESAF IO*. *3*, 53–72.

Dey, S., & Ghosh, R. (2017). Search for monic irreducible polynomials with decimal equivalents of polynomials over Galois field GF (pq). *Open Journal of Discrete Mathematics*, *8*(1), 21–33.

Eugenia, V., & Marfileño, G. (n.d.). *Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras Development of Algebraic Thinking in High School Students*. 49–72. https://doi.org/10.24844/EM3002.03

Folding -- from Wolfram MathWorld. (n.d.). Retrieved November 15, 2022, from https://mathworld.wolfram.com/Folding.html

Girit Yildiz, D., & Durmaz, B. (2021). A Gifted High School Student's Generalization Strategies of Linear and Nonlinear Patterns via Gauss's Approach. *Journal for the Education of the Gifted*, *44*(1), 56–80.

Jurado, U. M. (n.d.). *Creación de problemas : sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas 1*. 321–331.

Margot, Z., & Ramírez, S. (2010). *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a Applications sections of paper folding geometry in conic Application de la géométrie du plié de papier aux sections coniques*. *31*, 338–362.

Monsalve, O., Posada, C., & Jaramillo, M. (2002). El placer de doblar el papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 10–25.

Rubio, N. (2014). *Un modelo de análisis didáctico de procesos de instrucción matemática*. *7*, 11–31.

Sánchez Bejarano, M. del P. (2020). *Encontré mi atención en el doblez de una hoja de papel*.

Si doblas un papel 103 veces, será más grueso que el Universo. (n.d.). Retrieved November 15, 2022, from https://es.gizmodo.com/si-doblas-un-papel-103-veces-sera-mas-grueso-que-el-un-1607710056

Unos estudiantes baten un récord al doblar 13 veces un "trozo" de papel - RT. (n.d.). Retrieved November 14, 2022, from https://actualidad.rt.com/actualidad/view/37742-Unos-estudiantes-baten-un-récord-al-doblar-13-veces-un-trozo-de-papel

Vanegas, Y., & Lleida, U. De. (2013). *Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process*. *October 2015*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2660.4243

Vergel, R. (2015). *¿ Cómo emerge el pensamiento algebraico ? El caso del pensamiento algebraico factual*. 9–17.

Weisstein, E. W. (2001). Map Folding. *Https://Mathworld. Wolfram. Com/*.