XLVIII Simpozijum o operacionim istraživanjima
SYM-OP-IS 2021
Banja Koviljača, 20-23.9.2021.

KONCEPT ZA ODREĐIVANJE TEŽINSKIH KOEFICIJENATA KRITERIJUMA BAZIRAN NA METODI ENTROPIJE

CONCEPT FOR DETERMINING WEIGHT COEFFICIENTS OF CRITERIA BASED ON THE ENTROPY METHOD

MALIŠA ŽIŽOVIĆ[1], DRAGAN PAMUČAR[2], MIOMIR STANKOVIĆ[3], DRAGAN ĐURČIĆ[1], MIODRAG M. ŽIŽOVIĆ[4]

[1] Fakultet tehničkih nauka u Čačku, Univerzitet u Kragujevcu, Srbija, {zizovic,dragandjurcic}@gmail.com
[2] Univerzitet odbrane u Beogradu, Vojna akademija, Beograd, Srbija, dpamucar@gmail.com
[3] Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti, Beograd, Srbija, miomir.stankovic@mi.sanu.ac.rs
[4] Ekonomski institut Beograd, Srbija, miodragz@gmail.com

Rezime: *U ovom radu prikazan je model za određivanje težinskih koeficijenata koji se bazira na primeni metode etropije. Metoda entropije koja je prikazana u ovom radu bazira se na primeni Shannon-ove i Renyi-jeve fomulacije entropije za određivanje težina kriteirjuma. Novi model entropije za određivanje težina kriterijuma omogućava uključivanje eksperata iz različitih oblasti u cilju definisanja odnosa između kriterijuma i racionalno donošenje odluka. Efektivnost predloženog modela prikazana je kroz primer u kojem je detaljno predstavljena predložena metodologija.*
Ključne reči: Entropija, *Višekriterijumsko odlučivanje, Težinski koeficjent.*

Abstract: *In this paper, a new model for determining weight coefficients based on applying the entropy method is presented. The entropy method presented in this paper is based on the application of Shannon's and Renyi's entropy formulation to determine criterion weights. The new entropy model for assessing the importance of the criteria enables the involvement of experts from different fields to define the relationship between the criteria and rational decision-making. The effectiveness of the proposed methodology is shown through an example where the proposed method is presented in detail.*

Keywords: *Entropy, Multicriteria decision making, Weighting coefficient.*

1. UVOD

Uzimajući u obzir činjenicu da težine kriterijuma mogu značajno uticati na rezultat procesa odlučivanja jasno je da se posebna pažnja mora posvetiti modelima za određivanje težina kriterijuma. Većina autora predlaže podelu modela za određivanje težina kriterijuma na subjektivne i objektivne [7].

Subjektivni pristupi odražavaju subjektivno mišljenje i intuiciju donosioca odluke. Takvim pristupom težine kriterijuma se određuju na osnovu informacije dobijene od donosioca odluke ili od eksperata koji su uključeni u proces odlučivanja. Sa druge strane, objektivni pristupi zanemaruju mišljenje donosioca odluke i zasnovani su na određivanju težina kriterijuma na osnovu informacije sadržane u matrici odlučivanja primenom određenih matematičkih modela. Među najpoznatije objektivne metode spadaju: Metoda entropije [4], metoda CRITIC (CRiteria Importance Through Intercriteria Correlation), [1] i metoda FANMA koja je naziv dobila prema autorima metode [5].
U dosadašnjim radovima na izračunavanju težinskih koeficjenata metoda Entropije korišćena je takozvana probababilistička priroda entropije i njena mera za entropiju konačnog verovatnosnog sistema.

$Y:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, $p_i > 0 \quad \forall i = 1,2,...,n$ odnosno $p:(p_1, p_2, ..., p_n)$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, u obliku

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_b p_i, \quad (b>1) \tag{1}$$

Uobičajeno je da je u izrazu (1) usvojiti vrednsot $b = 2$. Funkcija (1) data je u radu [3].

Određivanje objektivnih težina kriterijuma prema metodi Entropije zasniva se na Šenonovom konceptu entropijske ocene informacije koja je sadržana u početnoj matrici odlučivanja [4]. Metoda se svodi na merenje neodređenosti u informaciji koju sadrži početna matrica odlučivanja i omogućava direktno generisanje skupa težinskih koeficijenata kriterijuma. Težinski koeficijenti kriterijuma generišu se na osnovu međusobnog kontrasta pojedinačnih kriterijumskih vrednosti alternativa za svaki kriterijum, a zatim i istovremeno za sve kriterijume. O funkciji (1) i njenim osobonama čitaoci mogu da se upite u obimnu literaturu iz ove oblasti u kojoj se govori i o istorijatu ove mere u oblasti fizike, a i u samoj oblasti teorije informacija [6].

U ovom radu korišćena je i formulacija entropije prema Renyi-ju [2], koja se primenjuje u uslovima koji važe i za Shannon-ovu entropiju u parametarskom obliku:

$$ {}_{\alpha}H(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} \right), \alpha \neq 1, \alpha > 0 \tag{2} $$

Nije teško videti da funkcije (1) i (2) imaju maksimalnu vrednost za sistem jednako verovatnih događaja $\log_2 n$, a da su takođe obe jednake nuli za sistem sa sigurnim događajima (jedan događaj u sistemu ima verovatnoću jedan, a ostali nula). O osobinama ovako definisane entropije može se videti u radu [2].

U narednom delu prikazan je algoritam metode entropije za određivanje težinskih koeficijenata kriteirjuma:

Korak 1: Pretpostavimo da postoji višekriterijumski model sa *m* alternativa i *n* kriterijuma koji mogu da pripadaju skupu *max* ili *min* tipa. Takav sistem se transformiše u sve kriteirjume *max* tipa.

Korak 2: Polazeći od modela koji je definisan u koraku 1, možemo da prikažemo početnu matricu odlučivanja u sledećoj formi:

$$ \Omega = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \end{array} \tag{3} $$

Matricu $\Omega = \left[f_{ij} \right]_{m \times n}$ transformisaćemo u novu normalizovanu matricu $\Omega^N = \left[p_{ij} \right]_{m \times n}$ u kojoj je u svakoj koloni zbir elemenata jednak jedan, donosno $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$.

$$ p_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sum_{k=1}^{m} f_{kj}}; \; f_{kj} > 0; \; j = 1,2,...,n; i = 1,2,...,m; \; k = 1,2,...,m \tag{4} $$

Korak 3a: Određujemo entropiju za svaki od kriterijuma u Shannon-ovom smislu:

$$ e_j = -\frac{1}{\log_b m} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \log_b p_{ij}; \; j = 1,2,...,n \tag{5} $$

Korak 3b: Određujemo entropiju za svaki od kriterijuma u Renyi-jevom smislu:

$$ {}_{\alpha}e_j = \frac{1}{(\log_b m)(1-\alpha)} \log_b \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij}^{\alpha} \right), \alpha \neq 1, \alpha > 0; \; j = 1,2,...,n \tag{6} $$

Uz uslov da je $b > 1$, dok je uobičajeno da se usvoji da je $b = 2$.

Korak 4: Određujemo devijaciju entropije za svaku kolonu u oba slučaja:

$$ \begin{aligned} d_j^{(1)} &= 1 - e_j \\ d_j^{(2)} &= 1 - {}_{\alpha}e_j \end{aligned} \tag{7} $$

gde je $j = 1,2,...,n$.

Korak 5: Izračunavanje težinskih koeficijenata kriterijuma:

$$ w_j = \frac{d_j}{\sum_{k=1}^{n} d_k}; \; d_k > 0; \; k = 1,2,...,n; \; j = 1,2,...,n \tag{8} $$

Primenom ovog izraza izračunavaju se težinski koeficijenti za Renyi-jev i Shannon-ov model entropije.

Korak 6: Dobijene vrednosti težinskih koefcijenata koriguju su u skladu sa subjektivnim vrednostima težina kriterijuma koje su definisane od strane donosioca odluke $w_1, w_2, ..., w_n$, izraz (9).

$$w_j' = \frac{d_j w_j}{\sum_{k=1}^{n} d_k w_k} \; ; \; d_k w_k > 0 \; ; \; k = 1,2,...,n \; ; \; j = 1,2,...,n \tag{9}$$

2. PRIMER I DISKUSIJA ALGORITMA

Osnovna ideja ove metodologije za dobijanje težinskih koeficjenata kriterijuma je da se kriterijumu, koji za sve vrednosti alternativa ima istu vrednost, dodeli vrednost nula pošto je evidentno da takav kriterijum nema uticaj na konačnu odluku. Ovde se podrazumeva da je $0 \log_b 0 = 0$ pošto je $\lim_{x \to 0} x \log_b x = 0 \quad (b > 1, x > 0)$; ovo je prirodno.

U narednom delu predstavljne je višekriteriumski model sa četiri alternative i četiri kriterijuma pri čemu su svi kriteirjumi *max* tipa.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \tag{10}$$

Normalizacijom početne matrice (10) dobijamo normalizovanu matricu (11).

$$\Omega^N = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.32 & 0.25 & 0.20 & 0.15 \\ 0.12 & 0.21 & 0.28 & 0.33 \\ 0.16 & 0.25 & 0.32 & 0.37 \\ 0.40 & 0.29 & 0.20 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array} \tag{11}$$

U narednom delu prikazan je proračun težinskih koeficijenata za Shannon-ov slučaj. U primeru korišćena je osnova logaritma $b = e$.

Primenom izraza (5) dobijamo da je

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3646 & 0.3466 & 0.3219 & 0.2846 \\ 0.2544 & 0.3277 & 0.3564 & 0.3659 \\ 0.2932 & 0.3466 & 0.3646 & 0.3679 \\ 0.3665 & 0.3590 & 0.3219 & 0.2846 \end{bmatrix} \end{array}$$

Odnosno dobijamo da je

$e_1 = 0.9224;$

$e_2 = 0.9954;$

$e_3 = 0.9845;$

$e_4 = 0.9399.$

Primenom izraza (7) dobijamo da je

$d_1 = 0.0776;$

$d_2 = 0.0046;$

$d_3 = 0.0155;$

$d_4 = 0.0601.$

Primenom izraza (8) dobijamo vrednosti težinskih koeficjenata kriterijuma za za Shannon-ov slučaj:

$w_1 = 0.4918;$

$w_2 = 0.0292;$

$w_3 = 0.0982;$

$w_4 = 0.3808.$

U narednom delu prikazan je proračun težinskih koeficijenata za Renyi slučaj za $\alpha = 1/2$.

Primenom izraza (6) dobijamo da je

$${}_{1/2}e_1 = \frac{1}{\ln 4(1-1/2)} \ln\left(\sqrt{0.32} + \sqrt{0.12} + \sqrt{0.16} + \sqrt{0.40}\right) = 0.9594;$$

${}_{1/2}e_2 = 0.9977;$

${}_{1/2}e_3 = 0.9922;$

${}_{1/2}e_4 = 0.9689.$

Primenom izraza (7) dobijamo da je

${}_{1/2}d_1 = 0.0406;$

${}_{1/2}d_2 = 0.0023;$

${}_{1/2}d_3 = 0.0078;$

${}_{1/2}d_4 = 0.0311.$

Odnosno da je $\sum {}_{1/2}d_i = 0.0818$.

Primenom izraza (8) dobijamo vrednosti težinskih koeficjenata kriterijuma za za Renyi-jev slučaj:

$w_1 = 0.4963;$

$w_2 = 0.0281;$

$w_3 = 0.0954;$

$w_4 = 0.3802.$

U narednom delu prikazan je proračun težinskih koeficijenata za Renyi slučaj za $\alpha = 1/4$.

$${}_{1/4}e_1 = \frac{1}{\ln 4(1-1/4)} \ln\left(\sqrt[4]{0.32} + \sqrt[4]{0.12} + \sqrt[4]{0.16} + \sqrt[4]{0.40}\right) = 0.9794;$$

${}_{1/4}e_2 = 0.9988;$

${}_{1/4}e_3 = 0.9961;$

${}_{1/4}e_4 = 0.9843.$

Primenom izraza (7) dobijamo da je

${}_{1/4}d_1 = 0.0206;$

${}_{1/4}d_2 = 0.0012;$

${}_{1/4}d_3 = 0.0039;$

${}_{1/4}d_4 = 0.0157.$

Odnosno da je $\sum {}_{1/4}d_i = 0.0414$.

Primenom izraza (8) dobijamo vrednosti težinskih koeficjenata kriterijuma za za Renyi-jev slučaj:

$w_1 = 0.4976;$

$w_2 = 0.0290;$

$w_3 = 0.0942;$

$w_4 = 0.3792.$

U narednom delu prikazan je proračun težinskih koeficijenata za Renyi slučaj za $\alpha = 2$.

$${}_2e_1 = \frac{1}{\ln 4(1-1/4)} \text{-}\ln\left(0.32^2 + 0.12^2 + 0.16^2 + 0.40^2\right) = 0.8627;$$

$_2e_2 = 0.9908;$

$_2e_3 = 0.9695;$

$_2e_4 = 0.8910.$

Primenom izraza (7) dobijamo da je

$_2d_1 = 0.1373;$

$_2d_2 = 0.0092;$

$_2d_3 = 0.0305;$

$_2d_4 = 0.1090.$

Odnosno da je $\sum {_2d_i} = 0.286$.

Primenom izraza (8) dobijamo vrednosti težinskih koeficjenata kriterijuma za za Renyi-jev slučaj:

$w_1 = 0.4801;$

$w_2 = 0.0322;$

$w_3 = 0.1066;$

$w_4 = 0.3811.$

Konačno dobijamo rang težinskih koeficjenata C3>C1>C2>C4, odnosno:

$w_1 = 0.2432;$

$w_2 = 0.2113;$

$w_3 = 0.3601;$

$w_4 = 0.1854.$

U narednom delu prikazan je proračun težinskih koeficijenata za Renyi slučaj za $\alpha = 4$.

$_4e_1 = 0.7931;$

$_4e_2 = 0.9821;$

$_4e_3 = 0.9427;$

$_4e_4 = 0.8306.$

Primenom izraza (7) dobijamo da je

$_4d_1 = 0.2069;$

$_4d_2 = 0.0179;$

$_4d_3 = 0.0573;$

$_4d_4 = 0.1694.$

Odnosno da je $\sum {_2d_i} = 0.4515$.

Primenom izraza (8) dobijamo vrednosti težinskih koeficjenata kriterijuma za za Renyi-jev slučaj:

$w_1 = 0.4583;$

$w_2 = 0.0396;$

$w_3 = 0.1269;$

$w_4 = 0.3752.$

Parametarski pristup metodi entropije (Renyi-jeov slučaj) omogućava i subjektivno određivanje težinskih koeficijenata tako što za različite kriterijume biramo različite vrednosti parametra alfa. Tako, pretpostavimo da su preferencije donosioca odluke izražene kao C3>C1>C2>C4, za α možemo izabrati:

- za C3 α =2;
- za C1 α =1/4;
- za C2 α =4;
- za C4 α =1/4.

Uz prethodno navedene uslove dobijmo da je:

$_{1/4}d_1 = 0.0206;$

$_4d_2 = 0.10179;$

$_2d_3 = 0.0305;$

$_{1/4}d_4 = 0.0157.$

Ako znamo da je $\sum d_i = 0.0847$, tada dobijamo sledeće vrednsoti težinskih koeficijenata kriterijuma:

$w_1 = 0.2432;$

$w_2 = 0.2113;$

$w_3 = 0.3601;$

$w_4 = 0.1854.$

4. ZAKLJUČAK

Pregled literature i analiza do sada u literaturi prisutnih modela za određivanje težinskih koeficijenata kriterijuma jasno ukazuju na potrebu za razvoj novog kredibilnog modela za određivanje težinskih koeficijenata kriterijuma. Zato je u ovom radu prikazan novi model entropije koji kombinuje objektivni i subjektivni pristup određivanja težinskih koeficijenata. Prikazani model entropije predstvalja matematički algoritam koji doprinosi dobijanju kredibilnih rezultata prilikom donošenja odluka. U cilju približavanja korisnicima i eskploatacije prednosti metode entropije nameće se potreba za izradu i implementaciju softvera koji se bazira na prikazanoj metodologiji. Jedan od pravaca budućih istraživanja treba da bude usmeren i u prema proširenju algoritma za primenu u grupnom donošenju odluka.

LITERATURA

[1]. Diakoulaki D, Mavrotas G, Papayannakis L. (1995). Determining objective weights in multiple criteria problems: The critic method. Computers & Operations Research, 22, 763–770.

[2]. Renyi, A. (1961). On Measures of Entropy and Information. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 547-561.

[3]. Shannon C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal. 27(3), 379–423.

[4]. Shannon C.E., Weaver W., The mathematical theory of communication. Urbana: The University of Illinois Press, 1947.

[5]. Srđević, B., Medeiros, Y.D.P., Faria, A.S., & Schaer M. (2003). Objektivno vrednovanje kriterijuma performanse sistema akumulacija. Vodoprivreda, 35, 163-176.

[6]. Šešelja, B. (1985). Matematika informatike. PMF Novi Sad.

[7]. Zhu, G.N., Hu, J., Qi, J., Gu, C.C., & Peng, J.H. (2015). An integrated AHP and VIKOR for design concept evaluation based on rough number, Advanced Engineering Informatics, 29, 408–418.