

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

# Querschwingungskompensation von Regalbediengeräten durch Regelung des Teleskopantriebs

Artem Zhakov

von der Fakultät Maschinenwesen  
der Technischen Universität Dresden  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktoringenieurs**  
(Dr.-Ing.)

eingereichte Dissertation

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Thorsten Schmidt (TU Dresden)  
Prof. Dr.-Ing. Johannes Fottner (TU München)

Tag der Einreichung: 23.05.2022

Tag der Verteidigung: 08.11.2022



*Meiner lieben Mutter gewidmet*



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit an der Professur für Technische Logistik der Technischen Universität Dresden. Dessen Leiter und meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Thorsten Schmidt gilt mein besonderer Dank für die Betreuung der Arbeit, die wertvollen Anregungen und Ratschläge sowie die Unterstützung bei der Realisierung des Versuchsstands. Ebenso danke ich herzlich Herrn Prof. Dr.-Ing. Johannes Fottner von der Technischen Universität München für das Interesse und die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens.

Mein größter Dank gilt meiner Familie, meiner Mutter Elena, meinem Stiefvater Lothar, meiner Tochter Lara, meinem Sohn Alexander und meiner lieben Frau Doreen. Danke für eure Unterstützung, Motivation, unerschöpfliche Geduld und euer Verständnis.

Mein Dank gilt außerdem dem Versuchshalle-Team. Das sind Michael Recke, Michael Schurz, Joe Werner und Ralf Tzschöckel. Eure stetige Unterstützung beim Versuchsstandaufbau und der Inbetriebnahme ermöglichten mir ein reibungsloses Experimentieren.

Ich danke allen Mitarbeitern der Firma MIAS. Insbesondere bedanke ich mich bei Martin Hoole für die freundlichen informativen Gespräche zum Aufbau und der Funktionsweise von Teleskopgabeln. Im gleichem Maße danke ich Werner Schneider von der Firma SEW für die wertvollen Hinweise zur Bedienung des Frequenzumrichters. Ein weiterer Dank gilt allen Mitarbeitern der Professur für Technische Logistik, für das angenehme Arbeitsklima, den wissenschaftlichen und freundschaftlichen Austausch sowie stetige Hilfsbereitschaft.

Ich danke allen Studierenden die mich bei der Erstellung dieser Arbeit begleitet haben. Insbesondere bedanke ich mich bei Maik Horneffer, Tobias Spens und Xuehua Jia für ihre außerordentlichen Leistungen.

Mein besonderer Dank gilt meinen Freunden und Kollegen Dr. Anton Melnikov, Paul Schumann, Dr. Mathias Kühn, Martin Maiwald, Julia Schwemmer, Karsten Turek, Dr. Carsten Knoll und Robert Heedt. Eure große Hilfsbereitschaft und motivierenden Diskussionen erleichterten die Erstellung dieser Arbeit.

Dresden, Mai 2022  
Artem Zhakov

# Kurzfassung

Regalbediengeräte (RBG) sind schienengebundene Regalförderzeuge, die zum Ein- und Auslagern von Ladeeinheiten in automatisierten Kleinteile- und Hochregallagern eingesetzt werden. Die Effizienz dieser Lagersysteme wird in erster Linie durch kurze Spielzeiten des RBG bestimmt. Aus diesem Grund wird versucht, die Spielzeit eines RBG durch hohe Beschleunigungen zu verkürzen. Die daraus resultierenden hohen Massenkraften regen unter anderem Querschwingungen im RBG an. Die Querschwingungen sind vor allem bei Einmast-Paletten-RBG mit schlanken Mastkonstruktionen bis zu 45 m und Ladeeinheiten bis zu 1 t besonders kritisch, weil eine nicht zu vernachlässigende Zeit vergeht, ehe nach Ein- bzw. Ausfahrt des Lastaufnahmemittels (LAM) die Strukturschwingungen unter ein zulässiges Toleranzband abklingen. Erst dann kann das RBG verfahren bzw. die Ladeeinheit abgesetzt werden. Das Auftreten von Querschwingungen trägt somit zur Reduzierung der Materialflussleistung dieser Geräte bei.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Querschwingungskompensation von Regalbediengeräten durch Regelung des Teleskopantriebs. Mit dem vorgestellten Regelungskonzept konnte eine Reduzierung der Schwingungsamplitude nach dem Ein- bzw. Ausfahrvorgang bis zu 95 % am Versuchsstand nachgewiesen werden. Für die sensortechnische Ausstattung wurde dabei lediglich ein 1-Achs-Beschleunigungssensor benötigt, was eine günstige praktische Umsetzung an realen RBG ermöglicht. Des Weiteren konnte bei simulativen Untersuchungen an einem Referenz-RBG eine Verkürzung der durchschnittlichen LAM-Spielzeit um ca. 42 % erreicht werden.

Im Rahmen der Arbeit wurde anhand eines hybriden, analytischen Modells mittels des Konzeptes der Flachheit eine Trajektorie für die nachschwingungsfreie Überführung zwischen einer Start- und einer Endruhelage des Lastaufnahmemittels entworfen. Eine minimale, sensortechnische Ausstattung ermöglicht dabei eine vollständige Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter und den Einsatz eines flachheitsbasierten Folgereglers. Die Wirksamkeit dieses Regelungskonzepts wurde an einem Versuchsstand an der Technischen Universität Dresden nachgewiesen. Die simulativen Untersuchungen an einem Referenz-RBG zeigen eine signifikante Verbesserung der LAM-Spielzeit im Vergleich zur konventionellen LAM-Steuerung mittels 7-Phasen-Bewegung. Die vorliegende Arbeit leistet somit einen Beitrag zur Steigerung der Materialflussleistung von RBG.

# Abstract

Automated storage and retrieval machines (AS/RS) are rail-bound storage and retrieval vehicles used for material handling in automated small parts and high-bay warehouses. The efficiency of these storage systems is primarily determined by short cycle times of the AS/RS. For this reason, attempts are made to shorten the cycle time of AS/RS by applying high accelerations. The resulting high inertia forces stimulate, among other things, transverse vibrations in the AS/RS. The transverse vibrations are particularly critical in the case of single-mast pallet AS/RS with slim mast constructions of up to 45 m and load units of up to 1 t. A considerable amount of time elapses before the structural vibrations decay below a permissible tolerance band after the load handling device (LHD) has moved in or out. Only then can the AS/RS be moved or the loading unit placed. The occurrence of transverse vibrations thus contributes to the reduction of the throughput of these devices.

This thesis addresses the compensation of transverse vibrations of AS/RS by controlling the telescopic drive of the LHD. With the presented control concept, a reduction of the vibration amplitude after the retraction or extension process up to 95 % was proven on the test rig. For the sensor technology configuration, only one 1-axis acceleration sensor was required, which enables the cost-effective practical implementation on real AS/RS. Furthermore, a reduction of the average LHD cycle time by approx. 42 % could be achieved in simulative studies on a reference AS/RS. Within the scope of the thesis, a trajectory for the vibration-free transition between a start and a final rest position of the load handling device was designed on the basis of a hybrid analytical model using the concept of flatness. A minimal sensor equipment provides a complete state estimation by means of Kalman-filter and the application of a flatness-based follow-up controller. The effectiveness of this control concept was demonstrated on a test rig at the Technische Universität Dresden. The simulative studies on a reference AS/RS show a significant improvement of the LHD cycle time compared to the conventional LHD control by means of 7-phase motion. The present thesis thus makes a contribution to increasing the throughput of AS/RS.





# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xv
Abkürzungsverzeichnis	xvi
Symboleverzeichnis	xvii
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Problemstellung und Zielsetzung . . . . .	1
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1 Allgemeiner Aufbau eines Hochregallagers . . . . .	5
2.2 Regalbediengeräte . . . . .	6
2.2.1 Definition und Klassifizierung . . . . .	6
2.2.2 Aufbau von Einmast-Regalbediengeräten . . . . .	7
2.2.3 Bewegungsablauf beim Ein-/Auslagerungsvorgang . . . . .	10
2.3 Stand der Forschung . . . . .	12
<b>3 Modellbildung</b>	<b>15</b>
3.1 Mechanisches Modell . . . . .	15
3.1.1 Modellparameter des Referenzsystems . . . . .	17
3.1.2 Annahmen für das Balkenmodell . . . . .	20
3.2 Mathematische Formulierung . . . . .	20
3.2.1 Biege-Torsionsschwingungsverhalten des homogenen Systems . . . . .	21
3.2.2 Biege-Torsionsschwingungsverhalten des inhomogenen Systems . . . . .	30
3.3 Modalanalyse . . . . .	43
3.3.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen . . . . .	43
3.3.2 Modale Transformation . . . . .	47
3.3.3 Modale Dämpfung . . . . .	49
3.4 Modellierung des Lastaufnahmemittels . . . . .	50
3.5 Zustandsraumdarstellung . . . . .	54
3.6 Modellordnungsreduktion . . . . .	58
3.6.1 Grundbegriffe der Modellordnungsreduktion . . . . .	59

3.6.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Balkensystems . . . . .	62
3.6.3	Modellreduktion durch balanciertes Abschneiden . . . . .	62
3.7	Validierung des Modells . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Regelungsentwurf</b>	<b>73</b>
4.1	Vorsteuerungsentwurf . . . . .	73
4.1.1	Konventionelle Steuerung . . . . .	73
4.1.2	Beruhigungszeit beim Ein-/Auslagerungsvorgang . . . . .	75
4.1.3	Flachheitsbasierte Vorsteuerung . . . . .	76
4.2	Folgereglerentwurf . . . . .	82
4.2.1	Flachheitsbasierter Ausgangsfolgeregler . . . . .	82
4.2.2	Sensorplatzierung und Beobachterentwurf . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>89</b>
5.1	Versuchsstand . . . . .	89
5.1.1	Modell des Versuchsstands . . . . .	91
5.2	Parametrierung . . . . .	93
5.2.1	Parametrierung des Beobachters . . . . .	93
5.2.2	Parametrierung des Folgereglers . . . . .	97
5.3	Ergebnisse . . . . .	99
5.3.1	Einfluss der LE-Schwerpunkthöhe . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Konzeptübertragung</b>	<b>111</b>
6.1	LAM-Spielzeit . . . . .	111
6.2	RBG-Spielzeit . . . . .	115
6.3	Auslegungskonzept . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Orthogonalitätsbedingungen für Balkenstrukturen</b>	<b>128</b>
A.1	Biegeschwingung . . . . .	128
A.2	Torsionsschwingung . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit</b>	<b>133</b>
B.1	Steuerbarkeit . . . . .	133
B.2	Beobachtbarkeit . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Trajektorie für 7-Phasen-Bewegung des LAM</b>	<b>140</b>
<b>D</b>	<b>Trajektorienoptimierung</b>	<b>144</b>
<b>E</b>	<b>Versuchsergebnisse</b>	<b>147</b>

<b>F Verbesserungspotential LAM-Steuerung</b>	<b>154</b>
<b>Literatur</b>	<b>158</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Aufbau eines Hochregallager-Systems . . . . .	6
2.2	Klassifizierung von Regalbediengeräten . . . . .	7
2.3	Aufbau eines Einmast-Regalbediengeräts . . . . .	9
2.4	Aufbau einer Teleskopgabel für einfachtiefe Lagerung . . . . .	10
2.5	Beispiel des Ablaufs eines Vierfachspiels . . . . .	11
2.6	Prinzipieller Bewegungsablauf eines LAM-Spiels . . . . .	12
3.1	Einmast-RBG mit zwei LAM . . . . .	16
3.2	Mechanisches Modell eines Einmast-RBG mit zwei LAM . . . . .	17
3.3	Aufbau und Abmessungen der Mastquerschnitte . . . . .	19
3.4	Mechanisches Modell eines homogenen Balkens . . . . .	21
3.5	Biege-Eigenfunktionen eines homogenen Balkens . . . . .	28
3.6	Modell eines Einmast-RBG mit Balken- und Punktmassenabschnitten . . . . .	32
3.7	Nullstellensuche mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren . . . . .	44
3.8	Charakteristische Gleichungen . . . . .	45
3.9	Biege- und Torsion-Eigenfunktionen des Referenz-RBG . . . . .	46
3.10	Vereinfachtes mechanisches Modell des LAM . . . . .	51
3.11	Freischnitte am mechanischen Modell des LAM . . . . .	53
3.12	Mechanisches Ersatzmodell des RBG . . . . .	55
3.13	Eigenwerte $\lambda_j$ der Systemmatrix des RBG-Balkensystems . . . . .	60
3.14	HANKEL-Singulärwerte des balancierten Systems . . . . .	64
3.15	Vergleich der Amplitudengänge . . . . .	65
3.16	Vergleich der Impulsantworten . . . . .	66
3.17	FE-Modell des Referenz-RBG . . . . .	68
3.18	Amplitudengänge des reduzierten Systems und des FE-Modells . . . . .	68
3.19	Impulsantworten des reduzierten Systems und des FE-Modells . . . . .	69
3.20	Eigenfrequenzen des reduzierten Systems und des FE-Modells . . . . .	70
3.21	Amplitudengang in Abhängigkeit der Hubwagenhöhenposition $l_{HW}$ . . . . .	71
4.1	3-Phasen-Bewegung des LAM . . . . .	74
4.2	7-Phasen-Bewegung des LAM . . . . .	75
4.3	Bestimmung der Beruhigungszeit $t_{Ber}$ . . . . .	76
4.4	Flachheitsbasierte Referenztrajektorie . . . . .	81
4.5	LAM-Trajektorien in Abhängigkeit von der Ausfahrzeit . . . . .	82
4.6	Geschlossener Regelkreis . . . . .	84

4.7	Geschlossener Regelkreis mit Beobachter . . . . .	88
5.1	Aufbau des Versuchsstands . . . . .	89
5.2	Messaufbau des Versuchsstands . . . . .	91
5.3	Mechanisches Modell des Versuchsstands . . . . .	91
5.4	Geschätzte Mastauslenkung und LAM-Ausfahrweite . . . . .	96
5.5	Vergleich der reinen Vorsteuerung und Folgeregelung . . . . .	99
5.6	Versuchsmatrix für experimentelle Untersuchungen . . . . .	100
5.7	Messergebnisse für $l_{QT} = 3,3$ m und $m_L = 476$ kg . . . . .	101
5.8	Bestimmung der Anfangsamplitude in der Nachschwingphase . . . . .	102
5.9	Ergebnisse der Anfangsamplitudenberechnung . . . . .	103
5.10	Höhe des Ladeeinheitschwerpunktes . . . . .	104
5.11	Amplitudengang in Abhängigkeit der LE-Schwerpunkthöhenposition . . . . .	106
5.12	Vergleich der Mastauslenkungen, konv. Vorsteuerung, Ausfahren . . . . .	107
5.13	Vergleich der Mastauslenkungen, flach. Vorsteuerung, Ausfahren . . . . .	108
5.14	Vergleich der Mastauslenkungen, flach. Folgeregelung, Ausfahren . . . . .	109
6.1	Versuchsmatrix für simulative Untersuchungen . . . . .	112
6.2	Vergleich der Gesamtausfahrzeiten . . . . .	113
6.3	Vergleich der Mastauslenkungen $w_P$ . . . . .	114
6.4	Vergleich der LAM-Spielzeiten . . . . .	115
6.5	Ablauf eines Einzelspiels und eines kombinierten Spiels . . . . .	116
6.6	Vergleich der LAM-Spielzeiten für RBG mit einem LAM . . . . .	117
6.7	Verteilung der Spielzeiten über die Regalfront . . . . .	118
6.8	Auslegungskonzept zur Querschwingungskompensation von RBG . . . . .	120
A.1	Minimalmodell einer zusammengesetzten Balkenstruktur . . . . .	128
C.1	7-Phasen-Bewegung für den LAM-Ausfahrvorgang . . . . .	140
D.1	Entwicklung des relativen Fehlers $\epsilon_A$ . . . . .	146
E.1	Messergebnisse für $l_{QT} = 2,98$ m und $m_L = 476$ kg . . . . .	148
E.2	Messergebnisse für $l_{QT} = 3,3$ m und $m_L = 0$ kg . . . . .	149
E.3	Messergebnisse für $l_{QT} = 2,98$ m und $m_L = 0$ kg . . . . .	150
E.4	Vergleich der Mastauslenkungen, konv. Vorsteuerung, Einfahren . . . . .	151
E.5	Vergleich der Mastauslenkungen, flach. Vorsteuerung, Einfahren . . . . .	152
E.6	Vergleich der Mastauslenkungen, flach. Folgeregelung, Einfahren . . . . .	153
F.1	Vergleich der LAM-Spielzeiten für RBG mit verschiedenen Masthöhen . . . . .	155
F.2	Durchschnittliche LAM-Spielzeit in Abhängigkeit der Masthöhe . . . . .	156
F.3	Relative Spielzeitverbesserung komb. Spiel . . . . .	157

# Tabellenverzeichnis

3.1	Hauptparameter des Regalbediengeräts . . . . .	18
3.2	Parameter des Lastaufnahmemittels . . . . .	18
3.3	Werkstoff- und Querschnittsparameter des Mastes . . . . .	19
3.4	Zusammenhänge bei Biegung des homogenen Balkens . . . . .	25
3.5	Zusammenhänge bei Torsion des homogenen Balkens . . . . .	29
3.6	Übersicht der Strukturabschnitte, Biegeschwingungsverhalten . . . . .	36
3.7	Übersicht der Strukturabschnitte, Torsionschwingungsverhalten . . . . .	41
3.8	Trägheitsmomente und Getriebeübersetzungen am LAM . . . . .	52
3.9	Relativer Reduktionsfehler des reduzierten Systems . . . . .	66
5.1	Parameter des Versuchsstands . . . . .	92
5.2	Standardabweichungen des Messrauschens . . . . .	94
5.3	Standardabweichungen des Zustandsrauschens . . . . .	96
5.4	Wichtung der Zustandskomponenten . . . . .	99
6.1	Annahmen für Spielzeitberechnung . . . . .	116

## Abkürzungsverzeichnis

<b>DGL</b>	Differentialgleichung
<b>FE</b>	Finite-Elemente
<b>HRL</b>	Hochregallager
<b>LAM</b>	Lastaufnahmemittel
<b>LE</b>	Ladeeinheit
<b>LQR</b>	linear-quadratischer Regler
<b>RBG</b>	Regalbediengerät
<b>SISO</b>	System mit einem Eingang und einem Ausgang (engl. single input, single output)



## Lateinische Symbole

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$A$	Querschnittsfläche
$a_{max, bel}$	max. Beschleunigung des LAM beladen
$a_{max, leer}$	max. Beschleunigung des LAM leer
$a_n(t)$	Beschleunigung in der $n$ -ten Bewegungsphase
$a_x$	max. Beschleunigung Fahrwerk
$a_y$	max. Beschleunigung Hubwerk
$\mathbf{A}$	Systemmatrix, Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{A}_A$	Systemmatrix LAM-Dynamik
$\mathbf{A}_{Bj}$	Systemmatrix der $j$ -ten Biegemode
$\mathbf{A}_d$	Systemmatrix, zeitdiskret
$\mathbf{A}_R$	Systemmatrix, Regelungsnormalform
$\mathbf{A}^*$	Systemmatrix, BRUNOVSKÝ-Normalform
$\mathbf{A}_{Tj}$	Systemmatrix der $j$ -ten Torsionsmode
$\bar{\mathbf{A}}$	Systemmatrix des balancierten Systems
$\tilde{\mathbf{A}}$	Systemmatrix des reduzierten Systems
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix, Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{B}_A$	Eingangsmatrix LAM-Dynamik
$\mathbf{B}_{Bj}$	Eingangsmatrix der $j$ -ten Biegemode
$\mathbf{B}_d$	Eingangsmatrix, zeitdiskret
$\mathbf{B}_R$	Eingangsmatrix, Regelungsnormalform
$\mathbf{B}^*$	Eingangsmatrix, BRUNOVSKÝ-Normalform
$\mathbf{B}_{Tj}$	Eingangsmatrix der $j$ -ten Torsionsmode
$\bar{\mathbf{B}}$	Eingangsmatrix des balancierten Systems
$\tilde{\mathbf{B}}$	Eingangsmatrix des reduzierten Systems
$c_T$	Federsteifigkeit
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix, Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{C}_A$	Ausgangsmatrix LAM-Dynamik
$\mathbf{C}_{Bj}$	Ausgangsmatrix der $j$ -ten Biegemode
$\mathbf{C}_{LAM}$	Ausgangsmatrix, LAM-Position
$\mathbf{C}_{Mess}$	Ausgangsmatrix, Messgrößen
$\mathbf{C}_P$	Ausgangsmatrix, Mastbeschleunigung im Punkt $P$
$\mathbf{C}_R$	Ausgangsmatrix, Regelungsnormalform
$\mathbf{C}^*$	Ausgangsmatrix, BRUNOVSKÝ-Normalform
$\mathbf{C}_{Tj}$	Ausgangsmatrix der $j$ -ten Torsionsmode
$\mathbf{c}^\top$	letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix
$\bar{\mathbf{C}}$	Ausgangsmatrix des balancierten Systems
$\tilde{\mathbf{C}}$	Ausgangsmatrix des reduzierten Systems
$\mathcal{C}$	Steuerbarkeitsmatrix

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$D_{Mess}$	Durchgangsmatrix, Messgrößen
$D_P$	Durchgangsmatrix, Mastbeschleunigung im Punkt $P$
$D_R$	Durchgangsmatrix, Regelungsnormalform
$E$	Elastizitätsmodul
$e_{HW}$	Exzentrizität des Hubwagens
$e_L$	Exzentrizität des LAM
$e_P$	Exzentrizität des Punktes $P$
$e_{QT}$	Exzentrizität des Querträgers
$e_{SH}$	Exzentrizität des Schaltschranks inkl. Hubwerk
$f_{Bj}$	Eigenfrequenz der $j$ -ten Biegemode
$F_{Dj}$	Dämpfungskraft der $j$ -ten Eigenmode
$F_K$	Kettenkraft Kettengetriebe
$F_{LAM}$	Erregungskraft resultierend aus LAM-Bewegung
$F_t$	Tangentialkraft Zahnstangengetriebe
$f_{Tj}$	Eigenfrequenz der $j$ -ten Torsionsmode
$F(t)$	Erregungskraft
$G$	Schubmodul
$h$	Länge eines homogenen Balkenabschnitts
$h_L$	Schwerpunkthöhe der Ladeinheit
$H_R$	Höhe der Regalfront
$i_G$	Getriebeübersetzung (Motorgetriebe inkl. LAM Zahnradgetriebe)
$i_{ink}$	Geberübersetzung
$i_K$	Kettengetriebeübersetzung
$i_{LAM}$	Gesamtübersetzung des LAM
$I_P$	polares Flächenträgheitsmoment
$I_T$	Torsionsträgheitsmoment
$I_{xx}$	axiales Flächenmoment 2. Grades um die $x$ -Achse
$i_Z$	Zahnstangengetriebeübersetzung
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\Im(\lambda_j)$	Imaginärteil des $j$ -ten Eigenwerts
$J_{ers}$	Ersatzträgheitsmoment für Hubwagen inkl. Beladung
$J_G$	Getriebeträgheitsmoment (Motorgetriebe inkl. LAM Zahnradgetriebe)
$J_L$	Trägheitsmoment der Ladeinheit, $x$ -Achse
$J_{MO}$	Motorträgheitsmoment
$J_R$	Gütefunktional, linear-quadratischer Regler
$k_{Bj}$	Wellenzahl der $j$ -ten Biegemode
$k_{Tj}$	Wellenzahl der $j$ -ten Torsionsmode
$\mathbf{K}$	KALNAM-Matrix
$\mathbf{K}_R$	Regelungsmatrix, linear-quadratischer Regler

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$L$	Lagrange-Funktion
$l$	Länge des Mast-Segmentes
$l_A$	Ausfahrweg des LAM
$l_{HW}$	Höhenposition des Hubwagens
$l_M$	Gesamtlänge des Mastes
$l_{QT}$	Höhenposition des Querträgers
$L_R$	Länge der Regalfront
$l_{SH}$	Höhenposition des Schaltschranks inkl. Hubwerk
$\mathcal{L}$	Lagrange-Dichte
$m_{ers}$	Ersatzmasse für Hubwagen inkl. Beladung
$m_{HW}$	Masse des Hubwagens
$m_L$	Masse der Ladeinheit
$m_{LAM}$	Masse des LAM
$m_{LG}$	Masse des LAM-Grundrahmens
$m_{LM}$	Masse des LAM-Mittelteils
$m_{LO}$	Masse des LAM-Oberteils
$M_{MO}$	Motordrehmoment
$m_{QT}$	Masse des Querträgers
$m_{SH}$	Masse des Schaltschranks und Hubwerks
$M_x(y)$	Balkenschnittmoment (Biegung) um $x$ -Achse
$M_y(y)$	Balkenschnittmoment (Torsion) um $y$ -Achse
$\mathbb{N}_+$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$n_B$	Anzahl der berücksichtigten Biegemoden
$n_{MO}$	Motordrehzahl des LAM
$n_T$	Anzahl der berücksichtigten Torsionsmoden
$\mathcal{O}$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{P}$	Kovarianz des Schätzfehlers
$\mathbf{P}_R$	Lösung der RICCATI-Gleichung, linear-quadratischer Regler
$q_{Bj}(t)$	modale Koordinate der $j$ -ten Biegemode
$q_{l_A}, q_{i_A}$	Wichtung der Zustandskomponenten der LAM-Dynamik
$q_{q,j}, \dot{q}_{q,j}$	Wichtung der Zustandskomponenten der $j$ -ten Eigenmode
$q_{Tj}(t)$	modale Koordinate der $j$ -ten Torsionsmode
$Q(y)$	Balkenschnittkraft (Querkraft in $z$ -Richtung)
$\mathbf{Q}$	Kovarianzmatrix, Prozessrauschen
$\mathbf{Q}_R$	Wichtungsmatrix der Zustände, linear-quadratischer Regler
$r_{an}$	Radius Getriebeantriebsrad
$R_i(y)$	$i$ -te Rayleigh Funktion

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$r_n(t)$	Ruck in der $n$ -ten Bewegungsphase
$r_R$	Wichtung der Stellgröße, linear-quadratischer Regler
$\mathbf{R}$	Kovarianzmatrix, Messrauschen
$\mathbf{R}_R$	Wichtungsmatrix der Stellgrößen, linear-quadratischer Regler
$\Re(\lambda_j)$	Realteil des $j$ -ten Eigenwerts
$S$	Flächenschwerpunkt des Balkenquerschnittes
$s_n(t)$	Weg in der $n$ -ten Bewegungsphase
$SM$	Schubmittelpunkt des Balkenquerschnittes
$t_0$	Startzeit der Zustandsüberführung
$T_1$	Periodendauer der 1. Eigenfrequenz
$T_a$	Abtastzeit
$t_A$	Ausfahrzeit des LAM
$t_{A,ges}$	Ausfahrzeit inkl. Beruhigungszeit des LAM
$t_{Ber}$	Beruhigungszeit
$t_E$	Einfahrzeit des LAM
$t_e$	Endzeit der Zustandsüberführung
$t_{Einzel\text{spiel}}$	Spielzeit des RBG-Einzelspiels
$t_{Hub}$	Zeitanteil zum Anheben bzw. Absetzen der Ladeinheit
$T_{kin}$	kinetische Energie
$t_{komb\text{Spiel}}$	mittlere Spielzeit des kombinierten RBG-Spiels
$t_{LAM}$	LAM-Spielzeit
$t_{pos}$	Positionierzeit und Platzkontrolle
$t_r$	Ruck- bzw. Ausrundungszeit
$\mathbf{T}^B$	Übertragungsmatrix für homogenen Balkenabschnitt (Biegung)
$\mathbf{T}_{ges}$	Gesamtübertragungsmatrix der Balkenstruktur
$\mathbf{T}^J$	Übertragungsmatrix für konzentrierte rotatorische Trägheit
$\mathbf{T}^m$	Übertragungsmatrix für Punktmasse
$\mathbf{T}_R$	Transformationsmatrix, Regelungsnormalform
$\mathbf{T}^T$	Übertragungsmatrix für homogenen Balkenabschnitt (Torsion)
$\bar{\mathbf{T}}$	Transformationsmatrix für balancierte Darstellung
$U_{pot}$	potentielle Energie
$u(t)$	Stellgröße
$v_{max,bel}$	max. Geschwindigkeit des LAM beladen
$v_{max,leer}$	max. Geschwindigkeit des LAM leer
$v_n(t)$	Geschwindigkeit in der $n$ -ten Bewegungsphase
$v_x$	max. Geschwindigkeit Fahrwerk

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$v_y$	max. Geschwindigkeit Hubwerk
$\mathbf{v}$	Messrauschen
$W_j(y)$	Eigenfunktion der $j$ -ten Biegemode
$\hat{w}_P$	Anfangsamplitude der Mastauslenkung in der Nachschwingphase
$w_{P,tol}$	Toleranzband für die Amplitude der Balkenschwingung im Punkt $P$
$w_P(y,t)$	Balkenverschiebung in $z$ -Richtung im Punkt $P$
$W_{virt}$	virtuelle Arbeit potentialloser Kräfte
$\mathbf{w}$	Prozessrauschen
$\mathbf{W}_c$	Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix
$\mathbf{W}_o$	Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix
$w(y,t)$	Balkenverschiebung in $z$ -Richtung
$x$	$x$ Koordinate im kartesischen Koordinatensystem
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor, Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{x}_0$	Anfangszustand
$\mathbf{x}_A$	Zustandsvektor LAM-Dynamik
$\mathbf{x}_{Bj}$	Zustandsvektor $j$ -ten Biegemode
$\mathbf{x}_g$	Zustandsvektor der Gleichgewichtslage
$\hat{\mathbf{x}}$	geschätzter Systemzustand
$\mathbf{x}_R$	Zustandsvektor, Regelungsnormalform
$\mathbf{x}_{Tj}$	Zustandsvektor $j$ -ten Torsionsmode
$\bar{\mathbf{x}}$	Zustandsvektor des balancierten Systems
$\dot{\mathbf{x}}$	Zeitableitung des Zustandsvektors
$\tilde{\mathbf{x}}$	Zustandsvektor des reduzierten Systems
$y$	$y$ Koordinate im kartesischen Koordinatensystem
$y_0$	Startlage der Zustandsüberführung
$y_A(t)$	Ausgang LAM-Dynamik
$y_{Bj}(t)$	Ausgang der $j$ -ten Biegemode
$y^{(\delta)}$	Impulsantwort des Originalsystems
$y_{FEM}^{(\delta)}$	Impulsantwort des FE-Modells
$y_e$	Endlage der Zustandsüberführung
$y_f(t)$	flacher Ausgang
$y_{LAM}(t)$	Ausgang zur Beschreibung der LAM-Position
$y_P(t)$	Ausgang zur Beschreibung der Mastbeschleunigung im Punkt $P$
$y_{Tj}(t)$	Ausgang der $j$ -ten Torsionsmode
$\mathbf{y}_f^{[n]}$	Vektor mit flachem Ausgang und seinen Ableitungen $\dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-1)}$
$\mathbf{y}_{Mess}(t)$	Ausgangsvektor, Messgrößen

Symbol	Beschreibung
$y(t)$	Ausgang, Zustandsraumdarstellung
$\tilde{y}^{(\delta)}$	Impulsantwort des reduzierten Systems
$\tilde{y}(t)$	Ausgang des reduzierten Systems
$z$	$z$ Koordinate im kartesischen Koordinatensystem
$\mathbf{z}_n$	Zustandsvektor an der $n$ -Abschnittsgrenze einer zusammengesetzten Balkenstruktur

## Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung
$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$	Koeffizienten der Fehlerdynamik des flachen Ausgangs
$\gamma$	Stetigkeitsgrad für die Trajektorienplanung
$\delta(\cdot)$	Dirac-Funktion
$\epsilon_f$	Folgefehler des flachen Ausgangs
$\tilde{\epsilon}_{rel}$	relativer Reduktionsfehler
$\tilde{\epsilon}_{FEM}$	relativer Fehler des red. Modells bezogen auf FE-Modell
$\varepsilon$	Biegesteifigkeit der gesamten Balkenstruktur
$\eta$	Dichtefunktion der gesamten Balkenstruktur
$\tilde{\Theta}(\cdot)$	Funktion zur Berechnung des Eingangs aus dem flachen Ausgang und seinen Zeitableitungen
$\Theta(y)$	Heaviside-Funktion
$\kappa_Q$	Vorfaktor der Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$
$\lambda$	Eigenwert (Pol)
$\nu(t)$	BRUNOVSKÝ-Eingang
$\xi$	Dämpfungsgrad
$\rho$	Dichte
$\sigma_{Init}$	Standardabweichung, Initialschätzung
$\sigma_{LAM}$	Standardabweichung, LAM-Positionssensor
$\sigma_P$	Standardabweichung, Beschleunigungssensor
$\sigma_c$	Singulärwert der Gram'schen Steuerbarkeitsmatrix
$\sigma_h$	Hankel-Singulärwert
$\sigma_{i_A}^2, \sigma_{i_A}^2$	Kovarianzen der Zustandskomponenten der LAM-Dynamik
$\sigma_o$	Singulärwert der Gram'schen Beobachtbarkeitsmatrix
$\sigma_{q,j}^2, \sigma_{\dot{q},j}^2$	Kovarianzen der Zustandskomponenten der $j$ -ten Eigenmode
$\phi_{MO}$	Motordrehwinkel
$\phi_\gamma(\cdot)$	Funktion zur Planung von polynomialen Trajektorien
$\phi(y)$	Balkenverdrehung um $x$ -Achse

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$\tilde{\Psi}(\cdot)$	Funktion zur Berechnung des Zustandsvektors aus dem flachen Ausgang und seinen Zeitableitungen
$\Psi_j(y)$	Eigenfunktion der $j$ -ten Torsionsmode
$\psi(y,t)$	Balkenverdrehung um $y$ -Achse
$\omega_{Bj}$	Eigenkreisfrequenz der $j$ -ten Biegemode
$\omega_{Tj}$	Eigenkreisfrequenz der $j$ -ten Torsionsmode

## Indizes

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>
$\textcircled{i}$	$i$ -ter Balkenabschnitt einer zusammengesetzten Struktur
$f$	flach, flachheitsbasiert
$g$	Gleichgewichtszustand, Gleichgewichtslage des Ausgangs
$konv$	konventionelle LAM-Steuerung
$red$	reduzierte Masse bzw. Trägheit
$ref$	Referenztrajektorie





# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Die seit dem letzten Jahrzehnt fortschreitende Digitalisierung bringt enorme Veränderungen in nahezu allen Wirtschaftszweigen mit sich. Prozesse, Produkte, Geschäftsmodelle, aber auch das Handelsverhalten sind im Zuge der globalen Vernetzung in ständigem Wandel [BMW15, S. 7]. So wird der heutige Handel zunehmend durch den Begriff E-Commerce (elektronisch basiertes Handeln) geprägt [Sta21a; Sta21b]. Es gibt keine Öffnungszeiten im Internet. Der Kunde kann jederzeit ein Produkt oder eine Dienstleistung bestellen und erwartet eine möglichst schnelle Lieferung bzw. eine Lieferung zu einem gewünschten Termin. Der daraus entstandene Trend zur Overnight- bzw. 24 Stunden Lieferung ist heutzutage nichts Ungewöhnliches mehr. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden und wettbewerbsfähig zu bleiben, sind die Unternehmen gezwungen ihre Logistikketten stetig zu rationalisieren.

Eines der zentralen Elemente in der Logistikkette sind Lagersysteme. Daher finden seit Jahrzehnten Modernisierungen und Weiterentwicklungen auf diesem Gebiet statt. Kurze Transportwege sowie schnelle Zugriffs- und Transportzeiten bei effizienter Ressourcennutzung sind die Anforderungen, die von jedem modernen Lagersystem zu erfüllen sind. Dabei nehmen Lagertransportsysteme, wie Regalbediengeräte, eine bedeutende Rolle in der Effizienzbestimmung der intralogistischen Kette ein. Aus diesem Grund gilt es diese Systeme stets weiter zu entwickeln und zu automatisieren.

## 1.2 Problemstellung und Zielsetzung

Paletten-Regalbediengeräte (RBG) sind schienengebundene Regalförderzeuge, die bei der Warenein- bzw. Warenauslagerung in oft automatisierten Hochregallagern eingesetzt werden. In modernen, leistungsstarken Lagersystemen sind grundsätzlich gassengebundene RBG installiert, d. h. eine Maschine pro Regalgasse. Somit ergibt sich je nach Lagergröße eine hohe Anzahl der im Lager verbauten RBG. Die *Materialflussleistung* (die Anzahl der Ein- und Auslagerungen je Zeiteinheit) des einzelnen RBG hat deshalb einen signifikanten Einfluss auf Materialflussleistung des gesamten Lagersystems. Demzufolge gelten möglichst hohe Arbeitsgeschwindigkeiten und Beschleunigungen als Voraussetzungen zur Steigerung der Materialflussleistung eines RBG.

Die Regalfächer eines Lagers sind in der Regel auf die Abmessungen der einzulagernden Stückgüter ausgelegt, um einen maximalen Ausnutzungsgrad der Lagerfläche zu erreichen. Deshalb ist bei Ein- bzw. Auslagerungsvorgängen in Hochregallagern (bis zu 45 m) eine Feinpositionierung des Lastaufnahmemittels erforderlich. Eine exakte, kollisionsfreie Positionierung vermeidet Beschädigungen am RBG, an der Ladeeinheit und an der Regalstruktur [Hüb10]. Die beim Teleskopieren der Ladeeinheit in das entsprechende Regalfach angeregten niederfrequenten Schwingungen des Mastes wirken sich negativ auf den Durchsatz aus, weil eine nicht zu vernachlässigende Zeit vergeht, ehe nach Ein- bzw. Ausfahrt des Lastaufnahmemittels die Strukturschwingungen unter ein zulässiges Toleranzband abklingen. Erst dann kann das RBG verfahren bzw. die Ladeeinheit abgesetzt werden.

Eine einfache Erhöhung der dynamischen Parameter, um den Durchsatz dieser Geräte zu steigern, ist nicht zielführend, da sich bei gleichbleibender Tragwerksteifigkeit die Strukturschwingungen durch erhöhte dynamische Erregung verstärkt negativ in der Positionierzeit auswirken. Die konstruktive Steifigkeitserhöhung bringt auch keine Vorteile, da diese bei optimal ausgelegten RBG zwangsläufig zur erhöhten Gesamtmasse und somit zu einem erhöhten Energiebedarf führt. Durch Werkstoffsubstitution (z. B. Einsatz von Faserverbundwerkstoffen anstelle von Stahl) kann das Schwingverhalten positiv beeinflusst werden [Zha+16; Fil+16]. Bei Berücksichtigung der Baugröße der hier betrachteten Geräte, zeigt sich jedoch, dass die Umsetzung für RBG-Hersteller mit hohen Material-, Fertigungs- und gegebenenfalls Wartungskosten verbunden ist. Die aktive Schwingungskompensation in horizontaler Richtung (Fahrtrieb) wurde in vielen Forschungsarbeiten (vgl. [Sch94; Die99; Bac12; Haj16]) bereits untersucht und gehört mittlerweile zum Stand der Technik. In [Küh01] wurden die Vertikal-schwingungen am Hubmast beim Anheben der Last (Hubtrieb) untersucht.

Für die aktive Kompensation der Querschwingungen beim Teleskopieren der Ladeeinheit während des Ein- und Auslagerungsvorgangs sind bisher keine Untersuchungen und Lösungen bekannt. Um diese Lücke zu schließen, soll im Rahmen dieser Arbeit eine Regelung des Teleskopantriebs zur Schwingungskompensation beim Ein- bzw. Auslagerungsvorgang entwickelt und im Versuchsfeld getestet werden.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit beginnt mit einer Zusammenfassung zum Stand der Technik in Kapitel 2. Dafür wird zunächst die Peripherie des RBG am Beispiel eines Hochregallagers dargestellt. Nach Einführung der Definition und Klassifizierung von RBG wird die in dieser Arbeit betrachtete RBG-Klasse abgeleitet und deren Grundaufbau vorgestellt. Dabei liegt der Fokus auf dem Aufbau des Lastaufnahmemittels und dessen prinzipiellen Bewegungsablauf beim Ein- und Auslagerungsvorgang. Das Kapitel schließt mit einer Literaturübersicht zur Schwingungskompensation in RBG ab.

Im Kapitel 3 steht die Aufstellung des mechanischen und mathematischen Modells im Vordergrund. Dieses bildet sowohl die Grundlage für die Untersuchungen des Schwingungsverhaltens als auch für die anschließende steuerungs- und regelungstechnische Behandlung zur aktiven Querschwingungskompensation. Das Kapitel beginnt mit der Vorstellung des in dieser Arbeit betrachteten Referenz-RBG. Dieses wird durch ein hybrides Modell abgebildet, welches sowohl Elemente mit örtlich verteilten (Kontinuum) als auch mit konzentrierten Parametern (Punktmassen) enthält. Die elastische Maststruktur wird dabei als EULER-BERNOULLI-Balken behandelt. Es folgt die Ableitung der Bewegungsgleichungen zur Beschreibung des Biege- und Torsionsschwingverhaltens zunächst für ein homogenes System am Beispiel eines beidseitig gelagerten Balkens nach dem Prinzip von HAMILTON. Im nächsten Abschnitt wird diese Vorgehensweise für inhomogene Systeme, d. h. zusammengesetzte Balkenstrukturen mit konzentrierten Massen, mittels Methode der Übertragungsmatrizen erweitert. Es erfolgt die Überführung der aufgestellten Bewegungsgleichungen in ein gewöhnliches Differentialgleichung (DGL)-System mit Hilfe der modalen Transformation. Abschließend erfolgt die Umformung des DGL-Systems in die, in der Regelungstechnik übliche, Zustandsraumdarstellung sowie die Beleuchtung der Modellordnungsreduktion.

Kapitel 4 behandelt das Konzept der aktiven Querschwingungskompensation durch Regelung des Lastaufnahmemittel (LAM)-Antriebs. Zunächst erfolgt die Vorstellung der in der Praxis üblichen konventionellen LAM-Steuerung sowie deren Vor- und Nachteile insbesondere bezüglich der Beruhigungszeit. Anschließend wird eine alternative LAM-Steuerung mittels schwingungsreduzierender, flachheitsbasierter Trajektorie sowie deren Entwurf und Optimierung vorgestellt. Im darauffolgenden Abschnitt wird diese Steuerung mit einem Folgeregler erweitert, um Abweichungen durch Störungen im Betrieb sowie Modellungenauigkeiten auszugleichen. Eine Diskussion über hierfür notwendige minimale Zusammenstellung an Sensoren sowie deren Platzierung für die Schätzung des vollständigen Systemzustands schließt das Kapitel ab.

Kapitel 5 befasst sich mit den experimentellen Untersuchungen der Konzepte zur aktiven Querschwingungskompensation. Das Kapitel fängt mit einer kurzen Vorstellung zum grundsätzlichen Aufbau sowie dem Messaufbau des Versuchsstandes an. Der Versuchsstand bildet dabei das Schwingverhalten realer RBG nach. Es folgt ein Abschnitt zur Beschreibung des mechanischen Modells sowie der Besonderheiten, die bei der Ableitung von Systemgleichungen für die Trajektorienplanung zu beachten sind. Anschließend wird eine systematische Vorgehensweise zur Parametrierung des Reglers vorgestellt. Im Anschluss werden die Ergebnisse der durchgeführten Experimente zur konventionellen und schwingungsreduzierten Betriebsweise des LAM diskutiert.

Kapitel 6 widmet sich der praxisrelevanten Fragestellung, welche Auswirkung die schwingungsoptimale Trajektorie auf die LAM-Spielzeit eines RBG hat. Anhand der Simulationsergebnisse werden die Potentiale der schwingungsreduzierenden Betriebsweise bezüglich der LAM-Spielzeit für das Referenz-RBG aufgezeigt. Anschließend erfolgt eine Betrachtung zum Einfluss der schwingungsoptimalen LAM-Betriebsweise

auf die RBG-Spielzeit. Das Kapitel schließt mit der Vorstellung eines Auslegungskonzeptes, das grundsätzlich für alle RBG der hier betrachteten RBG-Klasse gültig ist.

Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung wesentlicher Ergebnisse und einem Ausblick für weiterführende Forschungsarbeiten im Kapitel 7.

## 2 Stand der Technik

### 2.1 Allgemeiner Aufbau eines Hochregallagers

Ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist die Untersuchung der Bewegungsabläufe eines Regalbediengeräts (RBG) während des Ein- bzw. Auslagerungsprozesses. Zur Beschreibung der Bewegungsabläufe werden Fachbegriffe wie Regalfach und Ladeinheit (LE) verwendet. Zum besseren Verständnis der Arbeit werden diese Begriffe nachfolgend durch die Darlegung des Aufbaus eines Lagersystems erklärt.

Ein Lagersystem ist durch folgende Bestandteile charakterisiert [HH11]:

- Regal
- Regalfach
- Ladeinheit
- Regalförderzeug
- Regalgasse
- Vorzone

Abbildung 2.1 stellt den Aufbau eines Lagersystems am Beispiel eines Hochregallagers (HRL) schematisch dar. Als *Hochregallager* werden Regallager mit Bauhöhe von 12 bis über 45 m bei einer Länge bis zu 200 m bezeichnet [Sch19, S. 76]. Dieser Typ von Lager wird meist in Silobauweise ausgeführt, d. h. die Regalkonstruktion übernimmt die tragende Funktion für die Dach- und Wandverkleidungen.

Ein HRL-System besteht aus Regalen, RBG und einer Vorzone mit einem Ein- bzw. Auslagerungsbereich. Das Regal beinhaltet mehrere Regalfächer, in denen LE gelagert werden. Eine *Ladeinheit* ist nach VDI 3968 [VDI13] ein Transportgut, das aus einem oder mehreren Stückgütern besteht. Man unterscheidet zwischen LE mit und ohne Ladehilfsmittel. Im betrachteten HRL-System fungieren üblicherweise Paletten als Ladehilfsmittel. Die einzelnen Regale sind räumlich durch sogenannte Regalgassen getrennt. Innerhalb der Regalgassen findet die Bewegung der schienengeführten RBG zur Ein- und Auslagerung der LE meist im Automatikbetrieb statt. Die Vorzone dient dabei als Übergabebereich zwischen RBG, Stetigförderer und Verteilfördertechnik (z. B. Rollenbahnen, Kettenförderer, Drehtische, Verschiebewagen, Vertikalförderer). Durch den hohen Grad der Automatisierbarkeit, niedrigen Personalkosten und geringem Flächenbedarf gehören HRL zu den bevorzugten Lagertypen für Palettenware [AF09, S. 194].

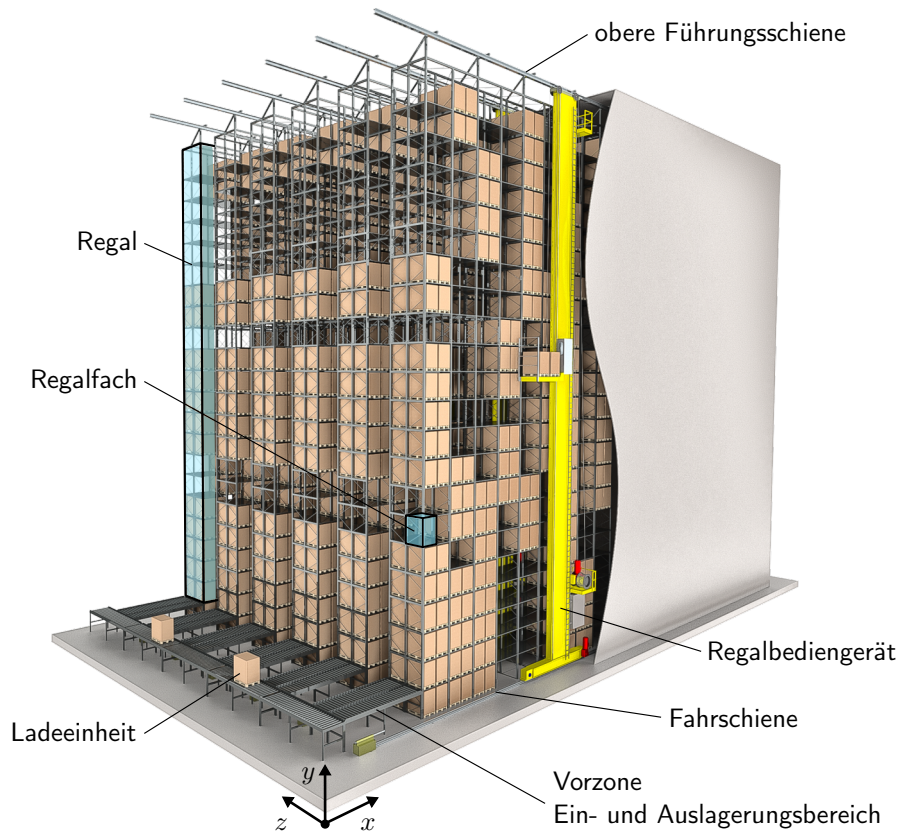
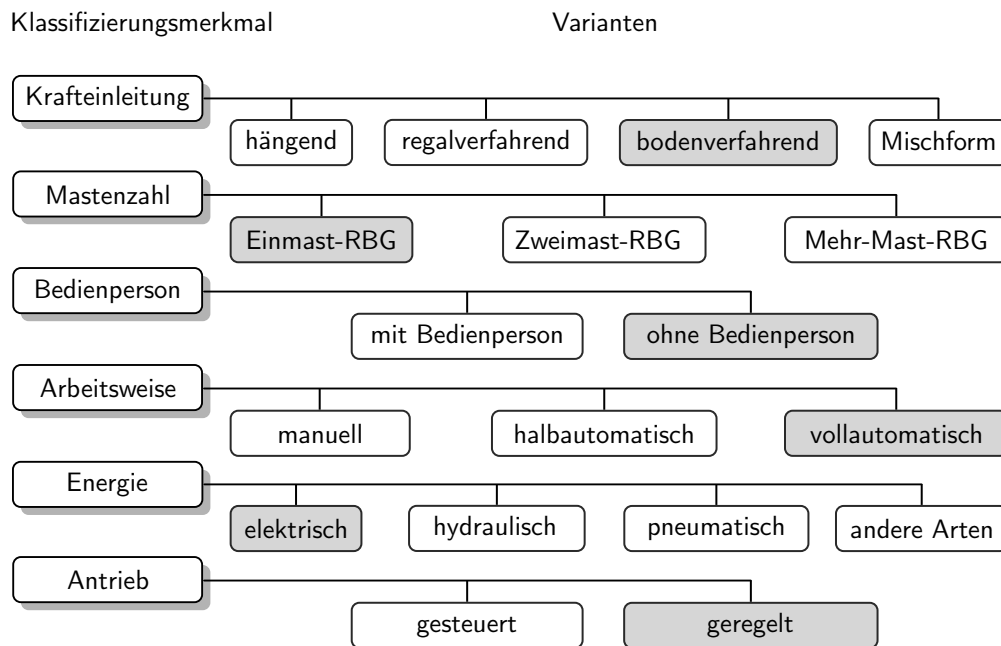


Abbildung 2.1: Aufbau eines Hochregallager-Systems (eigene Darstellung)

## 2.2 Regalbediengeräte

### 2.2.1 Definition und Klassifizierung

Das *Regalbediengerät* ist ein schienengebundenes Regalförderzeug, das in der Intralogistik zur manuellen oder automatisierten Bedienung der Regalfächer eines Lagersystems verwendet wird [FEM97]. Mittels Hub- und Fahreinrichtungen können LE horizontal und vertikal entlang der Regalfront bewegt werden. Die Ein- und Auslagerung erfolgt mit einem LAM. Da der Transport der LE nicht kontinuierlich, sondern in Intervallen stattfindet, werden RBG in der Fördertechnik den Unstetigförderern zugeordnet. Weiterhin lassen sich RBG nach FEM 9.101 [FEM97] anhand der Art der Krafteinleitung, des Aufbaus (Anzahl der Masten), der Bedien- und Arbeitsweise sowie der Energieversorgung und Antriebsart klassifizieren (siehe Abbildung 2.2).



**Abbildung 2.2:** Klassifizierung von Regalbediengeräten mit grauen Markierungen als Eingrenzung der betrachteten Systemklasse (in Anlehnung an [FEM97])

Die in modernen HRL am meisten verbreiteten RBG sind bodenverfahrende, vollautomatische Regalförderzeuge in Einmast-Bauweise mit geregelten, elektrischen Antrieben [Bop93; Sch94; Die99; Küh01]. Diese RBG zeichnen sich, aufgrund des hohen Automatisierungsgrades, durch hohe Umschlagleistung und Zuverlässigkeit bei der Durchführung von Transportaufträgen aus. Dabei sorgt die Antriebsregelung für eine präzise Positionierung der LE und ermöglicht die Ausführung von energieeffizienten Bewegungstrajektorien. Ein wichtiger Vorteil von Einmast-RBG ist die kompakte Bauweise. Diese hat einen unmittelbaren Einfluss auf das seitliche Anfahrmaß der Regalanlage (Abstand der letzten Palette einer Regalgasse zur Wand) und somit auf das nutzbare Lagervolumen [HSD18, S. 203].

Derzeit verfügbare Einmast-Geräte können Traglasten bis zu 2 t verfahren [DEM22, S. 16]. Bei höheren Traglasten oder langen Gütern werden Geräte in Zweimast-Bauweise eingesetzt. Neben der günstigeren Traglastverteilung auf zwei Masten, zeichnen sich diese RBG durch höhere Schwingstabilität aus.

### 2.2.2 Aufbau von Einmast-Regalbediengeräten

Grundsätzlich lässt sich der Aufbau eines RBG durch folgende Hauptgruppen beschreiben: Mast, Fahrwerk, Hubwagen, Fahrtrieb, Hubwerk, LAM. Abbildung 2.3 stellt den prinzipiellen Aufbau eines Einmast-RBG dar. Das RBG ist in der Lage, Lasten in alle drei Raumrichtungen zu bewegen. Entsprechend der VDI 2361 Blatt 1

[VDI93] werden die Koordinatenachsen in dieser Arbeit wie folgt festgelegt (siehe Abbildung 2.3)<sup>1</sup>

- $x$  - Richtung: horizontale Bewegung des RBG entlang der Regalgasse (Fahren)
- $y$  - Richtung: vertikale Bewegung des Hubwagens (Heben und Senken)
- $z$  - Richtung: Bewegung des LAM in Richtung der Regalfächer (Ein- und Auslagern)

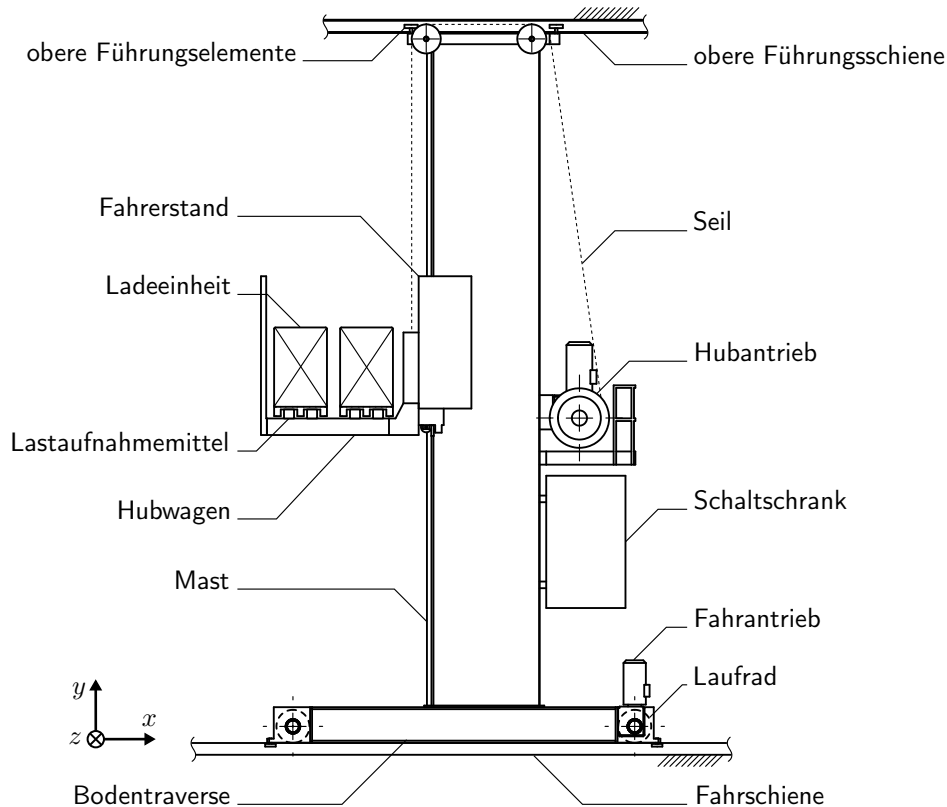
### Mast, Fahrwerk

Der *Mast* ist eine schlanke Konstruktion, die die Führungsfunktion beim Heben und Senken des Hubwagens übernimmt. RBG-Masten werden in der Regel in Kasten- oder Fachwerkbauweise aus Stahl- oder Aluminiumprofilen ausgeführt. Bei Kastenkonstruktionen können Öffnungen in beanspruchungsunkritischen Bereichen zur Reduzierung des Eigengewichts eingelassen werden. Zusätzliche Versteifungselemente, wie z. B. Bleche und Profile im Inneren der Kastenkonstruktion, können die Biege- und Torsionssteifigkeit des Mastes erhöhen. Unten wird der Mast auf einer sogenannten *Bodentraverse* montiert, die ähnlich wie der Mast in Kastenbauweise gefertigt wird. Zusammen mit zwei *Laufrädern*, von denen eines angetrieben wird, bildet die Bodentraverse das *Fahrwerk* des RBG. Dieses ist für das horizontale Verfahren und das Positionieren innerhalb des Regalganges zuständig. Die im Lagerboden verankerte und an der oberen Regalzeile montierte *Fahr-* und *Führungsschiene* geben dabei die Bewegungsrichtung vor. Damit das RBG nicht von der Fahrschiene abfährt, wird es durch Laufräder mit Spurkränzen bzw. flachen Laufrädern und zusätzlichen Führungsrollen geführt. Oben übernehmen diese Funktion die am Kopfträger installierten *oberen Führungselemente* (Führungsrollen).

---

<sup>1</sup>Es handelt sich für Regalbediengeräte um übliche Koordinatenachsensdefinitionen (vgl. [FEM97; FEM03]), die aus der Krantechnologie übernommen wurden.





**Abbildung 2.3:** Aufbau eines Einmast-Regalbediengeräts mit zwei Lastaufnahmemitteln (in Anlehnung an DIN 15350 [DIN92, S. 2])

### Hubwagen, Lastaufnahmemittel

Zum Heben und Senken der LE ist das RBG mit einem *Hubwagen* ausgestattet. Dieser wird am Mast geführt und über ein *Hubtrieb* in vertikale Bewegung versetzt. Hubantriebe gibt es in verschiedenen Ausführungen als Riemen-, Ketten- oder Seiltrieb. Aufgrund von hohen Traglasten und geringer Dynamik kommen bei Paletten-RBG im Vergleich zu AKL-RBG (RBG für automatische Kleinteilelager) vorwiegend Seiltriebe in Form von Trommelwinden zum Einsatz. Ausführungen von Paletten-RBG mit Riemenhubtrieb sind aus [rai19] bekannt. Am Hubwagen sind ein oder mehrere *Lastaufnahmemittel* installiert, deren Aufgabe in der Ein- und Auslagerung sowie in der Aufnahme bzw. Übergabe von LE besteht. RBG mit mehreren LAM sind in der Lage mehrere LE gleichzeitig zu verfahren, was zur Erhöhung der Materialflussleistung dieser Geräte beiträgt. Abhängig von der Art der Ladehilfsmittel, der Masse und der Geometrie der Waren kommen unterschiedliche LAM zum Einsatz. Typische Bauformen für leichte LE sind Ziehvorrichtungen, Reibriemen, Teleskoptische oder Greifer. Zur Einlagerung von Palettenware wird hauptsächlich die Teleskopgabel verwendet. Je nach Ausfahrweg der Teleskopgabel sind bis zu zweifachtiefe Lagerungen realisierbar,

d. h. Lagerung von bis zu zwei LE hintereinander im selben Regalfach. Dadurch wird die Lagerfläche, die ein RBG bedient, und das damit nutzbare Lagervolumen vergrößert [HSD18, S. 68]. Die Häufigkeit einer Umlagerung, die beim Zugriff auf die verdeckte LE in der zweiten Reihe erforderlich ist, nimmt mit dem Lagerfüllgrad zu. Als Konsequenz ist eine absinkende Materialflussleistung des RBG zu erwarten. Diese kann jedoch durch speziell konzipierte Betriebsstrategien kompensiert werden [Dör18].

Bei hohen Leistungsanforderungen und großer Artikelvielfalt sind Lagersysteme mit einfachtiefer Lagerung häufiger anzutreffen, da diese immer den direkten Zugriff auf die LE gewährleisten. Abbildung 2.4 stellt den prinzipiellen Aufbau einer Teleskopgabel für einfachtiefe Lagerung dar. Der Antrieb der Teleskopgabel erfolgt üblicherweise über einen frequenzgesteuerten Asynchronmotor. Das Antriebskonzept unterscheidet sich je nach Hersteller und Baureihe. In der Regel wird die translatorische Bewegung der Teleskopgabel durch Zahnstangen- und Kettengetriebe erreicht. Zur Aufnahme der Palette dienen zwei teleskopierbare Zinken. Diese bestehen jeweils aus einem Grundrahmen sowie einem beweglichen Mittel- und Oberteil. Die translatorische Lagerung erfolgt über Rollen am Grundrahmen und Oberteil, die in die Führungsnuten des Mittelteils eingreifen. Eine Kardanwelle verbindet die beiden Zinken und sorgt für mechanische Synchronisation während des Teleskopierens. Die Trageflächen der Oberteile sind oft mit einer rutschfesten Beschichtung behandelt, damit die LE beim Transport und während der Ein-/Auslagerung nicht verrutschen.

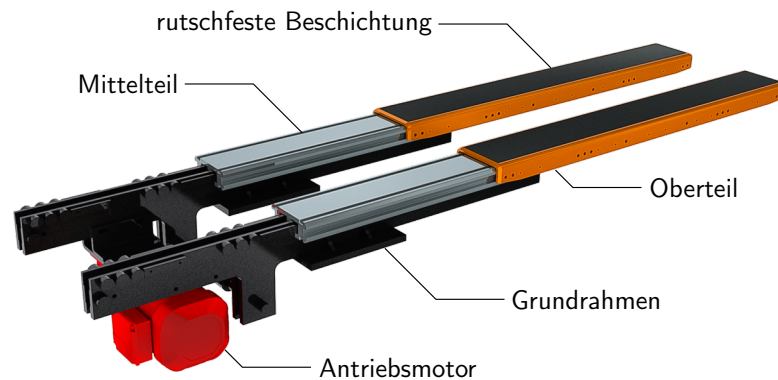
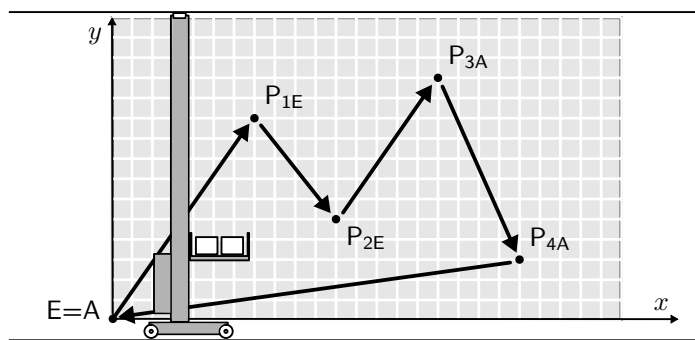


Abbildung 2.4: Aufbau einer Teleskopgabel für einfachtiefe Lagerung

### 2.2.3 Bewegungsablauf beim Ein-/Auslagerungsvorgang

RBG führen im Betrieb zyklische Bewegungsabläufe aus. Ein Arbeitszyklus bzw. Bewegungsablauf wird dabei als *Spiel* bezeichnet. RBG mit zwei LAM sind in ihrer Betriebsweise sehr flexibel. Je nach Bedarf können diese Geräte Einfach-, Doppel-,

Dreifach- oder sogar Vierfachspiele ausführen<sup>2</sup>. Abbildung 2.5 stellt den prinzipiellen Bewegungsablauf am Beispiel eines Vierfachspiels (eine Kombination aus zwei Ein- und zwei Auslagerungen) eines RBG mit zwei LAM dar. Das Vierfachspiel beginnt mit der Aufnahme von zwei LE an der Übernahmeposition für die Einlagerung (Position E). Durch das simultane Verfahren des Hubwagens in  $x$ - und  $y$ -Richtung wird eine LE zur Position  $P_{1E}$  transportiert und dort eingelagert. Auf die gleiche Weise erfolgt der Transport der zweiten LE von  $P_{1E}$  zur  $P_{2E}$  und deren Einlagerung an  $P_{2E}$ . Danach finden die Auslagerungen von LE an den Positionen  $P_{3A}$  und  $P_{4A}$  und deren anschließende Übergabe an der Übergabeposition für Auslagerungen (Position A) statt.



**Abbildung 2.5:** Beispiel des Ablaufs eines Vierfachspiels (die Reihenfolge von Ein- und Auslagerungen kann variieren); RBG mit zwei LAM

Die Zeit, die benötigt wird, um einen Arbeitszyklus abzuschließen, nennt man *Spielzeit*. Diese setzt sich aus den Zeiten der einzelnen Fahrbewegungen sowie Positionier- und Beruhigungszeiten zusammen. Die Fahr- und Hubbewegung beginnen zeitgleich und überlagern sich. Die LAM-Bewegung zur Ein-/Auslagerung findet dagegen erst nach dem Stillstand, der Positionier- und Beruhigungsphase des RBG in der  $xy$ -Ebene statt, um Kollisionen mit dem Regal zu vermeiden. Diese Bewegungsentkopplung ermöglicht die Definition des sogenannten *LAM-Spiels*.

Das LAM-Spiel beim Einlagern (siehe Abbildung 2.6 a)) beinhaltet folgende Schritte: Ausfahren des LAM (beladen) (1), Beruhigungsphase (2), Absetzen der LE im Regalfach (3) und Einfahren des LAM (Leerfahrt) (4). Beim Auslagern (siehe Abbildung 2.6 b)) setzt sich das LAM-Spiel wie folgt zusammen: Ausfahren des LAM (Leerfahrt) (1), Anheben der LE im Regalfach (2), Einfahren des LAM (beladen) (3) und Beruhigungsphase (4). Die *LAM-Spielzeit* lässt sich dann wie folgt berechnen:

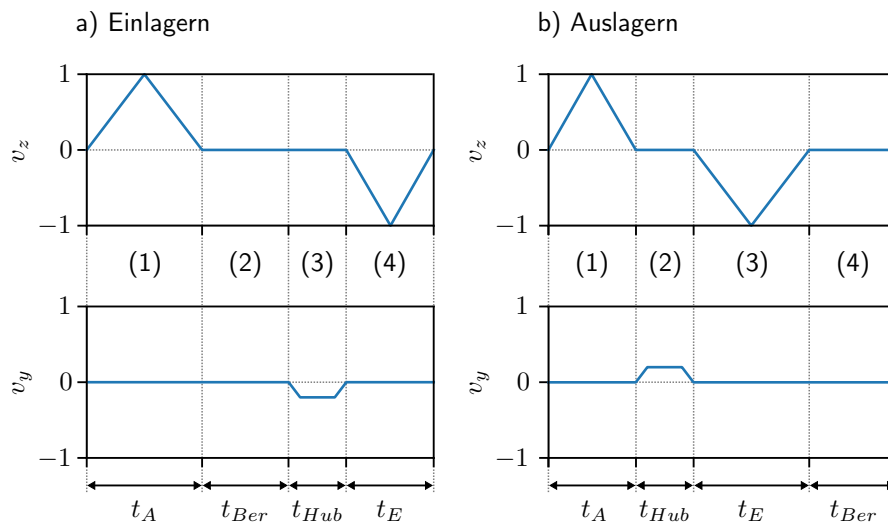
$$t_{LAM} = t_A + t_{Ber} + t_{Hub} + t_E \quad (2.1)$$

mit

<sup>2</sup>Die RBG-Spielarten werden nach der Summe aus Ein- und Auslagerungen pro Arbeitszyklus genannt. Zum Beispiel Dreifachspiel ist eine Kombination aus zwei Einlagerungen und einer Auslagerung bzw. einer Einlagerung und zwei Auslagerungen.

$t_A$	Ausfahrzeit des LAM,
$t_{Ber}$	Beruhigungszeit <sup>3</sup> ,
$t_E$	Einfahrzeit des LAM,
$t_{Hub}$	Zeit zum Anheben bzw. Absetzen der LE.

Das in Abbildung 2.5 dargestellte Vierfachspiel enthält acht LAM-Spiele. Gelingt es den LAM-Antrieb so zu regeln, dass nach dem Ein- bzw. Ausfahren des beladenen LAM keine Mastschwingungen bzw. Mastschwingungen mit ertragbarer Amplitude bleiben (Beruhigungszeit  $t_{Ber} \approx 0$ ), ist es möglich, die LAM-Spielzeit  $t_{LAM}$  zu verringern und somit die Materialflussleistung des RBG zu steigern.



**Abbildung 2.6:** Prinzipieller Bewegungsablauf beim LAM-Spiel a) Einlagern, b) Auslagern; Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf des LAM (oben) und des Hubwagens (unten) normiert auf die jeweils maximale Geschwindigkeit

## 2.3 Stand der Forschung

Aufgrund der großen Bauhöhe, der nachgiebigen Mastkonstruktion sowie der hohen bewegten Massen sind Paletten-RBG schwingungsanfällige, schwach gedämpfte Systeme. Das dynamische Verfahren dieser Geräte bewirkt deshalb die Anregung hoher und schwach abklingender Schwingungsamplituden im Mast, die oft das Positionieren der LE erschweren und somit die Materialflussleistung des RBG negativ beeinflussen. Daher wird stets nach geeigneten Lösungen zur Schwingungskompensation gesucht. Das breite Forschungsfeld der Schwingungskompensation in RBG erstreckt sich dabei über passive und aktive Maßnahmen.

<sup>3</sup>Die Beruhigungszeit  $t_{Ber}$  ist die Zeit, die vergeht bis die bei Ein-/Ausfahren des beladenen LAM angeregten Mastschwingungen auf eine zulässige Amplitude abklingen

SCHUMACHER untersuchte in [Sch94] das Schwingungsverhalten von Einmast-RBG mit dem Ziel, die Positionierzeit des Fahrtriebs zu verkürzen und dadurch die RBG-Materialflussleistung zu erhöhen. Mittels eines Mehrkörpermodells entwickelte er eine Fahrtriebssteuerung basierend auf der Methode der schwingungsoptimalen Beschleunigungsänderungszeiten. Damit lässt sich die Amplitude der Mastschwingung reduzieren, wenn die Beschleunigungsänderungszeit einem ganzzahlig Vielfachen der Schwingungsperiodendauer entspricht. Dieser Ansatz erfordert eine sehr genaue Abstimmung der Beschleunigungsänderungszeit an die Schwingungsperiodendauer des Mastes. Des Weiteren fallen die Beschleunigungsänderungszeiten bei RBG mit niedriger 1. Eigenfrequenz (bei Mastschwingung in Gassenrichtung) – d. h. hohe Schwingungsperiodendauer – hoch aus, was die Materialflussleistung nur geringfügig verbessert.

In [Die99] entwickelte DIETZEL eine aktive Schwingungsdämpfung für Einmast-RBG mittels Zustandsregelung des Fahrtriebs. Dabei wurde der Systemzustand (Mastauslenkung und Geschwindigkeit) mit geeigneten Sensoren erfasst, um daraus eine Stellgröße für den Fahrtrieb abzuleiten. Diese wirkt der Mastschwingung entgegen und verkürzt somit die Positionierzeit des RBG. Der RBG-Durchsatz wird dadurch erhöht.

Eine weitere Methode zur aktiven Schwingungsdämpfung von RBG ist die schwingungsoptimale Vorsteuerung und stabilisierende Folgeregelung der Fahr- und Hubtriebe. Dabei wird eine schwingungsoptimale Trajektorie basierend auf einem differentiell flachem System<sup>4</sup> so geplant, dass in der Zielposition keine Mastschwingungen entstehen. Am Beispiel von Zweimast-RBG zeigte BACHMAYER in [Bac12] die Effektivität einer schwingungsoptimalen Vorsteuerung ergänzt mit einer Folgeregelung, um Störgrößen und Modellungenauigkeit auszugleichen. In seiner Arbeit untersuchte er den Einsatz einer flachheitsbasierten Vorsteuerung mittels GEWREY-Funktionen. Das hierfür zugrundeliegende, mechanische Modell beruht auf der EULER-BERNOULLI-Balkentheorie, das mittels der Methode der finiten Differenzen in ein endlichdimensionales Zustandsraummodell überführt wird. Als stabilisierender Folgeregler kommt ein linear-quadratischer Regler (LQR) zum Einsatz. Damit kann eine Durchsatzsteigerung bis zu 40 % am realen RBG nachgewiesen werden, wobei die Hubwagenhöhe während des Positioniervorgangs fixiert wird. Ein ähnlicher Ansatz ist in [SG11; GKL09] zu finden.

STAUDECKER et al. untersuchten in [SSH08] eine flachheitsbasierte Vorsteuerung und Folgeregelung an einem infinit-dimensionalen mathematischen Modell des RBG, um Instabilitäten des Reglers infolge des Spillover-Effektes zu vermeiden. Dabei wurde die Bewegung des Hubwagens sowohl in der Vorsteuerung als auch im Folgeregler berücksichtigt. Basierend auf dieser Modellierung, stellt GALKINA den Einsatz einer modellprädiktiven Regelung zur Stabilisierung der Trajektorie in [GS18] vor. Im Gegensatz zu [SSH08; GS18] basiert das Modell bei TKANY et al. [TGG20] auf einem

<sup>4</sup>Eine von FLIESS et al. [Fli+92; Fli+93; Fli+95] eingeführte Regelungstheorie

Massen-Feder-Dämpfer-System. Dieser vereinfachte Modellierungsansatz in Kombination mit flachen Trajektorien basierend auf s-Kurven höherer Ordnung erlaubt eine recheneffiziente Online-Trajektorienplanung. Eine weitere ausführliche Untersuchung verschiedener Modellierungsansätze zur Berücksichtigung der Hubwagenbewegung sowie der Entwurf einer Gain-Scheduling basierten Regelung – einer arbeitspunkt-abhängigen Regelung für nichtlineare Systeme – findet bei HAJDU et al. in [HG13; HG16; Haj16] statt.

Während die oben genannten Arbeiten die RBG-Schwingungen in Gassenrichtung betrachten, rückt KÜHN [Küh01] die vertikalen Schwingungen, resultierend aus den Hubvorgängen aber auch durch Unebenheiten der Fahrschiene, in den Fokus seiner Untersuchungen. Basierend auf einem elastokinetischen Modell leitete KÜHN Dynamik-Beiwerte sowie relevante Lastfälle, die bei der Auslegung des Tragwerks, des Hubwerks und des LAM berücksichtigt werden sollen, ab.

Passive Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung in RBG wurden z. B. in [SM17; Zha+16; Fil+16] untersucht. Das Forschungsvorhaben zielte darauf ab, Querschwingungen im RBG durch Einsatz von Faserverbundwerkstoffen mit hohem Dämpfungsgrad zu reduzieren. Im Ergebnis konnte die Abklingzeit um bis zu 75 % reduziert werden (nachgewiesen am Modellmast im Maßstab 1:10), gleichzeitig sank die Mastmasse um ca. 43 %. Die praktische Umsetzung für Paletten-RBG ist jedoch mit hohen Material-, Herstellungs- und gegebenenfalls hohen Wartungskosten verbunden. Des Weiteren wird bei der passiven Schwingungsdämpfung ein von dem Antrieb zugeführter Energieanteil in Wärme umgewandelt, wodurch die RBG-Energieeffizienz abnimmt.

Nach derzeitigem Stand der Forschung sind keine Untersuchungen zur aktiven Dämpfung von Querschwingungen infolge von Ein- und Auslagerungsvorgänge eines RBG bekannt. Um diese Forschungslücke zu schließen, wird im Rahmen dieser Arbeit eine LAM-Regelung zur Querschwingungskompensation entwickelt und im Versuchsfeld getestet. Des Weiteren soll der Einfluss der LAM-Regelung auf die Materialflussleistung eines RBG untersucht werden.

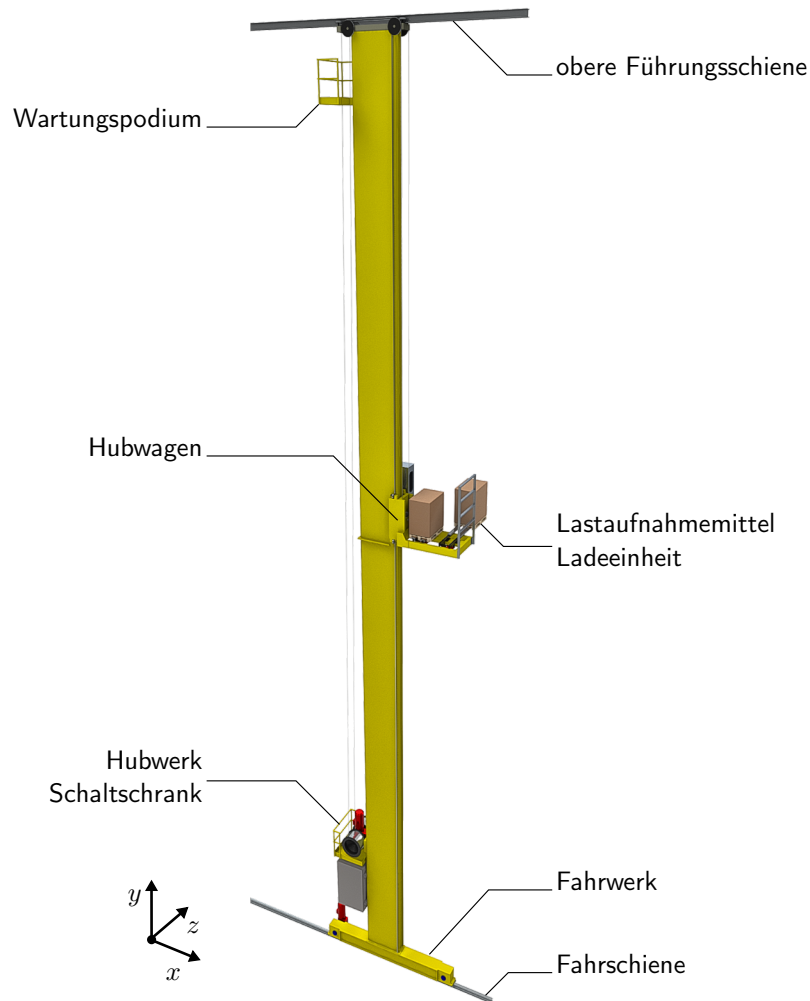
# 3 Modellbildung

Ausgangspunkt der Modellbildung ist die Analyse des abzubildenden realen Systems. In der Problemstellung ist festgelegt, welches Systemverhalten des realen Systems analysiert werden soll. Basierend auf der Problemstellung erfolgt die Modellbildung, in der analytische bzw. numerische Beschreibungen auf Basis physikalischer Gesetze und Definitionen von Gültigkeitsbereichen aufgestellt werden. Da es nahezu unmöglich ist, sämtliche auf das reale System wirkende Einflüsse zu modellieren, wird in der Modellbildung determiniert, welche Systemkomponenten und Einflüsse abgebildet werden sollen. Die Modellbildung findet dabei unter Zuhilfenahme von Parameterzuweisungen statt, wodurch die Eigenschaften des Modells mit einem geringen Aufwand verändert werden können. Das Resultat der Modellbildung ist ein Modell, welches (mit Ausnahme der vernachlässigten Einflüsse) die Eigenschaften des realen Systems aufweist. Die Vernachlässigungen dürfen jedoch nur bis zu dem Grad betrieben werden, an dem das Modell das reale Systemverhalten hinreichend genau abbilden kann.

## 3.1 Mechanisches Modell

Als Referenzsystem für nachfolgende Untersuchungen dient ein Einmast-Paletten-RBG mit einem Mast aus geschweißtem Kastenprofil und zwei LAM. Abbildung 3.1 stellt das Referenz-RBG während des Auslagerungsvorgangs mit dem 2. LAM dar. Das System lässt sich mit dem in Abbildung 3.2 dargestellten mechanischen Modell bestehend aus einem Balken mit zwei exzentrisch angeordneten, aktuierten teleskopierbaren Einheiten abbilden. Hierbei handelt es sich um ein hybrides Modell, das sowohl Elemente mit örtlich verteilten (Kontinuum) als auch mit konzentrierten (Punktmassen) Parametern enthält.

Ein zusammengesetzter Balken, definiert durch die Querschnittsflächen  $A_{1,2}$ , axiale Flächenmomente 2. Grades um die  $x$ -Achse  $I_{xx1,2}$ , Torsionsträgheitsmomente  $I_{T1,2}$ , polare Flächenträgheitsmomente  $I_{P1,2}$ , Elastizitätsmodul  $E$ , Schubmodul  $G$ , Dichte  $\rho$ , Längen der Balkensegmente  $l_{1,2}$  und der Gesamtlänge  $l_M$ , bildet den Mast des RBG ab. Die Fahrwerk-Fahrschiene-Verbindung in der  $yz$ -Ebene ist durch ein Festlager am unteren Balkenabschnitt abstrahiert. Das Loslager am oberen Balkenabschnitt stellt die Verbindung des Mastes mit der oberen Führungsschiene dar. Ein entlang des Mastes verfahrbarer Hubwagen ist mittels eines Trägers (im Weiteren als Hubträger bezeichnet) mit der Punktmasse  $m_{HW}$  und der Exzentrizität  $e_{HW}$  bezüglich der



**Abbildung 3.1:** Einmast-RBG mit zwei LAM

$y$ -Achse modelliert. Bei der Annahme, dass die Mastverformung gegenüber der Verformung des Hubwagens dominiert, kann dieser Träger im Modell als unendlich steif betrachtet werden. Während des Ein-/Ausfahrens des LAM ist der Hubträger in einer definierten Höhe  $l_{HW}$  arretiert. Weitere am Hubträger definierte Punktmassen  $m_{LG1,2}$ ,  $m_{LM1,2}$ ,  $m_{LO1,2}$  und  $m_{L1,2}$  mit entsprechenden Exzentrizitäten  $e_{L1,2}$  bilden die zwei LAM inklusive der Ladeinheit ab. Dabei ist  $m_{LG}$  die Masse des LAM-Grundrahmens inklusive Motor,  $m_{LM}$  die Masse des LAM-Mittelteils,  $m_{LO}$  die Masse des LAM-Oberteils und  $m_L$  die Masse der Ladeinheit. Dessen relative Position in der  $z$ -Richtung ist durch den Ausfahrweg  $l_A$  definiert (siehe Abbildung 3.2 links am Beispiel der Masse  $m_{L2}$  am 2. LAM). Die Punktmasse  $m_{SH}$  mit der Exzentrizität  $e_{SH}$ , die den Schaltschrank und das Hubwerk des RBG nachbildet, ist durch eine starre Verbindung am unteren Balkenabschnitt in der Höhe  $l_{SH}$  gekoppelt.



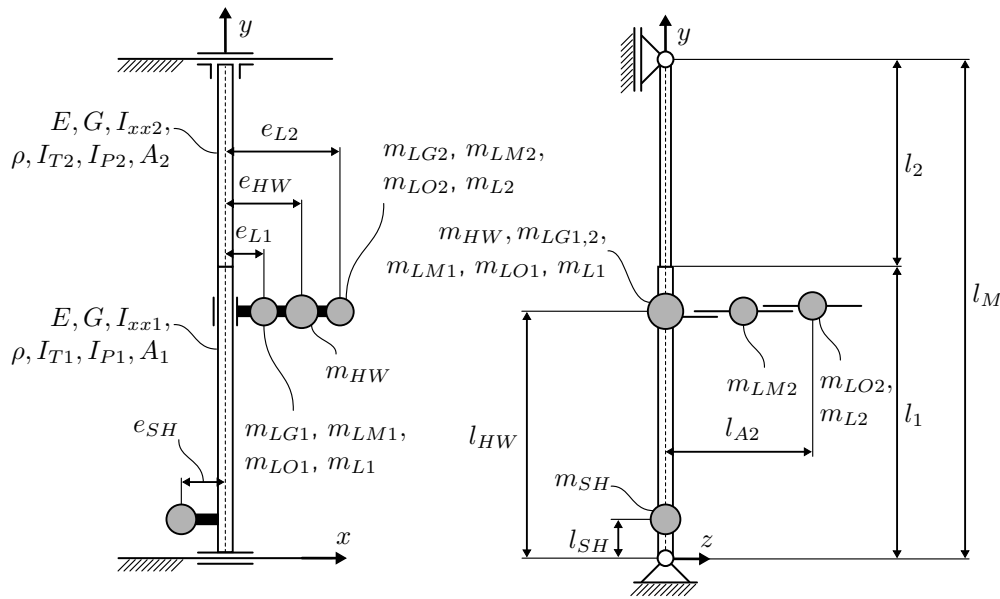


Abbildung 3.2: Mechanisches Modell eines Einmast-RBG mit zwei LAM

Während des Ein-/Auslagerungsvorgangs regen die durch das LAM erzeugten Massenkräfte mechanische Schwingungen im Mast an. Dabei werden zwei Schwingungskomponenten überlagert. Eine Schwingungskomponente ist die Biegeschwingung des Mastes in der  $yz$ -Ebene, verursacht durch die in  $z$ -Richtung wirkenden Massenkräfte. Diese überlagert sich mit der Torsionsschwingung des Mastes um die  $y$ -Achse, verursacht durch Kraftanregung mit der Exzentrizität  $e_L$ . Ausgehend von den genannten Schwingungskomponenten können RBG-Komponenten, die keinen bzw. sehr geringen Einfluss auf das Schwingungsverhalten haben, im mechanischen Modell vernachlässigt werden. Solche RBG-Komponenten sind z. B. das Fahrwerk und das Wartungspodium. Das Wartungspodium kann aufgrund seiner geringen Masse, Exzentrizität sowie lagernahen Positionierung, d. h. nah am oberen Mastlagerpunkt (obere Führungsschiene) vernachlässigt werden. Das Fahrwerk dagegen besitzt eine viel höhere Masse, stützt sich aber direkt an der Fahrschiene (unterer Mastlagerpunkt) ab, wodurch sein Beitrag zum Mastschwingungsverhalten verschwindet.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Vorgehensweise ist auf alle technischen Systeme, die auf das in Abbildung 3.2 dargestellte mechanische Modell reduziert werden können, übertragbar.

### 3.1.1 Modellparameter des Referenzsystems

Nachdem das mechanische Modell in Abbildung 3.2 vorgestellt wurde, können nun dessen Parameter definiert werden. Tabelle 3.1 fasst die Hauptparameter des Referenz-RBG zusammen. Darin sind die LAM-Massen zunächst als Gesamtmassen

angegeben. Da die Hauptanregung des RBG beim Ein-/Auslagern durch das LAM zustande kommt, ist eine detaillierte Definition dessen Parameter erforderlich. Die am Referenz-RBG installierten LAM entsprechen der in Abbildung 2.4 dargestellten Teleskopgabel. Die LAM-Parameter sind in Tabelle 3.2 definiert.

**Tabelle 3.1:** Hauptparameter des Regalbediengeräts

Beschreibung	Parameterdefinition
Gesamte Masthöhe	$l_M = 45 \text{ m}$
Länge unterer Mastabschnitt	$l_1 = 20 \text{ m}$
Länge oberer Mastabschnitt	$l_2 = 25 \text{ m}$
Hubhöhenbereich	$l_{HW} = 1, \dots, 42 \text{ m}$
Höhenposition Schaltschrank/Hubwerk	$l_{SH} = 4,68 \text{ m}$
Exzentrizität Hubwagen	$e_{HW} = 1,31 \text{ m}$
Exzentrizität 1. LAM	$e_{L1} = 1,58 \text{ m}$
Exzentrizität 2. LAM	$e_{L2} = 2,58 \text{ m}$
Exzentrizität Schaltschrank/Hubwerk	$e_{SH} = 1,30 \text{ m}$
Masse Hubwagen	$m_{HW} = 1150 \text{ kg}$
Max. Masse Ladeinheit	$m_{L1,2} = 1000 \text{ kg}$
Masse LAM	$m_{LAM1,2} = 282 \text{ kg}$
Masse Schaltschrank/Hubwerk	$m_{SH} = 2150 \text{ kg}$

**Tabelle 3.2:** Parameter des Lastaufnahmemittels

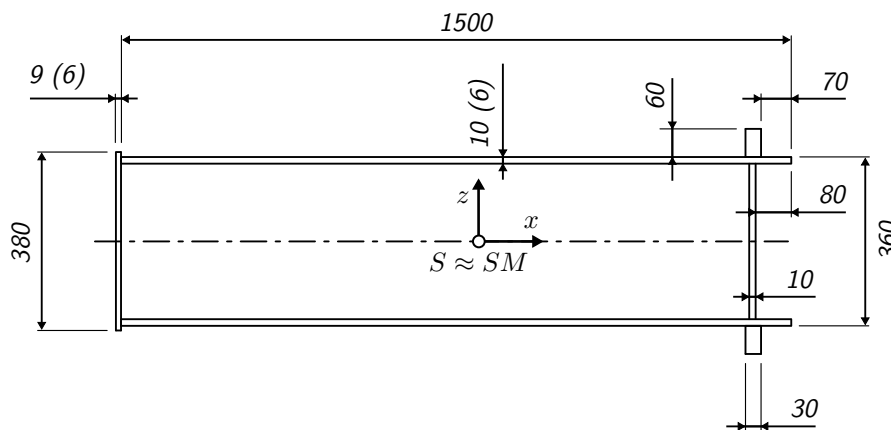
Beschreibung	Parameterdefinition
LAM Ausfahrweg	$l_A = 0, \dots, 1,6 \text{ m}$
Max. Beschleunigung (beladen)	$a_{max,bel} = 0,87 \text{ m/s}^2$
Max. Beschleunigung (leer)	$a_{max,leer} = 1,25 \text{ m/s}^2$
Max. Geschwindigkeit (beladen)	$v_{max,bel} = 0,87 \text{ m/s}$
Max. Geschwindigkeit (leer)	$v_{max,leer} = 1,25 \text{ m/s}$
Masse LAM Motor	$m_{MO} = 35 \text{ kg}$
Masse LAM Grundrahmen	$m_{LG} = 113 \text{ kg}$
Masse LAM Mittelteil	$m_{LM} = 80 \text{ kg}$
Masse LAM Oberteil	$m_{LO} = 54 \text{ kg}$

Ferner ist die Angabe der Werkstoffkennwerte sowie Querschnittsparameter des aus zwei homogenen Balkensegmenten zusammengesetzten Mastes notwendig. Diese sind in Tabelle 3.3 definiert. Abbildung 3.3 zeigt den Aufbau und die Abmessungen der beiden Mastquerschnitte mit Hauptachsen  $x$  und  $z$ . Dabei beziehen sich die Angaben in den Klammern auf die zum unteren Querschnitt abweichenden Maße des oberen Querschnitts. Weil es sich um symmetrische Profile handelt, liegen der

Flächenschwerpunkt  $S$  und der Schubmittelpunkt  $SM^1$  auf der Symmetrieachse. Die Abstände  $\bar{S} \bar{SM}_{1,2}$  am unteren bzw. oberen Mastquerschnitt betragen 33 mm bzw. 1 mm, sodass eine näherungsweise Übereinstimmung  $S \approx SM$  angenommen werden kann.

**Tabelle 3.3:** Werkstoff- und Querschnittsparameter des Mastes

Beschreibung	Parameterdefinition
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Schubmodul	$G = 0,81 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Dichte	$\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Querschnittsfläche unterer Mastabschnitt	$A_1 = 4042 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
Querschnittsfläche oberer Mastabschnitt	$A_2 = 2736 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
Flächenträgheitsmoment unterer Mastabschnitt	$I_{xx1} = 115,27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
Flächenträgheitsmoment oberer Mastabschnitt	$I_{xx2} = 78,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
Torsionsträgheitsmoment unterer Mastabschnitt	$I_{T1} = 278,54 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
Torsionsträgheitsmoment oberer Mastabschnitt	$I_{T2} = 179,31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
Polares Flächenträgheitsmoment unterer Mastabschnitt	$I_{P1} = 117,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
Polares Flächenträgheitsmoment oberer Mastabschnitt	$I_{P2} = 82,58 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$



**Abbildung 3.3:** Aufbau und Abmessungen der Mastquerschnitte; zum unteren Mastquerschnitt abweichende Maße des oberen Mastquerschnitts sind in Klammern dargestellt

<sup>1</sup>Als Schubmittelpunkt wird der Punkt bezeichnet, durch den die Resultierende der Querkräfte gehen muss, um keine Torsion des Balkens zu erzeugen [Wie96, S. 94].

#### 3.1.2 Annahmen für das Balkenmodell

Die Behandlung von schlanken elastischen Strukturen, wie der Mast eines RBG erfolgt in dieser Arbeit nach der Balkentheorie. Mit der Balkentheorie lassen sich unter Einwirkung von äußeren Belastungen die Schnittgrößen (Querkraft und Biegemoment) im Inneren des Balkens und daraus resultierende Verformungen berechnen. Dabei gelten folgende allgemeine Annahmen [Spu19, S. 172]:

- Balkenlänge ist viel größer als die Querschnittsabmessungen (Breite, Höhe)
- Balken ist biegesteif
- prismatischer Balken, d. h. Balken mit konstantem bzw. schwach veränderlichem Querschnitt
- $y$ -Achse verläuft durch den Schwerpunkt  $S$  der Balkenquerschnitte
- alle Verformungen sind klein gegenüber den Balkenabmessungen
- isotropes linear-elastisches Materialverhalten nach dem HOOK'schen Gesetz

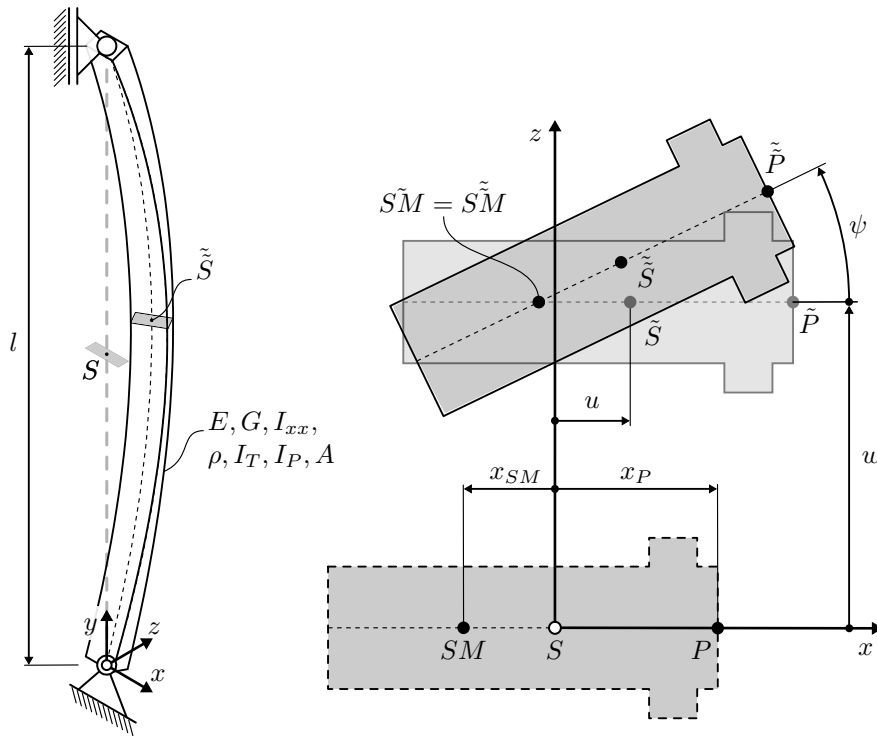
Bei Untersuchungen von Balkenschwingungen an schlanken Strukturen, in denen nur Eigenschwingungen niedriger Ordnung relevant sind, hat sich die klassische EULER-BERNOULLI-Balkentheorie bewährt. Bei solchen Balken ist die Vernachlässigung von Schubspannungen und daraus resultierenden Verformungen in Folge von Biegung sowie die Vernachlässigung von Drehträgheiten zulässig. Bei EULER-BERNOULLI-Balken spricht man auch von einem schubstarrten Balken. Für diesen gilt zusätzlich, dass die Querschnitte vor und nach der Verformung des Balkens senkrecht zur Balkenachse stehen (1. BERNOULLI'sche Hypothese) und eben bleiben, d. h. es tritt keine Verwölbung der Querschnitte auf (2. BERNOULLI'sche Hypothese).

Weiterhin werden zur Untersuchung der Torsionschwingungen im Rahmen dieser Arbeit folgende Annahmen getroffen:

- bei Torsionsbelastung verdrehen sich die Balkenquerschnitte um Schubmittelpunkt  $SM$
- der Balken besitzt eine konstante Torsionssteifigkeit ( $GI_T = \text{const.}$ )
- Normalspannungen in Längsrichtung infolge einer Torsionsbelastung werden vernachlässigt

## 3.2 Mathematische Formulierung

Die Grundlage für einen Regelungsentwurf ist die hinreichende Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens. Bei mechanischen Systemen wird das dynamische Verhalten in Form von Bewegungsgleichungen dargestellt. Zum besseren Verständnis der Herleitung von Bewegungsgleichungen für das in Abbildung 3.2 dargestellte Modell wird zuerst ein vereinfachtes Modell aus Abbildung 3.4 betrachtet.



**Abbildung 3.4:** Mechanisches Modell eines homogenen Balkens mit gekoppeltem Biege- und Torsionsverhalten im Ausgangs- (graue Strichlinie stellt die Balkenachse dar) und ausgelenktem Zustand

### 3.2.1 Biege-Torsionsschwingungsverhalten des homogenen Systems

Das mechanische Modell besteht aus einem beidseitig gelagerten homogenen Balken mit einfach symmetrischem Querschnitt. An beiden Lagern ist der Balken gegen das Verdrehen um die  $y$ -Achse gesichert. Der Flächenschwerpunkt  $S$ , der Schubmittelpunkt  $SM$  sowie der frei gewählte Querschnittspunkt  $P$  liegen auf der Symmetrieachse. Wegen der einfachen Symmetrie fallen  $S$  und  $SM$  jedoch nicht zusammen. Somit sind die Biege- und Torsionsschwingung gekoppelt [Wau14, S. 180]. Abbildung 3.4 (links) zeigt den Balken im Ausgangszustand (graue Strichlinie entspricht der Balkenachse) und im ausgelenkten Zustand.

Zur Bestimmung der Verschiebungen und Verdrehungen dient ein kartesisches Referenzkoordinatensystem am unverformten Balkenquerschnitt (siehe Abbildung 3.4 (rechts)). Das Referenzkoordinatensystem ist so ausgerichtet, dass die  $z$ -Achse durch den Flächenschwerpunkt  $S$  verläuft und  $x, y$ -Achsen den Hauptachsen des Balkenquerschnitts entsprechen. Die Ausgangspositionen des Schubmittelpunktes  $SM$  und des Punktes  $P$  sind in diesem Koordinatensystem durch  $x_{SM}$  bzw.  $x_P$  vollständig definiert. Entsprechend der Abbildung 3.4 (rechts) lässt sich dann die Verschiebung

des Punktes  $P$  in der  $xz$ -Ebene ( $P \rightarrow \tilde{P} \rightarrow \tilde{\tilde{P}}$ ) in Abhängigkeit der Verschiebungen  $u(y, t)$  und  $w(y, t)$  des Flächenschwerpunktes  $S$  ( $S \rightarrow \tilde{S}$ ), die gleich den Verschiebungen des Schubmittelpunktes  $SM$  ( $SM \rightarrow \tilde{SM}$ ) sind, und einer Verdrehung  $\psi(y, t)$  des gesamten Querschnitts um den Schubmittelpunkt angeben zu:

$$u_P = u + (x_P - x_{SM}) \cos(\psi) + x_{SM}, \quad (3.1)$$

$$w_P = w + (x_P - x_{SM}) \sin(\psi). \quad (3.2)$$

Unter der Annahme, dass der Verdrehwinkel klein ist ( $\sin(\psi) \approx \psi$ ,  $\cos(\psi) \approx 1$ ) lassen sich (3.1) und (3.2) wie folgt vereinfachen:

$$u_P = u + x_P, \quad (3.3)$$

$$w_P = w + (x_P - x_{SM})\psi. \quad (3.4)$$

Die darin vorkommenden Verschiebungen  $u(y, t)$ ,  $w(y, t)$  sowie die Verdrehung  $\psi(y, t)$  lassen sich aus Bewegungsgleichungen berechnen. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfolgt in dieser Arbeit nach dem Prinzip von HAMILTON<sup>2</sup> (in Anlehnung an [Wau14, Abschnitt 5.2.4])

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} W_{virt} \, dt = 0 \quad (3.5)$$

mit

$$L = \int_0^l dy \, \mathcal{L} = T_{kin} - U_{pot} \quad (3.6)$$

Darin sind  $L$  die LAGRANGE-Funktion, die aus der Differenz der kinetischen Energie  $T_{kin}$  und potentiellen Energie  $U_{pot}$  des betrachteten Systems gebildet wird,  $\mathcal{L}$  die LAGRANGE-Dichte und  $W_{virt}$  die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte.

Zur Ableitung<sup>3</sup> der Bewegungsgleichungen ist die Betrachtung der im System enthaltenen kinetischen und potentiellen Energie notwendig. Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.1.2 getroffenen Annahmen ergibt sich die kinetische Energie eines Balkens zu:

$$T_{kin} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left( \dot{u}^2 + (\dot{w} - x_{SM} \dot{\psi})^2 \right) dy + \frac{1}{2} \rho I_P \int_0^l \dot{\psi}^2 dy. \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>Prinzip der stationären Wirkung.

<sup>3</sup>An dieser Stelle wird die Notation für Ableitungen wie folgt eingeführt:  $\dot{w}$  für erste Ableitung nach der Zeit,  $w'$  für erste Ableitung nach der Ortskoordinate.

Die potentielle Energie eines Balkens ist die Formänderungsenergie, die der Balken im verformten Zustand besitzt. Für den in Abbildung 3.4 dargestellten Balken mit den Biegesteifigkeiten  $EI_{xx}$ ,  $EI_{zz}$  und der Torsionssteifigkeit  $GI_T$  folgt:

$$U_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_{xx}w''^2 + EI_{zz}u''^2 + GI_T\psi'^2) dy. \quad (3.8)$$

Des Weiteren ist die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte für freie Schwingungen

$$W_{virt} = 0. \quad (3.9)$$

Durch das Einsetzen von (3.7), (3.8) in (3.6) und anschließend in (3.5) mit Berücksichtigung von (3.9) und Lösen des Variationsproblems ergeben sich die LAGRANGE-Gleichungen [Fli09]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q''_i} \right) = 0 \quad (3.10)$$

mit  $q_i$  als  $i$ -te Komponente des generalisierten Koordinatenvektors

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Das Bilden der partiellen Ableitungen von  $\mathcal{L}(\dot{u}, \dot{w}, \dot{\psi}; \psi'; u'', w''; y, t)$  und Einsetzen in (3.10) liefert die gesuchten Bewegungsgleichungen

$$EI_{zz}u'''' + \rho A \ddot{u} = 0, \quad (3.12)$$

$$EI_{xx}w'''' + \rho A (\ddot{w} - x_{SM}\ddot{\psi}) = 0, \quad (3.13)$$

$$-GI_T\psi'' + \rho I_P\ddot{\psi} - \rho A x_{SM} (\ddot{w} - x_{SM}\ddot{\psi}) = 0. \quad (3.14)$$

Damit liegt ein Randwertproblem zehnter Ordnung in  $y$  vor, bestehend aus drei Feldgleichungen, wobei (3.13) und (3.14) gekoppelt sind. Mit diesen Bewegungsgleichungen lässt sich das Schwingungsverhalten des betrachteten Systems beschreiben. Bei einfach symmetrischen Balkenquerschnitten, deren Schubmittelpunkt-Koordinate  $x_{SM} \approx 0$  ist ( $S$  und  $SM$  fallen zusammen) und Berücksichtigung von Balkenschwingungen nur in  $z$ -Richtung (interessierende Schwingungsrichtung) vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen wie folgt:

$$EI_{xx}w'''' + \rho A \ddot{w} = 0, \quad (3.15)$$

$$-GI_T\psi'' + \rho I_P\ddot{\psi} = 0. \quad (3.16)$$

Diese Gleichungen sind entkoppelt, d. h. können unabhängig voneinander gelöst werden.

**Biegeschwingungsverhalten des homogenen Balkens**

Bei der Biegeschwingungsgleichung des homogenen Balkens (3.15) handelt es sich um eine homogene lineare partielle DGL mit mehreren Veränderlichen, auch bekannt als BERNOULLI-Schwingungs-DGL

$$EI_{xx} \frac{\partial^4 w(y,t)}{\partial y^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.17)$$

Zur Lösung von (3.17) wird der Separationsansatz nach BERNOULLI [Wau14, S. 68] in folgender Form angewendet<sup>4</sup>:

$$w(y,t) = W(y)T(t). \quad (3.18)$$

Bei diesem Ansatz wird angenommen, dass sich die Funktion mehrerer Veränderlichen als Produkt von Funktionen, die jeweils nur von einer Variable abhängig sind, darstellen lässt. Leitet man (3.18) viermal nach  $y$  und zweimal nach  $t$  ab und setzt die Ergebnisse in (3.17) ein, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{EI_{xx} W''''(y)}{\rho A W(y)} = \text{const.} = -\omega_B^2. \quad (3.19)$$

Dabei ist die linke Seite ausschließlich von der Zeit  $t$ , die rechte dagegen nur von der Ortskoordinate  $y$  abhängig. Die linke und die rechte Seite dieser Gleichung sind nur dann gleich, wenn diese eine orts- und zeitunabhängige Konstante ergeben. Zweckmäßiger Weise wird diese gleich  $-\omega_B^2$  gesetzt [Fli09, S. 260]. Damit lässt sich (3.19) in zwei gewöhnliche lineare homogene DGL überführen:

zeitliche DGL zweiter Ordnung

$$\ddot{T}(t) + \omega_B^2 T(t) = 0, \quad (3.20)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = B_1 \sin(\omega_B t) + B_2 \cos(\omega_B t), \quad (3.21)$$

wobei die Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  sich aus Anfangsbedingungen bestimmen lassen, und räumliche DGL vierter Ordnung

$$EI_{xx} W''''(y) - \rho A \omega_B^2 W(y) = 0. \quad (3.22)$$

Mit der Wellenzahl

$$k_B = \sqrt[4]{\omega_B^2 \frac{\rho A}{EI_{xx}}} \quad (3.23)$$

---

<sup>4</sup>Der vorgestellte Lösungsweg erfolgt in Anlehnung an [GKL12, Kapitel 9; Wau14, Abschnitt 5.2; Sko+17]



vereinfacht sich (3.22) zu

$$\frac{d^4 W(y)}{dy^4} - k_B^4 W(y) = 0. \quad (3.24)$$

Das Einsetzen des Exponentialansatzes

$$W(y) = Ce^{\lambda y} \quad (3.25)$$

in (3.24) führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - k_B^4 = 0 \quad (3.26)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm k_B, \\ \lambda_{3,4} &= \pm i k_B. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung von (3.24) zu:

$$W(y) = C_1 e^{k_B y} + C_2 e^{-k_B y} + C_3 e^{i k_B y} + C_4 e^{-i k_B y}. \quad (3.28)$$

Mittels der EULER'schen Gleichung kann (3.28) durch Kreis- und Hyperbelfunktionen wie folgt dargestellt werden:

$$W(y) = C_1 \sin(k_B y) + C_2 \cos(k_B y) + C_3 \sinh(k_B y) + C_4 \cosh(k_B y), \quad (3.29)$$

wobei die Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  in (3.28) und (3.29) nicht identisch sind. Diese lassen sich aus den bekannten Randbedingungen bestimmen. Bei der Definition von Randbedingungen sind die in Tabelle 3.4 aufgeführten Zusammenhänge für homogene Balken zu beachten.

**Tabelle 3.4:** Zusammenhänge zwischen Verschiebung, Verdrehung, Biegemoment und Querkraft bei ebener Biegung des homogenen Balkens

Beschreibung	Definition
Verschiebung in $y$ -Richtung	$W(y)$
Verdrehung um $x$ -Achse	$\phi(y) = W'(y)$
Biegemoment um $x$ -Achse	$M_x(y) = -EI_{xx} W''(y)$
Querkraft	$Q(y) = -EI_{xx} W'''(y)$

Demnach sind die Randbedingungen für den beidseitig gelagerten Balken (siehe Abbildung 3.4) wie folgt definiert:

Verschiebung an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null

$$W(y) \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.30)$$

Biegemoment an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null

$$-EI_{xx} \frac{d^2 W(y)}{dy^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.31)$$

Verschiebung an der Stelle  $y = l$  ist gleich Null,

$$W(y) \Big|_{y=l} = 0, \quad (3.32)$$

Biegemoment an der Stelle  $y = l$  ist gleich Null

$$-EI_{xx} \frac{d^2 W(y)}{dy^2} \Big|_{y=l} = 0, \quad (3.33)$$

Das Einsetzen von (3.29) in die Randbedingungen (3.30), (3.31), (3.32) und (3.33) führt auf ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin(k_B l) & \cos(k_B l) & \sinh(k_B l) & \cosh(k_B l) \\ -\sin(k_B l) & -\cos(k_B l) & \sinh(k_B l) & \cosh(k_B l) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

und

$$\mathbf{b} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^\top. \quad (3.36)$$

Für eine nicht triviale Lösung von (3.34) muss die Determinante von  $\mathbf{A}$  verschwinden, d. h.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 0 \\ &= \sin(k_B l) \sinh(k_B l). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Diese charakteristische Gleichung ist transzendent und besitzt deshalb unendlich viele Nullstellen

$$k_{Bj} = j \frac{\pi}{l} \quad (3.38)$$

mit  $j \in \mathbb{N}_+$ . Aus der Beziehung (3.23) können nun die Eigenkreisfrequenzen zu:

$$\omega_{Bj} = k_{Bj}^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{\rho A}} \quad (3.39)$$

bestimmt werden. Wobei  $\omega_{B1}$  als Grundkreisfrequenz bezeichnet wird. Um die dazugehörige Eigenfunktionen zu bestimmen, muss zunächst der Vektor  $\mathbf{b}$  aus (3.34) für die charakteristischen Werte  $k_{Bj}$  identifiziert werden. Da  $k_{Bj}$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  sind, gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_j) &= 0, \\ \text{rang}(\mathbf{A}_j) &< 4. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem (3.34) mehr Unbekannte als die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen besitzt. Das Gleichungssystem hat somit nicht eindeutige, sondern unendlich viele Lösungen. Wobei die Menge aller Vektoren  $\mathbf{b}_j$ , die (3.34) erfüllen, in der linearen Algebra als Kern von  $\mathbf{A}$  bezeichnet wird. Der Kern einer Matrix kann z. B. mit dem GAUSS'schen Eliminationsverfahren bestimmt werden. Für alle  $C_{1j} \in \mathbb{R}$  ergibt sich die Lösungsmenge des betrachteten Gleichungssystems zu:

$$\mathbf{b}_j = [C_{1j} \ 0 \ 0 \ 0]^\top. \quad (3.40)$$

Setzt man nun (3.38) und (3.40) in (3.29) ein, so ergeben sich die Eigenfunktionen zu:

$$W_j(y) = C_{1j} \sin(k_{Bj}y). \quad (3.41)$$

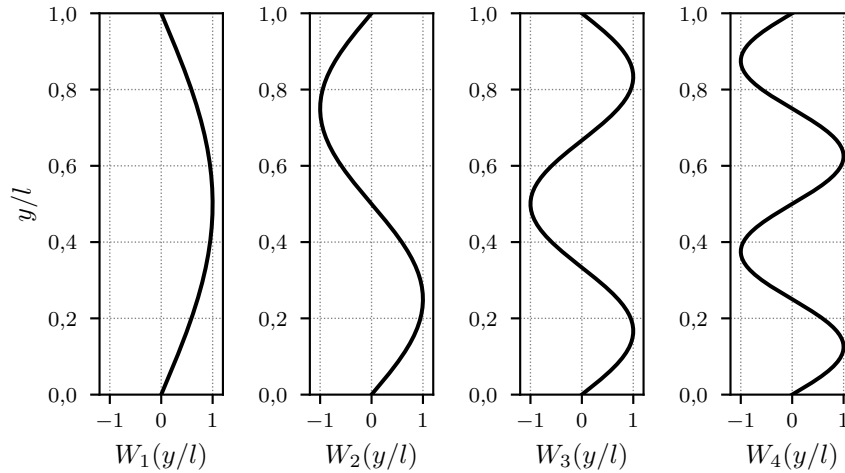
Die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Funktionensystem bezüglich  $W(y)$ . Das bedeutet, dass jede Funktion  $W(y)$  als Überlagerung ihrer Basisfunktionen

$$W(y) = \sum_j^\infty C_{1j} \sin(k_{Bj}y) \quad (3.42)$$

mit passend gewählten Konstanten  $C_{1j}$  dargestellt werden kann [Cra89, S. 43]. Für die bessere Darstellung der Eigenfunktionen werden die Konstanten  $C_{1j}$  gleich 1 gesetzt (siehe Abbildung 3.5). Unter Berücksichtigung von (3.21), (3.39) und (3.42) in (3.18) kann die zeit- und ortsabhängige Verschiebung

$$w(y,t) = \sum_j^\infty \sin(k_{Bj}y) (B_{1j} \sin(\omega_{Bj}t) + B_{2j} \cos(\omega_{Bj}t)) \quad (3.43)$$

aufgeschrieben werden. Wobei die Konstanten  $C_{1j}$  nun in  $B_{1j}$  und  $B_{2j}$  enthalten sind. Diese lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.



**Abbildung 3.5:** Die ersten vier Biege-Eigenfunktionen eines beidseitig gelagerten homogenen Balkens (Ortskoordinaten und Amplituden sind normiert)

### Torsionsschwingungsverhalten des homogenen Balkens

Die Behandlung der Torsionsschwingungsgleichung erfolgt analog zu der Biegeschwingungsgleichung aus dem vorhergehenden Abschnitt. Die homogene lineare partielle DGL der Torsionsschwingung lautet

$$-GI_T \frac{\partial^2 \psi(y,t)}{\partial y^2} + \rho I_P \frac{\partial^2 \psi(y,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.44)$$

Mit dem Separationsansatz

$$\psi(y,t) = \Psi(y)T(t). \quad (3.45)$$

lässt sich (3.44) in

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{GI_T}{\rho I_P} \frac{\Psi''(y)}{\Psi(y)} = \text{const.} = -\omega_T^2 \quad (3.46)$$

überführen. Das Resultat der Separation der Veränderlichen sind zwei gewöhnliche lineare homogene DGL:

zeitliche DGL zweiter Ordnung

$$\ddot{T}(t) + \omega_T^2 T(t) = 0, \quad (3.47)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$T(t) = B_1 \sin(\omega_T t) + B_2 \cos(\omega_T t) \quad (3.48)$$

und räumliche DGL zweiter Ordnung

$$GI_T \Psi''(y) - \rho I_P \omega_T^2 \Psi(y) = 0 \quad (3.49)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Psi(y) = C_1 \cos(k_T y) + C_2 \sin(k_T y) \quad (3.50)$$

mit

$$k_T = \sqrt{\omega_T^2 \frac{\rho I_P}{GI_T}}. \quad (3.51)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  aus (3.50) erfolgt anhand von Randbedingungen unter Beachtung der in Tabelle 3.5 aufgeführten Zusammenhänge für homogene Balken. Demnach sind die Randbedingungen entsprechend Abbildung 3.4 wie folgt definiert:

Verdrehung um die  $y$ -Achse an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null,

$$\Psi(y) \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.52)$$

und Verdrehung um die  $y$ -Achse an der Stelle  $y = l$  ist gleich Null,

$$\Psi(y) \Big|_{y=l} = 0. \quad (3.53)$$

**Tabelle 3.5:** Zusammenhänge zwischen Verdrehung und Torsionsmoment bei Torsion des homogenen Balkens

Beschreibung	Definition
Verdrehung um $y$ -Achse	$\Psi(y)$
Torsionsmoment um $y$ -Achse	$M_y(y) = GI_T \Psi'(y)$

Setzt man die Randbedingungen (3.52) und (3.53) in (3.50) ein, so berechnen sich die Integrationskonstanten zu:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 \sin(k_T l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Für eine nicht triviale Lösung von (3.54) muss  $\sin(k_T l) = 0$  sein. Diese Bedingung ist für unendlich viele Werte

$$k_{Tj} = j \frac{\pi}{l}, \quad j \in \mathbb{N}_+ \quad (3.55)$$

erfüllt. Mit den berechneten Wellenzahlen der freien Torsionsschwingung können nun die Eigenkreisfrequenzen aus (3.23) zu:

$$\omega_{Tj} = k_{Tj} \sqrt{\frac{GI_T}{\rho I_P}} \quad (3.56)$$

bestimmt werden.

Damit ergeben sich die Eigenfunktionen der freien Torsionsschwingung zu:

$$\Psi_j(y) = C_{2j} \sin(k_{Tj}y). \quad (3.57)$$

Die Gleichungen (3.57) und (3.41) sind ähnlich, daher wird an dieser Stelle auf die Darstellung der Eigenfunktionen verzichtet. Deren normierte Darstellungen  $\Psi(y/l)$  für  $C_2 = 1$  können der Abbildung 3.5 entnommen werden. Sind die Eigenfunktionen von  $\Psi(y)$  bekannt, so liefert das Superpositionsprinzip die ortsabhängige Verdrehung als

$$\Psi(y) = \sum_j^{\infty} C_{2j} \sin(k_{Tj}y). \quad (3.58)$$

Schließlich folgt unter Berücksichtigung von (3.48), (3.56) und (3.58) in (3.45) die zeit- und ortsabhängige Verdrehung

$$\psi(y,t) = \sum_j^{\infty} \sin(k_{Tj}y) (B_{1j} \sin(\omega_{Tj}t) + B_{2j} \cos(\omega_{Tj}t)), \quad (3.59)$$

wobei die Konstanten  $B_{1j}$   $B_{2j}$  sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Die gesuchte  $z$ -Komponente der zeit- und ortsabhängigen Verschiebung von  $P$  (siehe Abbildung 3.4) resultiert aus nun bekannten Bewegungsgleichungen der Biege- (3.43) und Torsionsschwingung (3.59) des betrachteten homogenen Balkens zu:

$$w_P(y,t) = w(y,t) + x_P \psi(y,t). \quad (3.60)$$

### 3.2.2 Biege-Torsionsschwingungsverhalten des inhomogenen Systems

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für das inhomogene System nach Abbildung 3.2 vorgestellt. Zuerst erfolgt die Beschreibung des Systemverhaltens bei freien ungedämpften Schwingungen. Dabei wird das System nach einer Anfangsauslenkung bzw. Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen und es findet keine Systemanregung durch äußere Kräfte statt [MPS16, S. 21]. Des Weiteren wird der Systemzustand betrachtet, an dem die beiden beladenen LAM eingefahren und verriegelt sind. Aus diesem Grund und wegen der

besseren Handhabung in mathematischen Formulierungen bietet es sich an, den Hubwagen samt LAM und LE auf eine Ersatzmasse

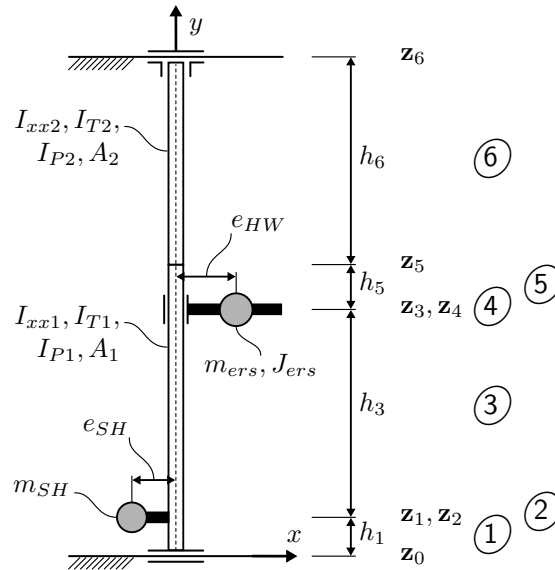
$$m_{ers} = m_{HW} + m_{LAM1} + m_{LAM2} + m_{L1} + m_{L2} \quad (3.61)$$

und ein Ersatzträgheitsmoment bezüglich der  $y$ -Achse

$$J_{ers} = m_{HW}e_{HW}^2 + (m_{LAM1} + m_{L1})e_{L1}^2 + (m_{LAM2} + m_{L2})e_{L2}^2 \quad (3.62)$$

zu reduzieren. Daraus folgt das in Abbildung 3.6 dargestellte mechanische Modell. Dieses System ist auf zwei Arten inhomogen. Einerseits führt der Querschnittsprung (Verbindungsstelle des unteren und oberen Mastabschnittes) zur inhomogenen Steifigkeits- und Massenverteilung. Andererseits verursachen die an die Balkenabschnitte gekoppelten Punktmassen eine zusätzliche Inhomogenität in der Massenverteilung. Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen wird das betrachtete inhomogene System an jeder Unstetigkeitsstelle aufgeteilt. So ergeben sich homogene Balken- und Punktmassenabschnitte ① bis ⑥ (siehe Abbildung 3.6), die durch Übergangsbedingungen miteinander gekoppelt sind. Dabei gelten für jeden der homogenen Balkenabschnitte die im vorangegangenen Abschnitt 3.2.1 bereits hergeleitete allgemeine Lösungen für orts- und zeitabhängige Verschiebungen infolge von Biegung (3.21), (3.29) und Verdrehungen infolge von Torsion (3.48), (3.50). Die Herleitung der speziellen Lösungen, d. h. Bestimmung der in allgemeinen Lösungen enthaltenen Integrationskonstanten, wird nachfolgend erläutert.

Es ist zu beachten, dass die Definitionen der durch die Aufteilung der Struktur erhaltenen Balkenabschnitte von der Höhenposition des Hubwagens abhängen. Befindet sich der Hubwagen z. B. im oberen Mastabschnitt, so ergibt sich eine andere als Abbildung 3.6 dargestellte Aufteilung der Struktur. Die mathematische Behandlung von diesen unterschiedlichen Modellkonfigurationen ist jedoch vergleichbar, weshalb an dieser Stelle die Vorgehensweise zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nur für die Modellkonfiguration nach Abbildung 3.6 vorgestellt wird.



**Abbildung 3.6:** Mechanisches Modell eines Einmast-RBG mit Aufteilung der Struktur in homogene Balken- und Punktmassenabschnitte; Abschnitte sind mit ① bis ⑥ und Abschnittsgrenzen mit  $\mathbf{z}_0$  bis  $\mathbf{z}_6$  gekennzeichnet

### Biegeschwingungsverhalten des inhomogenen Systems

Wie oben bereits erwähnt, gilt für jeden der homogenen Balkenabschnitte die allgemeine Lösung für die ortsabhängige Verschiebung (3.29) mit vier Integrationskonstanten. Zur Bestimmung dieser Integrationskonstanten werden die Rand- und Übergangsbedingungen herangezogen. Weil die Übergangsbedingungen eine Systemkopplung darstellen, können die einzelnen Balkenabschnitte nicht separat betrachtet werden. Bei einem System bestehend aus vier Balkenabschnitten (siehe Abbildung 3.6) ergibt sich somit ein Gleichungssystem zu Bestimmung der Integrationskonstanten mit 16 Gleichungen und 16 Unbekannten. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann sich unter Umständen sehr rechenintensiv und unübersichtlich gestalten, weshalb hier alternative Verfahren in Betracht gezogen werden.

Eine strukturierte, kompakte und recheneffiziente Methode zur Behandlung von zusammengesetzten Balkenstrukturen stellt das *Verfahren der Übertragungsmatrizen* dar [GKL12, S. 417]. Mit Einführung des Zustandsvektors

$$\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} W \\ \phi \\ M \\ Q \end{bmatrix}_n, \quad (3.63)$$

der die Amplituden von Verschiebung, Verdrehung, Moment und Querkraft an der  $n$ -ten Abschnittsgrenze enthält, lassen sich die Zustandsgrößen am Ende eines Abschnittes  $\mathbf{z}_{n+1}$  durch die Zustandsgrößen am Anfang eines Abschnittes  $\mathbf{z}_n$  mit Hilfe



der Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}(\omega_B)$  wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{T}(\omega_B)\mathbf{z}_n. \quad (3.64)$$

Dabei werden je nach Abschnittstyp (Balkenabschnitt bzw. Punktmassenabschnitt) entsprechende Übertragungsmatrizen in (3.64) eingesetzt, deren Herleitung im Folgenden gezeigt wird.

### Übertragungsmatrix für homogene Balkenabschnitte

Zur Herleitung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}^B$  für homogene Balkenabschnitte werden die allgemeine Lösung der ortsabhängigen Verschiebung (3.29) sowie die Zusammenhänge aus Tabelle 3.4 benötigt. Deren Darstellung

$$\begin{aligned} W(y) &= C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4, \\ \phi(y) &= k_B(C_1 R_4 + C_2 R_1 + C_3 R_2 + C_4 R_3), \\ M(y) &= k_B^2 EI_{xx}(-C_1 R_3 - C_2 R_4 - C_3 R_1 - C_4 R_2), \\ Q(y) &= k_B^3 EI_{xx}(-C_1 R_2 - C_2 R_3 - C_3 R_4 - C_4 R_1) \end{aligned} \quad (3.65)$$

mittels sogenannten RAYLEIGH-Funktionen  $R_i(y)$  [Wau14, S. 107]

$$\begin{aligned} R_1(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_B y) + \cos(k_B y)), \\ R_2(y) &= \frac{1}{2} (\sinh(k_B y) + \sin(k_B y)), \\ R_3(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_B y) - \cos(k_B y)), \\ R_4(y) &= \frac{1}{2} (\sinh(k_B y) - \sin(k_B y)) \end{aligned} \quad (3.66)$$

bietet im Weiteren mathematische Vorteile. Mit (3.63) folgt aus der Matrixdarstellung von (3.65) der ortsabhängige Zustandsvektor

$$\mathbf{z}(y) = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ k_B R_4 & k_B R_1 & k_B R_2 & k_B R_3 \\ -k_B^2 EI_{xx} R_3 & -k_B^2 EI_{xx} R_4 & -k_B^2 EI_{xx} R_1 & -k_B^2 EI_{xx} R_2 \\ -k_B^3 EI_{xx} R_2 & -k_B^3 EI_{xx} R_3 & -k_B^3 EI_{xx} R_4 & -k_B^3 EI_{xx} R_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}(y)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Für einen Balkenabschnitt mit der Anfangskoordinate  $y = 0$  und der Endkoordinate  $y = h$  erhält man aus (3.67) die entsprechenden Zustandsvektoren  $\mathbf{z}_0(0)$  und  $\mathbf{z}_1(h)$ .

Das Einsetzen dieser Zustandsvektoren in (3.64) ( $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_0(0)$ ,  $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_1(h)$ ) und Umstellen nach  $\mathbf{T}(\omega_B) = \mathbf{T}^B(\omega_B)$  liefert die gesuchte Übertragungsmatrix

$$\mathbf{T}^B(\omega_B) = \mathbf{Z}(h) \cdot \mathbf{Z}(0)^{-1},$$

$$\mathbf{T}^B(\omega_B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_1 & \frac{R_2}{k_B} & -\frac{R_3}{k_B^2 EI_{xx}} & -\frac{R_4}{k_B^3 EI_{xx}} \\ k_B R_4 & R_1 & -\frac{R_2}{k_B EI_{xx}} & -\frac{R_3}{k_B^2 EI_{xx}} \\ -k_B^2 EI_{xx} R_3 & -k_B EI_{xx} R_4 & R_1 & \frac{R_2}{k_B} \\ -k_B^2 EI_{xx} R_2 & -k_B^2 EI_{xx} R_3 & k_B R_4 & R_1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

#### Übertragungsmatrix für Punktmassenabschnitte

Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}^m$  stellt einen Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen am Anfang und am Ende eines Punktmassenabschnittes her. Zur Herleitung von  $\mathbf{T}^m$  wird eine am homogenen Balkenabschnitt angebrachte Punktmasse  $m$  betrachtet. Im dynamischen System führt die Trägheitskraft dieser Masse zu einer Unstetigkeit (Sprung) im Querkraftverlauf. Aus der Kräftebilanz an der Sprungstelle und unter Berücksichtigung des zweiten NEWTON'schen Gesetzes folgt:

$$m\ddot{w}(y,t) = \tilde{Q}_{n+1}(y,t) - \tilde{Q}_n(y,t) \quad (3.69)$$

mit orts- und zeitabhängigen Querkraften unmittelbar vor  $\tilde{Q}_n$  und nach dem Sprung  $\tilde{Q}_{n+1}$ . Mittels Separationsansatz (3.18) lassen sich  $w(y,t)$  und  $\tilde{Q}(y,t)$  wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \ddot{w}(y,t) &= W(y)\ddot{T}(t) \\ &= -\omega_B^2 W(y)T(t) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\tilde{Q}(y,t) = Q(y)T(t) \quad (3.71)$$

Das Einsetzen von (3.70) und (3.71) in (3.69) liefert den ortsabhängigen Zusammenhang zwischen  $Q_{n+1}$  und  $Q_n$

$$Q_{n+1} = Q_n - \omega_B^2 m W_n. \quad (3.72)$$

Weil weitere Zustandsgrößen am betrachteten Punktmassenabschnitt stetig sind<sup>5</sup>, d. h.  $W_{n+1} = W_n$ ,  $\phi_{n+1} = \phi_n$ ,  $M_{n+1} = M_n$ , lässt sich der Zusammenhang zwischen

---

<sup>5</sup>Bei kleinen Verdrehungen ( $\phi \approx 0$ ) ist das Drehmoment der Punktmasse  $m$  bezüglich der  $x$ -Achse vernachlässigbar ( $J\ddot{\phi} \approx 0$ ). Damit nimmt das Moment im Punktmassenabschnitt einen stetigen Verlauf an.

den Zustandsvektoren  $\mathbf{z}_{n+1}$  und  $\mathbf{z}_n$  unter Nutzung von (3.72) wie folgt herstellen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W_{n+1} \\ \phi_{n+1} \\ M_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m\omega_B^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^m(\omega_B)} \underbrace{\begin{bmatrix} W_n \\ \phi_n \\ M_n \\ Q_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_n} \quad (3.73)$$

Damit lässt sich die Übertragungsmatrix für Punktmassenabschnitte direkt aus (3.73) ableiten zu:

$$\mathbf{T}^m(\omega_B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m\omega_B^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

### Eigenkreisfrequenzen

Die Rand- und Übergangsbedingungen einer zusammengesetzten Struktur müssen bei jeder Eigenkreisfrequenz erfüllt sein. Demzufolge wird zur Bestimmung von Eigenkreisfrequenzen ein Gleichungssystem benötigt, das all diese Bedingungen enthält. Die Aufstellung und Lösung eines solchen Gleichungssystems wird nachfolgend erläutert. Mittels (3.64) und den aus (3.68) und (3.74) erhaltenen Übertragungsmatrizen können die Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen für Strukturabschnitte entsprechend der Abbildung 3.6 angegeben werden

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{T}_1^B(\omega_B)\mathbf{z}_0, \quad (3.75)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{T}_2^m(\omega_B)\mathbf{z}_1, \quad (3.76)$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{T}_3^B(\omega_B)\mathbf{z}_2, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{T}_4^m(\omega_B)\mathbf{z}_3, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{T}_5^B(\omega_B)\mathbf{z}_4, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{z}_6 = \mathbf{T}_6^B(\omega_B)\mathbf{z}_5. \quad (3.80)$$

Dabei sind Abschnittsparameter zur Berechnung einzelner Übertragungsmatrizen gemäß Tabelle 3.6 zu berücksichtigen. Des Weiteren ist zu beachten, dass an den Grenzen zweier benachbarter Abschnitte die Zustandsgrößen gleich sind, damit Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen der Balkenstruktur erhalten bleiben. Diese Zustandsvektoren lassen sich durch das sukzessive Einsetzen von (3.75) bis (3.79) in (3.80) eliminieren. Als Ergebnis erhält man den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen an den Rändern der Gesamtstruktur

$$\mathbf{z}_6 = \underbrace{\mathbf{T}_6^B \mathbf{T}_5^B \mathbf{T}_4^m \mathbf{T}_3^B \mathbf{T}_2^m \mathbf{T}_1^B}_{\mathbf{T}_{ges}(\omega_B)} \mathbf{z}_0. \quad (3.81)$$

**Tabelle 3.6:** Übersicht der Strukturabschnitte zur Beschreibung von Biegeschwingungsverhalten des inhomogenen Systems

Abschnitt Nr.	Abschnittstyp	Abschnittsparameter	Zusammenhang Zustandsgrößen
①	Balkenabschnitt	$h_1, A_1, I_{xx1}, \rho, E$	(3.75)
②	Punktmassenabschnitt	$m_{SH}$	(3.76)
③	Balkenabschnitt	$h_3, A_1, I_{xx1}, \rho, E$	(3.77)
④	Punktmassenabschnitt	$m_{ers}$	(3.78)
⑤	Balkenabschnitt	$h_5, A_1, I_{xx1}, \rho, E$	(3.79)
⑥	Balkenabschnitt	$h_6, A_2, I_{xx2}, \rho, E$	(3.80)

Nach dem Einsetzen der Randbedingungen entsprechend der Abbildung 3.6 für die obere und untere Lagerung in (3.81), ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_6} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ges}(\omega_B)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \phi \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_0}. \quad (3.82)$$

Da die Randbedingungen zu jeder Zeit bzw. bei jeder Eigenkreisfrequenz  $\omega_B$  erfüllt sein müssen, können die Spalten der Gesamtübertragungsmatrix entsprechend den Null-Zustandsgrößen in  $\mathbf{z}_0$  gestrichen werden. Des Weiteren sind zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen nur diejenigen Gleichungen von Interesse, die die Null-Zustandsgrößen in  $\mathbf{z}_6$  erfüllen. Diese Vereinfachungen von (3.82) führen zum homogenen linearen Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_{12} & t_{14} \\ t_{32} & t_{34} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \phi \\ Q \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Für eine nicht triviale Lösung muss die Determinante der vereinfachten Gesamtübertragungsmatrix  $\det(\mathbf{A})$  verschwinden, d. h.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 0 \\ &= t_{12}(\omega_B)t_{34}(\omega_B) - t_{14}(\omega_B)t_{32}(\omega_B). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die Terme  $t_{12}, t_{14}, t_{32}$  und  $t_{34}$  enthalten geometrische Informationen und physikalische Eigenschaften aller Strukturabschnitte. Bei Systemen mit mehr als zwei Strukturabschnitten werden diese Terme mathematisch kompliziert, weshalb an dieser Stelle

auf deren Darstellung aus Übersichtlichkeitsgründen verzichtet wird. Ebenso kompliziert ist dementsprechend die charakteristische, transzendente, nichtlineare Gleichung (3.84) zur Bestimmung von Eigenkreisfrequenzen. Im Allgemeinen ist es nicht möglich hierfür eine exakte Lösung in Form von geschlossenen analytischen Ausdrücken anzugeben. Jedoch kann eine gewünschte Lösungsmenge mittels numerischen Verfahren, wie z. B. das NEWTON-RAPHSON-Verfahren, approximiert werden [Bär17, S. 123].

### Eigenfunktionen

Sind die Eigenkreisfrequenzen der zusammengesetzten Struktur bekannt, so folgen die dazugehörigen Eigenfunktionen aus der Berechnung der abschnitts- und eigenkreisfrequenzspezifischen Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  der allgemeinen Lösung der ortsabhängigen Verschiebung (3.65). Für die berechneten Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Bj}$  mit  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n_B\}$  ist die Matrix  $\mathbf{A}_j$  singular, d. h. dass die Zeilen von  $\mathbf{A}_j$  linear abhängig sind. Damit kann die zu der  $j$ -ten Eigenkreisfrequenz zugehörige Querkraft  $Q_{0j}$  aus (3.83) als

$$Q_{0j} = -\frac{t_{12j}}{t_{14j}}\phi_{0j} \quad (3.85)$$

und daraus der allgemeine Zustandsvektor  $\mathbf{z}_{0j}$  als

$$\mathbf{z}_{0j} = \phi_{0j} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{t_{12j}}{t_{14j}} \end{bmatrix}^\top \quad (3.86)$$

angegeben werden. Das Substituieren von (3.86) in der Matrixdarstellung des ortsabhängigen Zustandsvektors (3.67) führt auf ein lineares Gleichungssystem<sup>6</sup>

$$\mathbf{z}_{0j} = \mathbf{Z}_j^{(1)}(0) [C_{1j} \ C_{2j} \ C_{3j} \ C_{2j}]^{(1)\top}, \quad (3.87)$$

dessen Lösung die gesuchten Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} C_{1j}^{(1)} &= C_{3j}^{(1)} = 0, \\ C_{2j}^{(1)} &= \frac{\phi_{0j}}{k_{Bj}^{(1)}}, \\ C_{4j}^{(1)} &= -\frac{t_{12j}\phi_{0j}}{t_{14j}EI_{xx1}k_{Bj}^{(1)3}} \end{aligned} \quad (3.88)$$

des Balkenabschnitts ① liefert. Die Integrationskonstanten für die folgenden Balkenabschnitte ③, ⑤ und ⑥ lassen sich mit Hilfe der Zusammenhänge (3.75) bis

<sup>6</sup>An dieser Stelle wird die Notation  $\textcircled{i}$  für die dem  $i$ -ten Strukturabschnitt entsprechende Zustandsgrößen bzw. Konstanten eingeführt.

(3.80), (3.67) und (3.86) angeben. So ergeben sich die Integrationskonstanten für den Abschnitt  $\textcircled{3}$  aus dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{z}_{2j} = \mathbf{z}^{\textcircled{3}}(0) \quad (3.89)$$

mit

$$\mathbf{z}_{2j} = \mathbf{T}_{2j}^m \mathbf{T}_{1j}^B \mathbf{z}_{0j}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{z}^{\textcircled{3}}(0) = \mathbf{z}_j^{\textcircled{3}}(0) [C_{1j} \ C_{2j} \ C_{3j} \ C_{2j}]^{\textcircled{3}\top}. \quad (3.91)$$

zu

$$[C_{1j} \ C_{2j} \ C_{3j} \ C_{2j}]^{\textcircled{3}\top} = \left( \mathbf{z}_j^{\textcircled{3}}(0) \right)^{-1} \mathbf{T}_{2j}^m \mathbf{T}_{1j}^B \mathbf{z}_{0j}. \quad (3.92)$$

Die verallgemeinerte Gleichung zur Bestimmung der Integrationskonstanten des  $i$ -ten Balkenabschnitts bei  $j$ -ter Eigenkreisfrequenz lautet

$$\begin{bmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \\ C_{3j} \\ C_{2j} \end{bmatrix}^{\textcircled{i}} = \begin{cases} \left( \mathbf{z}_j^{\textcircled{i}}(0) \right)^{-1} \mathbf{z}_{0j}, & \text{für } i = 1 \\ \left( \mathbf{z}_j^{\textcircled{i}}(0) \right)^{-1} \mathbf{T}_{(n-1)j} \mathbf{T}_{(n-2)j} \cdots \mathbf{T}_{1j} \mathbf{z}_{0j}, & \text{für } i > 1 \end{cases}. \quad (3.93)$$

Für die  $j$ -te Eigenfunktion des  $i$ -ten Balkenabschnitts folgt somit

$$\begin{aligned} W_j(y)^{\textcircled{i}} &= C_{1j}^{\textcircled{i}} R_{1j}^{\textcircled{i}} + C_{2j}^{\textcircled{i}} R_{2j}^{\textcircled{i}} + C_{3j}^{\textcircled{i}} R_{3j}^{\textcircled{i}} + C_{4j}^{\textcircled{i}} R_{4j}^{\textcircled{i}} \\ &= \phi_{0j} \left( \tilde{C}_{1j}^{\textcircled{i}} R_{1j}^{\textcircled{i}} + \tilde{C}_{2j}^{\textcircled{i}} R_{2j}^{\textcircled{i}} + \tilde{C}_{3j}^{\textcircled{i}} R_{3j}^{\textcircled{i}} + \tilde{C}_{4j}^{\textcircled{i}} R_{4j}^{\textcircled{i}} \right) \\ &= \phi_{0j} \tilde{W}_j(y)^{\textcircled{i}}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Es handelt es sich hierbei um eine offene Formulierung, da die Integrationskonstanten  $C_{1j}^{\textcircled{i}}$  bis  $C_{4j}^{\textcircled{i}}$  noch von der freien Variable  $\phi_{0j}$  abhängig sind (siehe (3.86) und (3.93)). Des Weiteren ist die Anzahl der Eigenfunktionen durch die numerisch berechnete, endliche Anzahl der Eigenkreisfrequenzen begrenzt. Damit ist das Funktionensystem bezüglich  $W(y)^{\textcircled{i}}$  unvollständig. Die ortsabhängige Verschiebung des  $i$ -ten Balkenabschnitts kann jedoch durch die Superposition der ersten  $n_B$  Eigenfunktionen approximiert werden als

$$W(y)^{\textcircled{i}} \approx \sum_j^{n_B} \phi_{0j} \tilde{W}_j(y)^{\textcircled{i}}. \quad (3.95)$$

Substituiert man (3.95) und die allgemeine Lösung der zeitlichen DGL (3.21) in dem Separationsansatz (3.18), so erhält man die orts- und zeitabhängige Verschiebung des  $i$ -ten Balkenabschnitts

$$w(y,t)^{\textcircled{i}} \approx \sum_j^{n_B} W_j(y)^{\textcircled{i}} (B_{1j} \sin(\omega_{Bj}t) + B_{2j} \cos(\omega_{Bj}t)), \quad (3.96)$$

wobei die freie Variable  $\phi_{0j}$  in den Konstanten  $B_{1j}$  und  $B_{2j}$ , die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen, enthalten ist.

### Torsionsschwingungsverhalten des inhomogenen Systems

Zur kompakten, strukturierten und vor allem recheneffizienten Beschreibung des Torsionsschwingungsverhaltens zusammengesetzter Strukturen bietet sich auch hier das *Verfahren der Übertragungsmatrizen* an. Hierfür ist die Einführung des Zustandsvektors

$$\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} \Psi \\ M_y \end{bmatrix}_n, \quad (3.97)$$

der die Amplituden der Verdrehung  $\Psi$  und des Torsionsmoments  $M_y$  an der  $n$ -Abschnittsgrenze enthält, notwendig. Der Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen am Anfang  $\mathbf{z}_n$  und am Ende  $\mathbf{z}_{n+1}$  eines Abschnitts stellt die Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}(\omega_T)$  wie folgt her:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{T}(\omega_T)\mathbf{z}_n, \quad (3.98)$$

wobei für  $\mathbf{T}(\omega_T)$  die dem Abschnittstyp entsprechende Übertragungsmatrix einzusetzen ist.

Bei der Beschreibung des Torsionsschwingungsverhaltens des in Abbildung 3.6 dargestellten mechanischen Modells sind zwei Abschnittstypen zu beachten: homogene Balkenabschnitte und Abschnitte mit konzentrierten rotatorischen Trägheiten. Nachfolgend wird die Herleitung der abschnittsspezifischen Übertragungsmatrizen erläutert.

#### *Übertragungsmatrix für homogene Balkenabschnitte*

Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}^T(\omega_T)$  zur Beschreibung des Torsionsschwingungsverhaltens homogener Balkenabschnitte lässt sich auf die gleiche Art und Weise wie die Übertragungsmatrix  $\mathbf{T}^B(\omega_B)$  aus dem vorhergehenden Abschnitt herleiten. Die Ausgangsbasis bildet hierfür die Formulierung des allgemeinen Zustandsvektors  $\mathbf{z}(y)$ . Mit der allgemeinen Lösung der ortsabhängigen Verdrehung (3.50) sowie dem Zusammenhang zwischen Verdrehung und Torsionsmoment aus Tabelle 3.5 lässt sich der allgemeine Zustandsvektor angeben zu:

$$\mathbf{z}(y) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(k_T y) & \frac{1}{GI_T k_T} \sin(k_T y) \\ -k_T GI_T \sin(k_T y) & \cos(k_T y) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}(y)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Bildet man nun die Zustandsvektoren am Anfang  $\mathbf{z}(0)$  und am Ende  $\mathbf{z}(h)$  eines homogenen Balkenabschnitts der Länge  $h$  und setzt diese in die Beziehung (3.98) ein, so erhält man die gesuchte Übertragungsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T(\omega_T) &= \mathbf{Z}(h)\mathbf{Z}(0)^{-1} \\ &= \mathbf{Z}(h)\mathbf{I}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^T(\omega_T) = \begin{bmatrix} \cos(k_T h) & \frac{1}{GI_T k_T} \sin(k_T h) \\ -k_T GI_T \sin(k_T h) & \cos(k_T h) \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

wobei mit  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix bezeichnet wird.

### *Übertragungsmatrix für Abschnitte mit konzentrierten rotatorischen Trägheiten*

Zur Herleitung der Übertragungsmatrix für Abschnitte mit konzentrierten rotatorischen Trägheiten liegt die Momentenbilanzgleichung

$$J\ddot{\psi}(y,t) = \tilde{M}_{y_{n+1}}(y,t) - \tilde{M}_{y_n}(y,t) \quad (3.101)$$

am betrachteten Strukturabschnitt zugrunde. Dabei stellt  $J$  die konzentrierte rotatorische Trägheit bezüglich der  $y$ -Achse dar. Das Anwenden des Separationsansatzes (3.46) auf (3.101), ergibt die Zusammenhänge für ortsabhängige Zustandsgrößen in folgender Form:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1} &= \Psi_n, \\ M_{y_{n+1}} &= M_{y_n} - \omega_T^2 J \Psi_n \end{aligned}$$

und in Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_{n+1} \\ M_{y_{n+1}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J\omega_T^2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^J(\omega_T)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_n \\ M_{y_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_n}. \quad (3.102)$$

Die gesuchte Übertragungsmatrix lässt sich dann direkt aus (3.102) ablesen zu

$$\mathbf{T}^J(\omega_T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J\omega_T^2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

### *Eigenkreisfrequenzen*

Ähnlich der Berechnung von Biegeeigenkreisfrequenzen  $\omega_B$  ist zur Bestimmung der Torsionseigenkreisfrequenzen  $\omega_T$  die Aufstellung eines Gleichungssystems notwendig. In diesem sind alle Rand- und Übergangsbedingungen an Abschnittsgrenzen der zusammengesetzten Struktur enthalten.

Für die in Abbildung 3.6 dargestellten Strukturabschnitte können die Zusammenhänge zwischen Zustandsgrößen unter Nutzung von (3.98), (3.100) und (3.103) wie folgt



definiert werden:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{T}_1^T(\omega_T)\mathbf{z}_0, \quad (3.104)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{T}_2^J(\omega_T)\mathbf{z}_1, \quad (3.105)$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{T}_3^T(\omega_T)\mathbf{z}_2, \quad (3.106)$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{T}_4^J(\omega_T)\mathbf{z}_3, \quad (3.107)$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{T}_5^T(\omega_T)\mathbf{z}_4, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{z}_6 = \mathbf{T}_6^T(\omega_T)\mathbf{z}_5, \quad (3.109)$$

wobei für die Berechnung der Übertragungsmatrizen  $\mathbf{T}_1$  bis  $\mathbf{T}_6$  Abschnittsparameter entsprechend Tabelle 3.7 anzusetzen sind.

**Tabelle 3.7:** Übersicht der Strukturabschnitte zur Beschreibung des Torsionschwingungsverhaltens des inhomogenen Systems

Abschnitts-Nr.	Abschnittstyp	Abschnittsparameter	Zusammenhang Zustandsgrößen
①	Balkenabschnitt	$h_1, A_1, I_{T1}, I_{P1}, \rho, G$	(3.104)
②	Abschnitt mit konz. rot. Trägheit	$J_{SH}$	(3.105)
③	Balkenabschnitt	$h_3, A_1, I_{T1}, I_{P1}, \rho, G$	(3.106)
④	Abschnitt mit konz. rot. Trägheit	$J_{ers}$	(3.107)
⑤	Balkenabschnitt	$h_5, A_1, I_{T1}, I_{P1}, \rho, G$	(3.108)
⑥	Balkenabschnitt	$h_6, A_2, I_{T2}, I_{P2}, \rho, G$	(3.109)

Durch das sukzessive Einsetzen von (3.104) bis (3.108) in (3.109) lassen sich die Zustandsgrößen an Abschnittsübergängen eliminieren. Es verbleiben die Zustandsgrößen  $\mathbf{z}_0$  und  $\mathbf{z}_6$  an Rändern der Gesamtstruktur

$$\mathbf{z}_6 = \underbrace{\mathbf{T}_6^T \mathbf{T}_5^T \mathbf{T}_4^J \mathbf{T}_3^T \mathbf{T}_2^J \mathbf{T}_1^T}_{\mathbf{T}_{ges}(\omega_T)} \mathbf{z}_0, \quad (3.110)$$

dessen Zusammenhang die Gesamtübertragungsmatrix  $\mathbf{T}_{ges}$  herstellt. Nach dem Einsetzen der Randbedingungen entsprechend der Abbildung 3.6 für die obere und untere Lagerung in (3.110), ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_6} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ges}(\omega_T)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_0}, \quad (3.111)$$

aus dem die charakteristische Gleichung zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen direkt abgelesen werden kann:

$$t_{12}(\omega_T) = 0. \quad (3.112)$$

Die transzendente nichtlineare Gleichung (3.112) stellt die Zusammenhänge von geometrischen und physikalischen Eigenschaften aller Strukturabschnitte dar. Bei Systemen mit mehr als zwei Balkenabschnitten sind diese Zusammenhänge im Allgemeinen mathematisch kompliziert, weshalb hierfür keine geschlossene Lösung angegeben werden kann. Die gewünschte Lösungsmenge kann jedoch mittels numerischen Verfahren, wie z. B. das NEWTON-RAPHSON-Verfahren, approximiert werden [Bär17, S. 123].

### *Eigenfunktionen*

Die Berechnung der zu den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{Tj}$  (mit  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n_T\}$ ) gehörenden Eigenfunktionen besteht in der Bestimmung abschnittsspezifischer Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  aus der allgemeinen Lösung der ortsabhängigen Verdrehung (3.50). Ist einer der Zustandsvektoren am Rand des betrachteten Balkenabschnitts bekannt, so können die entsprechenden Integrationskonstanten aus (3.99) bestimmt werden.

Der zur  $j$ -Eigenkreisfrequenz gehörende Zustandsvektor  $\mathbf{z}_{0j}$  ergibt sich nach der Umstellung des Gleichungssystems (3.111) zu:

$$\mathbf{z}_{0j} = M_{6j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_{22j} \end{bmatrix}^\top. \quad (3.113)$$

Das Einsetzen von  $\mathbf{z}_{0j}$  in (3.99) führt zum linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{z}_{0j} = \mathbf{Z}_j^{(1)}(0) [C_{1j} \quad C_{2j}]^{(1)\top}, \quad (3.114)$$

dessen Lösung die gesuchten Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} C_{1j}^{(1)} &= 0, \\ C_{2j}^{(1)} &= \frac{M_{6j}}{t_{22j}}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

liefert.

Analog zur Biegeschwingungsbetrachtung kann auch hier die verallgemeinerte Gleichung zur Bestimmung der Integrationskonstanten des  $i$ -ten Balkenabschnitts bei  $j$ -ter Eigenkreisfrequenz angegeben werden

$$\begin{bmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{cases} \left( \mathbf{Z}_j^{(i)}(0) \right)^{-1} \mathbf{z}_{0j}, & \text{für } i = 1 \\ \left( \mathbf{Z}_j^{(i)}(0) \right)^{-1} \mathbf{T}_{(n-1)j} \mathbf{T}_{(n-2)j} \cdots \mathbf{T}_{1j} \mathbf{z}_{0j}, & \text{für } i > 1, \end{cases} \quad (3.116)$$

wobei die Integrationskonstanten von der freien Variable  $M_{6j}$  abhängig sind (siehe (3.113) und (3.116)). Damit lässt sich die ortsabhängige Verdrehung des  $i$ -ten Balkenabschnitts durch Superposition der ersten  $n_T$  Eigenfunktionen approximieren zu:

$$\Psi(y)^{\textcircled{i}} \approx \sum_j^{n_T} M_{6j} \tilde{\Psi}_j(y)^{\textcircled{i}}. \quad (3.117)$$

Die orts- und zeitabhängige Verdrehung des  $i$ -ten Balkenschnitts ergibt sich schließlich durch Substitution von (3.117) und der allgemeinen Lösung der zeitabhängigen DGL (3.48) in dem Separationsansatz (3.45) zu:

$$\psi(y,t)^{\textcircled{i}} \approx \sum_j^{n_T} \Psi_j(y)^{\textcircled{i}} (B_{1j} \sin(\omega_{Tj}t) + B_{2j} \cos(\omega_{Tj}t)), \quad (3.118)$$

wobei die freie Variable  $M_{6j}$  in die Integrationskonstanten  $B_{1j}$  und  $B_{2j}$  übergeht, dessen Bestimmung anhand von Anfangsbedingungen erfolgt.

### Orts- und zeitabhängige Verschiebung des Gesamtsystems

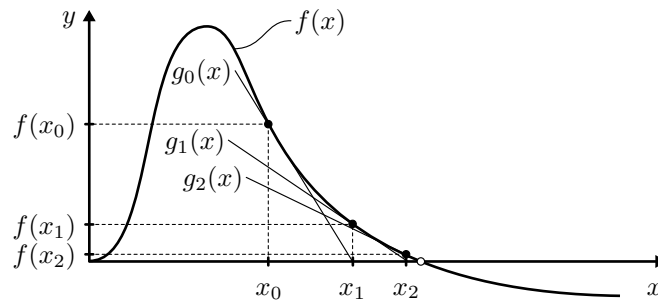
Die orts- und zeitabhängige Verschiebung an einem beliebigen Punkt des in Abbildung 3.6 dargestellten mechanischen Modells resultiert aus der Überlagerung seiner Biege- und Torsionsverschiebungsanteile. Die praxisrelevante Verschiebung beim Ein-/Auslagern ist die Verschiebung des Hubwagens in  $z$ -Richtung. Als Beispiel wird hier der Punkt mit Koordinaten der Ersatzmasse  $m_{ers}$  betrachtet. Seine orts- und zeitabhängige Verschiebung in  $z$ -Richtung lautet:

$$w_{ers}(h_3,t)^{\textcircled{3}} = w(h_3,t)^{\textcircled{3}} + e_{HW}\psi(h_3,t)^{\textcircled{3}}. \quad (3.119)$$

## 3.3 Modalanalyse

### 3.3.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, ist die Eigenfrequenzberechnung auf die Nullstellensuche der charakteristischen Biege- (3.84) und Torsionsschwingungsgleichungen (3.112) zurückzuführen. Hierfür kommt das weitverbreitete NEWTON-RAPHSON-Verfahren zum Einsatz. Abbildung 3.7 stellt den prinzipiellen Ablauf dieses Verfahrens am Beispiel einer Funktion  $f(x)$  dar.



**Abbildung 3.7:** Nullstellensuche mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren an einer Funktion  $f(x)$  durch iterative Näherung anhand Tangentenkonstruktion  $g_i(x)$  mit dem Iterationsstartpunkt  $(x_i, f(x_i))$  (in Anlehnung an [Bär17, S. 123])

In jeder Iteration  $i$  erhält man einen Näherungswert  $x_{i+1}$  der gesuchten Nullstelle durch Schnittpunkt der Tangente

$$g_i(x) = f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx}(x - x_i) \quad (3.120)$$

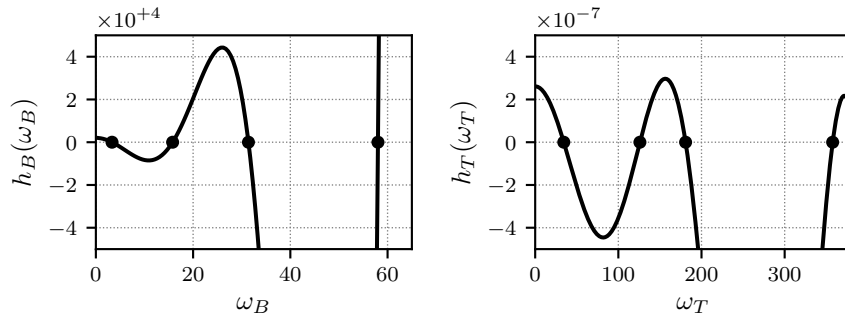
im Iterationsstartpunkt  $(x_i, f(x_i))$  und der  $x$ -Achse. Der so erhaltene Näherungswert

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \left( \frac{df(x_i)}{dx} \right)^{-1} \quad (3.121)$$

gilt gleichzeitig als Startpunkt  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  für die nächste Iteration  $i + 1$ . Die Stabilität des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, d. h. die Frage, ob das Iterationsverfahren konvergiert oder divergiert, hängt im Wesentlichen von der Güte des gewählten Startwerts ab. Liegt der Iterationsstartpunkt in der Nähe eines Extrempunktes von  $f(x)$ , so führt dies meistens zu Divergenz des Verfahrens. Daher ist es sinnvoll einen Iterationsstartpunkt in unmittelbarer Nähe der gesuchten Nullstelle zu wählen. Eine Abhilfe hierfür schafft die Abtastung von  $f(x)$  nach einem Vorzeichenwechsel. Hat man ein Intervall mit Vorzeichenwechsel gefunden, so kann eine der Intervallgrenzen als Iterationsstartpunkt gewählt werden. Um keine der gesuchten Nullstellen auszuschließen, soll die Abtastrate jedoch hinreichend klein gewählt werden.

Für die Schwingungskompensation des hier betrachteten Referenz-RBG wurden die Eigenfrequenzen zunächst im Bereich von 0 bis 100 Hz (entspricht dem Eigenkreisfrequenzbereich von 0 bis 628 rad/s) untersucht. Die Berücksichtigung höherer Eigenfrequenzen bei der Schwingungskompensation solcher Anlagen wird aus funktionaler, energetischer und finanzieller Sicht nicht als sinnvoll erachtet. Zum sicheren Auffinden aller Nullstellen der charakteristischen Gleichungen (3.84) und (3.112) im gewählten Eigenkreisfrequenzbereich wurde die Abtastung nach einem Vorzeichenwechsel mit der Schrittweite von 0,5 rad/s durchgeführt. Abbildung 3.8 zeigt die charakteristischen Gleichungen als Funktionen  $h_B(\omega_B)$  und  $h_T(\omega_T)$  sowie durch die

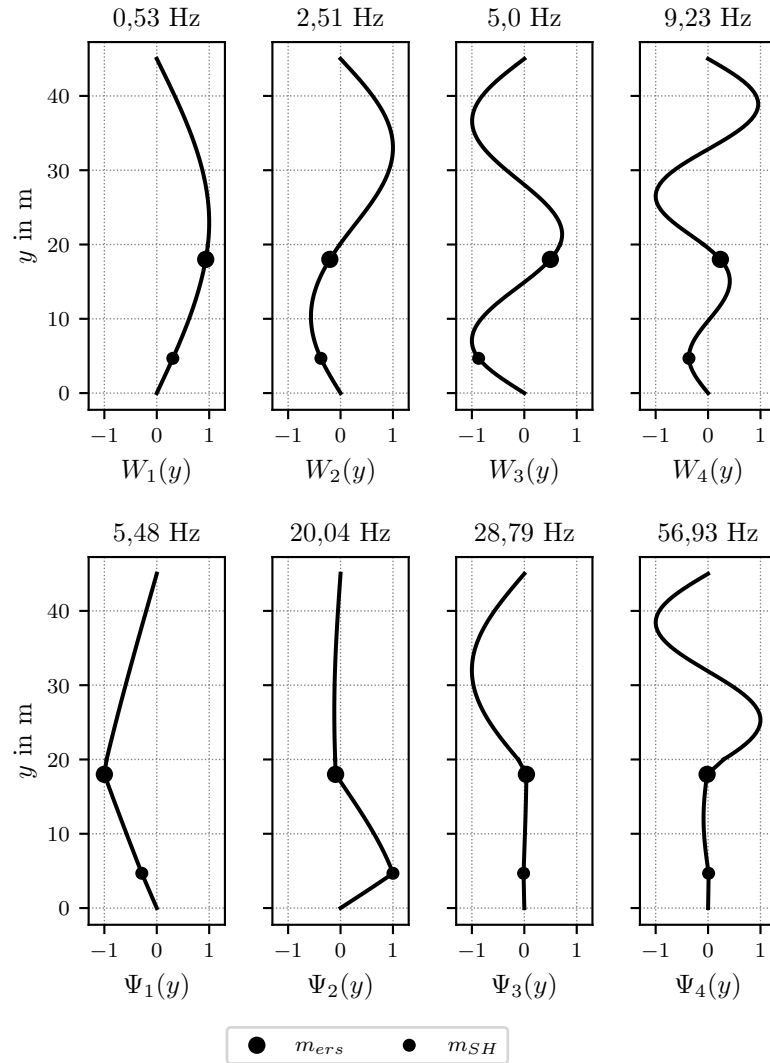
Abtastung gefundene Iterationsstartpunkte für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Es ist zu erkennen, dass durch die gewählte Abtastschrittweite die gefundenen Iterationsstartpunkte bereits gute Näherungslösungen der gesuchten Nullstellen liefern.



**Abbildung 3.8:** Charakteristische Gleichungen der Biegeschwingung (links) und Torsionschwingung (rechts) und durch Abtastung lokalisierte Iterationsstartpunkte (dargestellt durch Punktmarkierungen); Abtastschrittweite beträgt 0,5 rad/s

Zu den gefundenen Iterationsstartwerten liefert anschließend das NEWTON-RAPHSON-Verfahren die gesuchten Eigenkreisfrequenzen. Abbildung 3.9 stellt die ersten vier Biege- und Torsionseigenfunktionen mit dazugehörigen Eigenfrequenzen<sup>7</sup> des betrachteten Referenz-RBG dar.

<sup>7</sup>Die beiden Größen Eigenfrequenz  $f$  und Eigenkreisfrequenz  $\omega$  lassen sich mittels der Beziehung  $f = 2\pi\omega$  ineinander umrechnen.



**Abbildung 3.9:** Amplitudennormierte Darstellung der ersten vier Biege-Eigenfunktionen (oben) und Torsion-Eigenfunktionen (unten) des Referenz-RBG; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m

### 3.3.2 Modale Transformation

Bisher erfolgte die Betrachtung von freien Biege- und Torsionsschwingungen einer zusammengesetzten Struktur. Dieser Abschnitt widmet sich der Lösung von kräfte- regten Biege- und Torsionsschwingungen insbesondere der zeitlichen DGL. Hierzu wird das mechanische Modell aus Abbildung 3.6 betrachtet. Die allgemeine Kraft  $F(t)$  greift an dem Ersatzmassenpunkt  $m_{ers}$  in positive  $z$ -Richtung an. Die Anwendung des HAMILTON-Prinzips liefert die Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Biegeschwingung

$$\varepsilon w'''' + \eta \ddot{w} = F(t) \delta(y - l_{HW}). \quad (3.122)$$

Darin ist

$$\varepsilon = \sum_i (EI_{xx})^{(i)} \Theta^{(i)} \quad (3.123)$$

die Biegesteifigkeit der Gesamtstruktur mit der abschnittsdefiniten HEAVISIDE-Funktion (Abschnittsgrenzen  $y_0^{(i)}$  und  $y_1^{(i)}$ )

$$\begin{aligned} \Theta^{(i)}(y) &= \Theta(y - y_0^{(i)}) - \Theta(y - y_1^{(i)}), \\ \Theta(y) &= \begin{cases} 1, & \text{für } y > 0 \\ 0, & \text{für } y < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.124)$$

und

$$\eta = m_{SH} \delta(y - l_{SH}) + m_{ers} \delta(y - l_{HW}) + \sum_i (\rho A)^{(i)} \quad (3.125)$$

die Dichtefunktion. Dabei erfolgt die Beschreibung der Dichtefunktion von Punkt- massen in (3.125) mittels DIRAC-Funktion  $\delta(y)$  mit der Eigenschaft

$$\int f(y) \delta(y - y_0) = f(y_0). \quad (3.126)$$

Es ist zu beachten, dass in (3.123), (3.124), (3.125) und weiterführend nur Balkenab- schnitte indiziert werden, d. h.  $i \in \{1, 3, 5, 6\}$  entsprechend der Abbildung 3.6. Wie aus Abschnitt 3.2.2 bereits bekannt, lässt sich die Lösung der DGL (3.122) durch die Modalentwicklung

$$w(y, t) \approx \sum_{j=1}^{n_B} W_j(y) q_{Bj}(t) \quad (3.127)$$

angeben. Darin enthaltene Eigenfunktionen  $W_j(y)$  für einzelne Balkenabschnitte sind entsprechend (3.94) zu berechnen. Zur Angabe einer vollständigen Lösung verbleibt somit die Bestimmung zeitabhängiger Funktionen  $q_{Bj}(t)$  – auch modale Koordina- ten genannt. Physikalisch gesehen, stellen modale Koordinaten eine zeitabhängige

Gewichtung der Eigenfunktionen dar. Das Produkt  $W_j(y)q_{Bj}(t)$  gibt somit den orts- und zeitabhängigen Verschiebungsanteil der  $j$ -ten Eigenmode an.

Zur Berechnung von modalen Koordinaten wird die Orthogonalität der Eigenfunktionen ausgenutzt. Für die betrachtete, zusammengesetzte Balkenstruktur lauten die Orthogonalitätsbedingungen wie folgt (Herleitung siehe Anhang A):

$$m_{SH} (W_r W_s)^{\textcircled{1}} \Big|_{y=h_1} + m_{ers} (W_r W_s)^{\textcircled{3}} \Big|_{y=h_3} + \sum_i \rho A^{\textcircled{i}} \int_0^{h_i} (W_r W_s)^{\textcircled{i}} dy = \begin{cases} 0, & \text{für } r \neq s \\ \alpha_{Br}, & \text{für } r = s, \end{cases} \quad (3.128)$$

Des Weiteren können aus ortsabhängigen DGL für homogene Balkenabschnitte folgende Beziehungen hergeleitet werden:

für Balkenabschnitte ohne Punktmasse entsprechend (3.22)

$$(EI_{xx} W_j'''' )^{\textcircled{i}} = \rho A^{\textcircled{i}} \omega_{Bj}^2 W_j^{\textcircled{i}} \quad \text{mit } i \in \{5, 6\} \quad (3.129)$$

und analog für Balkenabschnitte mit einer Punktmasse am Ende des Abschnitts

$$(EI_{xx} W_j'''' )^{\textcircled{i}} = (\rho A^{\textcircled{i}} + m\delta(y - h^{\textcircled{i}})) \omega_{Bj}^2 W_j^{\textcircled{i}} \quad \text{mit } i \in \{1, 3\}. \quad (3.130)$$

Setzt man den Lösungsansatz (3.127) und anschließend die Beziehungen (3.129) und (3.130) in die Bewegungs-DGL (3.122) ein, multipliziert diese mit einer beliebigen Eigenfunktion  $W_r$  des Funktionensystems und integriert das Ergebnis über den Balkenbereich der zusammengesetzten Struktur, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{n_B} \beta_j (\ddot{q}_{Bj} + \omega_{Bj}^2 q_{Bj}) = F W_r \Big|_{y=l_{HW}} \quad (3.131)$$

mit

$$\beta_j = m_{SH} (W_j W_r)^{\textcircled{1}} \Big|_{y=h_1} + m_{ers} (W_j W_r)^{\textcircled{3}} \Big|_{y=h_3} + \sum_i \rho A^{\textcircled{i}} \int_0^{h_i} (W_j W_r)^{\textcircled{i}} dy. \quad (3.132)$$

Dabei entspricht  $\beta_j$  genau der Orthogonalitätsbedingung (3.128), d. h.

$$\beta_j = \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq r \\ \alpha_{Bj}, & \text{für } j = r. \end{cases} \quad (3.133)$$

Die Rücksubstitution von (3.133) in (3.131) liefert schließlich entkoppelte DGL der modalen Koordinaten

$$\ddot{q}_{Bj} + \omega_{Bj}^2 q_{Bj} = F \frac{W_j(l_{HW})}{\alpha_{Bj}}. \quad (3.134)$$



Analog lassen sich die DGL der modalen Koordinaten für Torsionsschwingung wie folgt angeben:

$$\ddot{q}_{Tj} + \omega_{Tj}^2 q_{Tj} = e_{HW} F \frac{\Psi_j(l_{HW})}{\alpha_{Tj}}. \quad (3.135)$$

Die orts- und zeitabhängige Verdrehung kann dann mit Modalentwicklung

$$\psi(y,t) \approx \sum_{j=1}^{n_T} \Psi_j(y) q_{Tj}(t) \quad (3.136)$$

bestimmt werden.

### 3.3.3 Modale Dämpfung

Die Abklingzeit der Restschwingung nach dem Ein-/Auslagerungsvorgang eines RBG wird im Wesentlichen durch die Dämpfung des Systems beeinflusst. Dabei wird ein Teil der in der Restschwingung noch vorhandenen Energie in Wärme umgewandelt. Als Resultat ist eine mit der Zeit abklingende Amplitude der Restschwingung zu beobachten. Bei mechanischen Systemen kann Dämpfung in verschiedenen Formen, z. B. als Materialdämpfung, viskose Dämpfung, Dämpfung an Fügstellen und Dämpfung durch Wechselwirkung des mechanischen Systems mit dem Umgebungsmedium, erscheinen.

An dem betrachteten RBG tragen im Wesentlichen folgende Komponenten zur Dämpfung der Restschwingung bei: reibungsbehaftete Mastlagerung an der Ober- und Unterschiene, Lagerung des Hubwagens und Schraubverbindungen einzelner Baugruppen. Da grundsätzlich keine Elemente mit hohem Dämpfungsgrad, wie z. B. viskose Dämpfer, bei dem betrachteten RBG eingesetzt werden, kann das RBG als *schwach gedämpfte* Struktur betrachtet werden. Zur hinreichend genauen Abbildung der Dämpfungseinflüsse solcher Strukturen hat sich der *modale Dämpfungsansatz* etabliert [GKL12, S. 199]. Die modale Dämpfung fundiert auf folgenden Annahmen:

- die Dämpfung jeder Eigenschwingung erfolgt einzeln
- die Kopplung von Eigenschwingungen infolge Dämpfung wird vernachlässigt<sup>8</sup>
- die Dämpfungskraft jeder Eigenschwingung ist proportional der modalen Geschwindigkeit  $\dot{q}$

Die Dämpfungskraft für  $j$ -te Eigenschwingung lässt sich angeben als

$$F_{Dj} = 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j \quad (3.137)$$

mit dem Dämpfungsgrad  $\xi_j$ . Die tatsächlichen Dämpfungsgrade  $\xi_j$  eines mechanischen Systems können auf analytischem Weg nicht exakt ermittelt werden. Sie können in

<sup>8</sup>Diese Annahme wird in der Mechanik als *Bequemlichkeitshypothese* bezeichnet, weil diese den Rechenaufwand wesentlich minimiert [Wau14, S. 55].

vertretbarem Aufwand z. B. durch eine experimentelle Modalanalyse am realen RBG bestimmt werden. Da das jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, findet die Berücksichtigung von Dämpfungseinflüssen in Form von modaler Dämpfung mit konstantem Dämpfungsgrad statt. Damit lässt sich (3.137) wie folgt vereinfachen:

$$F_{Dj} = 2\xi\omega_j\dot{q}_j. \quad (3.138)$$

Der konstante Dämpfungsgrad für verschweißte Stahlteile mit verschraubten Anbauteilen liegt erfahrungsgemäß im Bereich  $\xi = \{0,002 \dots 0,04\}$  [SGM08, S. 91]. Für das betrachtete RBG wurde deshalb ein konstanter Dämpfungsgrad  $\xi = 0,02$  gewählt. Mit (3.138) lassen sich die entkoppelten DGL der modalen Koordinaten (3.134), (3.135) um die Dämpfungskraft erweitern zu

$$\ddot{q}_{Bj} + 2\xi\omega_{Bj}\dot{q}_{Bj} + \omega_{Bj}^2q_{Bj} = F\frac{W_j(l_{HW})}{\alpha_{Bj}}, \quad (3.139)$$

$$\ddot{q}_{Tj} + 2\xi\omega_{Tj}\dot{q}_{Tj} + \omega_{Tj}^2q_{Tj} = e_{HW}F\frac{\Psi_j(l_{HW})}{\alpha_{Tj}}. \quad (3.140)$$

Die Einführung der Dämpfungskraft hat einen Einfluss auf die Eigenkreisfrequenz des Systems. Diese ergibt sich für ein gedämpftes System aus der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  des ungedämpften Systems und dem Dämpfungsgrad  $\xi$  nach  $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ . Die resultierende Kreisfrequenzverschiebung ist für das vorliegende schwach gedämpfte System jedoch vernachlässigbar klein. Daher ist es zulässig, für die weiteren Betrachtungen die Eigenkreisfrequenzen und Eigenfunktionen des ungedämpften Systems zu verwenden.

## 3.4 Modellierung des Lastaufnahmemittels

Dieser Abschnitt behandelt die Bestimmung der auf den RBG-Mast wirkenden, horizontalen, dynamischen Kräfte, verursacht durch das Verfahren des LAM, sowie des dazu notwendigen Antriebsmoments des Motors. Abbildung 3.10 stellt das zugrundeliegende mechanische Modell des LAM dar.

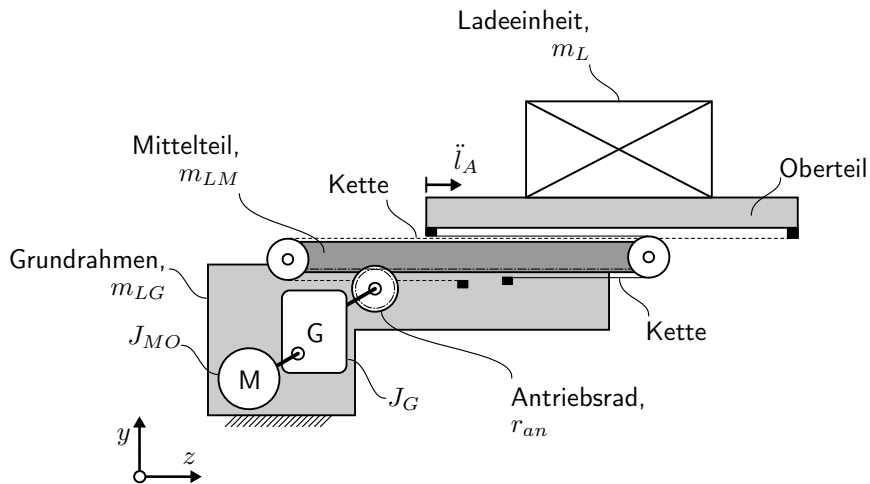


Abbildung 3.10: Vereinfachtes mechanisches Modell des LAM

An Anfang der kinematischen Kette steht der Antriebsmotor  $M$ , der über das Getriebe  $G$  mit Übersetzung  $i_G$  und dem antriebsseitigen Trägheitsmoment  $J_G$  das Antriebsrad mit dem Wälzkreisradius  $r_{an}$  antreibt. Dieses wiederum treibt über das Zahnstangengetriebe mit der Übersetzung  $i_Z$  das LAM-Mittelteil mit der Masse  $m_{LM}$  an. Schließlich treibt das LAM-Mittelteil über das Kettengeräte mit der Übersetzung  $i_K$  das LAM-Oberteil mit der Masse  $m_{LO}$  inklusive LE-Masse  $m_L$  an<sup>9</sup>. Tabelle 3.8 stellt die Übersicht einzelner Trägheitsmomente und Getriebeübersetzungen im LAM dar. Es ist zu beachten, dass die Zahnstangengetriebeübersetzung aufgrund der kinematischer Kopplung unterschiedlichen Bewegungsarten nicht dimensionslos, sondern in rad/m angegeben ist. Deshalb sollen beim Verwenden dieser Übersetzung die Drehbewegungen in rad, rad/s bzw. rad/s<sup>2</sup> umgerechnet werden. Des Weiteren können die dynamischen Einflüsse von Kettenrädern und der Kette aufgrund des geringen Trägheitsmomentes bzw. der geringen Masse vernachlässigt werden.

<sup>9</sup>Das LAM verfügt über zwei gegeneinander verspannte Kettengeräte, die für eine spielfreie kinematische Verbindung zwischen Grundrahmen, Mittelteil und Oberteil sorgen.

**Tabelle 3.8:** Übersicht der Trägheitsmomente und Getriebeübersetzungen am LAM

Beschreibung	Parameterdefinition
Motorträgheitsmoment	$J_{MO} = 413 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$
Getriebeträgheit (Motorgetriebe inkl. LAM-Zahnradgetriebe)	$J_G = 7,67 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$
Radius des Antriebsrads	$r_{an} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Getriebeübersetzung (Motorgetriebe inkl. LAM-Zahnradgetriebe)	$i_G = 15,94$
Zahnstangengetriebeübersetzung	$i_Z = 1/r = 22,73 \text{ rad/m}$
Kettengetriebeübersetzung	$i_K = 1/2$
Gesamtübersetzung des LAM	$i_{LAM} = i_G \cdot i_Z \cdot i_K = 181,14 \text{ rad/m}$

Für die Berechnung des notwendigen Antriebsmomentes zum Verfahren des LAM ist es sinnvoll, alle rotatorischen und translatorischen Trägheiten auf die Antriebsseite (Motorwelle) zu reduzieren. Der einfachste Weg, die reduzierten Trägheiten zu ermitteln, ist die Energieerhaltung. Demnach soll die kinetische Energie vor und nach der Reduktion erhalten bleiben. Für die Reduktion der translatorischen Trägheit des LAM-Obertails auf die Motorwelle folgt z. B.

$$\frac{1}{2} m_{LO} \dot{l}_A^2 = \frac{1}{2} J_{LO,red} \dot{\phi}_{MO}^2, \quad (3.141)$$

$$J_{LO,red} = m_{LO} \left( \frac{\dot{l}_A}{\dot{\phi}_{MO}} \right)^2 = m_{LO} \frac{1}{i_{LAM}^2}$$

mit der Ausfahrgeschwindigkeit des LAM-Oderteils  $\dot{l}_A$  und der Motorwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_{MO}$ . Analog lassen sich die verbleibenden translatorischen Trägheiten der LE und des LAM-Mittelteils auf die Motorwelle reduzieren zu

$$J_{L,red} = m_L \frac{1}{i_{LAM}^2}, \quad (3.142)$$

$$J_{LM,red} = m_{LM} \left( \frac{i_K}{i_{LAM}} \right)^2.$$

Schließlich folgt für das Gesamtträgheitsmoment an der Motorwelle

$$J_{red} = J_{MO} + J_G + J_{LM,red} + J_{L,red} + J_{LO,red}. \quad (3.143)$$

Damit kann das Antriebsmoment zum Verfahren des LAM bestimmt werden zu

$$M_{MO} = J_{red} \ddot{\phi}_{MO}. \quad (3.144)$$

Eine weitere wichtige Größe ist die horizontale Kraft  $F_{LAM}$ , die durch das Ein- und Ausfahren des LAM den RBG-Mast dynamisch anregt. Die Bestimmung dieser Kraft erfolgt anhand der in Abbildung 3.11 dargestellten Freischnitte am LAM-Modell. Aus der Kräftebilanz am Grundrahmen ergibt sich

$$F_{LAM} = F_t - F_K. \quad (3.145)$$

Mit der Tangentialkraft

$$F_t = 2F_K + (m_{LM} + m_{G,red} + m_{MO,red}) i_K \ddot{l}_A \quad (3.146)$$

und der Kettenkraft

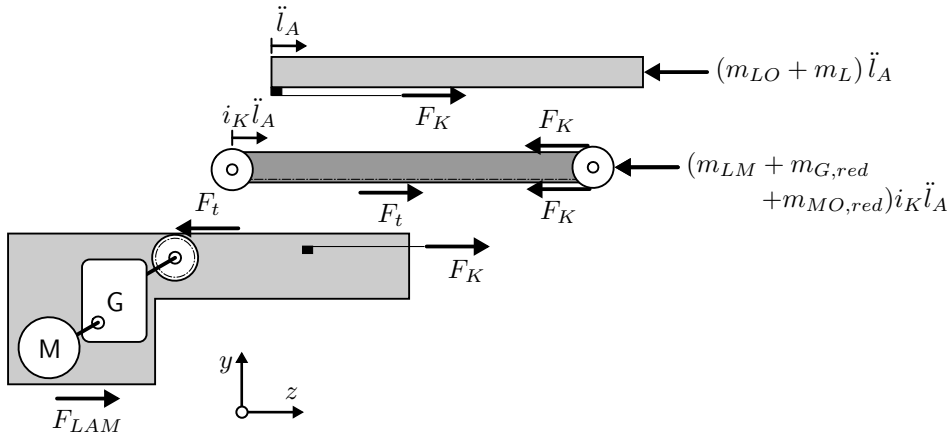
$$F_K = (m_{LO} + m_L) \ddot{l}_A \quad (3.147)$$

lässt sich (3.145) umformen zu

$$\begin{aligned} F_{LAM} &= [m_L + \underbrace{m_{LO} + i_K (m_{LM} + m_{G,red} + m_{MO,red})}_{m_{red}}] \ddot{l}_A \\ &= (m_L + m_{red}) \ddot{l}_A, \end{aligned} \quad (3.148)$$

wobei  $m_{red}$  eine konstante Masse ist, die alle Trägheiten des LAM zusammenfasst. Die darin enthaltenen Massen  $m_{G,red}$  und  $m_{MO,red}$  stellen die auf das LAM-Mittelteil reduzierten, translatorischen Trägheiten des Getriebes und des Motors dar mit

$$\begin{aligned} m_{G,red} &= J_G (i_G i_Z)^2, \\ m_{MO,red} &= J_{MO} (i_G i_Z)^2. \end{aligned} \quad (3.149)$$



**Abbildung 3.11:** Freischnitte am mechanischen Modell des LAM für Beschleunigung während des Ausfahrvorgangs; Trägheitsmomente des Motors  $J_{MO}$  und des Getriebes  $J_G$  sind auf das LAM-Mittelteil reduziert ( $m_{MO,red}$ ,  $m_{G,red}$ )

## 3.5 Zustandsraumdarstellung

Bisher erfolgte die Darstellung des Systemverhaltens mittels gewöhnlicher DGL-Systemen der modalen Koordinaten und den modalen Entwicklungen. Man spricht dabei von einem Mehrfreiheitsgrad-System – jede Eigenmode entspricht einem Systemfreiheitsgrad. Für die Behandlung solcher Systeme hat sich in der Regelungstechnik die Zustandsraumdarstellung etabliert

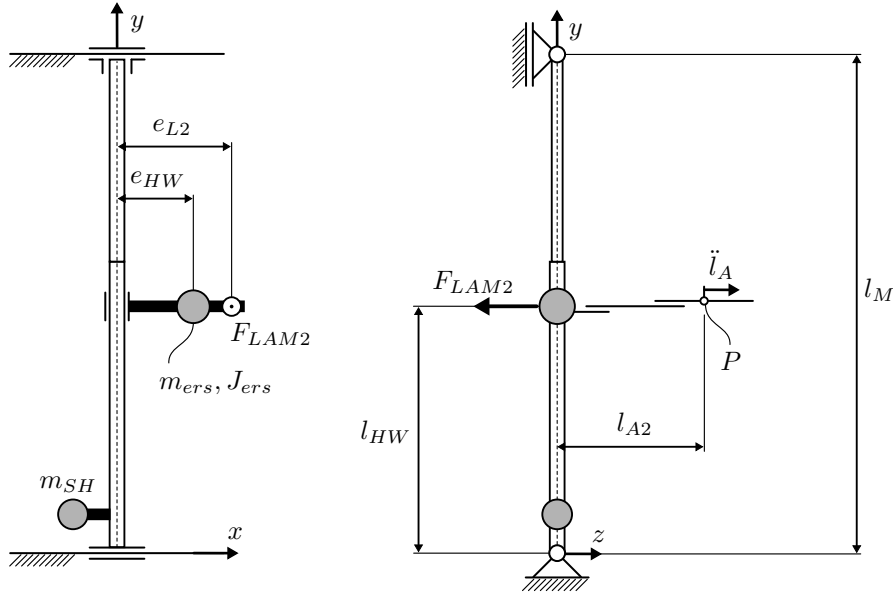
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3.150}$$

Bei der ersten Gleichung handelt es sich um eine Zustandsgleichung mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$ , der Stellgröße bzw. dem Eingang  $u(t)$ , der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und der Steuer- bzw. Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$ . Die zweite Gleichung in der Zustandsraumdarstellung wird Beobachtungsgleichung bzw. Ausgangsgleichung genannt mit der Regelgröße bzw. dem Ausgang  $y(t)$  und der Beobachtungs- bzw. Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$ .

Nachfolgend wird die Transformation einzelner Systemanteile in die Zustandsraumdarstellung vorgestellt. Hierzu erfolgt die Betrachtung am mechanischen Modell aus Abbildung 3.12 mit der Ersatzmasse  $m_{ers}$  und dem Ersatzträgheitsmoment  $J_{ers}$  entsprechend (3.61) und (3.62). Der RBG-Mast wird dabei durch die aus dem Ausfahrvorgang resultierende Kraft  $F_{LAM2}$  entsprechend (3.145) angeregt. Als Ausgang dient die Absolutverschiebung des Punktes  $P$  am Oberteil des zweiten LAM in  $z$ -Richtung. Diese setzt sich aus Biege- und Torsionsschwingungsanteilen des Mastes sowie dem LAM-Ausfahrweg  $l_{A2}$ <sup>10</sup> zusammen.

---

<sup>10</sup>Aus Übersichtlichkeitsgründen wird im Weiteren auf die Indizierung der Größen mit <sub>2</sub> am zweiten LAM verzichtet. Der Rechenweg beim Ausfahren des ersten und zweiten LAM ist somit identisch.



**Abbildung 3.12:** Mechanisches Ersatzmodell des RBG für den Ausfahrvorgang am Beispiel des zweiten LAM

### Zustandsraumdarstellung der Biegeschwingungsanteile

Mit (3.139) und (3.127) kann der Verschiebungsanteil der  $j$ -ten Biegemode in  $z$ -Richtung für den Punkt  $P$  wie folgt angegeben werden:

$$\ddot{q}_{Bj} + 2\xi\omega_{Bj}\dot{q}_{Bj} + \omega_{Bj}^2 q_{Bj} = -F_{LAM} \frac{W_j(l_{HW})}{\alpha_{Bj}}, \quad (3.151)$$

$$w_{P,Bj}(t) = W_j(l_{HW}) q_{Bj}(t). \quad (3.152)$$

Mit Einführung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_{Bj} = [q_{Bj} \dot{q}_{Bj}]^\top$  kann die DGL zweiter Ordnung (3.151) in ein System von zwei DGL erster Ordnung überführt werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{Bj} \\ \ddot{q}_{Bj} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{Bj}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{Bj}^2 & -2\xi\omega_{Bj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{Bj}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{Bj} \\ \dot{q}_{Bj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{Bj}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{W_j(l_{HW})}{\alpha_{Bj}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{Bj}} \underbrace{F_{LAM}}_u. \quad (3.153)$$

Diese Formulierung entspricht der Zustandsgleichung eines kraftgesteuerten Systems mit der Stellgröße  $u = F_{LAM}$ . Die Beobachtungsgleichung erhält man durch das Umformen von (3.152) in Matrix-Vektorform mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{Bj}$

$$\underbrace{w_{P,Bj}(t)}_{y_{Bj}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_j(l_{HW}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{Bj}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{Bj} \\ \dot{q}_{Bj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{Bj}}. \quad (3.154)$$

### Zustandsraumdarstellung der Torsionsschwingungsanteile

Der Verschiebungsanteil der  $j$ -ten Torsionsmode für den Punkt  $P$  in  $z$ -Richtung berechnet sich unter Verwendung von (3.140) und (3.136) zu:

$$\ddot{q}_{Tj} + 2\xi\omega_{Tj}\dot{q}_{Tj} + \omega_{Tj}^2 q_{Tj} = -e_L F_{LAM} \frac{\Psi_j(l_{HW})}{\alpha_{Tj}}, \quad (3.155)$$

$$w_{P,Tj}(t) = e_L \Psi_j(l_{HW}) q_{Tj}(t). \quad (3.156)$$

Mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{Tj} = [q_{Tj} \ \dot{q}_{Tj}]^\top$  lässt sich diese Formulierung in die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{Tj} \\ \ddot{q}_{Tj} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{Tj}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{Tj}^2 & -2\xi\omega_{Tj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{Tj}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{Tj} \\ \dot{q}_{Tj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{Tj}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -e_L \frac{\Psi_j(l_{HW})}{\alpha_{Tj}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{Tj}} \underbrace{F_{LAM}}_u, \\ \underbrace{w_{P,Tj}(t)}_{y_{Tj}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} e_L \Psi_j(l_{HW}) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{Tj}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{Tj} \\ \dot{q}_{Tj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{Tj}} \end{aligned} \quad (3.157)$$

überführen.

### Zustandsraumdarstellung der LAM-Dynamik

Die größte Verschiebung des Punktes  $P$  in  $z$ -Richtung resultiert aus dem LAM-Ausfahrvorgang selbst. Die hierfür zugrundeliegende Gleichung

$$\ddot{l}_A = \frac{F_{LAM}}{m_L + m_{red}} \quad (3.158)$$

folgt aus der Umformung von (3.148). Mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_A = [l_A \ \dot{l}_A]^\top$  folgt die Matrix-Vektorform

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{l}_A \\ \ddot{l}_A \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} l_A \\ \dot{l}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_L + m_{red}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_A} \underbrace{F_{LAM}}_u, \\ \underbrace{l_A(t)}_{y_A(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} l_A \\ \dot{l}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_A}, \end{aligned} \quad (3.159)$$

die der Zustandsraumdarstellung gleichkommt.



### Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems (kraftgesteuert)

Da die oben beschriebenen Teilsysteme entkoppelt sind, kann die Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems durch die Aneinanderreihung von (3.153), (3.154), (3.157) und (3.159) wie folgt angegeben werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_{B1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Bn_B} \\ \dot{x}_{T1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Tn_T} \\ \dot{x}_A \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{A}_{Bn_B} & & & \\ & & & \mathbf{A}_{T1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{A}_{Tn_T} \\ & & & & & & \mathbf{A}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{B1} \\ \vdots \\ x_{Bn_B} \\ x_{T1} \\ \vdots \\ x_{Tn_T} \\ x_A \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{B1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{Bn_B} \\ \mathbf{B}_{T1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{Tn_T} \\ \mathbf{B}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u,$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{B1} & \cdots & \mathbf{C}_{Bn_B} & \mathbf{C}_{T1} & \cdots & \mathbf{C}_{Tn_T} & \mathbf{C}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{B1} \\ \vdots \\ x_{Bn_B} \\ x_{T1} \\ \vdots \\ x_{Tn_T} \\ x_A \end{bmatrix}}_x$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{BT} \\ \dot{x}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BT} & \\ & \mathbf{A}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{BT} \\ x_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{BT} \\ \mathbf{B}_A \end{bmatrix} u,$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{BT} & \mathbf{C}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{BT} \\ x_A \end{bmatrix},$$
(3.160)

wobei die Komponenten des gesamten Balkensystems mit dem Index  $BT$  versehen werden.

### Zustandsraumdarstellung des Gesamtsystems (drehzahlgesteuert)

Für die Drehzahlsteuerung gilt zunächst der Zusammenhang

$$\dot{i}_A = \frac{2\pi}{i_{LAM}} n_{MO} \quad (3.161)$$

zwischen der Ausfahrgeschwindigkeit  $\dot{i}_A$  und der Motordrehzahl  $n_{MO}$ . Aus (3.161) ist erkennbar, dass für die Zustandsraumdarstellung der LAM-Dynamik mit

$$u_{MO} = n_{MO} \quad (3.162)$$

nun ein Zustand weniger benötigt wird, um  $l_A(t)$  zu bestimmen. Für das Balkensystem, das eine Kräfteerregung laut (3.153) und (3.157) voraussetzt, lässt sich  $F_{LAM}$  nicht direkt aus  $u_{MO}$  ableiten. Dieser Zusammenhang wird durch das Einsetzen der Zeitableitung von  $u_{MO}$  in (3.148) hergestellt:

$$F_{LAM}(t) = (m_L + m_{red}) \frac{2\pi}{i_{LAM}} \frac{d}{dt} u_{MO}(t). \quad (3.163)$$

Damit ergibt sich die Zustandsraumdarstellung des drehzahlgesteuerten Gesamtsystems zu:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{BT} \\ \dot{l}_A \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{MO}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BT} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{MO}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{BT} \\ l_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{MO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{BT} (m_L + m_{red}) \frac{2\pi}{i_{LAM}} \frac{d}{dt} \\ \frac{2\pi}{i_{LAM}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{MO}} u_{MO}, \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{BT} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{MO}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{BT} \\ l_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{MO}}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Da die Drehzahlsteuerung direkt über Differentiation bzw. Integration mit der Kraftsteuerung zusammenhängt, wird nachfolgend die regelungstechnisch einfachere Beschreibung des kraftgesteuerten Systems (3.160) verwendet. Beim Reglerentwurf ist dann zu beachten, dass der Reglerausgang (Stellkraft) entsprechend (3.163) integriert und skaliert werden muss.

## 3.6 Modellordnungsreduktion

Die Modellordnungsreduktion zielt darauf ab, die Anzahl der Systemgleichungen bzw. -Freiheitsgrade so zu reduzieren, dass das wesentliche dynamische Systemverhalten erhalten bleibt. Dadurch ergeben sich zahlreiche rechnerische Vorteile. Bei der Simulation wird durch die Ordnungsreduktion die Rechenzeit deutlich reduziert, wodurch Parameteroptimierungen performanter durchgeführt werden können. Des Weiteren lässt sich der Reglerentwurf bei reduzierten Systemen mathematisch transparenter und effizienter gestalten. Dadurch reduziert sich die Zeit zur Berechnung der Stellgröße, die bei zeitkritischen Systemen (Echtzeitsystemen) von besonderem Interesse ist.

Das System (3.160) besteht aus einem Teilsystem, das die Dynamik der flexiblen Balkenstruktur beschreibt (3.153), (3.157) und einem Teilsystem, das die Starrkörperdynamik (Dynamik des LAM) (3.159) beschreibt. Letzteres leistet einen signifikanten Beitrag zur Verschiebung des Punktes  $P$  in  $z$ -Richtung und muss deshalb vor der Modellordnungsreduktion ausgeschlossen werden. Bei dem Balkensystem können

dagegen Schwingungsmoden weggelassen werden, deren Beitrag zur Verschiebung des Punktes  $P$  in  $z$ -Richtung vernachlässigbar gering ist. Welche und wie viele Moden benötigt werden, um das Systemverhalten hinreichend gut zu approximieren, lässt sich mit Methoden der Modellordnungsreduktion beantworten. Hierfür ist zunächst die Definition einiger Begriffe notwendig.

### 3.6.1 Grundbegriffe der Modellordnungsreduktion

#### Zustandsstabilität

Ein lineares ungestörtes System ( $u(t) = 0$ ) definiert durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.165)$$

ist zustandsstabil, wenn nach einer Auslenkung  $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$  aus einer Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_g$  das System in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, d. h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  [Trö11, S. 111]. Aus (3.165) folgt für einen Gleichgewichtszustand

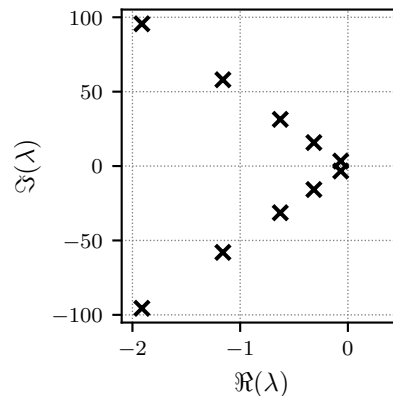
$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_g. \quad (3.166)$$

Für eine nicht singuläre Systemmatrix, d. h.  $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ , besitzt das System nur einen Gleichgewichtszustand, nämlich  $\mathbf{x}_g = \mathbf{0}$ . Dieser wird nach einer Auslenkung nur dann erreicht, wenn alle Moden  $e^{\lambda_j t}$  von  $\mathbf{A}$  abklingen, d. h. wenn

$$\Re(\lambda_j) < 0 \quad (3.167)$$

mit  $\lambda_j$  als  $j$ -ter Eigenwert (Pol) von  $\mathbf{A}$  gilt – eine Matrix mit dieser Eigenschaft wird auch HURWITZ-Matrix genannt. Wird die Forderung (3.167) erfüllt, so ist das System asymptotisch stabil [Lun10, S. 405]<sup>11</sup>. Stellt man die Pole von  $\mathbf{A}$  in der komplexen Zahlenebene dar, so müssen bei asymptotisch stabilen Systemen alle Pole in der linken Halbebene liegen. Abbildung 3.13 stellt die ersten zehn Pole des Balkensystems dar. Da es sich um ein gedämpftes System handelt, liegen alle Pole (konjugiert komplexe Eigenwerte) in der linken Halbebene. Damit ist das Balkensystem stabil.

<sup>11</sup>Bei  $\Re(\lambda_j) \leq 0$  spricht man auch von grenzstabilen Systemen.



**Abbildung 3.13:** Eigenwerte  $\lambda_j$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  des RBG-Balkensystems als komplexe Pol-Paare. Alle Pol-Paare liegen in der linken Halbebene ( $\Re(\lambda_j) < 0$ ); Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m

### Steuerbarkeit

Der Begriff *Steuerbarkeit* beschreibt den Einfluss der Eingangsgröße  $u(t)$  auf die Systemzustände. Dabei gelten für ein System  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  entsprechend (3.150) folgende Definitionen:

1. Ein System ist steuerbar, wenn das System aus einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$  in einen beliebigen Endzustand  $\mathbf{x}(t = t_e) = \mathbf{x}_e$  mittels geeigneter Stellgröße  $u(t)$  mit  $t \in [0, t_e]$  überführt werden kann [Föl16, S. 290].
2. Die Steuerbarkeit kann anhand der von KALMAN eingeführten *Steuerbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.168)$$

geprüft werden [ZR14, S. 400]. Demnach ist ein System der Dimension  $n$ , d. h. Dimension der Systemmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , vollständig steuerbar, wenn die Matrix  $\mathcal{C}$  den Rang  $n$  besitzt, d. h.  $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ . Das KALMAN-Kriterium gibt an, ob das Gesamtsystem steuerbar oder nicht steuerbar ist. Eine Information über die relative Steuerbarkeit einzelner Zustandskomponenten liefert es nicht.

3. Die Aussage über die relative Steuerbarkeit einzelner Zustandskomponenten liefert die GRAM'sche Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{W}_c$  als Lösung der LJAPUNOW-Gleichung [Gaw04, S. 67]

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \mathbf{0} \quad (3.169)$$

mit

$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{\mathbf{A}^\top t} dt. \quad (3.170)$$

Das System ist steuerbar, wenn die Lösung  $\mathbf{W}_c$  regulär ist ( $\det(\mathbf{W}_c) \neq 0$ ). Aus der Singulärwertzerlegung von  $\mathbf{W}_c$  erhält man die Singulärwerte  $\{\sigma_{c1}, \dots, \sigma_{cn}\}$ , die reziprok proportional zum Energieaufwand für die Zustandsüberführung entlang einzelner Komponenten sind. Daher sind Zustandskomponenten mit hohen Singulärwerten gegenüber denjenigen mit geringen Singulärwerten besser steuerbar. Für schwach gedämpfte Systeme in Modalform ist  $\mathbf{W}_c$  diagonaldominant, sodass die Singulärwerte direkt abgelesen werden können  $\sigma_{ci} = \mathbf{W}_{cii}$  [Gaw04, S. 76].

### Beobachtbarkeit

Der Begriff *Beobachtbarkeit* beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Systemzustand  $\mathbf{x}$  und dem Ausgang  $y(t)$ . Dabei gelten für ein System  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  entsprechend (3.150) folgende Definitionen:

1. Ein System ist beobachtbar, wenn ein beliebiger Ausgangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus dem bekanntem Eingang  $u(t)$  und dem Ausgang  $y(t)$  in einer endlichen Zeit  $t \in [0, t_e]$  rekonstruiert werden kann [Föl16, S. 290].
2. Die Beobachtbarkeit kann anhand der von KALMAN eingeführten *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{O} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}]^\top \quad (3.171)$$

geprüft werden [ZR14, S. 401]. Demnach ist ein System  $n$ -ter Ordnung – Dimension der Systemmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – vollständig beobachtbar, wenn die Matrix  $\mathcal{O}$  den Rang  $n$  besitzt, d. h.  $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$ . Das KALMAN-Kriterium gibt an, ob das Gesamtsystem beobachtbar oder nicht beobachtbar ist. Eine Information über die relative Beobachtbarkeit einzelner Zustandskomponenten liefert es nicht.

3. Ähnlich zur Steuerbarkeit kann die relative Beobachtbarkeit einzelner Zustandskomponenten mithilfe der GRAM'schen Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{W}_o$  als Lösung der LJAPUNOW-Gleichung [Gaw04, S. 67]

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^\top \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (3.172)$$

mit

$$\mathbf{W}_o = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^\top t} \mathbf{C}^\top \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (3.173)$$

bewertet werden. Das System ist beobachtbar, wenn die Lösung  $\mathbf{W}_o$  regulär ist, d. h.  $\det(\mathbf{W}_o) \neq 0$ . Aus der Singulärwertzerlegung von  $\mathbf{W}_o$  erhält man die

Singulärwerte  $\{\sigma_{o1}, \dots, \sigma_{on}\}$ , die direkt proportional zu den Energieanteilen der Zustandskomponenten im Ausgang  $y(t)$  sind. Daher sind Zustandskomponenten mit hohen Singulärwerten gegenüber denjenigen mit geringen Singulärwerten besser beobachtbar. Für schwach gedämpfte Systeme in Modalform ist  $\mathbf{W}_o$  diagonaldominant, sodass die Singulärwerte direkt abgelesen werden können  $\sigma_{oi} = \mathbf{W}_{oii}$  [Gaw04, S. 76].

#### 3.6.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Balkensystems

Das betrachtete Balkensystem ist vollständig steuerbar und beobachtbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden (Nachweis siehe Anhang B):

$$\begin{aligned} W_j(l_{HW}) &\neq 0, & \omega_{Bj} &\neq 0, & e_L &\neq 0, \\ \Psi_j(l_{HW}) &\neq 0, & \omega_{Tj} &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.174}$$

Während die letzten drei Bedingungen systembedingt immer erfüllt sind, sind die ersten zwei Bedingungen genau dann nicht erfüllt, wenn das Balkensystem, das in der Hubwagenhöhe  $l_{HW}$  angeregt wird, einen Schwingungsknoten der Biege- bzw. Torsion-Eigenfunktion bei  $l_{HW}$  aufweist. Fällt die Hubwagenposition mit der Position des Schwingungsknotens einer Mode zusammen, dann lässt sich der Zustand dieser Mode durch den Eingang nicht verändern und der Verschiebungsbeitrag am Ausgang verschwindet. In diesem Fall kann die Dynamik dieser Mode im Modell vernachlässigt werden. Somit wird das Balkensystem für weitere Betrachtungen als steuerbar und beobachtbar angenommen.

#### 3.6.3 Modellreduktion durch balanciertes Abschneiden

Sind die Systemeigenschaften Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit und die dazugehörigen GRAM'schen Matrizen  $\mathbf{W}_c$  und  $\mathbf{W}_o$  bekannt, so ist es naheliegend, das System auf diejenigen Zustandskomponenten zu reduzieren, die einerseits gut steuerbar sind, d. h. Zustandskomponenten mit geringem Energieaufwand für die Zustandsüberführung (Zustandskomponenten mit hohen Singulärwerten  $\sigma_c$ ) und andererseits gut beobachtbar sind, d. h. Zustandskomponenten mit hohem Energieanteil im Ausgang (Zustandskomponenten mit hohen Singulärwerten  $\sigma_o$ ). Diese Methode der Modellordnungsreduktion ist nur dann effektiv, wenn beide Kriterien erfüllt werden können, d. h. wenn die gut steuerbaren Zustandskomponenten auch gut beobachtbar sind und umgekehrt. Eine Zustandskomponente, die z. B. gut steuerbar ist, muss jedoch nicht unbedingt gut beobachtbar sein, was die Bewertung einzelner Zustandskomponenten hinsichtlich ihrer Relevanz erschwert.

Um diese Konfliktsituation zu umgehen, führte MOORE die *balancierte* Systemdarstellung ein [Moo81]. Mit einer geeigneten Transformation des Zustandsvektors  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\mathbf{T}$  lässt sich ein System entsprechend (3.150) mit  $\mathbf{W}_c$  und  $\mathbf{W}_o$  in die balancierte

Darstellung überführen<sup>12</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u, \\ y(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.175)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{T}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{T}}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{T}}^{-1}.\end{aligned}\quad (3.176)$$

Das System heißt balanciert, weil die transformierten GRAM'schen Matrizen von (3.175) identische Diagonalmatrizen sind

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{W}}_c &= \bar{\mathbf{T}}\mathbf{W}_c\bar{\mathbf{T}}^\top, \\ \bar{\mathbf{W}}_o &= \bar{\mathbf{T}}^{-\top}\mathbf{W}_o\bar{\mathbf{T}}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{W}}_c &= \bar{\mathbf{W}}_o = \text{diag}\{\sigma_{h_1}, \dots, \sigma_{h_n}\},\end{aligned}\quad (3.177)$$

dessen Einträge die HANKEL-Singulärwerte

$$\sigma_{h_j} = \sqrt{\lambda_j(\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o)}\quad (3.178)$$

sind. Demzufolge sind gut steuerbare Zustandskomponenten in der balancierten Darstellung simultan gut beobachtbar und umgekehrt. Bezogen auf einzelne Zustandskomponenten stellen HANKEL-Singulärwerte ein Maß für Energietransfer vom Eingang  $u(t)$  zum Ausgang  $y(t)$  dar, sodass in einem balancierten System mit Anordnung der Zustandskomponenten entsprechend  $\sigma_{h_1} \geq \dots \geq \sigma_{h_n}$  die letzten  $k$  Zustandskomponenten abgeschnitten werden können.

Aus der balancierten Darstellung des Originalsystems

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} u, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.179)$$

mit dem Zustandsvektor mit hohen HANKEL-Singulärwerten  $\bar{\mathbf{x}}_1 = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-k}]^\top$  und vernachlässigbaren Zustandskomponenten  $\bar{\mathbf{x}}_2 = [\bar{x}_{n-k+1} \dots \bar{x}_n]^\top$  resultiert das reduzierte System der Ordnung  $(n - k)$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u, \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.180)$$

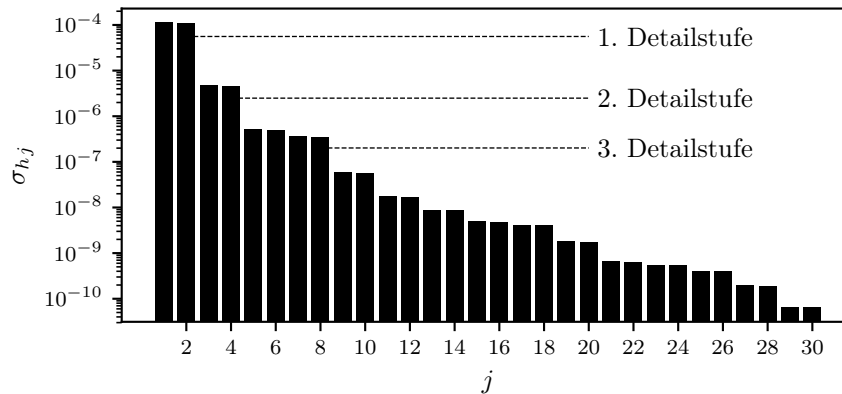
<sup>12</sup>Auf den Algorithmus zur Berechnung der Transformationsmatrix  $\bar{\mathbf{T}}$  wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Dieser ist in [Lau+87] ausführlich beschrieben.

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{x}}_1, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{A}}_{11}, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{B}}_1, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{C}}_1.\end{aligned}\tag{3.181}$$

Das reduzierte System ist steuerbar und beobachtbar [LA89].

Die HANKEL-Singulärwerte für das RBG-Balkensystem (Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg und die Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m) sind in Abbildung 3.14 dargestellt. Dabei ist das Abschneiden der Zustandskomponenten an den Stellen mit den größten Singulärwertsprüngen sinnvoll – jeder Sprung stellt eine neue Detailstufe im Systems dar, z. B. Singulärwertsprünge  $\sigma_{h2} \rightarrow \sigma_{h3}$ ,  $\sigma_{h4} \rightarrow \sigma_{h5}$  oder  $\sigma_{h8} \rightarrow \sigma_{h9}$  (siehe Abbildung 3.14).

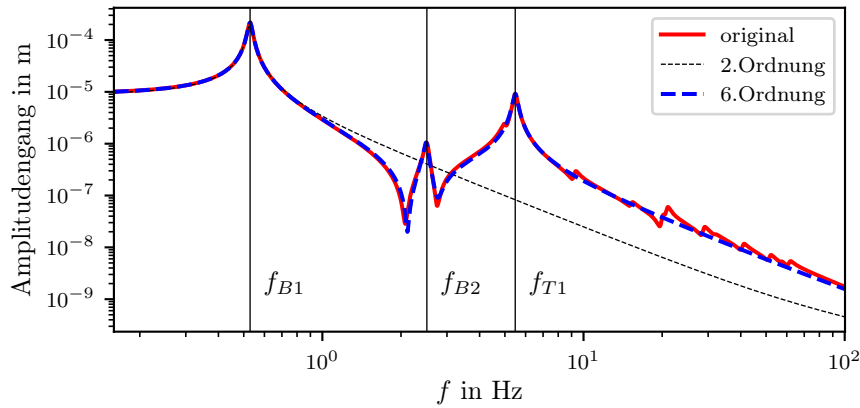


**Abbildung 3.14:** HANKEL-Singulärwerte des balancierten Systems 30. Ordnung; Geeignete Stellen zum Abschneiden der Zustandskomponenten sind durch Singulärwertsprünge  $\sigma_{h2} \rightarrow \sigma_{h3}$  (1. Detailstufe),  $\sigma_{h4} \rightarrow \sigma_{h5}$  (2. Detailstufe) oder  $\sigma_{h8} \rightarrow \sigma_{h9}$  (3. Detailstufe) gekennzeichnet

Mit der Transformation in die balancierte Darstellung ändert sich die Anordnung der Zustandskomponenten, sodass die Zuordnung zu den Schwingmoden verloren geht. Welche Schwingmoden im balancierten System erhalten bleiben, lässt sich z. B. über Darstellung des Amplitudengangs bestimmen. Abbildung 3.15 stellt den Amplitudengang – Darstellung der Schwingungsamplitude in  $z$ -Richtung über Erregungsfrequenz bei harmonischer Einheitskraft-Erregung – des Originalsystems (RBG-Balkensystem 30. Ordnung) und der reduzierten Systeme 2. und 6. Ordnung dar. Es ist zu erkennen, dass die ersten zwei Biegemoden und die erste Torsionsmode im Amplitudengang des Originalsystems dominieren. Dies ist auch an den Amplitudengängen der balancierten und reduzierten Systeme, bei denen die Zustandskomponenten der Relevanz nach absteigend sortiert sind, ersichtlich. Während das reduzierte System 2. Ordnung



nur die 1. Biegemode des Originalsystems beinhaltet, enthält das reduzierte System 6. Ordnung die 1. und 2. Biegemode sowie 1. Torsionsmode des Originalsystems.

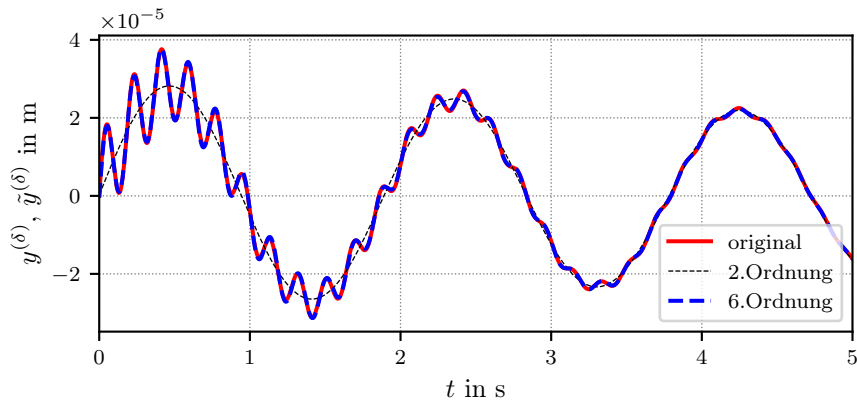


**Abbildung 3.15:** Vergleich der Amplitudengänge des Originalsystems (RBG-Balkensystem 30. Ordnung) und der reduzierten Systeme 2. und 6. Ordnung; Die ersten zwei Biegeeigenfrequenzen  $f_{B1}$ ,  $f_{B2}$  sowie die erste Torsionseigenfrequenz  $f_{T1}$  des Originalsystems sind durch vertikale Linien dargestellt

Die Bewertung der Approximationsgüte der reduzierten Systeme erfolgt mittels relativem Reduktionsfehler [GJ90, S. 352]

$$\tilde{\epsilon}_{rel} = \frac{\|y^{(\delta)} - \tilde{y}^{(\delta)}\|}{\|y^{(\delta)}\|}. \quad (3.182)$$

Darin sind  $y^{(\delta)}$  und  $\tilde{y}^{(\delta)}$  jeweils die Impulsantworten des Original- und des reduzierten Systems. Abbildung 3.16 stellt die Impulsantwort des Originalsystems 30. Ordnung und der reduzierten Systeme 2. und 6. Ordnung dar. Es ist eine hohe Übereinstimmung der Impulsantworten des Original- und des reduzierten Systems 6. Ordnung zu erkennen. Der relative Reduktionsfehler beträgt nur 1,47 % (siehe Tabelle 3.9).



**Abbildung 3.16:** Vergleich der Impulsantworten des Originalsystems (RBG-Balkensystem 30. Ordnung)  $y^{(\delta)}$  und der reduzierten Systeme 2. und 6. Ordnung  $\tilde{y}^{(\delta)}$

**Tabelle 3.9:** Relativer Reduktionsfehler in Abhängigkeit der Ordnung des reduzierten Systems

Ordnung System	red. relativer Fehler $\tilde{\epsilon}_{rel}$ in %
2	19,62
4	2,02
6	1,47
8	0,36
10	0,19

Nach der Reduktion des RBG-Balkensystems nimmt das Gesamtsystem (inklusive LAM Dynamik) folgende Form an:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}_A} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \\ & \mathbf{A}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u, \tag{3.183}$$

$$y(t) = \underbrace{[\tilde{\mathbf{C}} \quad \mathbf{C}_A]}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}.$$

### 3.7 Validierung des Modells

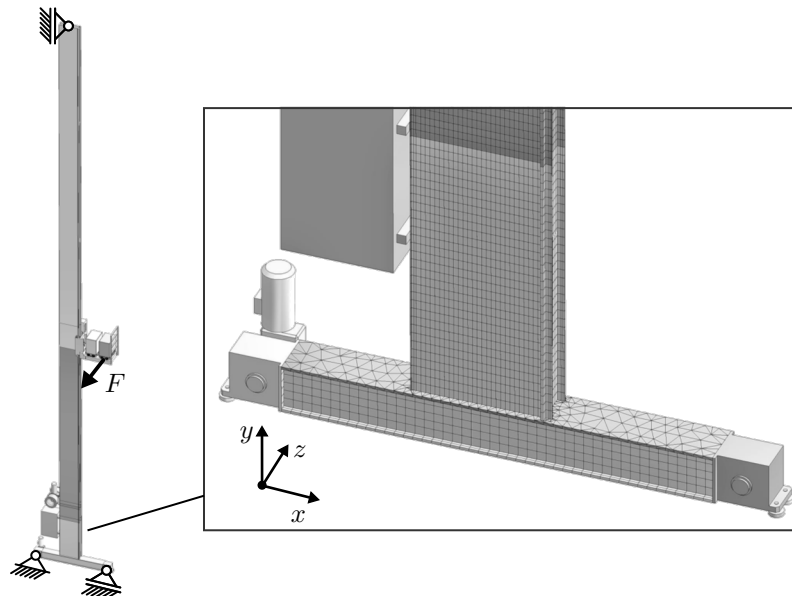
Die Erstellung des mechanischen Modells erfolgt unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen und Vereinfachungen gemäß den Abschnitten 3.1 und 3.6. Zur

Überprüfung der Modellgüte, insbesondere des dynamischen Verhaltens, ist eine Validierung notwendig. Diese kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten realisiert werden. Zum einen kann das erstellte Modell mit einem realen RBG mittels experimenteller Modalanalyse [Bac+08] und/oder Schwingungsmessung bei definierten Referenzfahrten [Bop93, S. 77; Sch01, S. 45; KNV10] verglichen werden. Zum anderen, wenn das reale System nicht zur Verfügung steht, soll die Validierung zumindest mittels eines Modellansatzes geringerer Abstrahierungsstufe durchgeführt werden [Sch94, S. 20; Bar08, S. 38; Haj16, S. 46].

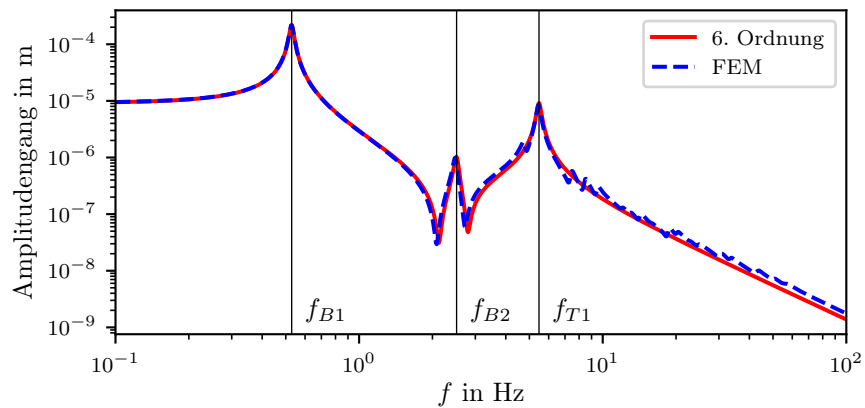
Im Rahmen dieser Arbeit steht kein reales RBG zur Verfügung. Deshalb erfolgt die Validierung mittels eines Modells geringerer Abstrahierungsstufe. Eine geeignete realitätsnahe Abbildung des RBG ist mittels Finite-Elemente (FE)-Modell (siehe Abbildung 3.17) möglich<sup>13</sup>. Das Modell besteht aus einer vernetzten Tragwerkstruktur (flexibler Körper) und als Starrkörper modellierten Anbauteilen. Des Weiteren enthält das Modell die Werkstoff- und Querschnittsparameter entsprechend Tabelle 3.3. Abbildung 3.18 stellt die Amplitudengänge des reduzierten Modells 6. Ordnung und des FE-Modells dar. Es ist eine hohe Übereinstimmung in Bereichen der 1., 2. Biege- und der 1. Torsionseigenfrequenz zu erkennen. Frequenzen höherer Ordnung sind im reduzierten Modell nicht enthalten, weshalb im Bereich 6 bis 100 Hz geringfügige Abweichungen entstehen. Betrachtet man jedoch die Amplituden dieser Frequenzen im Vergleich zu den dominierenden 1. Biege- und 1. Torsionseigenfrequenzen, so stellt man fest, dass die Amplituden und somit die Abweichungen in diesem Frequenzbereich vernachlässigbar sind. Abbildung 3.19 stellt die Impulsantwort des reduzierten Modells 6. Ordnung und des FE-Modells im Vergleich dar. Der relative Fehler (vergleiche (3.182)) des reduzierten Modells zum FE-Modell beträgt  $\tilde{\epsilon}_{FEM} = 5,2\%$ .

---

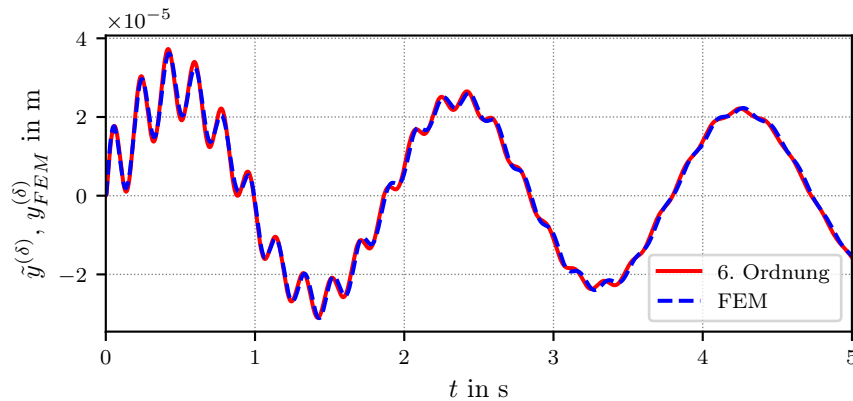
<sup>13</sup>Im Gegensatz zum vorgestellten mechanischen Modell, ist die Tragwerkstruktur im FE-Modell nicht durch Balkenelemente vereinfacht, sondern durch Volumenelemente abgebildet. Des Weiteren erfolgt im FE-Modell die Berücksichtigung der elastischen Bodentraverse des Fahrwerks.



**Abbildung 3.17:** FE-Modell des Referenz-RBG; Tragwerk ist als verformbare FE-Struktur modelliert; Anbauteile sind als starre Körper modelliert; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m

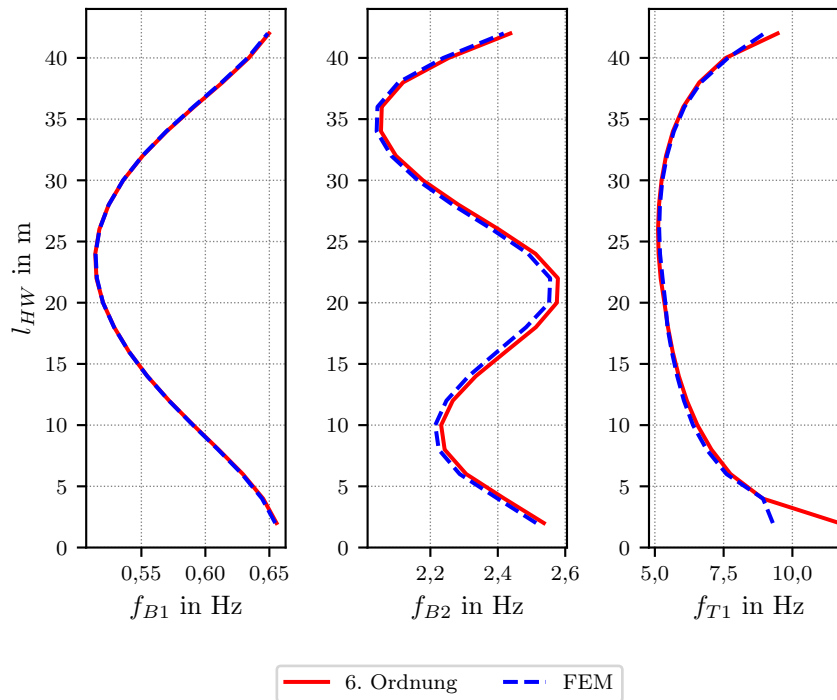


**Abbildung 3.18:** Vergleich der Amplitudengänge des reduzierten Systems 6. Ordnung und des FE-Modells; die ersten zwei Biegeeigenfrequenzen  $f_{B1}$ ,  $f_{B2}$  sowie die erste Torsionseigenfrequenz  $f_{T1}$  des Originalsystems sind durch vertikale Linien dargestellt



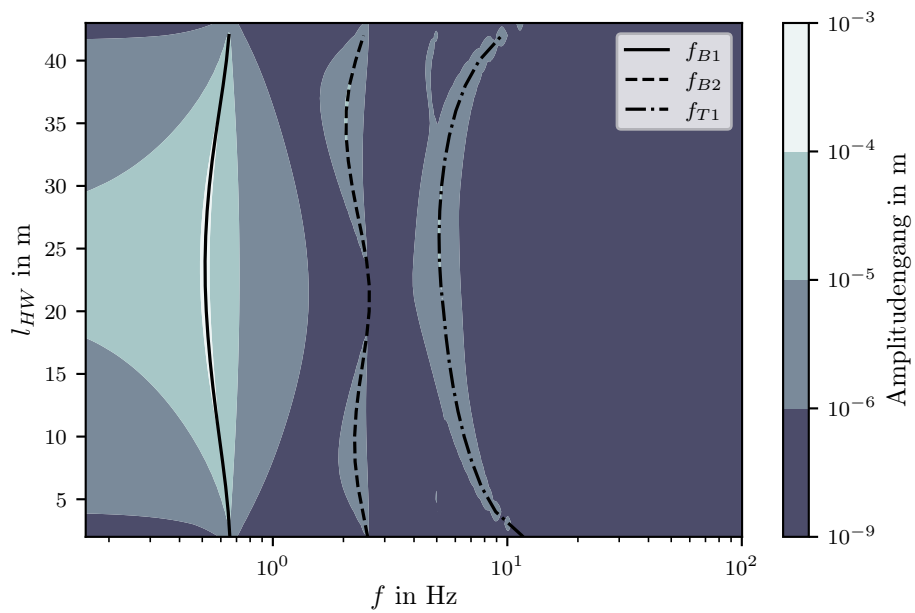
**Abbildung 3.19:** Vergleich der Impulsantworten des reduzierten Systems 6. Ordnung  $\tilde{y}^{(\delta)}$  und des FE-Modells  $y_{FEM}^{(\delta)}$

Eine weitere FE-Simulationsstudie, in der die Änderung der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Hubwagenhöhenposition  $l_{HW}$  untersucht wird, zeigt eine hohe Übereinstimmung mit den Eigenfrequenzen des reduzierten Modells 6. Ordnung (siehe Abbildung 3.20). Die 1. Biegeeigenfrequenz hat einen glockenkurvenähnlichen Verlauf mit der tiefsten Eigenfrequenz in mittlerer Hubwagenhöhenposition  $l_{HW} \approx 24$  m. Die Doppel-S-Kurve des 2. Biegeeigenfrequenzverlaufs hat ihren Tiefstwert in oberer Hubwagenposition  $l_{HW} \approx 34$  m. Grund hierfür ist das dünnere Mastprofil mit geringerer Biegesteifigkeit im oberen Mastbereich. Der Höchstwert liegt dagegen bei der mittleren Hubwagenhöhenposition. Da der Hubwagen sich in der mittleren Höhenposition, in der Nähe des Schwingknotens der 2. Biegemode (siehe Abbildung 3.9), befindet, hat die Masse des Hubwagens keinen Einfluss auf die 2. Biegemode. Die Badewannenkurve des 1. Torsionseigenfrequenzverlaufs hat ihren Tiefstwert in mittlerer Hubwagenhöhenposition, wobei der Eigenfrequenzabfall infolge des Hubwagens in oberen Höhenpositionen stärker ausgeprägt ist als in unteren. Ursache hierfür ist ebenfalls das dünnere torsionsnachgiebige Mastprofil im oberen Mastbereich.



**Abbildung 3.20:** Vergleich der ersten zwei Biegeeigenfrequenzen  $f_{B1}$  und  $f_{B2}$  sowie der ersten Torsionseigenfrequenz  $f_{T1}$  des reduzierten Systems 8. Ordnung und des FE-Modells in Abhängigkeit der Hubwagenhöhenposition  $l_{HW}$ ; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg

Aus der Auswertung folgt, dass die größten Schwingamplituden am Hubwagen in  $z$ -Richtung in den Hubhöhen entstehen, in denen die Nachgiebigkeit des Tragwerkes – d. h. Nachgiebigkeit resultierend aus Überlagerung der einzelnen Eigenfrequenzen mit den höchsten Steifigkeitsabfällen – am größten ist. Abbildung 3.21 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Die höchsten Amplituden resultieren bei mittlerer Hubwagenhöhenposition. Hier dominieren die 1. Biege- und 1. Torsionseigenfrequenz. Bewegt man sich mit dem Hubwagen von der mittleren Lage nach oben oder nach unten, so kommt auch die Amplitudenverstärkung durch die 2. Biegeeigenfrequenz dazu. Die kleinsten Amplituden der Eigenfrequenzen sind dagegen in den Randbereichen anzutreffen – untere und obere Hubwagenpositionen, an denen alle Moden die Schwingknoten besitzen.



**Abbildung 3.21:** Amplitudengang in Abhängigkeit der Hubwagenhöhenposition  $l_{HW}$  des reduzierten Systems 6. Ordnung bei harmonischer Einheitskraft-Erregung und Auswertung am zweiten LAM; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg





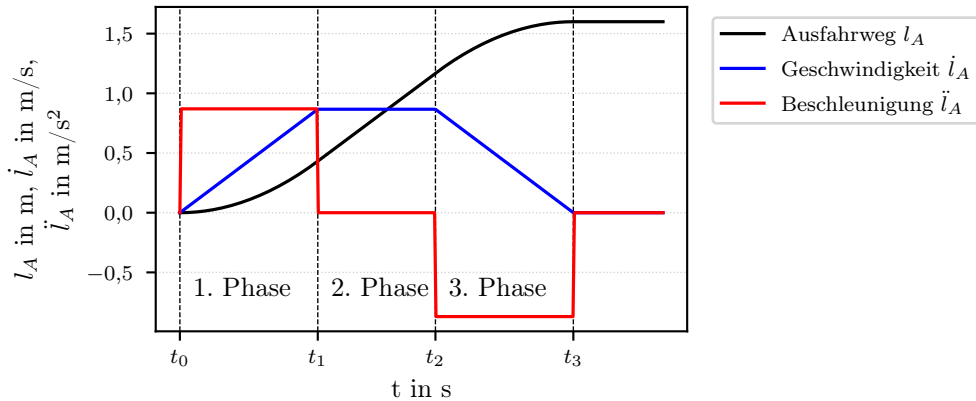
# 4 Regelungsentwurf

Dieses Kapitel behandelt das Thema der aktiven Querschwingungskompensation. Zunächst erfolgt die Vorstellung der konventionellen LAM-Betriebsweise mittels 7-Phasen-Bewegung. Diese bildet die Grundlage für den Vergleich und die Bewertung des nachfolgend vorgestellten Regelungskonzeptes für die schwingungsreduzierte LAM-Betriebsweise. Das Regelungskonzept besteht aus einer Vorsteuerung – d. h. die Planung einer schwingungsoptimalen Trajektorie für den Ein- bzw. Ausfahrtvorgang – und einem Folgeregler, der die Bewegung des LAM um die geplante Trajektorie stabilisiert.

## 4.1 Vorsteuerungsentwurf

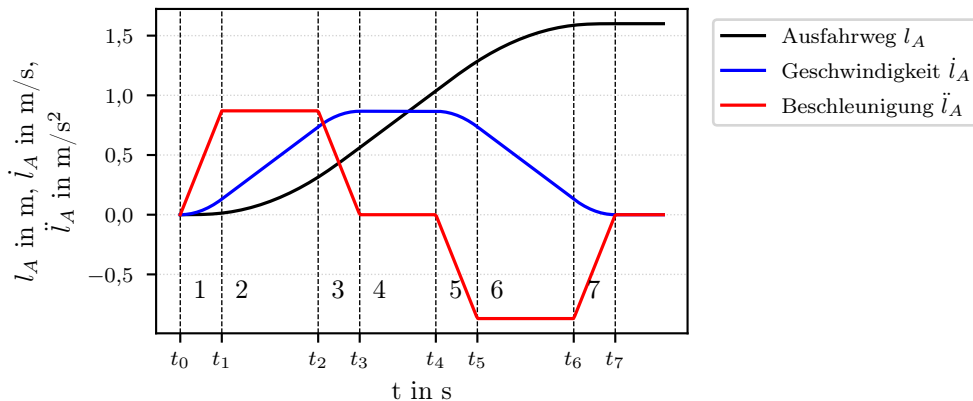
### 4.1.1 Konventionelle Steuerung

In der konventionellen Steuerung des LAM beim Ein- und Auslagerungsvorgang werden grundsätzlich zwei Lastfälle des beladenen und unbeladenen Zustandes unterschieden. Die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung sind im beladenen Lastfall deutlich kleiner als im unbeladenen, da durch das zusätzliche Gewicht der Nutzlast höhere Trägheitskräfte hervorgerufen werden, die vom Tragwerk des RBG aufgenommen werden müssen. Außerdem sind die auf die transportierte Ware maximal einwirkenden Lasten beschränkt. Dadurch sollen Beschädigungen am Regal und RBG beim Ein- und Auslagern verhindert werden. Unter Annahme einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ergibt sich für eine angestrebte minimale LAM-Ausfahrtzeit ein trapezförmiger Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf beim Ausfahren der Teleskopgabel (siehe Abbildung 4.1).



**Abbildung 4.1:** Ausfahrweg  $l_A(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{l}_A(t)$  und Beschleunigung  $\ddot{l}_A(t)$  einer 3-Phasen-Bewegung des LAM für beladenen Lastfall

Für die Überführung des LAM aus einer Startposition  $l_A(t_0) = 0$  m zu der Zielposition  $l_A(t_3) = 1,6$  m findet eine 3-Phasen-Bewegung statt – konstante Beschleunigung (1. Phase  $t_0$  bis  $t_1$ ), Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit (2. Phase  $t_1$  bis  $t_2$ ) und Bremsvorgang mit konstanter negativer Beschleunigung (3. Phase  $t_2$  bis  $t_3$ ). Die Verläufe sind beim Einfahren identisch bis auf ein umgekehrtes Vorzeichen durch die Änderung der Bewegungsrichtung. Bei dieser idealisierten 3-Phasen-Bewegung ist der Beschleunigungsverlauf nicht stetig, er weist Sprünge bei  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$  auf. Hierdurch werden Stöße in das System eingeleitet, die Schwingungen im Tragwerk induzieren und somit die Dauer des LAM-Spiels erhöhen. In der Praxis ist diese sprunghafte Anregung jedoch nicht realisierbar. In Realsystemen, wie dem RBG, wird zur Vermeidung von Materialschädigungen ein ruckbegrenzender, s-förmiger Verlauf der Beschleunigung verwendet (siehe Abbildung 4.2). Die maximale Beschleunigung wird innerhalb der Ausrundungszeit  $t_r$  erreicht. Diese wird unabhängig von der Masthöhe oder dem Beladungszustand auf einen konstanten Wert eingestellt [SG11]. Die 3-Phasenbewegung wird durch vier Ausrundungsphasen zu einer 7-Phasen-Bewegung erweitert. Dadurch werden zwar stoßartige Anregungen gemildert, im Vergleich zur 3-Phasen-Bewegung nimmt die Ausfahrdauer jedoch zu.



**Abbildung 4.2:** Ausfahrweg  $l_A(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{l}_A(t)$  und Beschleunigung  $\ddot{l}_A(t)$  einer 7-Phasen-Bewegung des LAM für den beladenen Lastfall

Damit ist mit der 7-Phasen-Bewegung mit maximalen Fahrparametern und vorgegebener Ruckbegrenzung zwar der schnellste Ein- und Ausfahrvorgang realisierbar, bezogen auf die LAM-Spielzeit ist diese Art der Steuerung jedoch nicht optimal, aufgrund der verbleibenden Restschwingung infolge dynamischer Anregung. Sind die maximalen Fahrparameter, die Ausrundungszeit und die Ausfahrstrecke bekannt, so ist die Berechnung der Trajektorie einer 7-Phasen-Bewegung deterministisch (siehe Anlage C).

#### 4.1.2 Beruhigungszeit beim Ein-/Auslagerungsvorgang

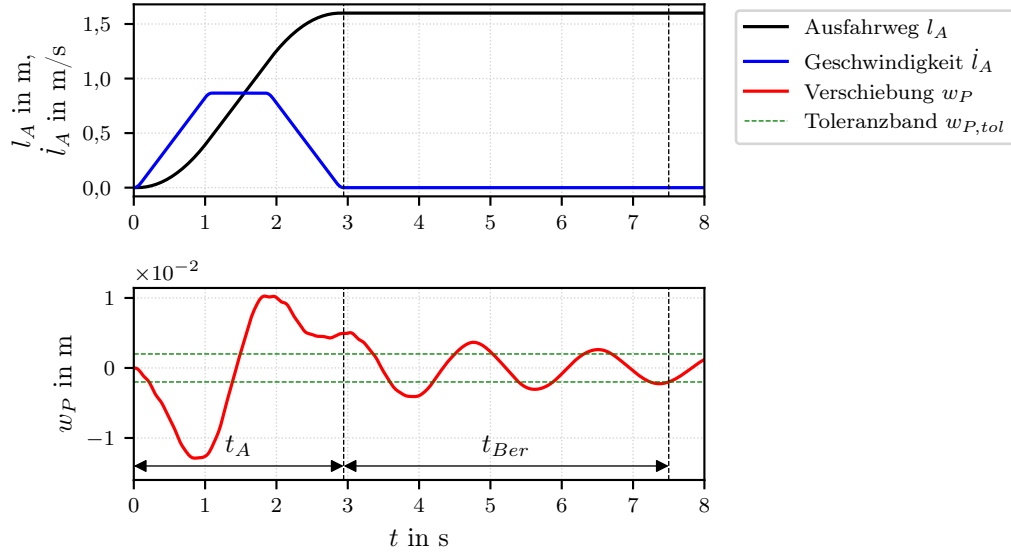
Die Beruhigungszeit  $t_{Ber}$  ist die Zeit, die vergehen muss, bis die Restschwingungen<sup>1</sup> nach einem Ein- bzw. Ausfahrvorgang auf eine zulässige Amplitude abklingen. Die geltenden Normen für RBG geben keine Auskunft darüber, wie hoch die zulässige Amplitude sein soll. Für die Restschwingungen in  $x$ -Richtung, d. h. Schwingungen in Gassenrichtung nach dem Fahr- und Hubvorgang des RBG, ist eine zulässige Amplitude von 2 mm für die ausreichend genaue Positionierung in der Praxis üblich [Die99, S. 12]. Um die Einleitung der Horizontalkräfte in die Regalkonstruktion zu minimieren und Kollisionen mit der Durchsichersicherung des Regalfachs zu vermeiden, wird in dieser Arbeit auch für die Schwingungen in  $z$ -Richtung eine zulässige Amplitude von 2 mm angesetzt.

Abbildung 4.3 veranschaulicht die Bestimmung der Beruhigungszeit am Beispiel eines Ausfahrvorgangs mit konventionellen Trajektorie. Darin stellt  $w_P(y,t)$  die resultierende dynamische Tragwerkverschiebung – resultierend aus Biege- und Torsionsschwingungen – in der Höhe des Hubwagens  $l_{HW}$  und  $w_{P,tol}$  das Toleranzband für zulässigen

<sup>1</sup>Hierbei handelt es sich um Schwingungen in  $z$ -Richtung am aktuierten LAM.

Amplituden dar. Demzufolge ergibt sich die gesamte Ausfahrzeit zu:

$$t_{A,ges} = t_A + t_{Ber} \quad (4.1)$$



**Abbildung 4.3:** Bestimmung der Beruhigungszeit  $t_{Ber}$  nach dem Ausfahrvorgang mit dem Geschwindigkeitsprofil  $\dot{l}_A(t)$ . Die Beruhigungsphase gilt als abgeschlossen, wenn die Balkenverschiebung  $w_P(t)$  zum ersten Mal das Toleranzband  $w_{P,tol}$  betritt und anschließend in diesem verbleibt

### 4.1.3 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

Der von FLIESS et al. [Fli+92; Fli+93; Fli+95] eingeführte Begriff *Flachheit* eines Systems bedeutet, dass die Gleichungen zur Beschreibung der Systemdynamik sich so umformen lassen, dass sich alle Zustandsgrößen in  $\mathbf{x}$  und alle Stellgrößen in  $\mathbf{u}$  mit einem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f$  und seinen Zeitableitungen wie folgt darstellen lassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{\Psi}(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}), \\ \mathbf{u} &= \tilde{\Theta}(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+1)}) \quad \text{mit } \beta < \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für SISO-Systeme  $n$ -ter Ordnung – Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang (engl. single input, single output) – vereinfacht sich (4.2) zu [Ada18, S. 210]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{\Psi}(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-1)}), \\ u &= \tilde{\Theta}(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n)}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Der flache Ausgang  $y_f(t)$  lässt sich zudem umgekehrt aus dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  und dem Eingang  $u$  bestimmen. Des Weiteren gilt für lineare Systeme, dass ein steuerbares System immer flach ist. Diese Eigenschaft macht man sich bei der Trajektorienplanung zu nutze, da sich bei flachen Systemen durch Vorgabe des gewünschten Ausgangsverlaufs der passende Eingangverlauf einfach bestimmen lässt. Voraussetzung hierfür ist die Identifizierung eines flachen Ausgangs.

### Flacher Ausgang

Da das lineare System (3.160) sowie dessen reduzierte Darstellung entsprechend (3.183) als steuerbar nachgewiesen wurde, handelt es sich um ein flaches System. Zur Identifizierung eines flachen Ausgangs bietet sich die Transformation in die Regelungsnormalform als besonders vorteilhaft an, da der flache Ausgang sich aus dieser direkt bestimmen lässt. Für die Regelungsnormalform gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_R &= \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{B}_R u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{D}_R u(t)\end{aligned}\quad (4.4)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ * & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_R &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_R &= [* \ * \ \dots \ * \ *], & \mathbf{D}_R &= [*].\end{aligned}\quad (4.5)$$

Diese Regelungsnormalform wird durch die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_R$  gebildet:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{x} &\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\mathbf{A}_R &= \mathbf{T}_R \mathbf{A} \mathbf{T}_R^{-1}, & \mathbf{B}_R &= \mathbf{T}_R \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_R &= \mathbf{C} \mathbf{T}_R^{-1}, & \mathbf{D}_R &= \mathbf{D} \stackrel{\text{hier}}{=} 0\end{aligned}\end{aligned}\quad (4.6)$$

mit

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^\top = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{C}^{-1}.\quad (4.7)$$

Hier wird nun auch die Notwendigkeit der Steuerbarkeit des Systems ersichtlich, da nur eine Steuerbarkeitsmatrix mit vollem Rang invertiert werden kann.

Die Regelungsnormalform zeigt, dass das SISO-System aus einer Integrator-kette  $n$ -ter Ordnung besteht. Dabei wirkt eine Dynamik mit der Eingangsgröße nur auf die letzte Zustandskomponente ein. Alle weiteren Zustandskomponenten lassen sich durch

einfaches Integrieren der letzten Zustandskomponente berechnen. Demzufolge kann laut der Flachheitsdefinition aus (4.3) der flache Ausgang für Systeme mit nur einem Eingang über das Ende der Integratorkette und damit die erste Zustandskomponente der Regelungsnormalform definiert werden [Ada18, S. 220]:

$$y_f = k x_{R,1} = k \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.8)$$

Mit der Wahl  $k = 1$  lassen sich nun die Funktionen  $\tilde{\Psi}$  und  $\tilde{\Theta}$  aus (4.3) für lineare SISO-Systeme angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \tilde{\Psi}(\mathbf{y}_f^{[n-1]}) &= \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{x}_R &= \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{y}_f^{[n-1]}, \\ u = \tilde{\Theta}(\mathbf{y}_f^{[n]}) &= \dot{x}_{R,n} - \mathbf{A}_{R,n} \mathbf{x}_R &= y_f^{(n)} - \mathbf{A}_{R,n} \mathbf{y}_f^{[n-1]}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit

$$\mathbf{y}_f^{[n]} = \begin{bmatrix} y_f \\ \dot{y}_f \\ \vdots \\ y_f^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{A}_{R,n}$  die letzte Zeile von  $\mathbf{A}_R$ .

### Gleichgewichtslagen des Gesamtsystems

Wie im Abschnitt 3.6.1 bereits eingeführt, gilt für den Gleichgewichtszustand  $\mathbf{x}_g$  eines Systems in Zustandsraumdarstellung:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \mathbf{x}_g \quad (4.11)$$

Setzt man in diese Bedingung die Systemmatrix des Gesamtsystems (3.183) ein, so stellt man fest, dass es nicht nur einen, sondern unendlich viele Gleichgewichtszustände

$$\mathbf{x}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mit } l_A \in \mathbb{R} : 0 \leq l_A \leq l_{A,max} \quad (4.12)$$

gibt. Nach dem Einsetzen von  $\mathbf{x}_g$  in die Ausgangsgleichung (3.183), folgt für die Gleichgewichtslagen (Ruhelagen) des Ausgangs

$$y_g = l_A. \quad (4.13)$$

Die Ruhelagen des flachen Ausgangs lassen sich aus der Regelungsnormalform (4.4) bestimmen. Aus der Definition des Gleichgewichtszustandes folgt:

$$\dot{\mathbf{x}}_{R,g} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

und damit

$$\mathbf{x}_{R,g,i} = 0 \quad \text{mit } i \in \{2, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

Da die Definition des flachen Ausgangs (4.8) auch im Gleichgewichtszustand gilt, folgt:

$$y_{f,g} = x_{R,g,1}. \quad (4.16)$$

Mit (4.15) und (4.16) lässt sich der Gleichgewichtszustand in der Regelungsnormalform angeben zu:

$$\mathbf{x}_{R,g} = \begin{bmatrix} y_{f,g} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Setzt man diesen in die Ausgangsgleichung der Regelungsnormalform ein, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Ruhelagen des realen und des flachen Ausgangs zu:

$$y_g = C_{R,1} y_{f,g} \Leftrightarrow y_{f,g} = \frac{y_g}{C_{R,1}}. \quad (4.18)$$

Dabei ist  $C_{R,1}$  der erste Eintrag der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}_R$ .

## Trajektorienplanung

Die nachschwingungsfreie Positionierung des LAM beläuft sich in der Regelungstechnik auf eine Trajektorienplanung für die Überführung des Systems von einer Ruhelage  $\mathbf{x}_g(t=0)$ , mit dem Ausgang  $y_g(t=t_0) = y_0$  in eine andere Ruhelage  $\mathbf{x}_g(t=t_e)$  mit dem Ausgang  $y_g(t=t_e) = y_e$ . In der Regel möchte man eine Trajektorie  $y_{ref}$  vorgeben, für die die zu steuernde Größe und ihre Ableitungen bis zum Grad  $\gamma$  stetig sind. Dabei wählt man  $\gamma$  so, dass alle Eingänge, Zustandskomponenten und Ausgänge des Systems einen stetigen Verlauf von Ruhelage zu Ruhelage aufweisen, um sicherzustellen, dass das System im Endzustand wirklich ruht.

Liegt ein flaches System vor, so ist es naheliegend, die Trajektorie für den flachen Ausgang vorzugeben, denn aus diesem lassen sich alle anderen Systemgrößen ohne Lösung einer Differenzialgleichung berechnen. Dazu muss dieser bis zum Grad  $n$  stetig sein, also wählt man  $\gamma = n$ . Für die Trajektorienpunkte  $(t_0, y_0)$  und  $(t_e, y_e)$  ergeben sich somit je  $\gamma + 1$  Randbedingungen und damit insgesamt  $2\gamma + 2$  Randbedingungen an die Trajektorie (vgl. [Röb17, S. 230]):

$$\begin{aligned} y_{ref}(0) = y_0, \quad \dot{y}_{ref}(0) = 0, \quad \dots, \quad y_{ref}^{(\gamma)}(0) = 0 \\ y_{ref}(t_e) = y_e, \quad \dot{y}_{ref}(t_e) = 0, \quad \dots, \quad y_{ref}^{(\gamma)}(t_e) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Eine Trajektorie, die (4.19) erfüllt, kann grundsätzlich durch verschiedene Funktionsklassen realisiert werden. Eine einfache und in der Praxis weit verbreitete Möglichkeit ist die Trajektorienvorgabe mittels Polynom der Ordnung  $2\gamma + 1$ .

Setzt man für dieses allgemeine Polynom die oben definierten Randbedingungen (4.19) ein, so lassen sich die Koeffizienten des Polynoms und damit eine eindeutige Trajektorie finden. Alternativ kann das Polynom direkt über die Formel [PV01]

$$\phi_\gamma(\tau) = \frac{(2\gamma + 1)!}{\gamma!} \sum_{k=\gamma+1}^{2\gamma+1} \frac{(-1)^{k-\gamma-1}}{(k - \gamma - 1)!(2\gamma + 1 - k)! \cdot k} \tau^k \quad (4.20)$$

bestimmt werden. Diese Formel gibt das Polynom für die Überführung zwischen Trajektorienpunkten  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  an und soll deshalb mit

$$\tau = \frac{t}{t_e}, \quad y_{ref}(t) = \frac{\phi_\gamma(\tau)}{y_e} \quad (4.21)$$

zurück skaliert werden zu

$$y_{ref}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ y_e \phi_\gamma\left(\frac{t}{t_e}\right) & , t \in [0, t_e] \\ y_e & , t > t_e \end{cases} . \quad (4.22)$$

Mit der Beziehung (4.18) lässt sich die Trajektorie für den Ausgang (4.22) in flachen Koordinaten angeben zu:

$$y_{f,ref}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{y_e}{C_{R,1}} \phi_\gamma\left(\frac{t}{t_e}\right) & , t \in [0, t_e] \\ \frac{y_e}{C_{R,1}} & , t > t_e \end{cases} . \quad (4.23)$$

Ist die Trajektorie für den flachen Ausgang bekannt, so folgt aus dieser der reale Eingangsgrößenverlauf:

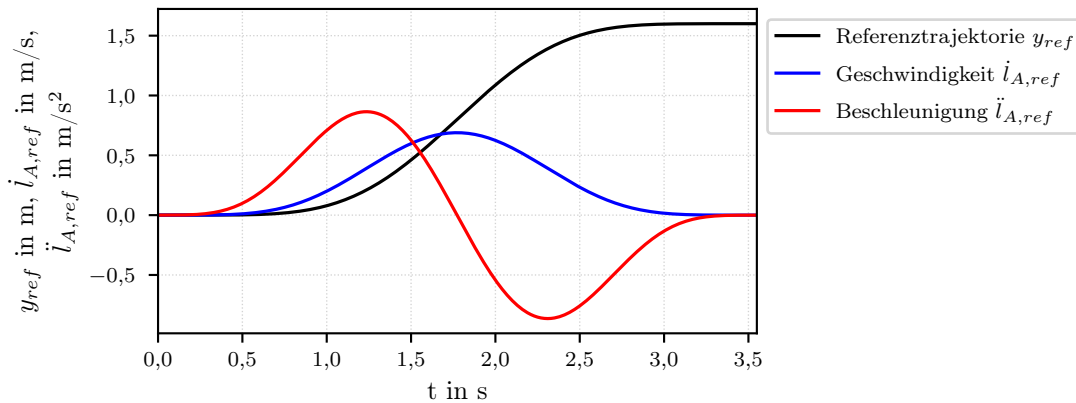
$$u_{ref}(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ y_{f,ref}^{(n)} - \mathbf{A}_{R,n} \mathbf{y}_{f,ref}^{[n-1]} & , t \in [0, t_e] \\ 0 & , t > t_e \end{cases} . \quad (4.24)$$

Bei dem kraftgesteuerten System entspricht der Eingangsgrößenverlauf der LAM-Kraft  $u_{ref}(t) = F_{LAM}(t)$ . Da das LAM in der Ausfahrbeschleunigung und Ausfahrsgeschwindigkeit begrenzt ist (siehe Tabelle 3.2), sollten für die Untersuchung der Wirkung dieser Begrenzungen auf den Eingangsgrößenverlauf auch die Geschwindigkeitstrajektorie  $\dot{i}_{A,ref}(t)$  und Beschleunigungstrajektorie  $\ddot{i}_{A,ref}(t)$  des LAM bekannt sein. Die gesuchten Trajektorien folgen aus (3.148):

$$\ddot{i}_{A,ref}(t) = \frac{u_{ref}(t)}{m_L + m_{red}}, \quad \dot{i}_{A,ref}(t) = \int_{t_0}^{t_e} \ddot{i}_{A,ref}(t) dt. \quad (4.25)$$

Abbildung 4.4 stellt die aus dem flachen Ausgang abgeleitete Trajektorie  $y_{ref}(t)$  sowie den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf am Beispiel des Ausfahrvorgangs des 2. LAM dar (Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg, Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m).



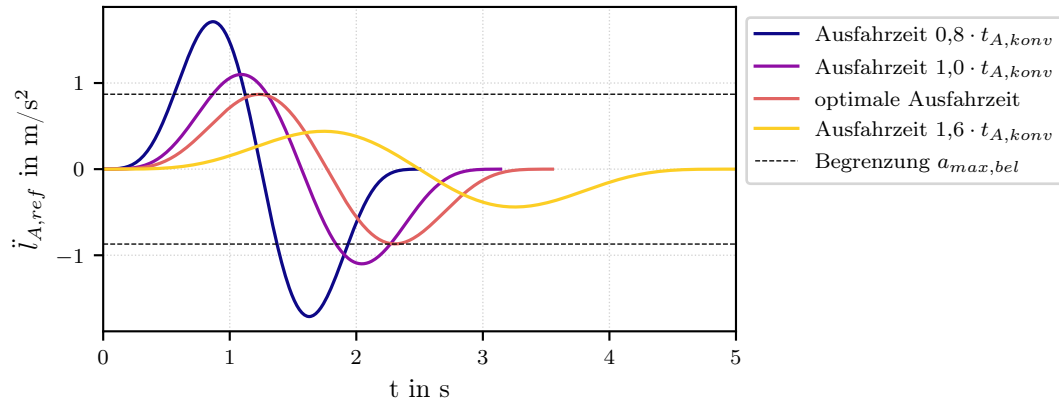


**Abbildung 4.4:** Referenztrajektorie  $y_{ref}(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{l}_{A,ref}(t)$  und Beschleunigung  $\ddot{l}_{A,ref}(t)$  abgeleitet aus dem flachen Ausgang für den Ausfahrvorgang des 2. LAM; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m

### Stellgrößenbegrenzung

Wie bereits beschrieben ist der schnellste Ausfahrvorgang nur mit der konventionellen Trajektorie bei maximalen Fahrparametern und vorgegebener Ruckbegrenzung möglich. Setzt man bei der Planung der flachheitsbasierten Trajektorie für die Überführungszeit die Ausfahrzeit der konventionellen Trajektorie  $t_{A,konv}$  ein, so führt dies zwangsläufig zur Überschreitung der Stellgrößenbegrenzung<sup>2</sup>. Abbildung 4.5 stellt LAM-Beschleunigungstrajektorien, geplant mit unterschiedlichen Überführungszeiten, dar. Eine optimale Trajektorie ergibt sich, wenn die zulässige Beschleunigung ausgereizt aber nicht überschritten wird, d. h. wenn das Betragsmaximum der Trajektorie mit der Begrenzung  $a_{max,bel}$  zusammenfällt. Solche zeitoptimalen Trajektorien lassen sich mittels iterativer numerischer Optimierung berechnen (siehe Anhang D).

<sup>2</sup>Die Begrenzung ist in der Regel durch max. Fahrparameter des LAM bzw. Sicherheitsvorschriften vorgegeben.



**Abbildung 4.5:** LAM-Beschleunigungstrajektorien in Abhängigkeit von der Ausfahrzeit, abgeleitet aus der Trajektorie des flachen Ausgangs  $y_{f,ref}$  für den Ausfahrvorgang des 2. LAM; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m

## 4.2 Folgereglerentwurf

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf einen offenen Regelkreis, d. h. Steuerung des Teleskopantriebs durch Vorgabe der Stellgröße für die nachschwingungsfreie Positionierung mittels flachheitsbasierter Trajektorienplanung. Geht man davon aus, dass das zugrundeliegende mechanische Modell sich wie das echte System (reales RBG) verhält, so würde die reine Steuerung ausreichen, um das LAM nachschwingungsfrei zu positionieren. Da aber bei der Modellierung Annahmen, Vereinfachungen und Vernachlässigungen getroffen werden, weicht das mechanische Modell immer von dem realen System ab. Bei reiner Steuerung würden am realen System somit immer Abweichungen zur geplanten Trajektorie auftreten. Um diese Abweichungen auszugleichen, benötigt man eine Regelung, die dafür sorgt, dass das reale System der geplanten Trajektorie folgt. Dementsprechend wird der Regler als Folgeregler bezeichnet.

### 4.2.1 Flachheitsbasierter Ausgangsfolgeregler

Liegt ein *flaches* System vor, so ist die Beziehung zwischen dem Eingang  $u$  und dem flachen Ausgang  $y_f$ , wie aus (4.9) ersichtlich, linear. Deshalb kann die Ausgangsfolgeregelung auf Basis exakter Eingangs-Ausgangs-Linearisierung entworfen werden [Röb17, S. 225]. Die hierfür zugrundeliegende Systemdarstellung erreicht man durch Umformung der Regulationsnormalform mit dem flachen Ausgang in die

BRUNOVSKÝ-Normalform

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_R &= \mathbf{A}^* \mathbf{x}_R + \mathbf{B}^* \nu(t), \\ y_f(t) &= \mathbf{C}^* \mathbf{x}_R\end{aligned}\quad (4.26)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^* = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (4.27)$$

und dem BRUNOVSKÝ-Eingang

$$\nu(t) = \mathbf{A}_{R,n} \mathbf{x}_R + u(t) = y_f^{(n)}. \quad (4.28)$$

Bei Vorgabe einer Solltrajektorie  $y_{f,ref}(t)$  für den flachen Ausgang kann das Folgeverhalten anhand des Fehlers

$$\epsilon_f = y_f - y_{f,ref} \quad (4.29)$$

beschrieben werden. Darin stellt  $y_f$  den flachen Systemausgang, der aus der Rückführung des vollständigen Systemzustands  $\mathbf{x}$  und (4.8) resultiert, dar. Die Fehlerdynamik kann nun in Form einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung definiert werden zu:

$$\epsilon_f^{(n)} + \alpha_{n-1} \epsilon_f^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{\epsilon}_f + \alpha_0 \epsilon_f = 0. \quad (4.30)$$

Dies entspricht formal einem PD-Regler für den flachen Ausgang. Die Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  können dabei durch Polvorgabe des dazugehörigen, charakteristischen Polynoms gewählt werden. Es ist zu beachten, dass für asymptotisch stabile Fehlerdynamik des Folgereglers die Pole ausschließlich in der linken komplexen Zahlenebene platziert werden müssen.

Um bleibende Regelabweichungen zu kompensieren, kann die Fehlerdynamik (4.30) um den I-Anteil ergänzt werden zu [Röb17, S. 229]:

$$\epsilon_f^{(n)} + \alpha_{n-1} \epsilon_f^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{\epsilon}_f + \alpha_0 \epsilon_f + K_I \int_0^t \epsilon_f(\tau) d\tau = 0 \quad (4.31)$$

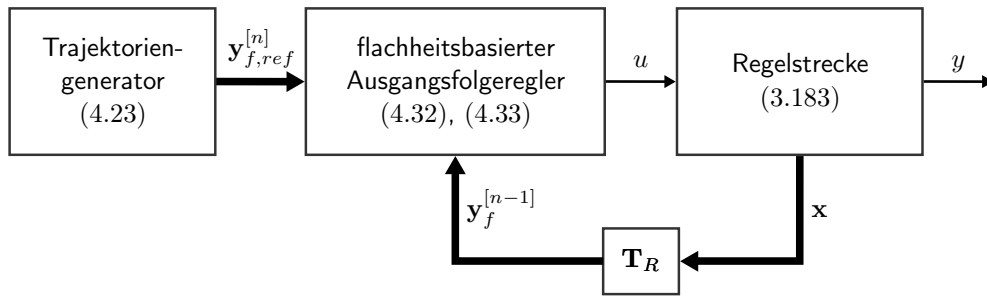
Aus (4.28), (4.29) und (4.31) folgt das Regelgesetz für den Brunovsky-Eingang:

$$\begin{aligned}\nu(t) = y_f^{(n)} &= y_{f,ref}^{(n)} + \epsilon_f^{(n)} \\ &= y_{f,ref}^{(n)} - \alpha_{n-1} \epsilon_f^{(n-1)} - \dots - \alpha_1 \dot{\epsilon}_f - \alpha_0 \epsilon_f - K_I \int_0^t \epsilon_f(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (4.32)$$

Nach Einsetzen von (4.32) in (4.28) und Umstellen des Ergebnisses nach  $u$ , ergibt sich das Regelgesetz für den realen Eingang in Abhängigkeit des flachen Ausgangs zu:

$$u(t) = \nu(t) - \mathbf{A}_{R,n} \mathbf{y}_f^{[n-1]}. \quad (4.33)$$

Abbildung 4.6 stellt die Struktur der flachheitsbasierten Ausgangsfolgeregung mit vollständiger Zustandsrückführung dar.



**Abbildung 4.6:** Geschlossener Regelkreis der flachheitsbasierten Ausgangsfolgeregelung mit vollständiger Zustandsrückführung

## 4.2.2 Sensorplatzierung und Beobachterentwurf

Wie aus dem vorangegangenen Abschnitt ersichtlich, ist für die Implementierung eines flachheitsbasierten Folgereglers eine vollständige Zustandsrückführung der Regelstrecke notwendig (siehe Abbildung 4.6). Dabei sind die Messgrößen so zu wählen, dass aus diesen der Systemzustand zu jeder Zeit rekonstruiert werden kann. Hierzu müssen die gewählten Messgrößen durch die Systemgleichungen beschreibbar sein. Das System mit entsprechender Sensorik soll also vollständig beobachtbar sein.

Im Folgenden werden die Ausgangsgleichungen zur Beschreibung der gewählten Messgrößen aufgestellt. Diese dienen als Grundlage für den Entwurf eines Beobachters mittels KALMAN-Filter, der eine Zustandsschätzung zu jedem Zeitschritt liefert.

### Positionssensor LAM-Antrieb

Der LAM-Motor soll grundsätzlich über einen Positionssensor – in der Regel einen Inkrementalgeber – zur Überwachung der LAM-Ausfahrweite verfügen. Bei dem Inkrementalgeber lässt sich die Ausfahrweite des LAM über die Umrechnung der Inkremente in Drehwinkel und die Gesamtübersetzung des LAM  $i_{LAM}$  bestimmen. Nimmt man an, dass der Inkrementalgeber intern die Inkremente auf die Ausfahrweite des LAM umrechnet, so ergibt sich für die LAM-Position die Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} y_{LAM} &= \mathbf{C}_{LAM} \mathbf{x}, \\ \mathbf{C}_{LAM} &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

### Erfassung der Mastschwingungen

Die messtechnische Erfassung der Mastschwingungen kann mit unterschiedlichen Sensorarten, z. B. Laservibrometer, Lasertriangulationssensor, piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer, realisiert werden. Letztere finden aufgrund des einfachen Aufbaus, der kompakten Bauweise und im Vergleich zu den optischen Sensoren geringen Preisen oft ihren Einsatz in der Praxis [SB17]. Demzufolge wird im Rahmen dieser Arbeit der Einsatz von piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmern untersucht.

Ist der Beschleunigungsaufnehmer<sup>3</sup> am Hubwagen im Abstand  $e_L$  zur Mastachse angebracht, um auch Torsionsschwingungsanteile erfassen zu können, so lautet die zur Messgröße gehörige Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} y_P &= \tilde{\mathbf{C}}_P \ddot{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_P &= [\tilde{\mathbf{C}} \quad 0 \quad 0]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Setzt man für  $\ddot{\mathbf{x}}$  die Zustandsgleichung (3.183) und seine Ableitung nach der Zeit in (4.35) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} y_P &= \tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{B} \dot{u} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{A}^2 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{A} \mathbf{B} u + \tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{B} \dot{u}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aufgrund der besonderen Struktur der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  (alle geraden Einträge = 0) und der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  (alle ungeraden Einträge = 0) des nicht reduzierten Systems (3.160) ist das Produkt  $\mathbf{C}\mathbf{B} = 0$ . Aus (3.176) ist nachvollziehbar, dass diese Eigenschaft auch bei Überführung des vollen Systems in die balancierte Darstellung und anschließender Reduktion erhalten bleibt. Damit vereinfacht sich (4.35) zu

$$y_P = \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{A}^2}_{\mathbf{C}_P} \mathbf{x} + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_P \mathbf{A} \mathbf{B}}_{\mathbf{D}_P} u. \quad (4.37)$$

### System zur Messgrößenbeschreibung

Die Systemgleichungen, welche die gewählten Messgrößen nachbilden, können nun mit (3.183), (4.34) und (4.37) wie folgt aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u(t) \\ \mathbf{y}_{Mess}(t) &= \mathbf{C}_{Mess} \mathbf{x} + \mathbf{D}_{Mess} u(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit

$$\mathbf{C}_{Mess} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{LAM} \\ \mathbf{C}_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{Mess} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_P \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Die Beobachtbarkeit dieses Systems kann analog zur Beobachtbarkeit des Balkensystems (siehe Anhang B) nachgewiesen werden.

Des Weiteren erfordert die Implementierung eines digitalen, zeitdiskreten Reglers ein zugrundeliegendes, zeitdiskretes Modell. Mit einer festgelegten konstanten Abtastzeit  $T_a$  lässt sich die zeitdiskrete Repräsentation von (4.38) folgendermaßen angeben [Lun16, S. 452]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u[k] \\ \mathbf{y}_{Mess}[k] &= \mathbf{C}_{Mess} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{Mess} u[k] \end{aligned} \quad (4.40)$$

<sup>3</sup>Die Betrachtung bezieht sich auf den Einsatz von 1-Achs-Beschleunigungsaufnehmer, mit  $z$ -Achse als Messrichtung.

mit

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_a}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{T_a} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}. \quad (4.41)$$

und dem Zeitschritt  $k$ .

### Beobachterentwurf mittels Kalman-Filter

Der Einsatzzweck eines Beobachters besteht darin, eine Schätzung des aktuellen Systemzustands anhand des Eingangs- und des gemessenen Ausgangsverlaufs zu liefern. Im Rahmen dieser Arbeit dient hierfür das weit verbreitete KALMAN-Filter<sup>4</sup>. Für den Entwurf des KALMAN-Filter geht man davon aus, dass das betrachtete lineare System mit stochastischen Störungen  $\mathbf{w}[k]$  und  $\mathbf{v}[k]$  überlagert ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u[k] + \mathbf{w}[k], \\ \mathbf{y}_{Mess}[k] &= \mathbf{C}_{Mess} \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{Mess} u[k] + \mathbf{v}[k]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dabei beschreibt  $\mathbf{w}[k]$  die Störungen auf das System (Prozessrauschen) und  $\mathbf{v}[k]$  das Messrauschen

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[k] &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}), \\ \mathbf{v}[k] &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit entsprechenden Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$ . Diese sind entscheidend für die Wichtung der Messwerte gegenüber der Zustandsprädiktion, wodurch über deren Wahl das Verhalten des KALMAN-Filter eingestellt werden kann.

Je unsicherer man die Zustandsschätzung bewertet, indem man die Kovarianzen in  $\mathbf{Q}$  groß wählt, desto geringer wird im KALMAN-Filter der Einfluss der Zustandsprädiktion.

Umgekehrt kann durch die Wahl der Kovarianzen in  $\mathbf{R}$  der Einfluss der Messwerte eingestellt werden, wobei für die Schätzung letztendlich die Relation der beiden entscheidend ist. Üblicherweise kann man für  $\mathbf{R}$  anhand der Standardabweichungen  $\sigma_{LAM}$  und  $\sigma_P$ , ermittelt aus der Aufzeichnung der Messwerte in einem definierten Systemzustand/Ruhezustand, folgende Kovarianzmatrix aufstellen:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{LAM}^2 & \\ & \sigma_P^2 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Das KALMAN-Filter ist ein rekursives Verfahren, das mit jeder Iteration die Kovarianz des Schätzfehlers

$$\mathbf{P}k = \mathbb{E}[(\mathbf{x}[k] - \hat{\mathbf{x}}[k]) (\mathbf{x}[k] - \hat{\mathbf{x}}[k])^\top] \quad (4.45)$$

minimiert. Dabei bezeichnet der Schätzfehler die Differenz zwischen dem realen Zustand  $\mathbf{x}$  und dem geschätzten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Der Algorithmus des KALMAN-Filter lässt sich in drei Schritte zusammenfassen: Initialisierung, Prädiktion und Korrektur.

---

<sup>4</sup>Der Beobachterentwurf erfolgt in Anlehnung an [WB95].

*Initialisierung*

Da es sich beim KALMAN-Filter um ein rekursives Verfahren handelt, müssen bei der Initialisierung die Zustandsschätzung und Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zum Zeitschritt  $k = 0$  festgelegt werden. Üblicherweise wählt man hierfür:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[0] &= \hat{\mathbf{x}}_0, \\ \mathbf{P}[0] &= \sigma_{Init}^2 \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.46}$$

mit der Standardabweichung  $\sigma_{Init}$  der Initialschätzung.

*Prädiktion*

Die Prädiktion ist der erste Schritt jeder Iteration. Dabei werden Vorhersagen für den aktuellen Zustand und dessen Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zum Zeitschritt  $k$  basierend auf den Ergebnissen der vorangegangenen Iteration zum Zeitschritt  $k - 1$  berechnet:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[k|k-1] &= \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}[k-1] + \mathbf{B}_d u[k-1], \\ \mathbf{P}[k|k-1] &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}[k-1] \mathbf{A}_d^\top + \mathbf{Q}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

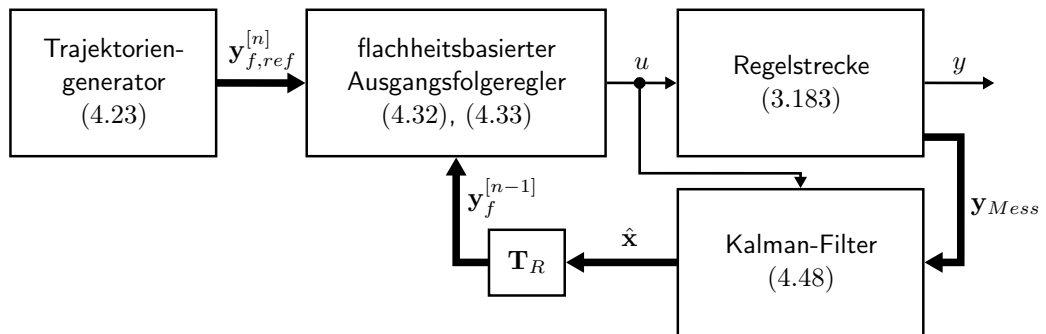
*Korrektur*

Im zweiten Schritt jeder Iteration erfolgt die Korrektur der Vorhersage anhand der aktuellen Messwerte und der Schätzung für die Messausgänge:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}[k] &= \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] + \mathbf{K}[k] (\mathbf{y}_{Mess}[k] - \mathbf{C}_{Mess} \hat{\mathbf{x}}[k|k-1] - \mathbf{D}_{Mess} u[k]), \\ \mathbf{K}[k] &= \mathbf{P}[k|k-1] \mathbf{C}_{Mess}^\top (\mathbf{C}_{Mess} \mathbf{P}[k|k-1] \mathbf{C}_{Mess}^\top + \mathbf{R}[k])^{-1}, \\ \mathbf{P}[k] &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}[k] \mathbf{C}_{Mess}) \mathbf{P}[k|k-1].\end{aligned}\tag{4.48}$$

Dabei erfolgt die Wichtung der Korrektur gegenüber der Prädiktion über die KALMAN-Matrix  $\mathbf{K}$ .

Abbildung 4.7 zeigt die vereinfachte Darstellung des vollständigen Regelkreises mit dem KALMAN-Filter als Beobachter.



**Abbildung 4.7:** Geschlossener Regelkreis der flachheitsbasierten Ausgangsfolgeregung mit Beobachter

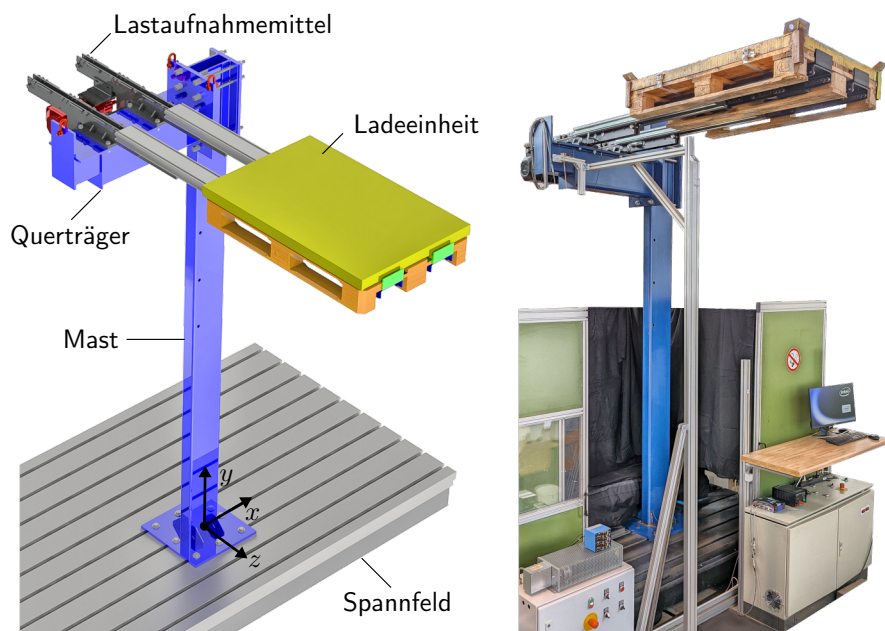


# 5 Experimentelle Untersuchungen

Die bisherigen Überlegungen zur aktiven Querschwingungskompensation waren theoretischer Natur. Zur Validierung des vorgestellten Regelungskonzeptes sind daher experimentelle Untersuchungen am Versuchsstand erforderlich. Im folgenden Kapitel wird zunächst der Versuchsstand und dessen Aufbau vorgestellt. Es folgt die Darstellung einer systematischen Parametrierung des Beobachters und des Folgereglers. Eine Diskussion der Ergebnisse der durchgeführten Experimente zur konventionellen und schwingungsreduzierten LAM-Betriebsweise schließt das Kapitel ab.

## 5.1 Versuchsstand

Für die Untersuchung des in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Konzepts zur Querschwingungskompensation durch Regelung des Teleskopantriebs, wurde an der Professur für Technische Logistik der Technischen Universität Dresden ein Versuchsstand aufgebaut (siehe Abbildung 5.1).



**Abbildung 5.1:** Aufbau des Versuchsstandes; CAD-Modell (links); realer Versuchsstand (rechts)

Die Tragwerkkonstruktion besteht aus einem einseitig eingespannten Mast und einem höhenverstellbaren Querträger. An diesem ist ein LAM der Fa. MIAS mit max. Traglast von 1000 kg montiert. Durch die schlanke Mastkonstruktion und der exzentrischen Lagerung des LAM kann dem Referenz-RBG ähnliches Schwingverhalten – vergleichbare Eigenfrequenzen und Schwingamplituden – beim Ein- und Ausfahrvorgang nachgebildet werden.

Abbildung 5.2 stellt den Messaufbau des Versuchsstands dar. Der LAM Antrieb erfolgt über einen Drehstrom-Asynchronmotor (SEW-EURODRIVE R37 RDS90), der über einen sin/cos-Geber zur Position- und Drehzahlüberwachung verfügt. Für die Antriebssteuerung kommt ein programmierbarer Frequenzumrichter (SEW-EURODRIVE MOVIDRIVE<sup>®</sup>MDX61B, Betriebsmodus - Drehzahlsteuerung) zum Einsatz. Neben dem Motor selbst sind an dem Frequenzumrichter die Hardwareendschalter zur Endlagenüberwachung des LAM sowie ein unidirektionaler<sup>1</sup>, piezoelektrischer Beschleunigungssensor (MMF KS95B100), der die Schwingbeschleunigung  $\ddot{w}_P$  im Punkt  $P$  erfasst, angeschlossen. Die Steuerung des Versuchsablaufs übernimmt ein Mess- und Steuerungsrechner, der über eine CAN-Schnittstelle<sup>2</sup> mit dem Frequenzumrichter verbunden ist. Auf dem Messrechner ist ein digitaler Regler, in Form eines Python-Programms, implementiert. Dieser bekommt in jedem Abtastschritt die aktuelle LAM-Position sowie Schwingbeschleunigung und liefert den Stellwert für die Motordrehzahl über die CAN-Schnittstelle. Parallel dazu wird zur Bewertung der Nachschwingung der Schwingweg  $w_P$  mit einem Lasertriangulationssensor (MICRO-EPSILON optoNCDT 1300, Auflösung 25  $\mu\text{m}$ , Messfrequenz 500 Hz) erfasst.

---

<sup>1</sup>Der unidirektionale Beschleunigungssensor ist in positive  $z$ -Richtung ausgerichtet.

<sup>2</sup>Als Schnittstelle dient der PEAK PCAN-USB-Adapter mit Taktfrequenz 100 Hz.

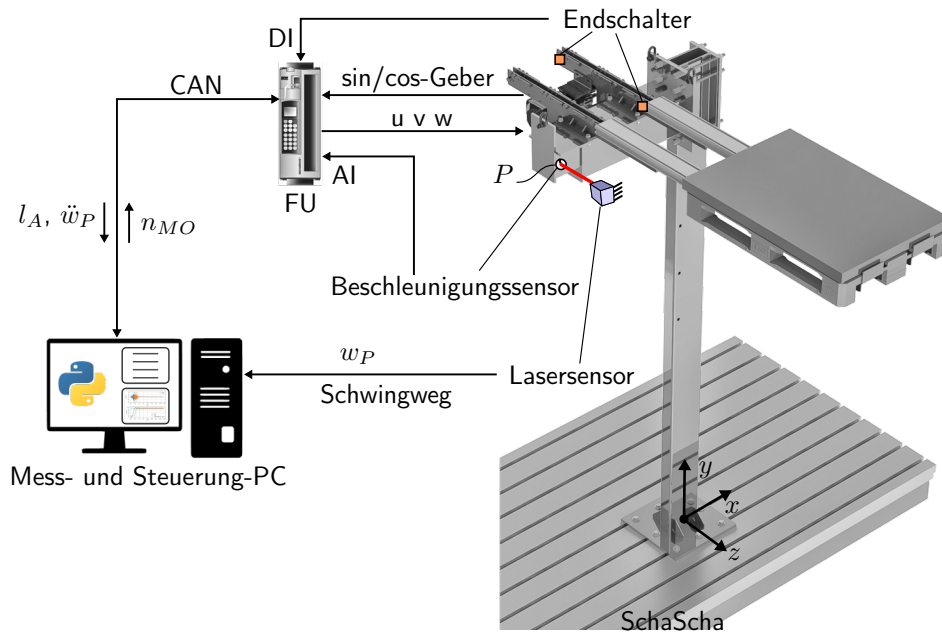


Abbildung 5.2: Messaufbau des Versuchsstands

### 5.1.1 Modell des Versuchsstands

Die Modellbildung des Versuchsstands erfolgt in Anlehnung an Kapitel 3. Abbildung 5.3 stellt das zugrundeliegende mechanische Modell dar.

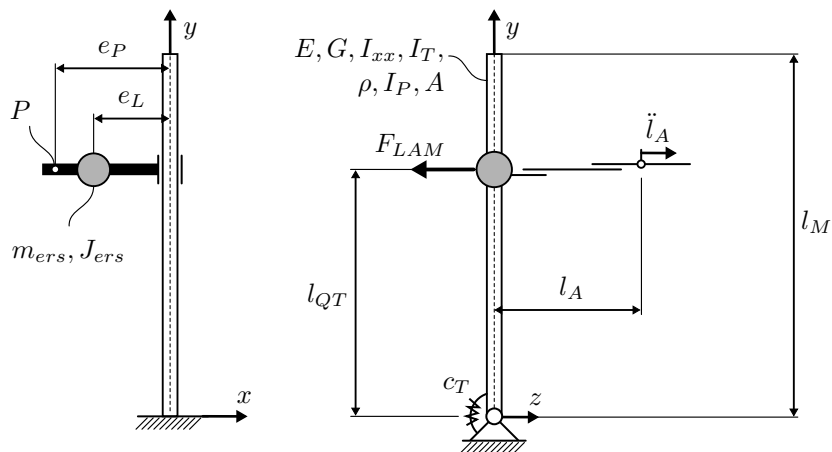


Abbildung 5.3: Mechanisches Modell des Versuchsstands

Der Mast ist als einseitig gelagerte Balken modelliert. An ihm ist ein starrer Querträger mit dem LAM in der Höhe  $l_{QT}$  arretiert. Das LAM ist dabei entsprechend Abschnitt 3.4 modelliert. Des Weiteren bildet eine Drehfeder mit der Steifigkeit  $c_T$  die nachgiebige Schraubverbindung – Verbindung des Mastes mit dem Spannfeld – nach. Tabelle 5.1

fasst die wesentlichen Modellparameter des Versuchsstands zusammen.

**Tabelle 5.1:** Parameter des Versuchsstands

Beschreibung	Parameterdefinition
<b>Hauptparameter</b>	
Gesamte Masthöhe	$l_M = 3,5 \text{ m}$
Hubhöhenbereich	$l_{QT} = 1,95, \dots, 3,33 \text{ m}$
Exzentrizität Querträger	$e_{QT} = 0,4 \text{ m}$
Exzentrizität LAM	$e_L = 0,62 \text{ m}$
Exzentrizität Punkt $P$	$e_P = 1 \text{ m}$
Masse Querträger	$m_{QT} = 194,75 \text{ kg}$
Max. Masse Ladeinheit	$m_L = 1000 \text{ kg}$
Masse LAM	$m_{LAM} = 282 \text{ kg}$
Federsteifigkeit	$c_T = 85,94 \cdot 10^5 \text{ Nm/rad}$
<b>Werkstoff- und Querschnittsparameter</b>	
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Schubmodul	$G = 0,81 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
Dichte	$\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Querschnittsfläche	$A = 464 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
Flächenträgheitsmoment	$I_{xx} = 80,69 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$
Torsionsträgheitsmoment	$I_T = 220,24 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$
Polares Flächenträgheitsmoment	$I_P = 422,35 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$
<b>LAM-Parameter</b>	
LAM Ausfahrweg	$l_A = 0, \dots, 1,4 \text{ m}$
Max. Beschleunigung (beladen)	$a_{max,bel} = 0,6 \text{ m/s}^2$
Max. Beschleunigung (leer)	$a_{max,leer} = 4 \text{ m/s}^2$
Max. Geschwindigkeit (beladen)	$v_{max,bel} = 0,83 \text{ m/s}$
Max. Geschwindigkeit (leer)	$v_{max,leer} = 1,67 \text{ m/s}$

Für weitere Betrachtungen lassen sich aus den Massen und den Trägheiten des Querträgers, des LAM und der Ladeinheit die Ersatzmasse

$$m_{ers} = m_{QT} + m_{LAM} + m_L \quad (5.1)$$

und das Ersatzträgheitsmoment bezüglich der  $y$ -Achse

$$J_{ers} = m_{QT}e_{QT}^2 + (m_{LAM} + m_L)e_L^2 \quad (5.2)$$

bilden.

Mit diesen Ersatzgrößen können nun die Eigenfrequenzen und dazugehörige Schwingformen der Balkenstruktur berechnet werden. Dabei gelten folgende Randbedingungen:

elastische Lagerung an der Stelle  $y = 0$

$$\begin{aligned} W|_{y=0} &= 0, \\ M_x|_{y=0} &= c_T \phi|_{y=0}, \\ \Psi|_{y=0} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

und freies Ende an der Stelle  $y = l_M$

$$\begin{aligned} Q|_{y=l_M} &= 0, \\ M_x|_{y=l_M} &= 0, \\ M_y|_{y=l_M} &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nach Aufstellung der Systemgleichungen und anschließender Reduktion des Balkensystems (siehe Abschnitt 3.6) nimmt das Gesamtsystem in Zustandsraumdarstellung (inklusive LAM Dynamik (3.159)) folgende Form an<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{x}}_A \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \\ & \mathbf{A}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u, \\ y(t) &= \underbrace{[\tilde{\mathbf{C}} \quad \mathbf{C}_A]}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

## 5.2 Parametrierung

Die Parametrierung des Beobachters und des Folgeregler erfolgt hier nach dem *Separationstheorem* [Föl16, S. 364]. Dieses besagt, dass die Pole des geschlossenen Regelkreises ohne Beobachter und die Pole des Beobachters unabhängig voneinander beliebig vorgegeben werden können, wenn die Strecke beobachtbar und steuerbar ist. Da die betrachtete Strecke die genannten Kriterien erfüllt, finden nachfolgend die Parametrierung des Beobachters und des Folgeregler getrennt statt.

### 5.2.1 Parametrierung des Beobachters

Die Schätzung der Systemzustände erfolgt mittels KALMAN-Filter entsprechend Abschnitt 4.2.2. Über die Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  (vergleiche (4.43)) lässt sich das KALMAN-Filter parametrieren.

<sup>3</sup>Die Beschreibung des Gesamtsystems (Versuchsstand) in Zustandsraumdarstellung erfolgt analog zur Beschreibung des RBG-Modells im Kapitel 3 (vergleiche (3.183)).

Für die verwendete Sensorkonfiguration kann die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$  wie folgt aufgestellt werden:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{LAM}^2 & \\ & \sigma_P^2 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Darin ist  $\sigma_{LAM}$  die Standardabweichung des sin/cos-Gebers zur Bestimmung der LAM-Ausfahrweite und  $\sigma_P$  die Standardabweichung des im Punkt  $P$  installierten Beschleunigungssensors (siehe Abbildung 5.2). Die Bestimmung dieser Standardabweichungen erfolgt aus der Aufzeichnung des Messrauschens im Ruhezustand. Dazu müssen sämtliche Schwingungen des Mastes abgeklungen sein. Das LAM darf dabei nicht aktuiert werden. Für die verwendete Sensorkonfiguration ergeben sich Standardabweichungen nach Tabelle 5.2

**Tabelle 5.2:** Standardabweichungen des Messrauschens

Sensor	Standardabweichung
sin/cos Geber	$\sigma_{LAM,ink} = 0,6 \text{ ink}$
Beschleunigungssensor	$\sigma_P = 2,38 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$

Da der Geber an der Motorwelle des LAM installiert ist – in  $\mathbf{R}$  jedoch die Standardabweichung der LAM-Ausfahrweitenmessung benötigt wird –, muss  $\sigma_{LAM,ink}$  wie folgt angepasst werden:

$$\sigma_{LAM} = 2\pi \frac{\sigma_{LAM,ink}}{i_{ink} i_{LAM}} \quad (5.7)$$

mit der Geberübersetzung  $i_{ink} = 4096 \text{ ink/U}$  und der Gesamtübersetzung des LAM  $i_{LAM}$  (siehe Tabelle 3.8).

Während die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$  sich aus einer Messung des Messrauschens bestimmen lässt, können die Kovarianzen des Zustandsrauschens nur empirisch bestimmt werden. Für das betrachtete System ist die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{q,1}^2 & & & & \\ & \sigma_{\dot{q},1}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{l_A}^2 & \\ & & & & \sigma_{\dot{l}_A}^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

mit Kovarianzen  $\sigma_{q,j}^2, \sigma_{\dot{q},j}^2$  für Zustandskomponenten der  $j$ -ten Eigenmode und Kovarianzen  $\sigma_{l_A}^2, \sigma_{\dot{l}_A}^2$  der LAM-Dynamik.

Die Schätzung der Kovarianzen in (5.8) erfolgt anhand des Abgleichs einer Zustandsschätzung mittels KALMAN-Filter und der Messung bei einer definierten LAM-Fahrt. Die messtechnische Erfassung einzelner Zustandskomponenten der Balkendynamik mit einem Beschleunigungssensor (siehe Abbildung 5.2) ist nicht möglich, da die

Messgröße lediglich eine aggregierte Beschleunigung aller Eigenmoden des Masten im Punkt  $P$  darstellt. Aus diesem Grund werden nicht einzelne Zustandskomponenten, sondern deren aggregierter Anteil  $y_P$  (siehe (4.37)) am Gesamtausgang mit der gemessenen Mastauslenkung  $w_P$  (siehe Abbildung 5.2) verglichen. Analog dazu lässt sich die Güte der geschätzten Zustandskomponenten der LAM-Dynamik durch ein Vergleich des Anteils  $y_{LAM}$  (siehe (4.34)) und der gemessenen LAM-Ausfahrweite  $l_A$  bewerten.

Die Initialschätzung mittels KALMAN-Filter kann zunächst unter der Annahme  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  durchgeführt werden. Da die Standardabweichung einer verrauschten Größe kleiner als die Standardabweichung deren Ableitung nach der Zeit ist, müssen bei der Wahl von Kovarianzen in  $\mathbf{Q}$  jedoch folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{q,j} &< \sigma_{\dot{q},j}, \\ \sigma_{l_A} &< \sigma_{\dot{l}_A}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Tabelle 5.3 fasst die empirisch ermittelte Standardabweichungen des Zustandsrauschen für Balken- und LAM-Dynamik zusammen. Die hierfür zugrundeliegende Messung erfolgte am LAM-Ausfahrvorgang mit der flachheitsbasierten Trajektorie

$$l_A(t = 0) = 0 \text{ m} \rightarrow l_A(t = t_A) = 1,4 \text{ m}$$

in der Höhe  $l_{QT} = 3,3 \text{ m}$  mit der Beladung  $m_L = 476 \text{ kg}$ . Abbildung 5.4 stellt die geschätzten und gemessenen<sup>4</sup> Mastauslenkungen sowie LAM-Ausfahrweite dar. Abbildung 5.4 a) und b) zeigen, wie sich das Verschieben der Wichtung

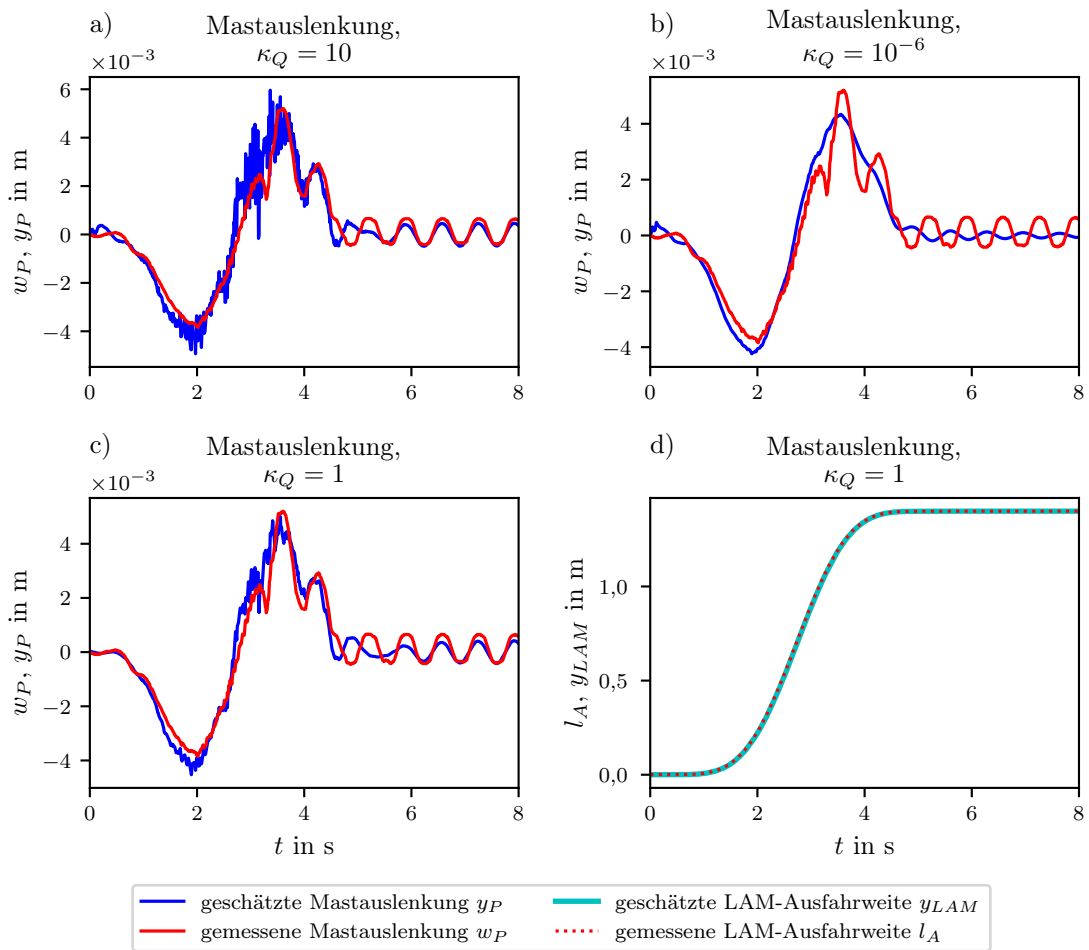
$$\mathbf{Q}^* = \kappa_Q \mathbf{Q}\tag{5.10}$$

mit einem Vorfaktor  $\kappa_Q$  zwischen dem Mess- und Zustandsrauschen auf die Schätzung der Mastauslenkung auswirkt. Es ist zu erkennen, dass große Wichtung zu Gunsten des Messrauschens ein starkes Rauschen in der Prädiktion verursacht (siehe Abbildung 5.4 a)). Während bei Verlagerung der Wichtung auf die Seite des Zustandsrauschens – d. h. bei der Schätzung wird mehr dem Modell und nicht den Messwerten vertraut – die geschätzte Mastauslenkung einem Systemausgang ohne Störeinflüsse nahe kommt, wodurch diese in der Schätzung eliminiert werden (siehe Abbildung 5.4 b)). Abbildung 5.4 c) stellt einen Kompromiss zwischen a) und b) dar. In diesem Fall ist das Rauschen der geschätzten Mastauslenkung im Vergleich zu a) gering. Dennoch werden die Störeinflüsse in der Schätzung berücksichtigt. Einen Vergleich der geschätzten und gemessenen LAM-Ausfahrweite stellt Abbildung 5.4 d) dar.

<sup>4</sup>Darstellung der gemessenen Mastauslenkung erfolgt mit Abzug der statischen Mastdurchbiegung infolge Schwerkraft, um einen Vergleich mit der geschätzten Mastauslenkung durchführen zu können.

**Tabelle 5.3:** Standardabweichungen des Zustandsrauschens

Zustandskomponente	Standardabweichung
Balkendynamik	$\sigma_{q,j} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ $\sigma_{\dot{q},j} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
LAM-Dynamik	$\sigma_{l_A} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ $\sigma_{\dot{l}_A} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$



**Abbildung 5.4:** Vergleich der geschätzten und gemessenen Mastauslenkung a), b), c) sowie LAM-Ausfahrweite d) in Abhängigkeit des Vorfaktors  $\kappa_Q$ ; LAM-Ausfahrvorgang mit der flachheitsbasierten Trajektorie  $l_A(t=0) = 0 \text{ m} \rightarrow l_A(t=t_A) = 1,4 \text{ m}$  in der Höhe  $l_{QT} = 3,3 \text{ m}$  mit der Beladung  $m_L = 476 \text{ kg}$



### 5.2.2 Parametrierung des Folgereglers

Zur Stabilisierung der geplanten Trajektorie dient ein flachheitsbasierter Ausgangsfolgeregler entsprechend Abschnitt 4.2.1. Die Parametrierung des Folgereglers besteht in der Definition der Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  der Fehlerdynamik (4.30). Diese Koeffizienten können durch Polvorgabe des dazugehörigen, charakteristischen Polynoms beliebig gewählt werden, wodurch die Regeldynamik eingestellt werden kann. Für die asymptotisch stabile Fehlerdynamik des Reglers müssen die Pole des geschlossenen Regelkreises jedoch ausschließlich in der linken komplexen Zahlenebene platziert werden.

Die Freiheit bei der Polvorgabe lässt dem Ingenieur viel Spielraum und scheint deshalb zunächst sehr hilfreich zu sein. In der Praxis kann jedoch durch eine ungünstige Polplatzierung ein sehr unerwartetes Regelverhalten eingestellt werden. Einerseits können durch ungünstige Polplatzierung hohe, schwach abklingende Oszillationen auftreten, wodurch die Positionierzeit erhöht wird. Andererseits kann ein hartes Ansprechverhalten des Reglers in hoher Aktorenergie resultieren. Die Polvorgabe hat somit einen substantziellen Einfluss auf das Regelverhalten, das wesentlich über die Lösungsgüte entscheidet.

Im Idealfall soll der Folgeregler so parametriert werden, dass die Überführung zwischen den Ruhelagen möglichst schnell, ohne Oszillationen sowie mit geringem Aktorenergiebedarf erfolgt. Die Parametrierung eines solchen Reglers ist mittels linear-quadratischer Optimierung, die beim Entwurf von LQR Einsatz findet, möglich. Demnach werden die Anforderungen an einen optimalen Regler durch Minimierung des Gütefunktionalis [Föl16, S. 339]:

$$J_R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}_R \mathbf{x}(t) + u(t)^\top \mathbf{R}_R u(t) dt \quad (5.11)$$

erfüllt. Darin stellt der erste Summand die Güte der Zustandsüberführung und der zweite ein Maß für die Stellgrößenenergie dar. Für das betrachtete System mit einem Aktor lässt sich die Wichtung einzelner Gütemaße dabei über die diagonalen, positiv definiten Matrizen:

$$\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} q_{q,1} & & & & \\ & q_{\dot{q},1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & q_{l_A} & \\ & & & & q_{i_A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_R = [r_R] = r_R \quad (5.12)$$

einstellen.

Da  $\mathbf{Q}_R$  und  $\mathbf{R}_R$  positiv definit sind, besitzt das quadratische Gütefunktional  $J_R$  genau ein Minimum  $\mathbf{P}_R$  als Lösung der RICCATI-Gleichung [Föl16, S. 339]:

$$\mathbf{P}_R \mathbf{B} \mathbf{R}_R^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_R - \mathbf{P}_R \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_R - \mathbf{Q}_R = \mathbf{0}. \quad (5.13)$$

Mit der Regelungsmatrix  $\mathbf{K}_R$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{R}_R^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_R \quad (5.14)$$

lassen sich die Pole des geschlossenen Regelkreises durch das Lösen der Determinantengleichung

$$\det((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_R) - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (5.15)$$

und aus diesen auch die Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  der Fehlerdynamik (4.30) bestimmen.

Die Parametrierung des Folgereglers reduziert sich somit auf Vorgabe der Gewichte in  $\mathbf{Q}_R$  und  $\mathbf{R}_R$ . Da es in (5.11) nicht auf die konkreten Zahlenwerte in  $\mathbf{Q}_R$  und  $\mathbf{R}_R$ , sondern auf das Verhältnis dieser Gewichte ankommt, kann  $\mathbf{R}_R = 1$  gesetzt werden. Das Verhältnis lässt sich dann durch Vorgabe der Gewichte in  $\mathbf{Q}_R$  einstellen.

Für den betrachteten Anwendungsfall ist es von entscheidender Bedeutung, dass die Endposition – d. h. Endposition der geplanten Trajektorie – während des Positioniervorgangs nicht überfahren wird, um Kollisionen mit dem Regal (z. B. das Anfahren der Durchschubsicherung) zu vermeiden. Um diese Forderung zu erfüllen, muss der dominante Pol bzw. das dominante Polpaar<sup>5</sup>, von dem das Regelverhalten maßgeblich beeinflusst wird, reell sein. Damit wird ein aperiodisches, d. h. nicht oder nur schwach oszillierendes, Regelverhalten erzielt. Dies lässt sich durch die größere Wichtung der LAM-Zustandskomponenten  $q_{l_A}, q_{\dot{l}_A}$  gegenüber der Wichtung der Zustandskomponenten der Balkendynamik  $q_{q,j}, q_{\dot{q},j}$  in (5.12) erreichen. Des Weiteren kann die Wichtung der dominierenden 1. Eigenmode gegenüber anderen Eigenmoden größer eingestellt werden.

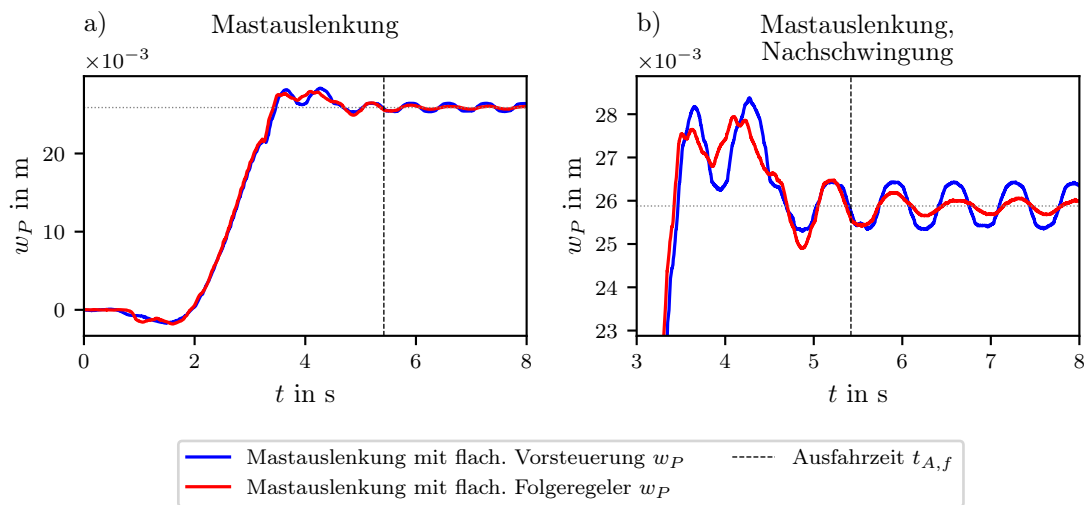
Tabelle 5.4 fasst die empirisch ermittelte Wichtung der Zustandskomponenten zusammen. Um bleibende Regelabweichungen – insbesondere LAM-Positionsabweichungen nach dem Ein-/Ausfahrvorgang – zu kompensieren, wurde die Fehlerdynamik um einen I-Anteil mit  $K_I = 10^{-4}$  entsprechend erweitert (4.31). Die für die Parametrierung des Folgereglers zugrundeliegende Messung erfolgt am LAM-Ausfahrvorgang mit der flachheitsbasierten Trajektorie  $l_A(t=0) = 0 \text{ m} \rightarrow l_A(t=t_A) = 1,4 \text{ m}$  in der Höhe  $l_{QT} = 3,3 \text{ m}$  mit der Beladung  $m_L = 476 \text{ kg}$ . Abbildung 5.5 stellt die gemessene Mastauslenkung  $w_P$  bei LAM-Fahrt mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung und Vorsteuerung ergänzt mit Folgeregelung im Vergleich dar. Die Wirkung des Folgereglers ist insbesondere in der Nachschwingphase ersichtlich (siehe Abbildung 5.5 b)).

---

<sup>5</sup>Als dominanter Pol bzw. dominantes Polpaar werden Pole mit dem größten Realteil bezeichnet.

**Tabelle 5.4:** Wichtung der Zustandskomponenten

Zustandskomponente	Wichtung
Balkendynamik	$q_{q,1} = 5 \cdot 10^7$
	$q_{\dot{q},1} = 5 \cdot 10^7$
	$q_{q,j} = 1 \cdot 10^5$
	$q_{\dot{q},j} = 1 \cdot 10^5$
LAM-Dynamik	$q_{g,l_A} = 3 \cdot 10^8$
	$q_{q,l_A} = 3 \cdot 10^8$

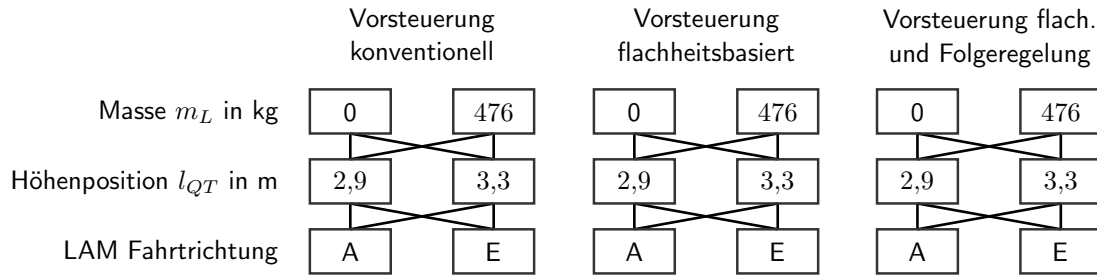


**Abbildung 5.5:** Vergleich der gemessenen Mastauslenkung  $w_P$  bei LAM-Fahrt mit Vorsteuerung und Vorsteuerung ergänzt mit Folgeregelung; LAM-Ausfahrvorgang mit der flachheitsbasierten Trajektorie  $l_A(t=0) = 0 \text{ m} \rightarrow l_A(t=t_A) = 1,4 \text{ m}$  in der Höhe  $l_{QT} = 3,3 \text{ m}$  mit der Beladung  $m_L = 476 \text{ kg}$

## 5.3 Ergebnisse

Zur Bewertung des Potentials einer flachheitsbasierten Vorsteuerung und Folgeregelung des Teleskopantriebs wurden verschiedene Betriebsweisen bei unterschiedlichen Querträgerhöhen und Beladungszuständen am Versuchstand getestet. Bei der Betriebsweise wurde zwischen konventioneller und flachheitsbasierter Vorsteuerung sowie flachheitsbasierter Vorsteuerung ergänzt mit Folgeregelung unterschieden. Des Weiteren fand die Untersuchung sowohl für die Ausfahrvorgänge als auch für die Einfahrvorgänge statt. Für den Versuchsstand ist diese Unterscheidung notwendig, da sich das Schwingverhalten und somit die Trajektorienplanung für ein- und ausge-

fahrenen LAM aufgrund des schlanken Mastprofils und der einseitigen Mastlagerung unterscheiden. Die vollständige Versuchsmatrix<sup>6</sup> stellt Abbildung 6.1 dar.



**Abbildung 5.6:** Versuchsmatrix für experimentelle Untersuchungen

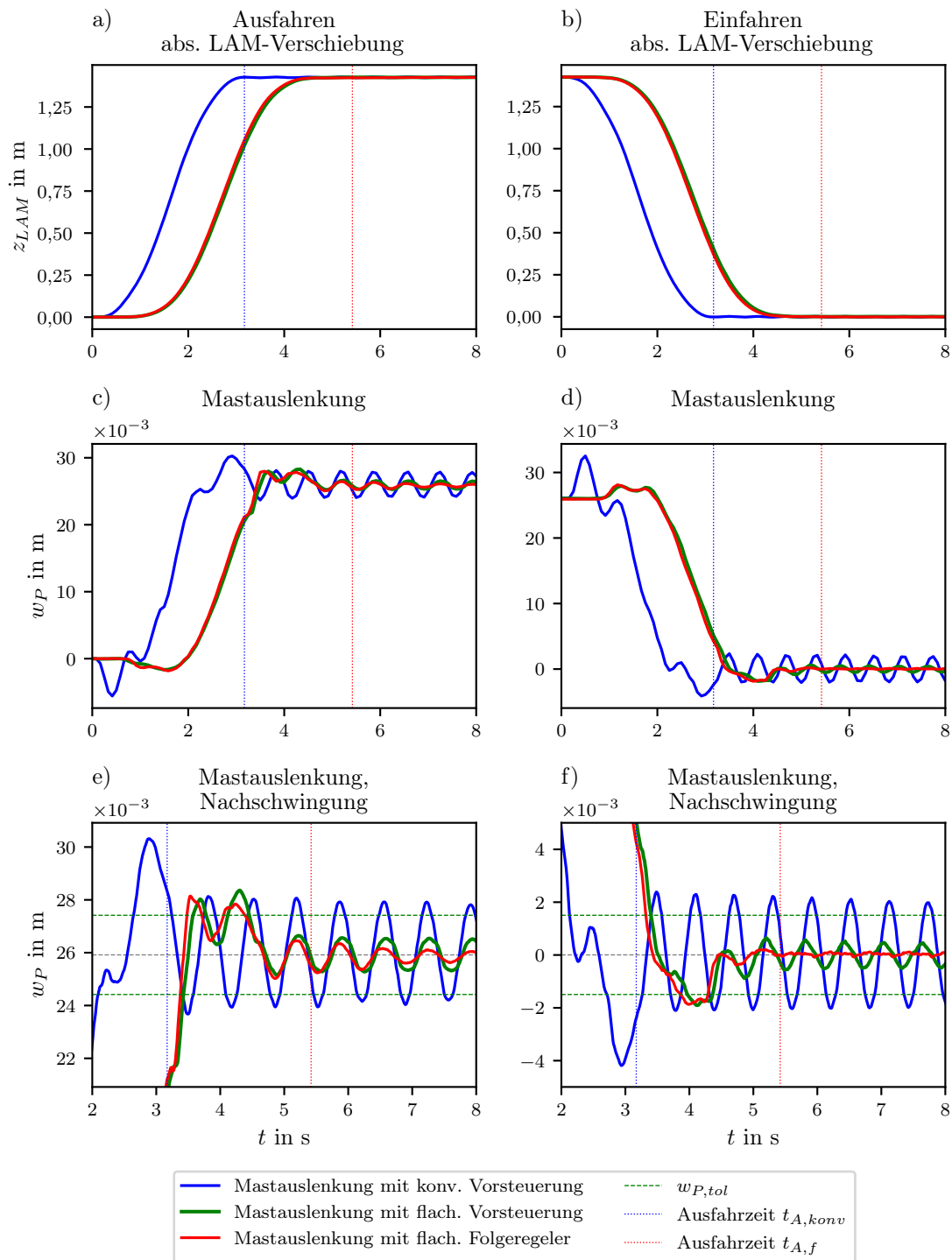
Als konventionelle Trajektorie dient die Trajektorie einer 7-Phasen-Bewegung (siehe Abschnitt 4.1.1) mit Geschwindigkeiten und Beschleunigungen entsprechend der Tabelle 5.1 und konstanter Ruckzeit  $t_r = 0,1$  s. Diese Trajektorie ist unabhängig von der Querträgerhöhenposition. Es wird bei der Planung lediglich unterschieden, ob das aktuierte LAM beladen oder leer ist. Die flachheitsbasierte Trajektorie wird dagegen für jede Höhenposition des Querträgers in Abhängigkeit des Beladungszustands entsprechend Abschnitt 4.1.3 berechnet und optimiert.

Abbildung 5.7 stellt die Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 3,3$  m und den Beladungszustand  $m_L = 476$  kg dar (weitere Ergebnisse siehe Anhang E). Das Toleranzband für die zulässige Mastauslenkung in der Nachschwingphase beträgt  $w_{P,tol} = \pm 1,5$  mm. Wie aus der Abbildung 5.7 e) und f) zu erkennen (siehe Mastauslenkungen ohne Folgeregler), handelt es sich bei der Nachschwingung um eine schwach gedämpfte Schwingung, die bei der konventionellen Vorsteuerung im Vergleich zur flachheitsbasierten Vorsteuerung zu sehr langen Beruhigungszeiten führt. Ein Vergleich anhand der Beruhigungszeiten würde deshalb zur Verzerrung der Ergebnisse führen. Aus diesem Grund wird zur Bewertung die Anfangsamplitude der Mastauslenkung in der Nachschwingphase herangezogen. Diese beschreibt die Amplitude der Restschwingung nach dem Ein- bzw. Ausfahrvorgang innerhalb eines Zeitfensters, das dem 1,5-fachen der Periodendauer der 1. Eigenfrequenz entspricht. Die Anfangsamplitude der Mastauslenkung in der Nachschwingphase lässt sich wie folgt bestimmen:

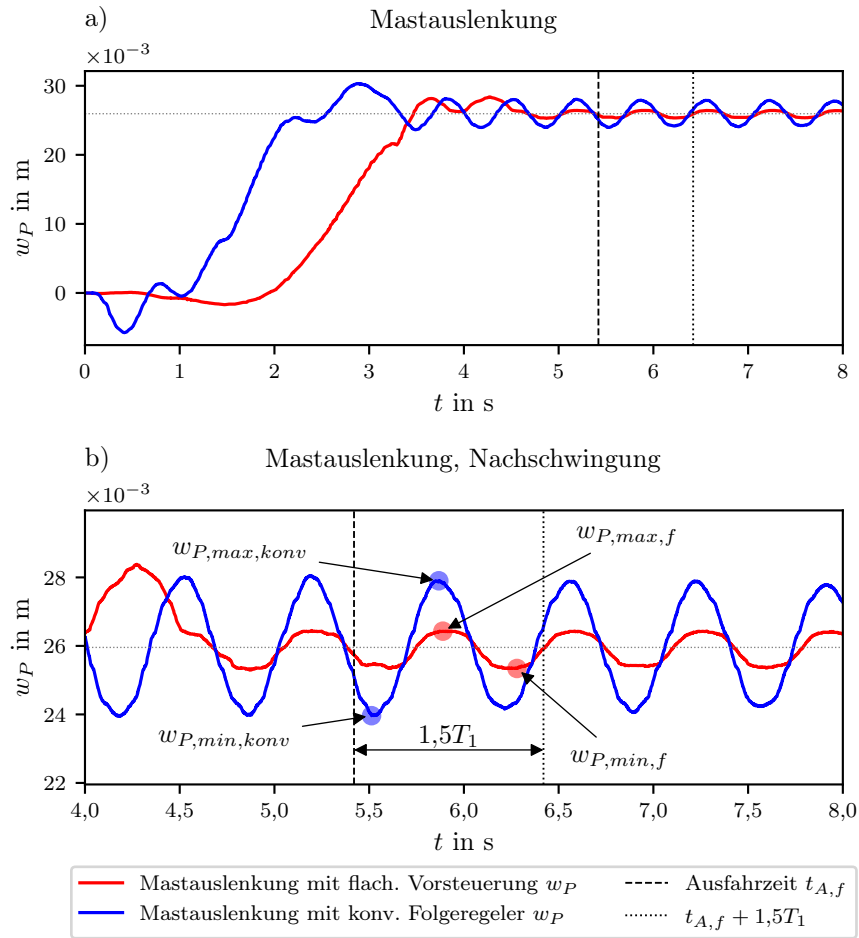
$$\hat{w}_P = \frac{1}{2} (w_{P,max}(t) - w_{P,min}(t)), \quad t_{A,f} \leq t < (t_{A,f} + 1,5T_1) \quad (5.16)$$

mit der Periodendauer der 1. Eigenfrequenz  $T_1$  und der minimalen und maximalen Mastauslenkung  $w_{P,min}(t)$ ,  $w_{P,max}(t)$ , dessen Bestimmung die Abbildung 5.8 darstellt.

<sup>6</sup>Jeder Versuch wurde fünfmal wiederholt.

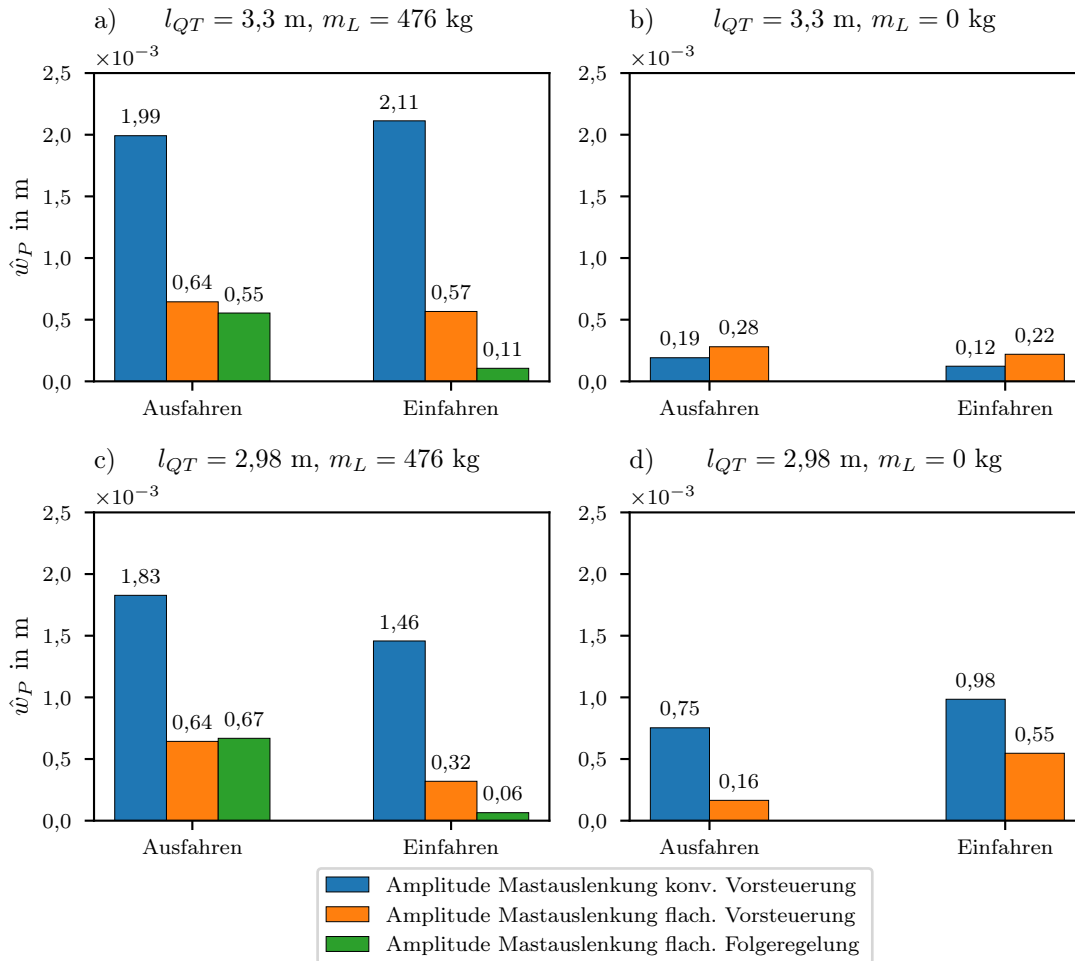


**Abbildung 5.7:** Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 3,3$  m und den Beladungszustand  $m_L = 476$  kg



**Abbildung 5.8:** Bestimmung der minimalen und maximalen Mastauslenkungen  $w_{P,min}(t)$ ,  $w_{P,max}(t)$  zur Berechnung der Anfangsamplitude der Mastauslenkung in der Nachschwingphase am Beispiel eines LAM-Ausfahrvorgangs

Um Anfangsamplituden  $\hat{w}_P$  verschiedener Betriebsweisen miteinander vergleichen zu können, muss zu dessen Berechnung das gleiche Zeitfenster betrachtet werden. Da die Ausfahrzeit mit der flachheitsbasierten Trajektorie  $t_{A,f}$  grundsätzlich höher als die der konventionellen  $t_{A,konv}$  ist, soll diese als Bezugsgröße für das Zeitfenster  $t_{A,f} \leq t < (t_{A,f} + 1,5T_1)$  in (5.16) verwendet werden (siehe Abbildung 5.8). Abbildung 5.9 fasst die Ergebnisse der Anfangsamplitudenberechnung  $\hat{w}_P$  für die untersuchten Betriebsweisen zusammen.



**Abbildung 5.9:** Ergebnisse der Anfangsamplitudenberechnung  $\hat{w}_P$  für die untersuchten Betriebsweisen

Beim Ein- und Ausfahren im beladenen Zustand ist eine deutliche Reduzierung der Anfangsamplitude  $\hat{w}_P$  bis zu 78 % (siehe Abbildung 5.9 c) Einfahren)

$$\frac{(1,46 - 0,32)10^{-3} \text{ m}}{1,46 \cdot 10^{-3} \text{ m}} 100 \% \approx 78 \% \quad (5.17)$$

mit flachheitsbasierter Vorsteuerung gegenüber konventioneller zu verzeichnen. Im Leerfahrtbetrieb konnte die Anfangsamplitude nur bei der Querträgerhöhenposition  $l_{QT} = 2,98$  m mittels flachheitsbasierter Vorsteuerung bis zu 79 % (siehe Abbildung 5.9 d) Ausfahren)

$$\frac{(0,75 - 0,16)10^{-3} \text{ m}}{0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}} 100 \% \approx 79 \% \quad (5.18)$$

reduziert werden. Bei  $l_{QT} = 3,3$  m im Leerfahrtbetrieb (siehe Abbildung 5.9 b)) fallen

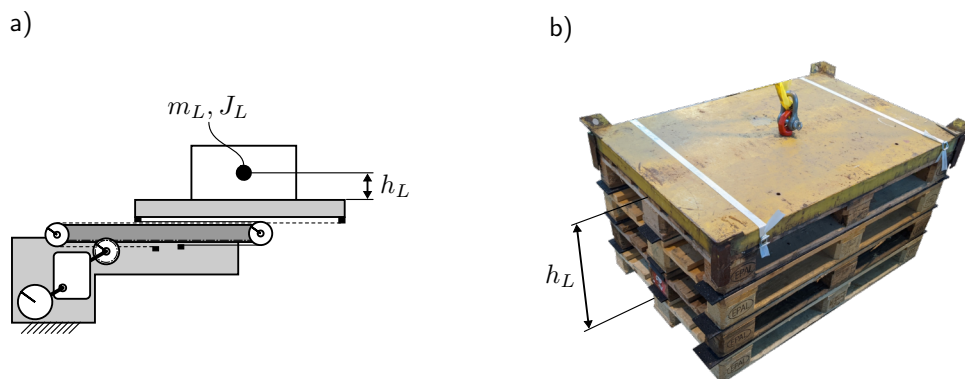
die Anfangsamplituden sehr gering aus. Eine Reduzierung der Anfangsamplituden durch flachheitsbasierte Vorsteuerung konnte hier jedoch nicht erreicht werden. Eine weitere Reduzierung der Anfangsamplituden bis zu 95 %, bezogen auf die konventionelle Betriebsweise, konnte beim Ein- und Ausfahren im beladenen Zustand durch Einsatz der flachheitsbasierten Folgeregelung erreicht werden (siehe Abbildung 5.9 a) Einfahren)

$$\frac{(2,11 - 0,11)10^{-3} \text{ m}}{2,11 \cdot 10^{-3} \text{ m}} 100 \% \approx 95 \%. \quad (5.19)$$

Beim Ausfahren im beladenen Zustand fällt die Wirkung des Folgereglers im Vergleich zur flachheitsbasierten Vorsteuerung zumindest bei Betrachtung der Anfangsamplituden gering aus (vergleiche Abbildung 5.9 a) und c) Ausfahren). Vergleicht man jedoch die Amplitudenentwicklung im weiteren Zeitverlauf außerhalb des Zeitfensters für  $t \geq (t_{A,f} + 1,5T_1)$ , so ist auch hier eine deutliche Reduzierung der Anfangsamplituden mittels flachheitsbasierter Folgeregelung festzustellen (siehe Abbildung 5.7 e) und Abbildung E.1 e), Anhang E). Für den Leerfahrtbetrieb erfolgen keine Untersuchungen des Folgereglers, da die Nachschwingamplituden bereits mit einer Vorsteuerung sehr gering ausfallen.

### 5.3.1 Einfluss der LE-Schwerpunkthöhe

Bisherige Untersuchungen fanden mit einer Ladeinheit, deren Schwerpunkthöhe  $h_L$  (siehe Abbildung 5.10 a)), bezogen auf das LAM-Oberteil nahe 0 ist. In der Praxis tritt das selten und nur bei sehr flachen Gütern auf, sodass im Allgemeinen  $h_L \neq 0$  gilt. Um den Einfluss der LE-Schwerpunkthöhe auf das Schwingverhalten zu untersuchen, wurde die Ladeinheit entsprechend Abbildung 5.10 b) modifiziert. Die Schwerpunkthöhe der modifizierten Ladeinheit beträgt  $h_L = 0,45 \text{ m}$ . Durch zusätzliche Paletten erhöht sich die LE-Masse  $m_L$  von 476 kg auf 532 kg.



**Abbildung 5.10:** a) Höhe des Ladeeinheitschwerpunktes; b) modifizierte Ladeinheit



### Berücksichtigung der LE-Schwerpunkthöhe im Modell

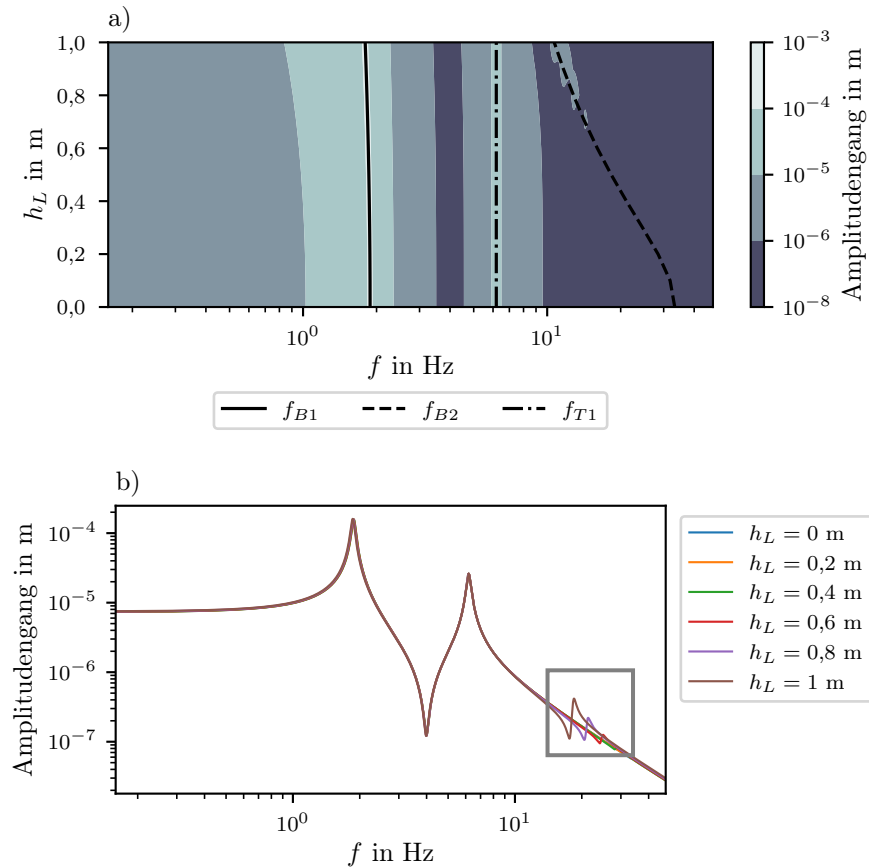
Durch eine LE-Schwerpunkthöhe  $h_L \neq 0$  entsteht ein zusätzliches auf die Ersatzpunktmasse reduziertes Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -Achse

$$J_{L,ers} = J_L + m_L h_L^2 \quad (5.20)$$

mit LE-Trägheitsmoment  $J_L$  bezüglich des LE-Schwerpunktes (siehe Abbildung 5.10 a)). Die Berücksichtigung dieses Trägheitsmomentes im Modell erfolgt aus dem Momentengleichgewicht am Punktmassenabschnitt (vergleiche Abschnitt 3.2.2, *Übertragungsmatrix für Punktmassenabschnitte*) in der Übertragungsmatrix

$$\mathbf{T}^m(\omega_B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{L,ers}\omega_B^2 & 1 & 0 \\ -m_{ers}\omega_B^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

mit der Ersatzmasse  $m_{ers}$  (5.1). Mit Berücksichtigung von  $J_{L,ers}$  kann nun das Übertragungsverhalten anhand des Amplitudengangs bewertet werden. Abbildung 5.11 stellt die Amplitudengänge für das Versuchsstandsmodell in Abhängigkeit der LE-Schwerpunkthöhe  $h_L$  bei  $l_{QT} = 2,98$  m und  $m_L = 532$  kg dar. Aus dem Amplitudengang in Abbildung 5.11 a) ist zu erkennen, dass die LE-Schwerpunkthöhe maßgeblich die zweite Biegeeigenfrequenz  $f_{B2}$  beeinflusst. Wobei mit zunehmender LE-Schwerpunkthöhe die zweite Biegeeigenfrequenz abnimmt und dessen Amplitudenverstärkung zunimmt (siehe grau markierter Bereich in Abbildung 5.11 b)). Vergleicht man jedoch die Amplitudenverstärkung der zweiten Biegeeigenfrequenz mit den Amplitudenverstärkungen der dominierenden ersten Biege- und Torsionseigenfrequenzen, so wird klar, dass dessen Einfluss im Übertragungsverhalten sehr gering ist. Damit ist auch der Einfluss der LE-Schwerpunkthöhe auf das Schwingverhalten vernachlässigbar.



**Abbildung 5.11:** Amplitudengang in Abhängigkeit der LE-Schwerpunkthöhenposition

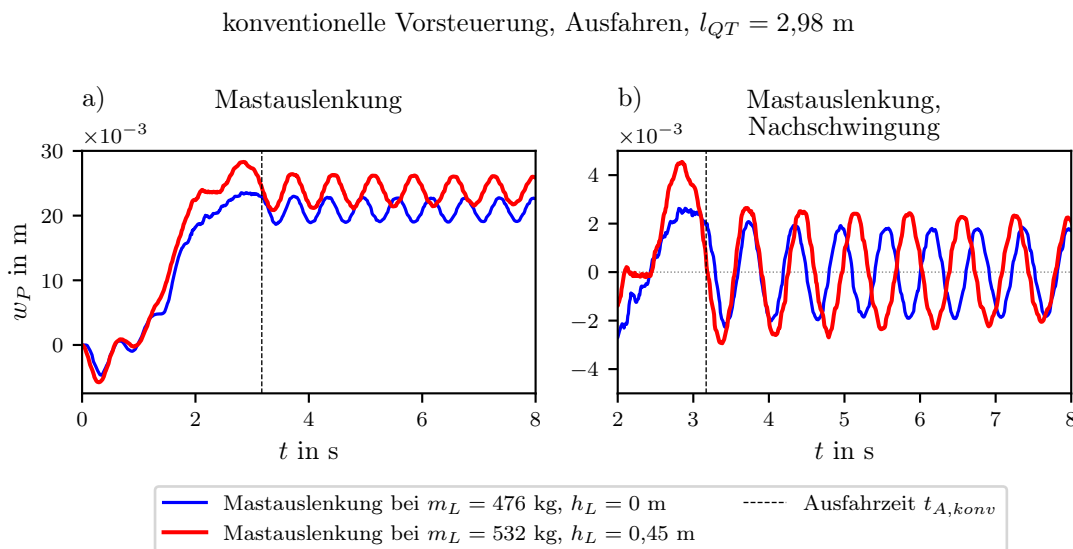
### Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen

Die Untersuchungen zum Einfluss der LE-Schwerpunkthöhe auf das Schwingverhalten erfolgen am Versuchsstand bei der Querträgerhöhe  $l_{QT} = 2,98$  m und der Beladung  $m_L = 476$  kg mit  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg mit  $h_L = 0,45$  m (siehe Abbildung 5.10 b)). Dabei wird zwischen konventioneller und flachheitsbasierter Vorsteuerung sowie flachheitsbasierter Vorsteuerung ergänzt mit Folgeregelung für Ein- und Ausfahrvorgänge unterschieden. Da die Informationen über die LE-Schwerpunkthöhe und dessen Trägheitsmoment  $J_L$  in der Praxis nicht erfasst werden<sup>7</sup>, finden die Untersuchungen mit und ohne Berücksichtigung dieser Größen im Modell statt. Nachfolgende Abbildungen stellen die Ergebnisse in Form von Mastauslenkung  $w_P$  am Beispiel des LAM-Ausfahrvorgangs dar (siehe Anhang E für Ergebnisse des LAM-Einfahrvorgangs). Es ist zu erkennen, dass bei allen drei untersuchten Betriebsweisen sowohl die statische

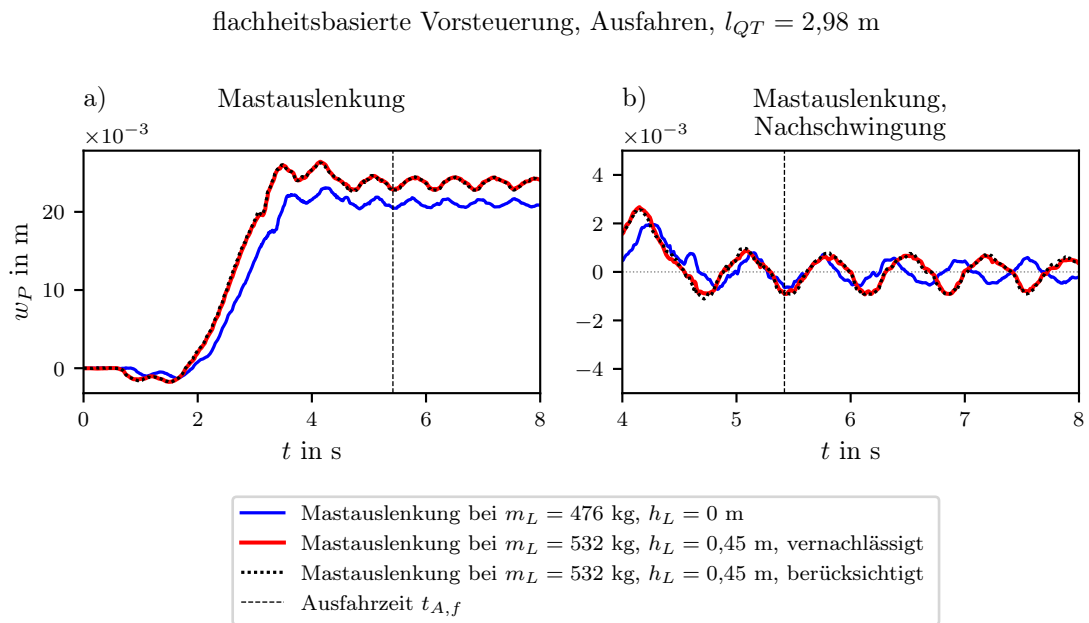
<sup>7</sup>In der Praxis wird nur das Gewicht und die äußeren Abmessungen der Ladeinheit erfasst. Die LE-Schwerpunkthöhe und das Trägheitsmoment  $J_L$  kann deshalb nur für Güter mit homogener Massenverteilung abgeschätzt werden.

Auslenkung (vergleiche Abbildung 5.12 a), Abbildung 5.13 a), Abbildung 5.14 a)) als auch die Amplituden der Mastauslenkung in der Nachschwingphase (vergleiche Abbildung 5.12 b), Abbildung 5.13 b), Abbildung 5.14 b)) bei Fahrten mit modifizierter Ladeinheit  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m zunehmen. Diese Zunahme geht jedoch mit der Zunahme der Masse der modifizierten Ladeinheit und damit mit der Abnahme der 1. Biegeeigenfrequenz einher. Insgesamt kann jedoch mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung und Folgeregelung eine vergleichbare Amplitudenreduzierung in der Nachschwingphase bei modifizierter Ladeinheit erzielt werden.

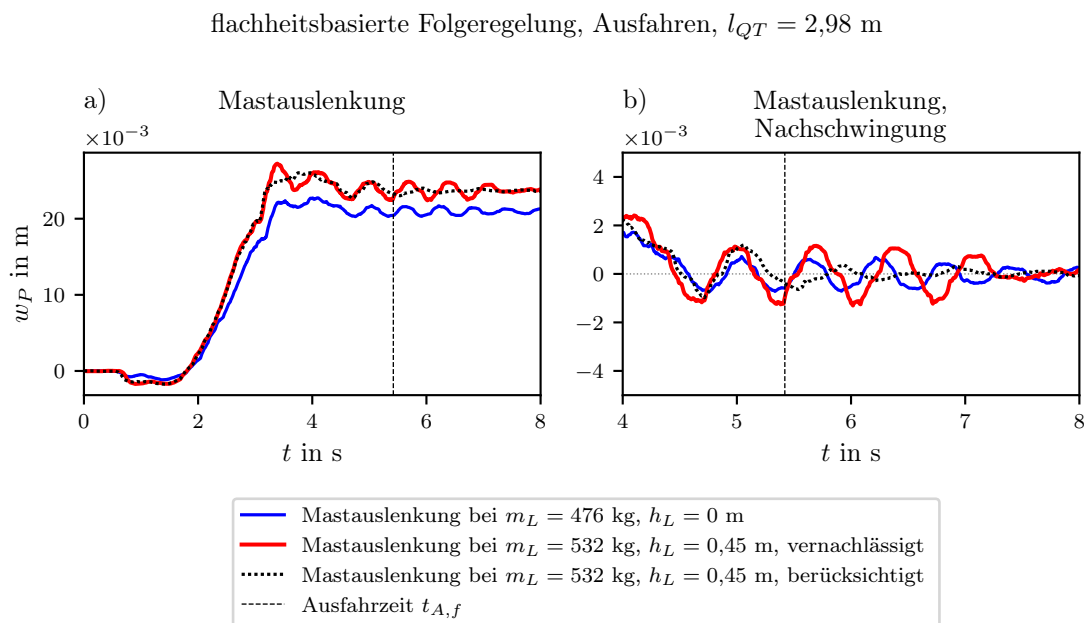
Wie aus der theoretischen Betrachtung zur Berücksichtigung der LE-Schwerpunkthöhe im Modell bereits erwähnt, ist die LE-Schwerpunkthöhe bei der Trajektorienplanung vernachlässigbar. Diesen Sachverhalt bestätigen die Ergebnisse des LAM-Ausfahrvorgangs mit flachheitsbasierter Vorsteuerung (siehe Abbildung 5.13). Vergleicht man die Mastauslenkungen bei modifizierter Ladeinheit mit und ohne Berücksichtigung von  $J_L$  und  $h_L$  im Modell und somit bei der flachheitsbasierten Trajektorienplanung, so stellt man fest, dass diese sehr ähnlich aussehen.



**Abbildung 5.12:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Ausfahrvorgang mit konventioneller Vorsteuerung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m



**Abbildung 5.13:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Ausfahrvorgang mit flachheitsbasierter Vorsteuerung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m mit und ohne Berücksichtigung von  $h_L, J_L$  im Modell



**Abbildung 5.14:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Ausfahrvorgang mit flachheitsbasierter Folgeregelung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m mit und ohne Berücksichtigung von  $h_L$ ,  $J_L$  im Modell



# 6 Konzeptübertragung

Dieses Kapitel widmet sich der Fragestellung, welche Auswirkung die schwingungsoptimale Trajektorie auf die LAM-Spielzeit eines RBG hat. Zunächst erfolgt die Betrachtung der schwingungsoptimalen und konventionellen Trajektorien am Referenz-RBG. Anschließend findet die Bewertung des Potentials von Querschwingungskompensation anhand der RBG-Einzelspiele und des mittleren kombinierten Spiels nach FEM 9.851 [FEM03]. Eine Zusammenfassung wesentlicher Berechnungsschritte zur Querschwingungskompensation in Form eines Auslegungskonzeptes schließt das Kapitel ab.

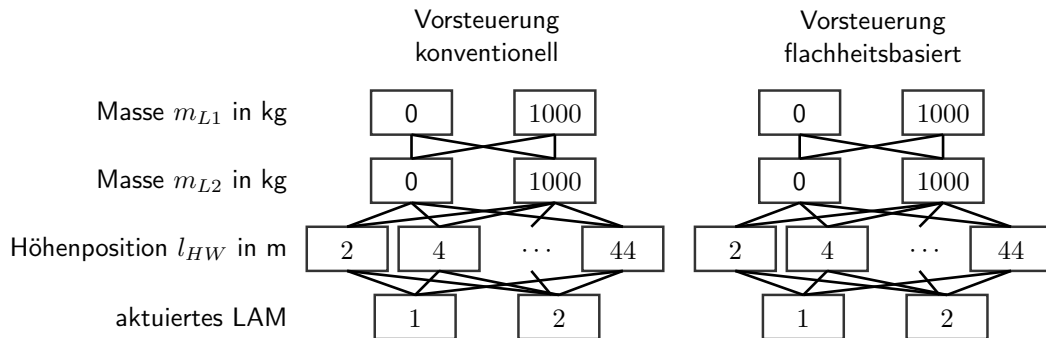
## 6.1 LAM-Spielzeit

Das Potentials von Querschwingungskompensation lässt sich am besten anhand der LAM-Spielzeit bewerten, da diese Größe unabhängig von den Regalwandparametern, d. h. Länge und Höhe der Regalwand, und der Lagerstrategie ist. Die LAM-Spielzeit ist jedoch von der Höhenposition des Hubwagens, dem Beladungszustand und dem aktuierten LAM abhängig<sup>1</sup>. Aus diesem Grund findet die Untersuchung unter Variation dieser Parameter statt.

Da die realen Störgrößen nicht bekannt sind bzw. diese sich gleichermaßen auf die Ein-/Ausfahrvorgänge mit konventionellen und flachheitsbasierten Trajektorien auswirken, kann dessen Einfluss bei den simulativen Untersuchungen vernachlässigt werden. Demzufolge wurden alle nachfolgenden Untersuchungen ohne Störgrößen und am offenen Regelkreis durchgeführt. Abbildung 6.1 die Versuchsmatrix für simulative Experimente dar.

---

<sup>1</sup>Bei RBG mit zwei LAM hängt die LAM-Spielzeit unter anderem davon ab, welches LAM während des Spiels aktuiert wird. Aufgrund unterschiedlicher Exzentrizitätsmaße  $e_{L1}$  und  $e_{L2}$  sind die während des LAM-Spiels eingeleiteten Torsionsmomente bei gleichem Beladungszustand unterschiedlich.



**Abbildung 6.1:** Versuchsmatrix für simulative Untersuchungen

Als konventionelle Trajektorie dient die Trajektorie einer 7-Phasen-Bewegung (siehe Abschnitt 4.1.1) mit Geschwindigkeiten und Beschleunigungen entsprechend der Tabelle 3.2 und konstanter Ruckzeit  $t_r = 0,1$  s. Diese Trajektorie ist unabhängig von der Hubwagenhöhenposition. Es wird bei der Planung lediglich unterschieden, ob das aktuierte LAM beladen oder leer ist. Die flachheitsbasierte Trajektorie wird dagegen für jede Höhenposition des Hubwagens in Abhängigkeit des Beladungszustands entsprechend dem Abschnitt 4.1.3 berechnet und optimiert.

Abbildung 6.2 stellt die Gesamtausfahrzeiten der beiden Trajektorienarten im Vergleich dar. Erwartungsgemäß sind starke Schwankungen der Gesamtausfahrzeiten mit konventioneller Trajektorie über die Höhenposition des Hubwagens zu erkennen. Vergleicht man Abbildung 6.2 a) und c) bzw. b) und d), so ist auch die Abhängigkeit der Gesamtausfahrzeit von der Beladung des nicht aktuierten LAM erkennbar – z. B. bei Höhenposition  $l_{HW} = 22$  m und 32 m. Diese Schwankungen lassen sich damit begründen, dass die Anfahr- und Bremszeiten bzw. die Ruckzeit der konventionellen Trajektorien konstant und nicht an das Schwingverhalten des betrachteten RBG angepasst sind. Demzufolge kann die ungünstige Wahl von Anfahr- und Bremszeiten bzw. der Ruckzeit auf die Nachschwingung am Ende des Ausfahrvorgangs in einzelnen Fällen verstärkend wirken [Sch94; Arn99]. Abbildung 6.3 verdeutlicht diesen Sachverhalt. Darin sind Mastauslenkungen beim Ausfahrvorgang des 1. LAM mit  $m_{L1} = 1000$  kg für verschiedene Ladeeinheiten  $m_{L2} = 0, \dots, 1500$  kg für Hubwagenhöhenpositionen  $l_{HW} = 22$  m und 32 m dargestellt. Es ist zu erkennen, dass bei identischer Anregung die Nachschwingamplituden maßgeblich von dem Schwingverhalten des Systems beeinflusst werden.



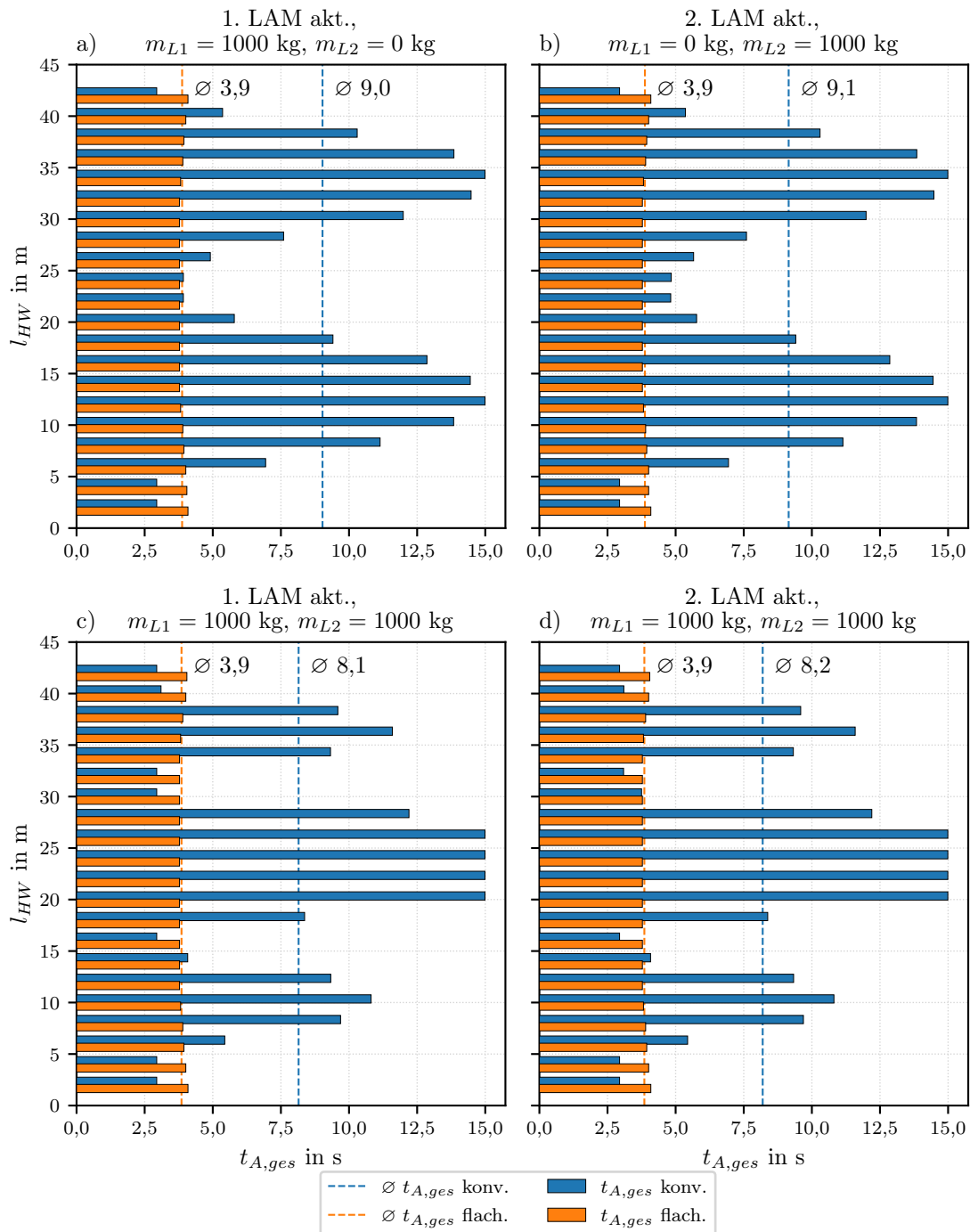
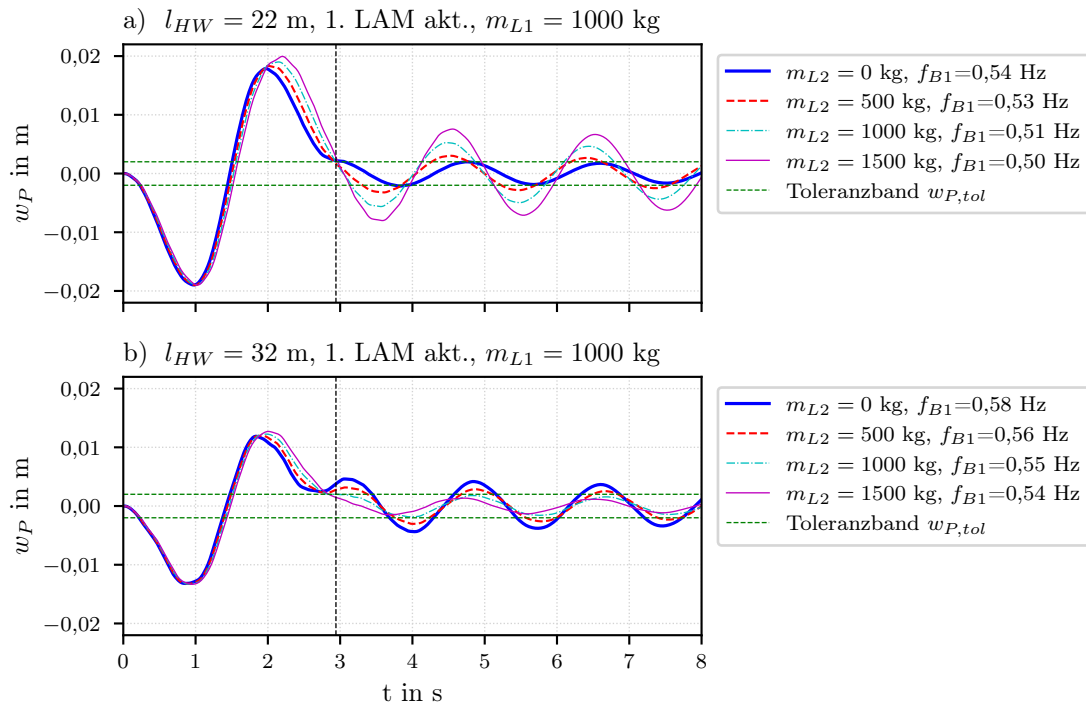


Abbildung 6.2: Vergleich der Gesamtausfahrzeiten (Ausfahrzeit inkl. Beruhigungszeit) der konventionellen und flachheitsbasierten Trajektorie



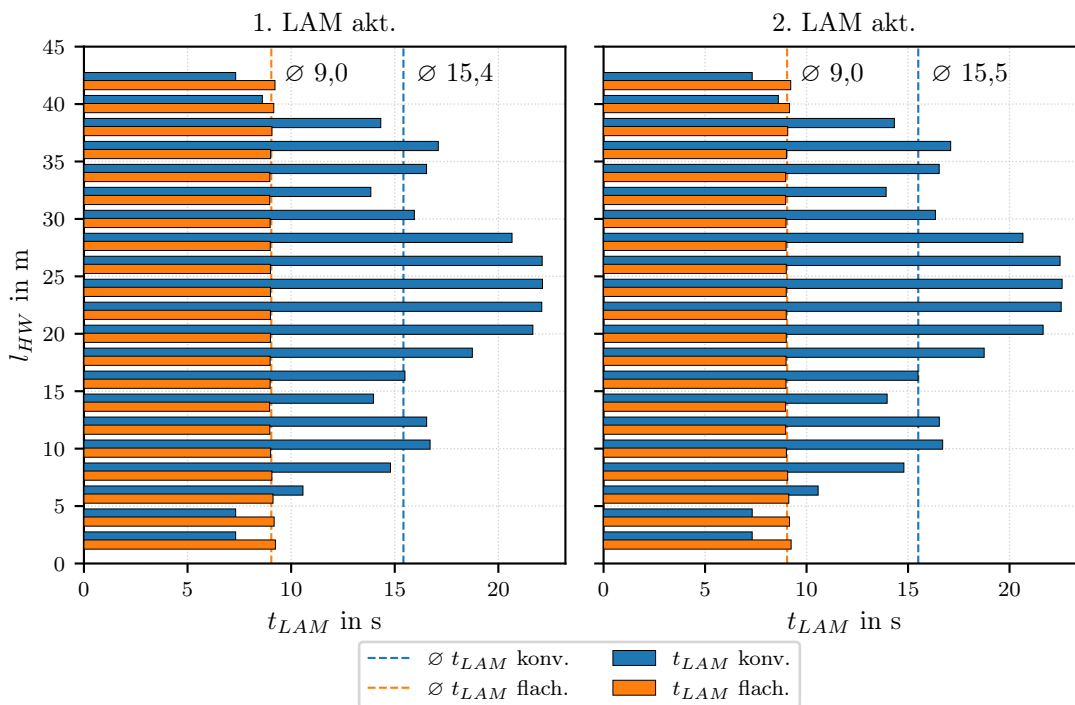
**Abbildung 6.3:** Vergleich der Mastauslenkungen  $w_P$ , 1. LAM aktiviert,  $m_{L1} = 1000$  kg,  $m_{L2} = 0, \dots, 1500$  kg; a) Hubwagenhöhenposition  $l_{HW} = 22$  m; b) Hubwagenhöhenposition  $l_{HW} = 32$  m; Die Endzeit des Ausfahrtvorgangs stellt die vertikale, gestrichelte Linie dar

Insgesamt fällt auf, dass die konventionelle Trajektorie im Vergleich zur flachheitsbasierten im Durchschnitt zu längeren Gesamtausfahrzeiten beiträgt. Lediglich in den oberen und unteren Höhenpositionen treten keine Beruhigungszeiten auf, da die Anregung in der Nähe von Schwingungsknoten (obere und untere Mastführung) mit geringer Amplitudenverstärkung (vergleiche Abbildung 3.21) stattfindet. Des Weiteren ist der Einfluss von Torsionsschwingungen auf die Gesamtausfahrzeit in Abbildung 6.2 a) und b) bzw. c) und d) sichtbar. Hier sind die Gesamtausfahrzeiten bei gleichem Beladungszustand in Abhängigkeit von dem aktivierten LAM dargestellt. In einzelnen Fällen, z. B.  $l_{HW} = 22$  m in Abbildung 6.2 a) und b) oder  $l_{HW} = 30$  m in Abbildung 6.2 c) und d), trägt das Aktivieren des 2. LAM zur Verlängerung der Gesamtausfahrzeit bei. Vergleicht man jedoch die Durchschnittswerte der Gesamtausfahrzeiten, so stellt man fest, dass das Aktivieren des 2. LAM eine Verlängerung der Gesamtausfahrzeit von lediglich 0,1 s verursacht.

Im Gegensatz zur konventionellen ist die flachheitsbasierte Trajektorie auf die Dynamik des betrachteten RBG abgestimmt. Dadurch konnten sowohl bei Variation der Höhenposition des Hubwagens als auch des Beladungszustands vergleichbare Gesamtausfahrzeiten, die im Durchschnitt deutlich unter den mit konventionellen

Trajektorie liegen, erzielt werden (siehe Abbildung 6.2).

Neben der Gesamtausfahrtzeit, ist die LAM-Spielzeit eine praxisrelevante Größe. Abbildung 6.4 stellt mittlere Spielzeiten – Mittelwert der Spielzeiten für verschiedene Beladungszustände entsprechend Abbildung 6.1 – in Abhängigkeit von der Höhenposition  $l_{HW}$  und des aktuierten LAM. Die Berechnung der LAM-Spielzeiten erfolgte nach (2.1) mit Hubzeit  $t_{Hub} = 2$  s. Die Durchschnittswerte über die Höhenposition  $l_{HW}$  zeigen eine Verkürzung der LAM-Spielzeit bei Verwendung von flachheitsbasierten Trajektorien bei beiden LAM um ca. 42%.



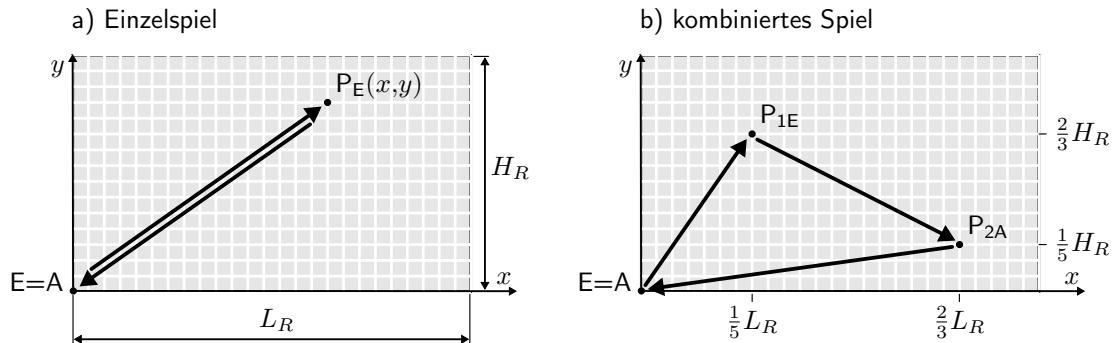
**Abbildung 6.4:** Vergleich der LAM-Spielzeiten der konventionellen und der flachheitsbasierten Trajektorie

## 6.2 RBG-Spielzeit

Die Materialflussleistung eines RBG wird in Spielen pro Zeiteinheit gemessen. Für Hersteller und Betreiber von RBG ist es daher sinnvoll, die Wirkung der flachheitsbasierten LAM-Steuerung auf die Gesamtspielzeit aufzuzeigen. Da es für RBG mit zwei LAM derzeit keine Normen und Standards zur Berechnung von mittleren Spielzeiten existieren, wird im Folgenden ein RBG mit einem LAM betrachtet.

Die Bewertung der flachheitsbasierten LAM-Steuerung erfolgt anhand von Einzelspielen (siehe Abbildung 6.5 a)) und des mittleren kombinierten Spiels nach FEM 9.851

[FEM03] (siehe Abbildung 6.5 b)) für eine Beispielregalfront unter den Annahmen nach Tabelle 6.1. Des Weiteren wird als Bewegungsprofil für Heben/Senken und Fahren die 3-Phasen-Bewegung angenommen.



**Abbildung 6.5:** a) Ablauf eines Einzelspiels; b) Ablauf des mittleren kombinierten Spiels nach FEM 9.851 (in Anlehnung an [FEM03])

**Tabelle 6.1:** Annahmen für Spielzeitberechnung

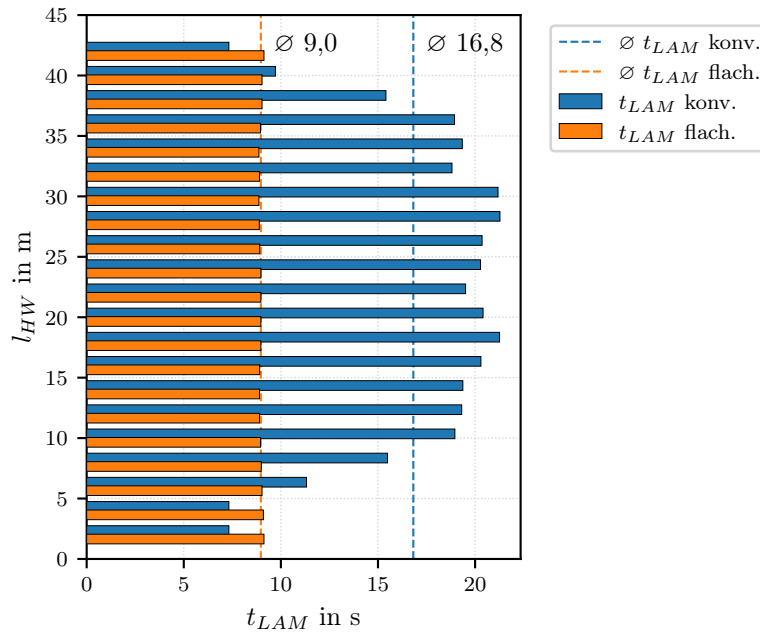
Beschreibung	Parameterdefinition
Max. Beschleunigung Fahrwerk	$a_x = 0,5 \text{ m/s}^2$
Max. Beschleunigung Hubwerk	$a_y = 0,8 \text{ m/s}^2$
Max. Geschwindigkeit Fahrwerk	$v_x = 3,5 \text{ m/s}$
Max. Geschwindigkeit Hubwerk	$v_y = 1,17 \text{ m/s}$
Länge der Regalfront	$L_R = 100 \text{ m}$
Höhe der Regalfront	$H_R = 44 \text{ m}$
Positionierzeit und Platzkontrolle	$t_{pos} = 5 \text{ s}$

Für das Einzelspiel ergibt sich die Spielzeit zu:

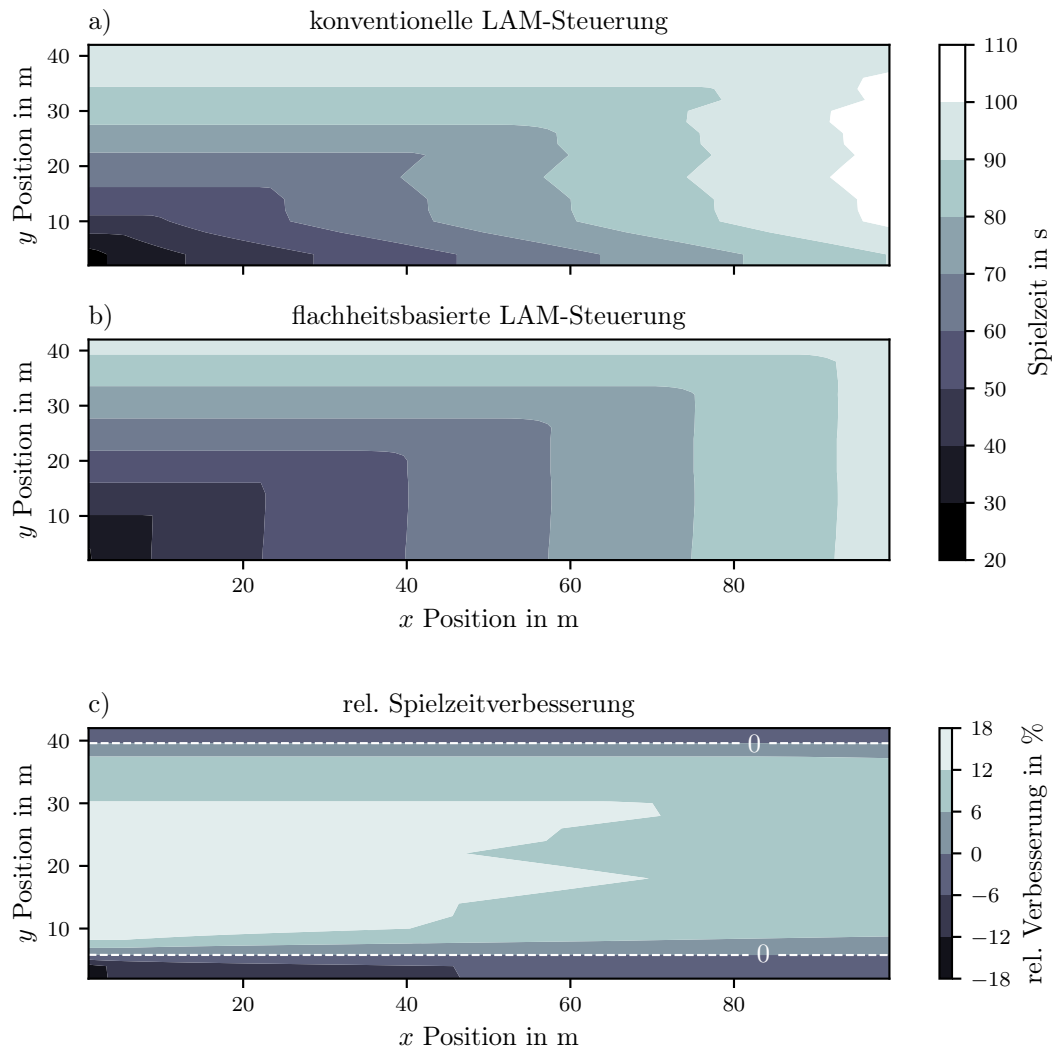
$$t_{\text{Einzelspiel}}(x,y) = t_{LAM}|_{l_{HW}=0} + 2 \cdot t_{E,P_E}(x,y) + t_{LAM}|_{l_{HW}=y_{P_E}} + t_{pos} \quad (6.1)$$

mit  $t_{E,P_E}$  als Verfahrszeit für  $E \rightarrow P_E$  bzw.  $P_E \rightarrow E$  und der Positionierzeit inkl. Platzkontrolle  $t_{pos}$  in der  $xy$ -Ebene. Abbildung 6.6 stellt die mittleren LAM-Spielzeiten in Abhängigkeit der Höhenposition des Hubwagens dar. Unter Verwendung dieser LAM-Spielzeiten in (6.1) lässt sich die Zeit des Einzelspiels für jedes Regalfach berechnen. Abbildung 6.7 a) und b) stellen die Verteilungen der Spielzeiten über die Regalfront für die konventionelle und flachheitsbasierte LAM-Steuerung dar. Die relative Spielzeitverbesserung durch flachheitsbasierte LAM-Steuerung zeigt die Abbildung 6.7 c). Ähnlich zu der LAM-Spielzeitverteilung ist auch hier eine Spielzeitverschlechterung durch flachheitsbasierte LAM-Steuerung in unteren und oberen Regalfrontbereichen zu beobachten. Wobei die Verschlechterung im unteren Bereich, aufgrund des höheren LAM-Spielanteils im Gesamtspiel, stärker ausgeprägt ist. Eine deutlich größere

Fläche der Regalfront ist jedoch durch Spielzeitverbesserung ausgefüllt. Die kürzesten Spielzeiten ergeben sich bei kurzen Verfahrenswegen und mittleren Regalhöhen. Die mittlere relative Spielzeitverbesserung für das Einzelspiel beträgt 7%.



**Abbildung 6.6:** Vergleich der LAM-Spielzeiten der konventionellen und der flachheitsbasierten Trajektorie; RBG mit einem LAM



**Abbildung 6.7:** Verteilungen der Spielzeiten über die Regalfront für a) konventionelle und b) flachheitsbasierte LAM-Steuerung; c) relative Spielzeitverbesserung durch flachheitsbasierte LAM-Steuerung

Die mittlere Spielzeit für das kombinierte Spiel lässt sich wie folgt berechnen [FEM03]:

$$t_{kombSpiel} = 2 \cdot t_{LAM}|_{l_{HW}=0} + t_{E,P_{1E}} + t_{LAM}|_{l_{HW}=y_{P_{1E}}} + t_{P_{1E},P_{2A}} + t_{LAM}|_{l_{HW}=y_{P_{2A}}} + t_{P_{2A},E} + 2 \cdot t_{pos} \quad (6.2)$$

mit den theoretischen Bezugspunkten  $P_{1E}$  und  $P_{2A}$  entsprechend Abbildung 6.2. Da es sich um ein mittleres Spiel handelt, werden zur Berechnung der Spielzeit auch die mittleren LAM-Spielzeiten – gemittelt über den Beladungszustand und die Höhenposition des Hubwagens (siehe Durchschnittswerte in Abbildung 6.6) – verwendet

$$t_{LAM}|_{l_{HW}=y_{P_{1E}}} = t_{LAM}|_{l_{HW}=y_{P_{2A}}} = \emptyset t_{LAM}. \quad (6.3)$$

Setzt man (6.3) in (6.2) ein, so ergeben sich die Spielzeiten für das mittlere kombinierte Spiel zu:

$$t_{kombSpiel,konv} = 124 \text{ s}, \quad t_{kombSpiel,flach} = 112 \text{ s}.$$

Das entspricht einer relativen Spielzeitverbesserung von ca. 10 %.

Die berechneten Spielzeitverbesserungen basieren auf getroffenen Annahmen und gelten nur für das betrachtete RBG und die gewählte Regalfront. Die Abschätzung des Potentials einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung soll deshalb bei jeder Änderung von RBG-Parametern erneut durchgeführt werden. Des Weiteren ist das Potential von den Dimensionen des Hochregallagers abhängig. Bei einer Vergrößerung der Regalfrontabmessungen  $H_R$  und  $L_R$  nimmt der Fahrzeitanteil in der  $xy$ -Ebene des mittleren kombinierten Spiels zu, was eine Reduzierung der Spielzeitverbesserung bewirkt. Die maximale Verbesserung der Materialflussleistung ergibt sich daher bei kurzen Fahrwegen und Ein- bzw. Auslagerungen in den mittleren Regalhöhen.

## 6.3 Auslegungskonzept

In diesem Abschnitt findet die Vorstellung eines Auslegungskonzepts, das dem Anwender die praktische Umsetzung einer LAM-Regelung für die Querschwingungskompensation von RBG erleichtern soll, statt. Eine Übersicht wesentlicher Schritte stellt Abbildung 6.8 dar. Die Auslegung lässt sich in fünf Schritte zusammenfassen: Modellbildung, Trajektorienplanung, Simulation, Einschätzung des Verbesserungspotentials sowie Entwurf und Parametrierung des LAM-Folgereglers.

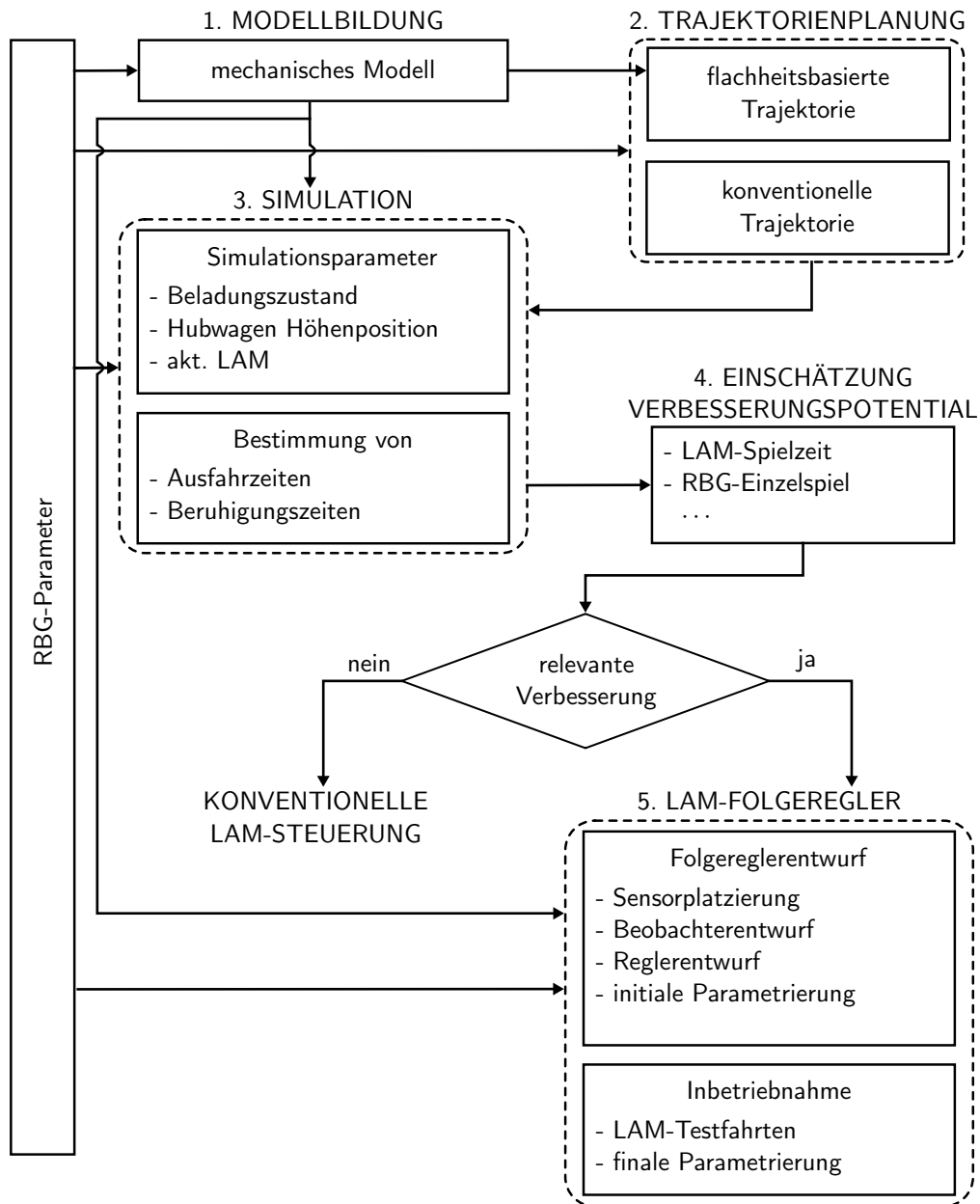


Abbildung 6.8: Auslegungskonzept zur Querschwingungskompensation von RBG



## Modellbildung

Die Erstellung eines mechanischen Modells stellt die Grundlage für die nachfolgenden Auslegungsschritte dar. Hierbei ist zunächst zu prüfen, ob das betrachtete RBG sich durch ein Balkenmodell mit konzentrierten Massen abbilden lässt. Es soll die Gültigkeit der im Abschnitt 3.1.2 genannten Annahmen geprüft werden. Dabei ist darauf zu achten, dass das Verfahren der Übertragungsmatrizen (siehe Abschnitt 3.2.2) die Behandlung von Mastkonstruktionen mit mehreren Querschnitten als zusammengesetzte Balkenstruktur ermöglicht. Treffen die Annahmen für das betrachtete RBG nicht zu, z. B. bei komplexen Tragwerkkonstruktionen oder Mastquerschnitten, die eine Kopplung von Biege- und Torsionsschwingungen bewirken, so kann die Modellbildung und anschließende Analyse des Schwingungsverhaltens mittels FEM durchgeführt werden. Eine ausführliche Anleitung zur Ableitung der Zustandsraumgleichungen in modalen Koordinaten mithilfe von FEM findet sich in [Hat01].

Treffen die Annahmen zu, so kann die Analyse des Biege- und Torsionsschwingungsverhaltens entkoppelt (entsprechend dem Abschnitt 3.2.2) durchgeführt werden. Die Aufstellung von Bewegungsgleichungen und deren Transformation in modale Koordinaten liefern einen Satz von DGL 2. Ordnung, welcher mittels Zustandsraumdarstellung in ein DGL-System 1. Ordnung überführt werden kann (siehe Abschnitt 3.5). Abschließend ist eine Modellordnungsreduktion durchzuführen, um das System für weiterführende Berechnungen zu vereinfachen. Hierfür wird die Modellordnungsreduktion durch balanciertes Abschneiden (siehe Abschnitt 3.6.3) empfohlen.

## Trajektorienplanung

Im zweiten Schritt der Auslegung soll ein Generator zur Planung von konventionellen und schwingungsoptimalen Trajektorien für die LAM-Steuerung erstellt werden. Die konventionelle Trajektorie beruht auf einer 7-Phasen-Bewegung. Diese ist durch Vorgabe des Ausfahrwegs, der max. Geschwindigkeit, der max. Beschleunigung und des max. Rucks bzw. der Ruckzeit vollständig definiert. Bei konventioneller Trajektorie wird lediglich zwischen einer Fahrt des leeren und beladenen LAM unterschieden. Ein mechanisches Modell wird hierfür nicht benötigt, weshalb die Auslegung sich einfach gestaltet (siehe Anhang C).

Die Planung von schwingungsoptimalen Trajektorien beruht auf einem mechanischen Modell. Dabei werden die Vorteile von flachen Systemen zunutze gemacht. Bei diesen Systemen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Eingang bzw. der Stellgröße und dem flachen Ausgang sowie seinen Zeitableitungen. Es kann also bei Vorgabe des gewünschten Ausgangsverlaufs der zugrundeliegende Eingangsverlauf einfach bestimmt werden. Für die flachheitsbasierte Trajektorieplanung müssen deshalb folgen Kriterien erfüllt werden:

- das System muss differentiell flach sein (Nachweis der Flachheit über die Steuerbarkeit (siehe Anhang B)),

- der flache Ausgang muss bekannt sein (Bestimmung des flachen Ausgangs über die Regelungsnormalform (siehe Abschnitt 4.1.3)).

Sind die beiden Kriterien erfüllt, so kann die flachheitsbasierte Trajektorie in Abhängigkeit des Beladungszustands und der Höhenposition des Hubwagens entsprechend dem Abschnitt 4.1.3 berechnet und optimiert werden.

### Simulation

Unter Simulation wird hier das numerische Lösen des DGL-Systems aus dem Auslegungsschritt „Modellbildung“ unter Verwendung von geplanten, konventionellen und flachheitsbasierten Trajektorien verstanden. Hierfür existieren sowohl kommerzielle (z. B. Funktion `lsim()` in MATLAB) als auch frei verfügbare (z. B. Funktion `forced_response()` in Python Control Systems Library [Git22]) Softwarelösungen. Ziel der Simulation besteht darin, die Ausfahr- und Beruhigungszeiten (siehe Abschnitt 4.1.2) in Abhängigkeit des Beladungszustands, Höhenposition des Hubwagens und des aktuierten LAM bei RBG mit zwei LAM zu bestimmen. Diese Zeiten bilden die Grundlage für die Einschätzung des Verbesserungspotentials durch die flachheitsbasierte LAM-Steuerung.

### Einschätzung des Verbesserungspotentials

Ziel dieses Auslegungsschrittes ist das Verbesserungspotential der flachheitsbasierten LAM-Steuerung aufzuzeigen. Unabhängig von der Anzahl der LAM sowie Lagerabmessungen und Lagerstrategie lassen sich die beiden Trajektorienarten anhand der LAM-Spielzeit (siehe (2.1)) bewerten. Die LAM-Spielzeiten sollen dabei für verschiedene Beladungszustände und Höhenpositionen des Hubwagens berechnet werden, um die Vielfalt möglicher Konfigurationen abdecken zu können. Hierfür stehen die Simulationsergebnisse aus dem vorhergehenden Auslegungsschritt zur Verfügung. Erwartungsgemäß werden die LAM-Spielzeiten mit flachheitsbasierter Trajektorie in oberer und unterer Höhenposition (in der Nähe der oberen bzw. unteren Mastführung) immer höher als die mit konventioneller Trajektorie sein. Grund hierfür ist die schwingungsknotennahe Anregung, die in einer geringen oder gar keiner Beruhigungszeit resultiert. Bei diesen Konfigurationen unterscheiden sich die LAM-Spielzeiten der beiden Trajektorien lediglich in den Ein- und Ausfahrzeiten, die bei der flachheitsbasierten Trajektorie aufgrund der Stellgrößenbegrenzung zwangsläufig höher ausfallen (siehe Abschnitt 4.1.3 Stellgrößenbegrenzung). Zur Maximierung der Materialflussleistung, kann auf die flachheitsbasierte LAM-Steuerung in diesen Höhenpositionen verzichtet werden.

Das Verbesserungspotential ist anhand der mittleren LAM-Spielzeit pro LAM, d. h. gemittelt über die Höhenpositionen des Hubwagens und der Beladungszustände, zu

bewerten. Bei geringfügigen<sup>2</sup> Verbesserung oder gar Verschlechterungen der mittleren LAM-Spielzeit sollte auf die Anwendung der flachheitsbasierten LAM-Steuerung verzichtet werden. Dieser Fall kann vor allem bei sehr steifen Tragwerkstrukturen auftreten, deren Anregung durch das LAM vernachlässigbar ist. Wurde jedoch die Tragwerkstruktur gezielt versteift, um Querschwingungen zu reduzieren, so kann, bei Berücksichtigung der flachheitsbasierten LAM-Steuerung in der RBG-Auslegungsphase, die Steifigkeit und damit die Masse der Tragwerkstruktur bewusst ohne Verluste der Materialflussleistung reduziert werden.

Ist eine Verbesserung hinsichtlich der LAM-Spielzeit vorhanden, so kann die Bewertung, zumindest für RBG mit einem LAM um die Betrachtung der RBG-Einzelspiele und des mittleren kombinierten Spiels nach FEM 9.851 [FEM03] erweitert werden (siehe Berechnungsbeispiel zur Bewertung des Verbesserungspotentials im Anhang F). Die Entscheidung, ob die Verbesserung der Materialflussleistung durch die LAM-Steuerung relevant ist, obliegt dem Anwender, da hierfür nicht nur die Materialflussleistung, sondern auch die Kosten für die Antriebssteuerung betrachtet werden sollen.

### Entwurf und Parametrierung des LAM-Folgereglers

Ist die Entscheidung zugunsten der flachheitsbasierten LAM-Steuerung gefallen, so soll im letzten Auslegungsschritt ein Folgeregler entworfen und parametrierung werden, um Modellungenauigkeiten und im Betrieb auftretende Störungen auszugleichen. Der Entwurf eines flachheitsbasierten Folgereglers ist entsprechend Abschnitt 4.2 durchzuführen. Für die praktische Umsetzung des Reglers ist die Rückführung des vollständigen Systemzustands zu jedem Abtastschritt notwendig. Zu diesem Zweck soll ein KALMAN-Filter, das aus einem minimalen Satz aus Sensordaten den vollständigen Zustand abschätzt, implementiert werden. Im Idealfall soll hierfür der Systemausgang – absolute Verschiebung an der LAM-Spitze – direkt zu jedem Abtastschritt gemessen werden. Diese Messung kann z. B. mit einem, an dem LAM-Oberteil installierten Lasersensor und einer festen Referenz realisiert werden. Da das RBG seine Position ( $x$  und  $y$  Position des LAM) im Betrieb ändert, ist eine feste Referenz nicht vorhanden. Aus diesem Grund wird zur Rekonstruktion des Systemausgangs die Messung des Ausfahrwegs mittels Inkrementalgebers und die Beschleunigungsmessung am Hubwagen empfohlen (siehe Abschnitt 4.2.2).

Abschließend sollen der Beobachter und der Folgeregler anhand der Messungen und Probefahrten parametrierung werden. Hierfür sind die Vorgehensweise und die Hinweise entsprechend den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 zu beachten. Zur Parametrierung sollen LAM-Fahrten im beladenen und im leeren Zustand mindestens bei Hubwagenhöhen  $l_{HW} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}l_M$  durchgeführt werden, da hier die größten Einsparungen bei der LAM-Spielzeit zu erwarten sind.

<sup>2</sup>Unter geringfügig wird hier eine mittlere LAM-Spielzeitverbesserung  $\leq 5\%$  verstanden. Es ist zu beachten, dass die LAM-Spielzeit nur anteilig die Materialflussleistung eines RBG beeinflusst (siehe z. B. (6.2) für mittleres kombiniertes Spiel nach FEM 9.851 [FEM03]).



# 7 Zusammenfassung und Ausblick

## Zusammenfassung

Obwohl die Schwingungskompensation von RBG in Fahrt- und Hubrichtung bereits in vielen Forschungsarbeiten behandelt wurde und mittlerweile zum Stand der Technik gehört, wurden Querschwingungen infolge der Ein- bzw. Auslagerungsvorgänge mittels Lastaufnahmemittel bisher nicht untersucht. Die Querschwingungen sind vor allem bei Einmast-Paletten-RBG mit schlanken Mastkonstruktionen bis zu 45 m und Ladeeinheiten bis zu 1 t besonders kritisch, weil eine nicht zu vernachlässigende Zeit vergeht, ehe nach Ein- bzw. Ausfahrt des Lastaufnahmemittels die Strukturschwingungen unter ein zulässiges Toleranzband abklingen. Erst dann kann das RBG verfahren bzw. die Ladeeinheit abgesetzt werden. Das Auftreten von Querschwingungen trägt somit zur Reduzierung der Materialflussleistung dieser Geräte bei.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Querschwingungskompensation von Regalbediengeräten durch Regelung des Teleskopantriebs. Mit dem vorgestellten Regelungskonzept konnte eine Reduzierung der Schwingungsamplitude nach dem Ein- bzw. Ausfahrvorgang bis zu 95 % am Versuchsstand nachgewiesen werden. Für die sensortechnische Ausstattung wurde dabei lediglich ein 1-Achs-Beschleunigungssensor benötigt, was die einfache praktische Umsetzung an realen RBG ermöglicht. Des Weiteren konnte bei simulativen Untersuchungen an einem Referenz-RBG eine Verkürzung der durchschnittlichen LAM-Spielzeit um ca. 42 % erreicht werden.

Das vorgestellte Konzept zu Querschwingungskompensation fundiert auf einem hybriden Modell, das sowohl Elemente mit örtlich verteilten (Kontinuum) als auch mit konzentrierten Parametern (Punktmassen) enthält. Damit ist es möglich eine Bandbreite an gängigen RBG-Konstruktionen abzudecken. Die relevanten Anbauteile (z. B. Hubwerk oder Schaltschrank) ließen sich hierbei durch Punktmassen abbilden. Die Mastkonstruktion – im Allgemeinen aus mehreren Querschnitten – wurde als eine zusammengesetzte Struktur aus EULER-BERNOULLI-Balken modelliert.

Die Beschreibung des Schwingverhaltens – d. h. Bestimmung von Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen – eines solchen Systems erfordert das Aufstellen der charakteristischen Gleichung und dessen Nullstellensuche unter Beachtung aller Rand- und Übergangsbedingungen. Das Aufstellen der charakteristischen Gleichung ist bereits bei Strukturen mit wenigen Balkenabschnitten sehr rechenintensiv. Für ein System mit z. B. vier Balkenabschnitten muss hierfür die Determinante einer  $16 \times 16$  Matrix symbolisch berechnet werden. Dieser Rechenaufwand konnte durch systematische Einarbeitung der Rand- und Übergangsbedingungen und des daraus resultierenden

schlanken Gleichungssystems mittels Verfahren der Übertragungsmatrizen signifikant reduziert werden.

Mit den gewonnenen Informationen über die Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen konnte im Folgenden das Modell mittels der modalen Transformation in die, in der Regelungstechnik übliche, Zustandsraumdarstellung überführt werden. Für die anschließende Modellordnungsreduktion kam das Verfahren des balancierten Abschneidens mit Bewertung des relativen Reduktionsfehlers zum Einsatz. Dadurch wurde eine semi-automatisierte Modellordnungsreduktion unter Vorgabe des zulässigen relativen Reduktionsfehlers möglich. Bei der Modellordnungsreduktion stellte sich heraus, dass sich bereits mit wenigen Eigenmoden das Schwingverhalten des betrachteten Referenz-RBG hinreichend genau approximieren lässt. Ein Vergleich mit dem Finite-Elemente-Modell bestätigte diesen Sachverhalt.

Anschließend erfolgten Untersuchungen am modalen, reduzierten Modell mit Methoden der linearen und flachheitsbasierten Regelungstechnik. In Folge dessen konnte eine flachheitsbasierte Trajektorie für das LAM entworfen werden, die das System von einer gegebenen Start- zu einer gewünschten Endruhelage in der Theorie nachschwingungsfrei überführt. Des Weiteren wurde eine Folgeregelung entwickelt, die das System bei Abweichungen von der Trajektorie durch Störungen im Betrieb sowie Modellungenauigkeiten auf ebenjene zurückführen kann. Dazu wurde eine minimale Zusammenstellung an Sensortechnik und dessen Platzierung am RBG definiert. Die Erkenntnis ist, dass ein die Schwingungen erfassender 1-Achs-Beschleunigungssensor, entweder an der Spitze des LAM oder am Hubwagen, das System voll beobachtbar macht, was eine einfache Überführung in die industrielle Praxis ermöglicht. Basierend auf dieser Erkenntnis wurde ein Beobachter zur vollständigen Zustandsschätzung mittels KALMAN-Filter implementiert.

Das vorgestellte Steuerungs- und Regelungskonzept zur Querschwingungskompensation wurde experimentell am Versuchsstand untersucht. Hierzu wurde zunächst eine Parametrierung des Beobachters und Folgereglers durchgeführt. Um den Aufwand der empirischen Parametrierung für den Anwender einzugrenzen, wurden im Abschnitt 5.2 entsprechende Hinweise und Regeln erarbeitet. Im Ergebnis konnte eine Reduzierung der Schwingungsamplitude nach dem Ein- bzw. Ausfahrvorgang bis zu 95 % im Vergleich zur konventionellen LAM-Steuerung am Versuchsstand nachgewiesen werden. Des Weiteren wurde der Einfluss der Schwerpunkthöhe der Ladeinheit untersucht. Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen bestätigten die theoretischen Vorbetrachtungen, dass bei Änderung der LE-Schwerpunkthöhe die aktive Querschwingungskompensation im gleichen Maße zur Reduzierung der Amplituden in der Nachschwingphase beiträgt. Die Berücksichtigung der LE-Schwerpunkthöhe bei der Trajektorienplanung ist demzufolge nicht notwendig.

Nach erfolgreicher Demonstration des vorgestellten Regelungskonzepts zur Querschwingungskompensation am Versuchsstand wurde dieses auf das betrachtete Referenz-RBG übertragen und simulativ untersucht. Zur Bewertung des Verbesserungspotentials wurde das LAM-Spiel herangezogen. Als Resultat konnte eine Verkürzung

---

der durchschnittlichen LAM-Spielzeit um ca. 42 % im Vergleich zur konventionellen LAM-Steuerung erreicht werden. Die Ergebnisse zeigen, dass sich das größte Potential der aktiven Querschwingungskompensation bei mittleren Hubwagenhöhen einstellt. Bei oberen und unteren Hubwagenhöhen sind jedoch mit der konventionellen LAM-Steuerung kürzere LAM-Spielzeiten erreichbar<sup>1</sup>. Grund hierfür ist die Anregung in der Nähe von Schwingungsknoten (obere und untere Mastführung), die zu geringen Nachschwingamplituden und somit zu verschwindenden Beruhigungszeiten führt. Die LAM-Spielzeit bei diesen Hubwagenhöhen ist somit nur von den Ein- bzw. Ausfahrdauer abhängig, bei denen die konventionelle Trajektorie die schnellst mögliche ist. Bei der praktischen Umsetzung soll deshalb in diesen Bereichen auf die flachheitsbasierte Trajektorienplanung verzichtet und stattdessen die konventionelle LAM-Steuerung verwendet werden.

Die vorliegende Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse in Form eines Auslegungskonzepts, das grundsätzlich für alle RBG der hier betrachteten RBG-Klasse gültig ist. Damit ist dem Anwender eine strukturierte Vorgehensweise für die praktische Umsetzung einer LAM-Regelung zur Querschwingungskompensation von RBG gegeben.

## Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellt einen Modellierungsansatz der RBG-Maststruktur, dessen Querschnitte eine entkoppelte Betrachtung der Biege- und Torsionsschwingungen ermöglichen, dar. Da in der Praxis durchaus RBG vorkommen, auf die diese Annahme nicht zutrifft, soll in weiterführenden Arbeiten der vorgestellte Modellierungsansatz um eine gekoppelte Betrachtung der Biege- und Torsionsschwingungen erweitert werden.

Des Weiteren erfolgte die flachheitsbasierte Trajektorienplanung mittels eines Polynoms. Diese Art der Trajektorien hat den Nachteil, dass die maximalen dynamischen Parameter, wie z. B. maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung, nur über sehr kurze Zeit wirken (siehe Abbildung 4.4). Dadurch sind die Ein- und Ausfahrzeiten dieser Trajektorien im Vergleich zu konventionellen deutlich länger. Aus diesem Grund sollten in weiterführenden Forschungsarbeiten alternative Trajektorien, wie z. B. s-Kurven höherer Ordnung [Bec+15; TKG20], für die flachheitsbasierte Trajektorienplanung untersucht werden, um die Ein- und Ausfahrzeiten zu verkürzen.

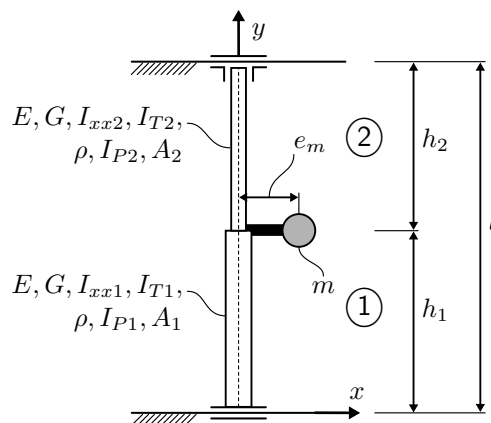
Eine weitere Forschungsfrage ist der Einfluss der aktiven Querschwingungskompensation auf die Lagerstrategie. Die simulativen Untersuchungen im Kapitel 6 zeigen ein hohes Potential des vorgestellten Regelungskonzeptes bezüglich der LAM-Spielzeit. Insbesondere in mittleren Hubhöhenbereichen ist die flachheitsbasierte LAM-Steuerung den Konventionellen überlegen. Dies hat einen Einfluss auf die Zugriffszeiten einzelner Regalfächer und damit auf die Lagerstrategie.

---

<sup>1</sup>Bei dem untersuchten Referenz-RBG betrifft das die zwei unteren und zwei oberen Regalfachpositionen.

# A Orthogonalitätsbedingungen für Balkenstrukturen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Herleitung der Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen für Biege- und Torsionsschwingung einer zusammengesetzten Balkenstruktur. Als Minimalbeispiel dient eine Balkenstruktur mit zwei unterschiedlichen Balkenquerschnitten, definiert durch die Querschnittsflächen  $A_{1,2}$ , die axialen Flächenmomente 2. Grades um die  $x$ -Achse  $I_{xx1,2}$ , Torsionsträgheitsmomente  $I_{T1,2}$ , polare Flächenträgheitsmomente  $I_{P1,2}$ , das Elastizitätsmodul  $E$ , Schubmodul  $G$ , Dichte  $\rho$ , Längen der Balkenabschnitte  $h_{1,2}$  und Gesamtlänge  $l$ . In der Höhe  $h_1$  ist eine Punktmasse  $m$  mit der Exzentrizität  $e_m$  angebracht. Abbildung A.1 stellt das mechanische Modell dar.



**Abbildung A.1:** Minimalmodell einer zusammengesetzten Balkenstruktur mit zwei unterschiedlichen Balkenquerschnitten ①, ② und exzentrisch angeordneter Punktmasse  $m$

## A.1 Biegeschwingung

Die Herleitung der Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen für Biegeschwingung erfolgt in Anlehnung an [Bra12]. Am unteren Balkenabschnitt ① gelten folgende Randbedingungen:



Verschiebung an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null

$$W(0)^{\textcircled{1}} = 0, \quad (\text{A.1})$$

Biegemoment an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null

$$\begin{aligned} -E (I_{xx} W''(0))^{\textcircled{1}} &= 0 \\ W''(0)^{\textcircled{1}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Am oberen Balkenabschnitt  $\textcircled{2}$  gelten folgende Randbedingungen:

Verschiebung an der Stelle  $y = h_2$  ist gleich Null,

$$W(h_2)^{\textcircled{2}} = 0, \quad (\text{A.3})$$

Biegemoment an der Stelle  $y = h_2$  ist gleich Null

$$\begin{aligned} -E (I_{xx} W''(h_2))^{\textcircled{2}} &= 0 \\ W''(h_2)^{\textcircled{2}} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Des Weiteren sind die Übergangsbedingungen zwischen Balkenabschnitten wie folgt definiert:

für Verschiebung und Verdrehung am Abschnittsübergang gilt

$$W(h_1)^{\textcircled{1}} = W(0)^{\textcircled{2}}, \quad (\text{A.5})$$

$$W'(h_1)^{\textcircled{1}} = W'(0)^{\textcircled{2}}, \quad (\text{A.6})$$

für das Biegemoment und die Querkraft am Abschnittsübergang gilt

$$\begin{aligned} E (I_{xx} W''(h_1))^{\textcircled{1}} &= E (I_{xx} W''(0))^{\textcircled{2}} \\ W''(h_1)^{\textcircled{1}} &= \frac{I_{xx}^{\textcircled{2}}}{I_{xx}^{\textcircled{1}}} W''(0)^{\textcircled{2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} E (I_{xx} W'''(h_1))^{\textcircled{1}} &= -m\omega_B^2 W(h_1)^{\textcircled{1}} + E (I_{xx} W'''(0))^{\textcircled{2}} \\ W'''(h_1)^{\textcircled{1}} &= -\frac{m}{EI_{xx}^{\textcircled{1}}} \omega_B^2 W(h_1)^{\textcircled{1}} + \frac{I_{xx}^{\textcircled{2}}}{I_{xx}^{\textcircled{1}}} W'''(0)^{\textcircled{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die ortsabhängige DGL des homogenen Balkenabschnitts  $\textcircled{1}$  für die  $r$ -te und  $s$ -te Eigenfrequenz lauten:

$$E (I_{xx} W_r'''' )^{\textcircled{1}} - \rho A^{\textcircled{1}} \omega_{Br}^2 W_r^{\textcircled{1}} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$E (I_{xx} W_s''''')^{\textcircled{1}} - \rho A^{\textcircled{1}} \omega_{B_s}^2 W_s^{\textcircled{1}} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Multipliziert man (A.9) mit  $W_s^{\textcircled{1}}$  und (A.10) mit  $W_r^{\textcircled{1}}$  und führt anschließend die Subtraktion beider Gleichungen durch, so ergibt sich nach mathematischer Umstellung folgender Zusammenhang

$$(\omega_{B_r}^2 - \omega_{B_s}^2) \rho A^{\textcircled{1}} (W_r W_s)^{\textcircled{1}} = EI_{xx}^{\textcircled{1}} (W_r'''' W_s - W_s'''' W_r)^{\textcircled{1}}. \quad (\text{A.11})$$

Die Integration beider Seiten nach  $y$  über die Länge des Balkenabschnitts führt zu

$$(\omega_{B_r}^2 - \omega_{B_s}^2) \rho A^{\textcircled{1}} \int_0^{h_1} (W_r W_s)^{\textcircled{1}} dy = \underbrace{EI_{xx}^{\textcircled{1}} \int_0^{h_1} (W_r'''' W_s - W_s'''' W_r)^{\textcircled{1}} dy}_{RHS^{\textcircled{1}}}. \quad (\text{A.12})$$

Die partielle Integration der rechten Handseite  $RHS^{\textcircled{1}}$  ergibt

$$RHS^{\textcircled{1}} = EI_{xx}^{\textcircled{1}} \left( (W_r'''' W_s - W_r'' W_s') \Big|_0^{h_1} - (W_s'''' W_r - W_s'' W_r') \Big|_0^{h_1} \right)^{\textcircled{1}}. \quad (\text{A.13})$$

Auf gleichen Art und Weise lässt sich die Gleichung (A.12) für den oberen Balkenquerschnitt  $\textcircled{1}$  angeben als

$$(\omega_{B_r}^2 - \omega_{B_s}^2) \rho A^{\textcircled{2}} \int_0^{h_2} (W_r W_s)^{\textcircled{2}} dy = \underbrace{EI_{xx}^{\textcircled{2}} \int_0^{h_2} (W_r'''' W_s - W_s'''' W_r)^{\textcircled{2}} dy}_{RHS^{\textcircled{2}}} \quad (\text{A.14})$$

mit

$$RHS^{\textcircled{2}} = EI_{xx}^{\textcircled{2}} \left( (W_r'''' W_s - W_r'' W_s') \Big|_0^{h_2} - (W_s'''' W_r - W_s'' W_r') \Big|_0^{h_2} \right)^{\textcircled{2}}. \quad (\text{A.15})$$

Addiert man (A.12) und (A.14) und setzt anschließend die Rand- und Übergangsbedingungen (A.1) bis (A.8) ein, so folgt für  $i \in \{1,2\}$ :

$$(\omega_{B_r}^2 - \omega_{B_s}^2) \left( m (W_r W_s)^{\textcircled{i}} \Big|_{h_i} + \sum_i \rho A^{\textcircled{i}} \int_0^{h_i} (W_r W_s)^{\textcircled{i}} dy \right) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Für  $r \neq s$  ist  $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0$ . Somit ergibt sich aus (A.16) folgende Bedingung

$$m (W_r W_s)^{\textcircled{i}} \Big|_{h_i} + \sum_i \rho A^{\textcircled{i}} \int_0^{h_i} (W_r W_s)^{\textcircled{i}} dy = \begin{cases} 0, & \text{für } r \neq s \\ \alpha_{B_r}, & \text{für } r = s \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

mit

$$\alpha_{B_r} = m W_r^{\textcircled{i}2}(h_i) + \sum_i \rho A^{\textcircled{i}} \int_0^{h_i} W_r^{\textcircled{i}2} dy. \quad (\text{A.18})$$

Die Bedingung (A.17) wird als Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen bezeichnet.

## A.2 Torsionsschwingung

Die Herleitung der Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen für Torsionsschwingungen erfolgt analog zur Biegeschwingung. Am unteren Balkenabschnitt  $\textcircled{1}$  gelten folgende Randbedingungen:

Verdrehung an der Stelle  $y = 0$  ist gleich Null

$$\Psi(0)^{\textcircled{1}} = 0, \quad (\text{A.19})$$

Am oberen Balkenabschnitt  $\textcircled{2}$  gelten folgende Randbedingungen:  
Verdrehung an der Stelle  $y = h_2$  ist gleich Null

$$\Psi(h_2)^{\textcircled{2}} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Des Weiteren sind die Übergangsbedingungen zwischen Balkenabschnitten wie folgt definiert:

für Verdrehung am Abschnittsübergang gilt

$$\Psi(h_1)^{\textcircled{1}} = \Psi(0)^{\textcircled{2}}, \quad (\text{A.21})$$

für das Torsionsmoment am Abschnittsübergang gilt

$$\begin{aligned} G(I_T \Psi'(h_1))^{\textcircled{1}} &= G(I_T \Psi'(0))^{\textcircled{2}} - J\omega_T^2 \Psi(h_1)^{\textcircled{1}}, \\ \Psi'(h_1)^{\textcircled{1}} &= \frac{I_T^{\textcircled{2}}}{I_T^{\textcircled{1}}} \Psi'(0)^{\textcircled{2}} - \frac{J}{GI_T^{\textcircled{2}}} \omega_T^2 \Psi(h_1)^{\textcircled{1}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

mit

$$J = me_m^2. \quad (\text{A.23})$$

Die ortsabhängige DGL des homogenen Balkenabschnitts  $\textcircled{1}$  für die  $r$ -te und  $s$ -te Eigenfrequenz lauten:

$$G(I_T \Psi_r'')^{\textcircled{1}} - \rho I_P^{\textcircled{1}} \omega_{Tr}^2 \Psi_r^{\textcircled{1}} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$G(I_T \Psi_s'')^{\textcircled{1}} - \rho I_P^{\textcircled{1}} \omega_{Ts}^2 \Psi_s^{\textcircled{1}} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Multipliziert man (A.24) mit  $\Psi_s^{\textcircled{1}}$  und (A.25) mit  $\Psi_r^{\textcircled{1}}$  und führt anschließend die Subtraktion beider Gleichungen durch, so ergibt sich nach mathematischer Umstellung folgender Zusammenhang

$$(\omega_{Tr}^2 - \omega_{Ts}^2) \rho I_P^{\textcircled{1}} (\Psi_r \Psi_s)^{\textcircled{1}} = GI_T^{\textcircled{1}} (\Psi_r'' \Psi_s - \Psi_s'' \Psi_r)^{\textcircled{1}}. \quad (\text{A.26})$$

Die Integration beider Seiten nach  $y$  über die Länge des Balkenabschnitts führt zu

$$(\omega_{Tr}^2 - \omega_{Ts}^2) \rho I_P^{(1)} \int_0^{h_1} (\Psi_r \Psi_s)^{(1)} dy = \underbrace{GI_T^{(1)} \int_0^{h_1} (\Psi_r'' \Psi_s - \Psi_s'' \Psi_r)^{(1)} dy}_{RHS^{(1)}} \quad (A.27)$$

Die partielle Integration der rechten Handseite  $RHS^{(1)}$  ergibt

$$RHS^{(1)} = GI_T^{(1)} \left( (\Psi_r' \Psi_s - \Psi_s' \Psi_r) \Big|_0^{h_1} \right)^{(1)}. \quad (A.28)$$

Auf gleichen Art und Weise lässt sich die Gleichung (A.27) für den oberen Balkenquerschnitt  $(1)$  angeben als

$$(\omega_{Tr}^2 - \omega_{Ts}^2) \rho I_P^{(2)} \int_0^{h_2} (\Psi_r \Psi_s)^{(2)} dy = \underbrace{GI_T^{(2)} \int_0^{h_2} (\Psi_r'' \Psi_s - \Psi_s'' \Psi_r)^{(2)} dy}_{RHS^{(2)}} \quad (A.29)$$

mit

$$RHS^{(2)} = GI_T^{(2)} \left( (\Psi_r' \Psi_s - \Psi_s' \Psi_r) \Big|_0^{h_2} \right)^{(2)}. \quad (A.30)$$

Addiert man (A.27) und (A.29) und setzt anschließend die Rand- und Übergangsbedingungen (A.19) bis (A.22) ein, so folgt für  $i \in \{1,2\}$

$$(\omega_{Br}^2 - \omega_{Bs}^2) \left( J(\Psi_r \Psi_s)^{(i)} \Big|_{h_1} + \sum_i \rho I_P^{(i)} \int_0^{h_i} (\Psi_r \Psi_s)^{(i)} dy \right) = 0. \quad (A.31)$$

Für  $r \neq s$  ist  $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0$  somit ergibt sich aus (A.31) folgende Bedingung

$$J(\Psi_r \Psi_s)^{(i)} \Big|_{h_1} + \sum_i \rho I_P^{(i)} \int_0^{h_i} (\Psi_r \Psi_s)^{(i)} dy = \begin{cases} 0, & \text{für } r \neq s \\ \alpha_{Tr}, & \text{für } r = s \end{cases} \quad (A.32)$$

mit

$$\alpha_{Tr} = J\Psi_r^{(1)2}(h_1) + \sum_i \rho I_P^{(i)} \int_0^{h_i} \Psi_r^{(i)2} dy. \quad (A.33)$$

Die Bedingung (A.32) wird als Orthogonalitätsbedingung der Eigenfunktionen bezeichnet.



Für das Steuerbarkeitskriterium von Hautus ergibt sich dann die Hautus-Matrix:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & & & & & & 0 \\ -a_{1,1} & \lambda - a_{1,2} & & & & & & & & b_1 \\ & & \lambda & -1 & & & & & & 0 \\ & & -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & & & & & & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & \lambda & -1 & & 0 \\ & & & & & & -a_{\hat{n},1} & \lambda - a_{\hat{n},2} & & b_{\hat{n}} \\ & & & & & & & & \lambda & -1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & \lambda & b_A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Zur Untersuchung des Ranges der HAUTUS-Matrix kann man durch Streichen einzelner Spalten Teilmatrizen  $\in \mathbb{C}^{n \times n}$  und davon die Determinanten (Minoren) bilden. Falls für mindestens einen der Eigenwerte  $\lambda$  alle Minoren zu 0 werden, gibt es einen Rangabfall von  $\mathbf{H}_c$  und das System ist damit nicht steuerbar.

### Nachweis für $\lambda_{i,1/2}$

Für diesen Nachweis lohnt es sich die HAUTUS-Matrix (B.6) in eine äquivalente Darstellung wie folgt umzuformen:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & & & & & & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda - a_{1,2}) - a_{1,1} & & & & & & & & \lambda b_1 \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & \lambda & -1 & & & & & 0 \\ & & & 0 & \lambda(\lambda - a_{\hat{n},2}) - a_{\hat{n},1} & & & & & \lambda b_{\hat{n}} \\ & & & & & & \lambda & -1 & & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda & & b_A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Nachfolgend wird der Nachweis für  $i = 1$  durchgeführt. Für alle weiteren Eigenwerte ist der Nachweis analog. Hierfür wird der Minor durch Streichen der  $(i + 1)$ -ter Spalte

von  $\mathbf{H}_c$  untersucht

$$M_{c,i+1} = \det \begin{bmatrix} \lambda & & & & & & & & 0 \\ & \lambda & & -1 & & & & & 0 \\ & 0 & \lambda(\lambda - a_{2,2}) - a_{2,1} & & & & & & \lambda b_2 \\ & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & \lambda & & -1 & & 0 \\ & & & & 0 & \lambda(\lambda - a_{\hat{n},2}) - a_{\hat{n},1} & & & \lambda b_{\hat{n}} \\ & & & & & & & \lambda & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & \lambda & b_A \\ & & & & & & & & & \lambda b_1 \end{bmatrix},$$

$$M_{c,i+1} = \lambda^{n - (\frac{\hat{n}}{2} - 1)} b_1 \prod_{m=i+1}^{\hat{n}} \lambda(\lambda - a_{m,2}) - a_{m,1}. \quad (\text{B.8})$$

Dieser Minor ist ungleich 0 bei folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} b_1 &\neq 0, \\ \lambda(\lambda - a_{m,2}) - a_{m,1} &\neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Setzt man die Eigenwerte  $\lambda_{i,1/2}$  entsprechend (B.5) in die zweite Bedingung ein, so stellt man fest, dass diese für

$$\begin{aligned} i &\neq m, \\ a_{i,k} &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

immer erfüllt ist.

Damit ist nachgewiesen, dass unter Einhaltung der Bedingungen (B.9) und (B.10) das System für Eigenwerte  $\lambda_{i,1/2}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, \hat{n}\}$  steuerbar ist.

### Nachweis für $\lambda_{A,1/2}$

Für diesen Nachweis setzt man zunächst den Eigenwert  $\lambda_{A,1/2} = 0$  in (B.6) ein und formt diese in die äquivalente Darstellung um

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & & & & & & & b_1 \\ 0 & -1 & & & & & & & 0 \\ & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & & & & & b_2 \\ & & 0 & -1 & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & -a_{\hat{n},1} & -a_{\hat{n},2} & & & b_{\hat{n}} \\ & & & & 0 & -1 & & & 0 \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & b_A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Der zugrundeliegende Minor ergibt sich durch Streichen der  $(n - 1)$ -ter Spalte von  $\mathbf{H}_c$  zu

$$M_{c,n-2} = \det \begin{bmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & & & & & b_1 \\ 0 & -1 & & & & & 0 \\ & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & & & b_2 \\ & & 0 & -1 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -a_{\hat{n},1} & -a_{\hat{n},2} & b_{\hat{n}} \\ & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & b_A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Es ist zu erkennen, dass dieser Minor ungleich 0 bei Einhaltung folgender Bedingungen ist

$$\begin{aligned} a_{i,1} &\neq 0, \\ b_A &\neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Führt man die Rücksubstitution der Ersatzvariablen in (B.9), (B.10) und (B.13) durch, so müssen für die Steuerbarkeit des Systems folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} W_j(l_{HW}) &\neq 0, \\ \Psi_j(l_{HW}) &\neq 0, \\ \omega_{Bj} &\neq 0, \\ \omega_{Tj} &\neq 0, \\ \omega_B &\notin \omega_T. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.2 Beobachtbarkeit

Das HAUTUS-Kriterium für die Beobachtbarkeit eines linearen Systems mit der Systemmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  lautet

$$\text{rang}(\mathbf{H}_o) = n \quad (\text{B.15})$$

mit

$$\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} \lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

für alle Eigenwerte  $\lambda_j$  der Matrix  $\mathbf{A}$ .

Die vereinfachte Darstellung der Ausgangsmatrix für den Beobachtungsnachweis ist

$$\hat{\mathbf{C}} = [c_1 \ 0 \ c_2 \ 0 \ \dots \ c_{\hat{n}} \ 0 \ 1 \ 0] \quad (\text{B.17})$$



mit

$$c_i \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, \hat{n}\}, \hat{n} = n_B + n_T. \quad (\text{B.18})$$

Damit ergibt sich die HAUTUS-Matrix zu

$$\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & & & & & & & & \\ -a_{1,1} & \lambda - a_{1,2} & & & & & & & & \\ & & \lambda & -1 & & & & & & \\ & & -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda & -1 & & & \\ & & & & & -a_{\hat{n},1} & \lambda - a_{\hat{n},2} & & & \\ & & & & & & & \lambda & -1 & \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & c_{\hat{n}} & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Die Untersuchung des Ranges der HAUTUS-Matrix erfolgt ebenso anhand der Minoren. Falls für mindestens einen der Eigenwerte  $\lambda$  alle Minoren zu 0 werden, gibt es einen Rangabfall von  $\mathbf{H}_o$  und das System ist damit nicht beobachtbar.

### Nachweis für $\lambda_{i,1/2}$

Für diesen Nachweis lohnt es sich die HAUTUS-Matrix (B.19) in eine äquivalente Darstellung wie folgt umzuformen:

$$\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & & & & & & & \\ -a_{1,1} & \lambda(\lambda - a_{1,2}) - a_{1,1} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \lambda & 0 & & & & & \\ & & & -a_{\hat{n},1} & \lambda(\lambda - a_{\hat{n},2}) - a_{\hat{n},1} & & & & & \\ & & & & & & \lambda & -1 & & \\ c_1 & c_1 & \dots & c_{\hat{n}} & c_{\hat{n}} & & 0 & \lambda^2 & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & \end{bmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

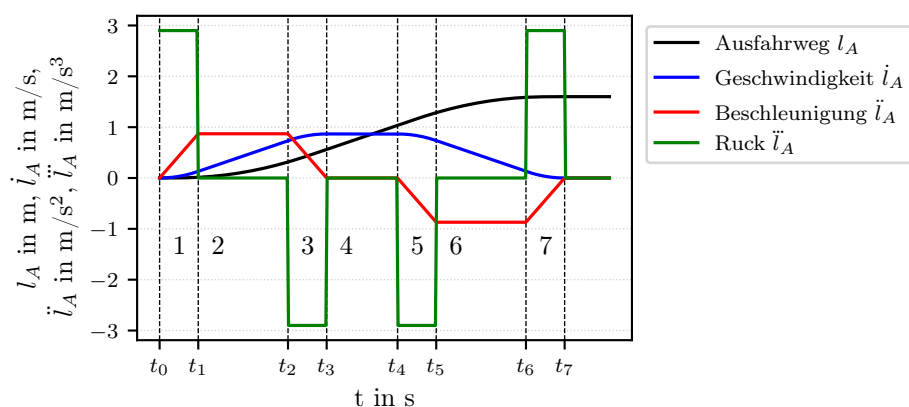
Nachfolgend wird der Nachweis für  $i = 1$  durchgeführt. Für alle weitere Eigenwerte ist der Nachweis analog. Hierfür wird der Minor durch Streichen der  $(i + 1)$ -ter Zeile





# C Trajektorie für 7-Phasen-Bewegung des LAM

Es wird die Trajektorie einer 7-Phasen-Bewegung mit konstanter Ausrundungszeit  $t_r$ , maximaler Beschleunigung  $a_{max}$ , maximaler Geschwindigkeit  $v_{max}$  für die Überführung des LAM von  $l_A(t_0 = 0) = 0$  m zu  $l_A(t_7) = l_{A,max}$  betrachtet (siehe Abbildung C.1).



**Abbildung C.1:** Ausfahrweg  $l_A(t)$ , Geschwindigkeit  $\dot{l}_A(t)$ , Beschleunigung  $\ddot{l}_A(t)$  und Ruck  $\dddot{l}_A(t)$  einer 7-Phasen-Bewegung für den LAM-Ausfahrvorgang

Dabei gelten für den Ruck  $\ddot{l}_{A,n}(t) = r_n(t)$ , die Beschleunigung  $\dot{l}_{A,n}(t) = a_n(t)$ , die Geschwindigkeit  $\dot{l}_{A,n}(t) = v_n(t)$  und den Weg  $l_{A,n}(t) = s_n(t)$  der  $n$ -ter Phase folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 r_n(t) &= \frac{da_n}{dt} = \frac{\Delta a_n}{\Delta t_n}, \\
 a_n(t) &= \int r_n(t) dt, \\
 v_n(t) &= \int a_n(t) dt, \\
 s_n(t) &= \int v_n(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \Delta a_n &= a_n - a_{n-1}, \\
 \Delta t_n &= t_n - t_{n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{C.2}$$

---

Mit (C.1) und (C.2) werden nachfolgend die Trajektorien für einzelne Phasen in relativen Zeitbereichen  $t \in [0; \Delta t_n)$  berechnet.

**1. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_1)$

Die Phasendauer  $\Delta t_1$  entspricht der Ausrundungszeit  $t_r$ . Es folgt:

$$\begin{aligned}
r_1(t) &= \frac{a_{max}}{\Delta t_1}, \\
a_1(t) &= \frac{a_{max}}{\Delta t_1} t, \\
v_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{a_{max}}{\Delta t_1} t^2, \\
s_1(t) &= \frac{1}{6} \frac{a_{max}}{\Delta t_1} t^3.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

**2. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_2)$

Die Phasendauer berechnet sich zu

$$\Delta t_2 = \frac{v_2(\Delta t_2)}{a_{max}} \tag{C.4}$$

mit

$$v_2(\Delta t_2) = v_{max} - 2v_1(\Delta t_1). \tag{C.5}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
r_2(t) &= 0 \text{ m/s}^3, \\
a_2(t) &= a_1(\Delta t_1) = a_{max}, \\
v_2(t) &= a_{max} t + v_1(\Delta t_1), \\
s_2(t) &= \frac{1}{2} a_{max} t^2 + v_1(\Delta t_1) t + s_1(\Delta t_1).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

**3. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_3)$

Die Phasendauer  $\Delta t_3$  entspricht der Ausrundungszeit  $t_r$ . Es folgt:

$$\begin{aligned}
r_3(t) &= -\frac{a_{max}}{\Delta t_3}, \\
a_3(t) &= -\frac{a_{max}}{\Delta t_3} t + a_2(\Delta t_2), \\
v_3(t) &= -\frac{1}{2} \frac{a_{max}}{\Delta t_3} t^2 + a_2(\Delta t_2) t + v_2(\Delta t_2), \\
s_3(t) &= -\frac{1}{6} \frac{a_{max}}{\Delta t_3} t^3 + \frac{1}{2} a_2(\Delta t_2) t^2 + v_2(\Delta t_2) t + s_2(\Delta t_2).
\end{aligned} \tag{C.7}$$

**4. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_4)$

Die Phasendauer berechnet sich zu:

$$\Delta t_4 = \frac{s_4(\Delta t_4)}{v_3(\Delta t_3)} \quad (\text{C.8})$$

mit

$$s_4(\Delta t_4) = l_{A,max} - 2 \left( \sum_{j=1}^3 s_j(\Delta t_j) \right). \quad (\text{C.9})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} r_4(t) &= 0 \text{ m/s}^3, \\ a_4(t) &= 0 \text{ m/s}^2, \\ v_4(t) &= v_3(\Delta t_3), \\ s_4(t) &= v_3(\Delta t_3)t + s_3(\Delta t_3). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

**5. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_5)$

Die Phasendauer  $\Delta t_5$  entspricht der Ausrundungszeit  $t_r$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} r_5(t) &= -\frac{a_{max}}{\Delta t_5}, \\ a_5(t) &= -\frac{a_{max}}{\Delta t_5}t, \\ v_5(t) &= -\frac{1}{2} \frac{a_{max}}{\Delta t_5}t^2 + v_4(\Delta t_4), \\ s_5(t) &= -\frac{1}{6} \frac{a_{max}}{\Delta t_5}t^3 + v_4(\Delta t_4)t + s_4(\Delta t_4). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

**6. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_6)$

Die Phasendauer  $\Delta t_6$  entspricht der Phasendauer  $\Delta t_2$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} r_6(t) &= 0 \text{ m/s}^3, \\ a_6(t) &= a_5(\Delta t_5) = -a_{max}, \\ v_6(t) &= -a_{max}t + v_5(\Delta t_5), \\ s_6(t) &= -\frac{1}{2}a_{max}t^2 + v_5(\Delta t_5)t + s_5(\Delta t_5). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

---

**7. Phase:**  $t \in [0; \Delta t_7]$

Die Phasendauer  $\Delta t_7$  entspricht der Ausrundungszeit  $t_r$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} r_7(t) &= \frac{a_{max}}{\Delta t_7}, \\ a_7(t) &= \frac{a_{max}}{\Delta t_1} t + a_6(\Delta t_6), \\ v_7(t) &= \frac{1}{2} \frac{a_{max}}{\Delta t_7} t^2 + a_6(\Delta t_6) t + v_6(\Delta t_6), \\ s_7(t) &= \frac{1}{6} \frac{a_{max}}{\Delta t_1} t^3 + \frac{1}{2} a_6(\Delta t_6) t^2 + v_6(\Delta t_6) t + s_6(\Delta t_6). \end{aligned} \tag{C.13}$$

Die berechneten Trajektorien einzelner Phasen lassen sich zu den abschnittsweise definierten Funktionen unter Berücksichtigung der Substitution  $t = t - t_{n-1}$  in (C.3), (C.6), (C.7), (C.10), (C.11), (C.12), (C.13) zusammenfassen. Der Ruckverlauf lässt sich berechnen zu:

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t), & \text{für } t \in [0; t_1) \\ r_2(t - t_1), & \text{für } t \in [t_1; t_2) \\ r_3(t - t_2), & \text{für } t \in [t_2; t_3) \\ r_4(t - t_3), & \text{für } t \in [t_3; t_4) \\ r_5(t - t_4), & \text{für } t \in [t_4; t_5) \\ r_6(t - t_5), & \text{für } t \in [t_5; t_6) \\ r_7(t - t_6), & \text{für } t \in [t_6; t_7] \end{cases} \tag{C.14}$$

mit

$$t_n = \sum^n \Delta t_n. \tag{C.15}$$

Die Verläufe für die Beschleunigung  $a(t)$ , Geschwindigkeit  $v(t)$  und den Ausfahrweg  $s(t)$  lassen sich analog zu (C.14) berechnen.

## D Trajektorienoptimierung

Es soll die optimale Überführungszeit  $t_A$  für eine flachheitsbasierte Trajektorie  $\ddot{l}_{A,ref}(t)$  bei Einhaltung der Grenzwerte  $[-a_{max}, a_{max}]$  ermittelt werden. Die optimale Überführungszeit ergibt sich, wenn das Betragsmaximum der Trajektorie

$$\hat{\ddot{l}}_{A,ref} = \max(|\ddot{l}_{A,ref}(t)|) \quad (\text{D.1})$$

mit dem Grenzwert  $a_{max}$  zusammenfällt, d. h.  $\hat{\ddot{l}}_{A,ref} \approx a_{max}$ . Dabei lässt sich die Güte dieser Näherung anhand des relativen Fehlers

$$\epsilon_A = |(a_{max} - \hat{\ddot{l}}_{A,ref})/a_{max}| \quad (\text{D.2})$$

bewerten.

Erfolgt die Optimierung iterativ, so lässt sich bei Vorgabe einer zulässigen Abweichung  $\epsilon_{A,zul}$  das Abbruchkriterium formulieren zu:

$$\epsilon_A \leq \epsilon_{A,zul}. \quad (\text{D.3})$$

Des Weiteren bietet es sich an, den Suchraum für die optimale Überführungszeit  $t_A$  einzugrenzen. Als untere Grenze eignet sich die Ausfahrzeit einer konventionellen Trajektorie  $t_{A,konv}$ , da diese grundsätzlich bei der flachheitsbasierten Trajektorie zu einer Überschreitung der Stellgrößenbegrenzung führt. Nach oben lässt sich der Suchraum sinnvoll durch  $2t_{A,konv}$  eingrenzen. Wird die Trajektorienbegrenzung bei der Planung mit Überführungszeit  $t_A = 2t_{A,konv}$  immer noch überschritten, so kann die flachheitsbasierte Trajektorie auf Grund der langen Ausfahrzeit verworfen werden. Anderenfalls muss sich die optimale Ausfahrzeit im Bereich  $[t_A, 2t_{A,konv}]$  befinden. Algorithmus D.1 fasst die Schritte einer iterativen Trajektorienoptimierung zusammen.

Abbildung D.1 (oben) stellt die Fehlerentwicklung  $\epsilon_A$  über die Optimierungsiterationen am Beispiel der LAM-Beschleunigungstrajektorie für den Ausfahrvorgang des 2. LAM dar. Es ist zu erkennen, dass der relative Fehler bereits nach vier Iterationen weniger als 1% beträgt. Die dazugehörige zeitoptimierte Beschleunigungstrajektorie stellt die Abbildung D.1 (unten) dar.



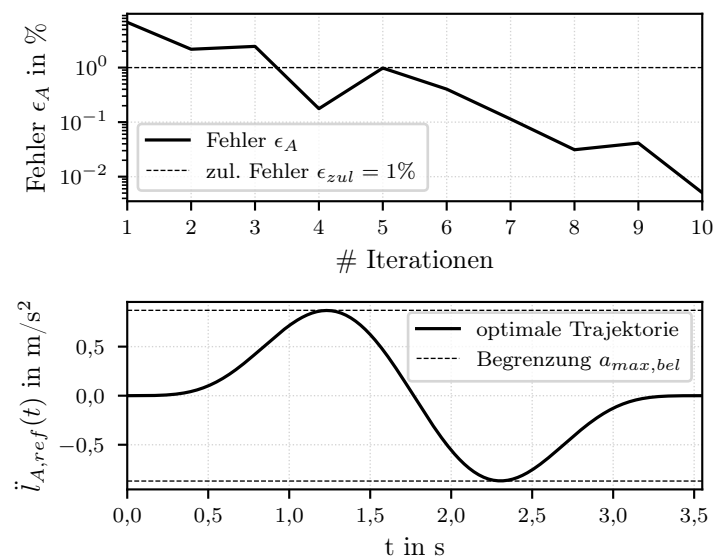
---

**Algorithmus D.1** Zeitoptimierung einer Trajektorie mit Begrenzung

---

```
1: ① Startwerte für die Optimierung
2: Erstelle einen Tupel  $k$  mit 10 gleichverteilten Werten im Bereich  $[t_{A,konv}, 2t_{A,konv}]$ 
3: for  $n = 1, \dots, 10$  do
4:   Berechne die Trajektorie  $\ddot{l}_{A,ref}(t)$  für die Überführungszeit  $t_A = k_n$ 
5:   Bestimme das Betragsmaximum der Trajektorie  $\hat{l}_{A,ref} = \max(|\ddot{l}_{A,ref}(t)|)$ 
6:   if  $\hat{l}_{A,ref} < a_{max}$ , d. h. Trajektorie liegt im zulässigen Bereich then
7:     Startwerte für die Optimierung  $t_1 = k_{n-1}$ ,  $t_2 = k_n$ 
8:     return  $t_1, t_2, \hat{l}_{A,ref}$ 
9:     break
10:  end if
11: end for
12:
13: ② Iterative Trajektorienoptimierung
14: while  $\epsilon_A > \epsilon_{A,zul}$  do
15:   Berechne die Trajektorie  $\ddot{l}_{A,ref}(t)$  für die Überführungszeit  $t_A = (t_1 + t_2)/2$ 
16:   Bestimme das Betragsmaximum der Trajektorie  $\hat{l}_{A,ref} = \max(|\ddot{l}_{A,ref}(t)|)$ 
17:   if  $\hat{l}_{A,ref} > a_{max}$  then
18:     Startwerte für nächste Iteration  $t_1 = \max\{t_1, t_2\}$ ,  $t_2 = t_A$ 
19:     return  $t_A$ 
20:     break
21:   end if
22:   if  $\hat{l}_{A,ref} < a_{max}$  then
23:     Startwerte für nächste Iteration  $t_1 = \min\{t_1, t_2\}$ ,  $t_2 = t_A$ 
24:     return  $t_A$ 
25:     break
26:   end if
27: end while
```

---

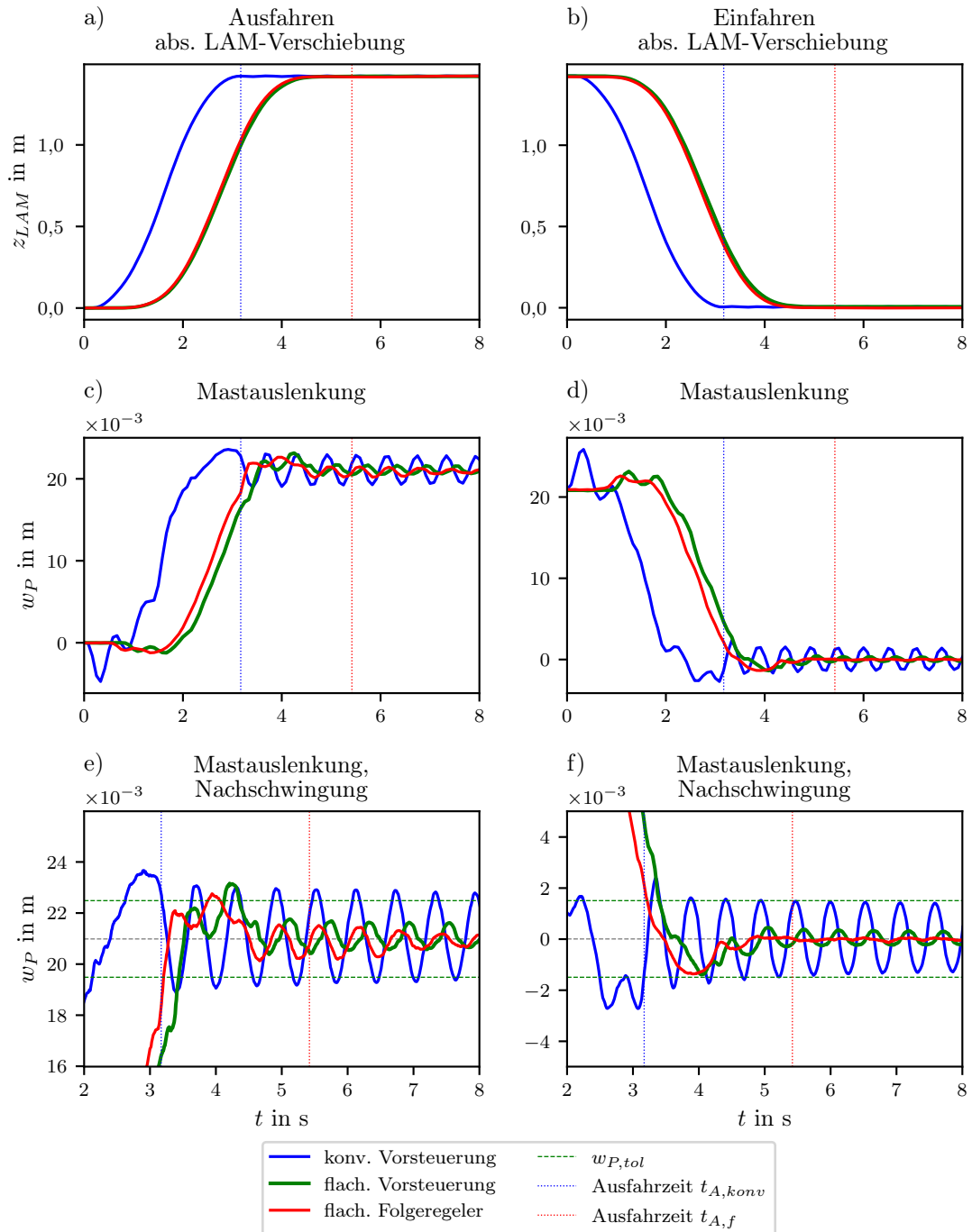


**Abbildung D.1:** Entwicklung des relativen Fehlers  $\epsilon_A$  über die Optimierungsiterationen am Beispiel der LAM-Beschleunigungstrajektorie für den Ausfahrvorgang des 2. LAM; Beladung  $m_{L1} = m_{L2} = 1000$  kg; Höhenposition des Hubwagens  $l_{HW} = 18$  m (oben); Dazugehörige zeitoptimierte Beschleunigungstrajektorie (unten)

# E Versuchsergebnisse

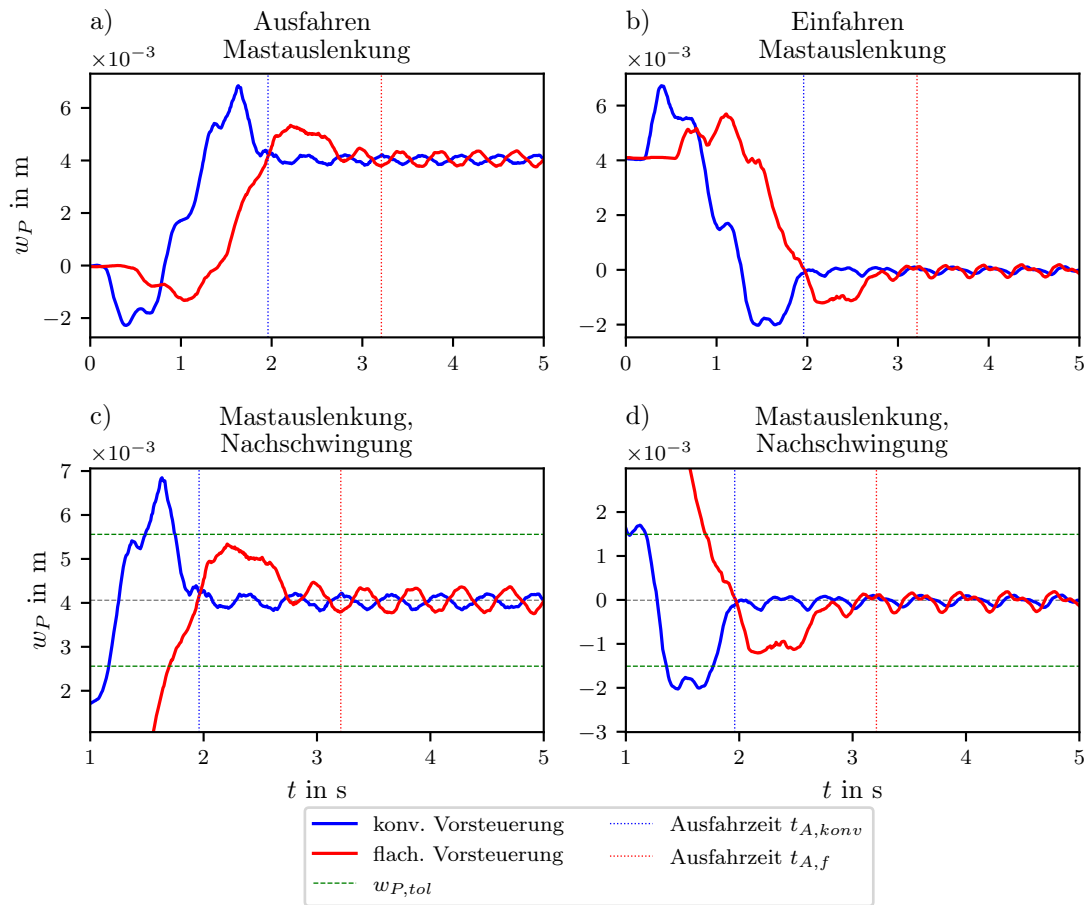
Nachfolgende Abbildungen fassen die Messergebnisse der experimentellen Untersuchungen am Versuchsstand zusammen. Abbildung E.1 stellt die Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 2,98$  m und den Beladungszustand  $m_L = 476$  kg dar. Abbildung E.2 stellt die Messergebnisse für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 3,3$  m und den Beladungszustand  $m_L = 0$  kg dar. Abbildung E.3 stellt die Messergebnisse für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 2,98$  m und den Beladungszustand  $m_L = 0$  kg dar.

$$l_{QT} = 2,98 \text{ m}, m_L = 476 \text{ kg}$$



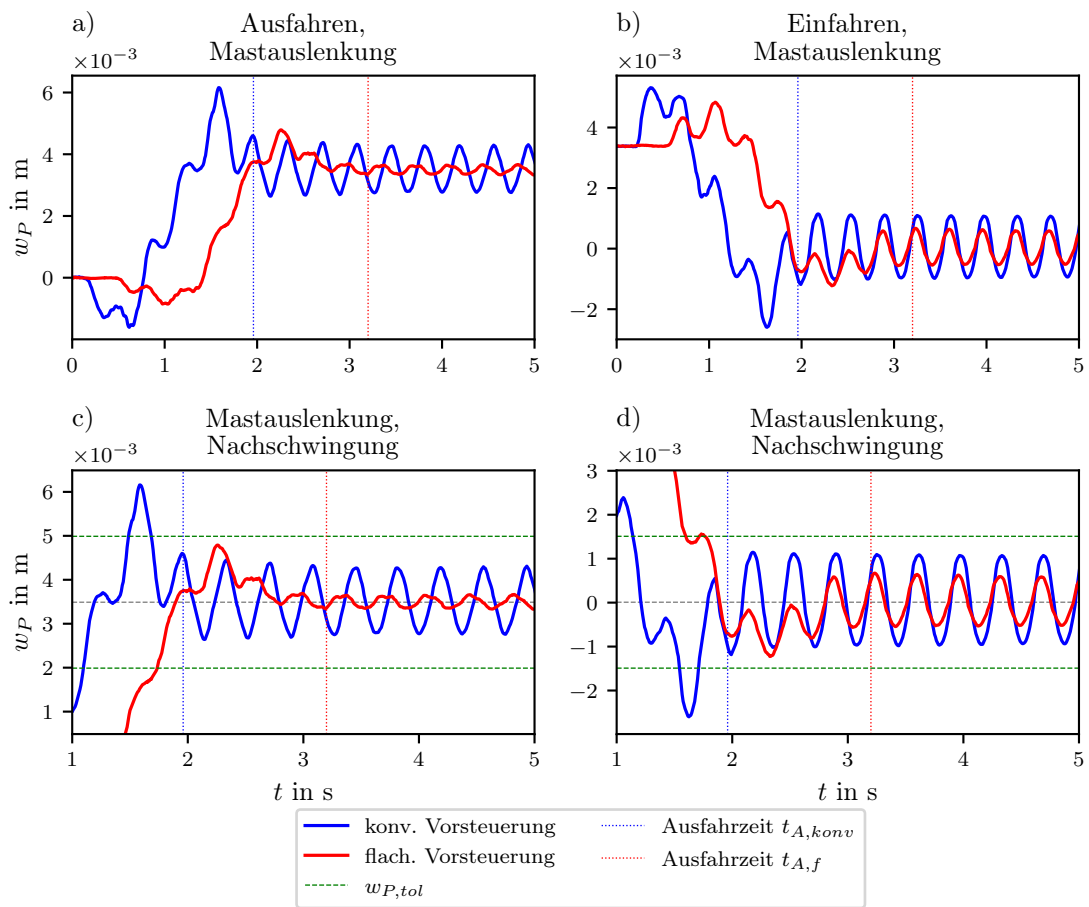
**Abbildung E.1:** Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 2,98 \text{ m}$  und den Beladungszustand  $m_L = 476 \text{ kg}$ ; gemittelte Werte aus fünf Wiederholungen

$$l_{QT} = 3,3 \text{ m}, m_L = 0 \text{ kg}$$



**Abbildung E.2:** Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 3,3 \text{ m}$  und den Beladungszustand  $m_L = 0 \text{ kg}$ ; gemittelte Werte aus fünf Wiederholungen

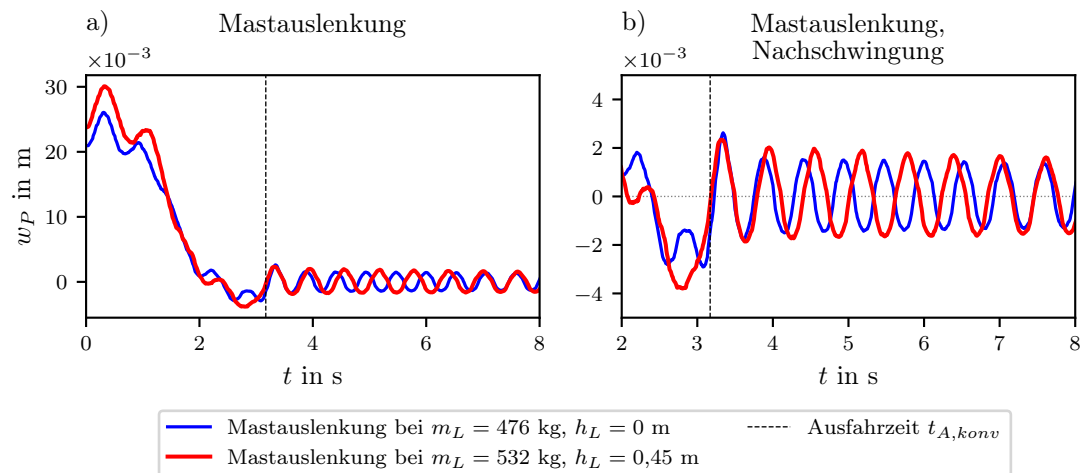
$$l_{QT} = 2,98 \text{ m}, m_L = 0 \text{ kg}$$



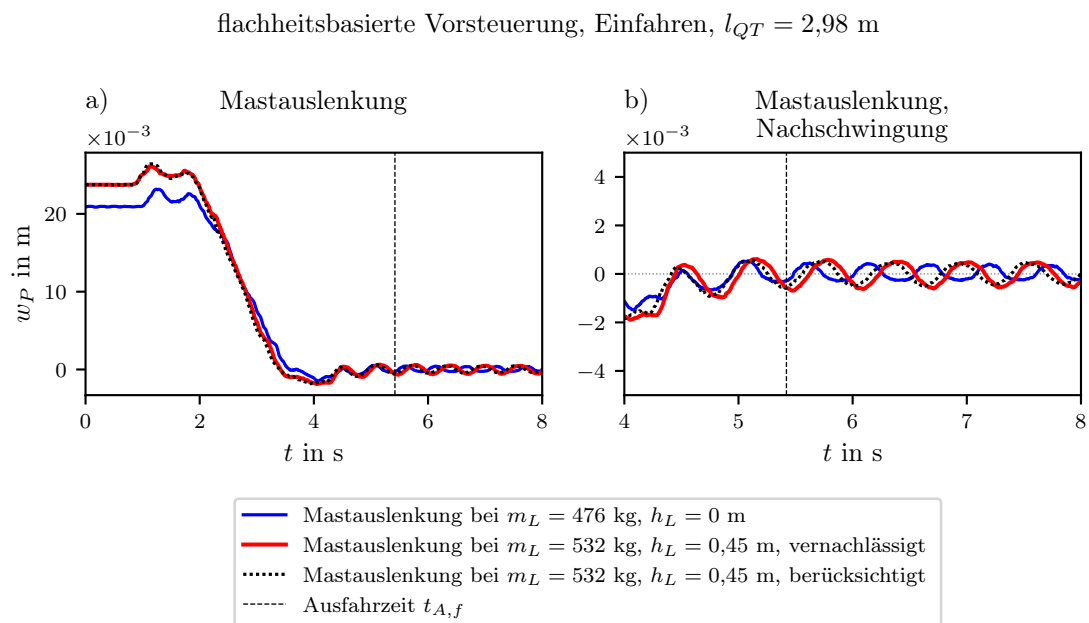
**Abbildung E.3:** Messergebnisse der untersuchten Betriebsweisen für die Höhenposition des Querträgers  $l_{QT} = 2,98 \text{ m}$  und den Beladungszustand  $m_L = 0 \text{ kg}$ ; gemittelte Werte aus fünf Wiederholungen

Nachfolgende Abbildungen stellen die Ergebnisse der LE-Schwerpunkthöhenuntersuchung in Form von Mastauslenkung  $w_P$  am Beispiel des LAM-Einfahrvorgangs dar.

konventionelle Vorsteuerung, Einfahren,  $l_{QT} = 2,98$  m



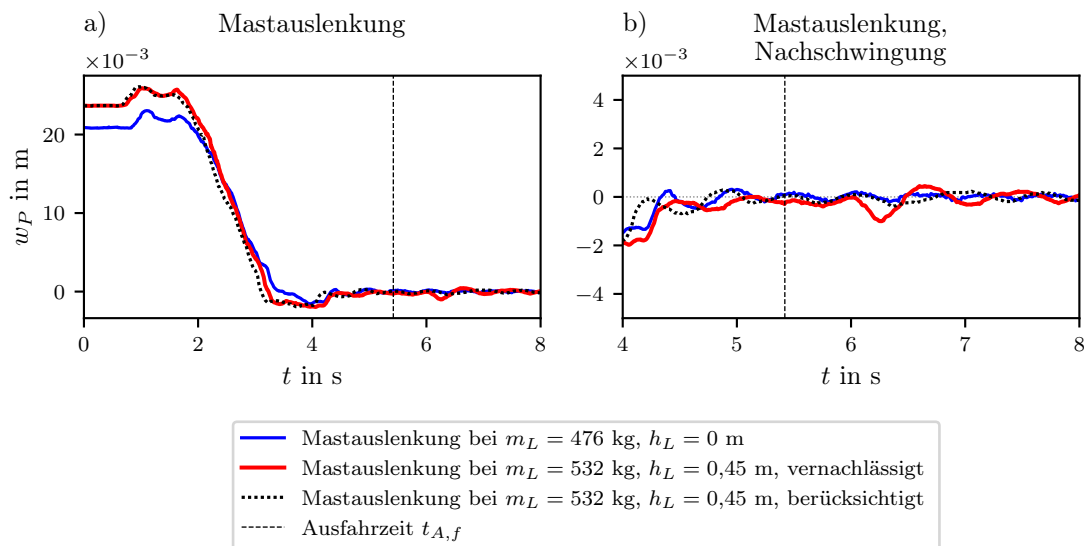
**Abbildung E.4:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Einfahrvorgang mit konventioneller Vorsteuerung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m



**Abbildung E.5:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Einfahrvorgang mit flachheitsbasierter Vorsteuerung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m mit und ohne Berücksichtigung von  $h_L, J_L$  im Modell



flachheitsbasierte Folgeregelung, Einfahren,  $l_{QT} = 2,98$  m



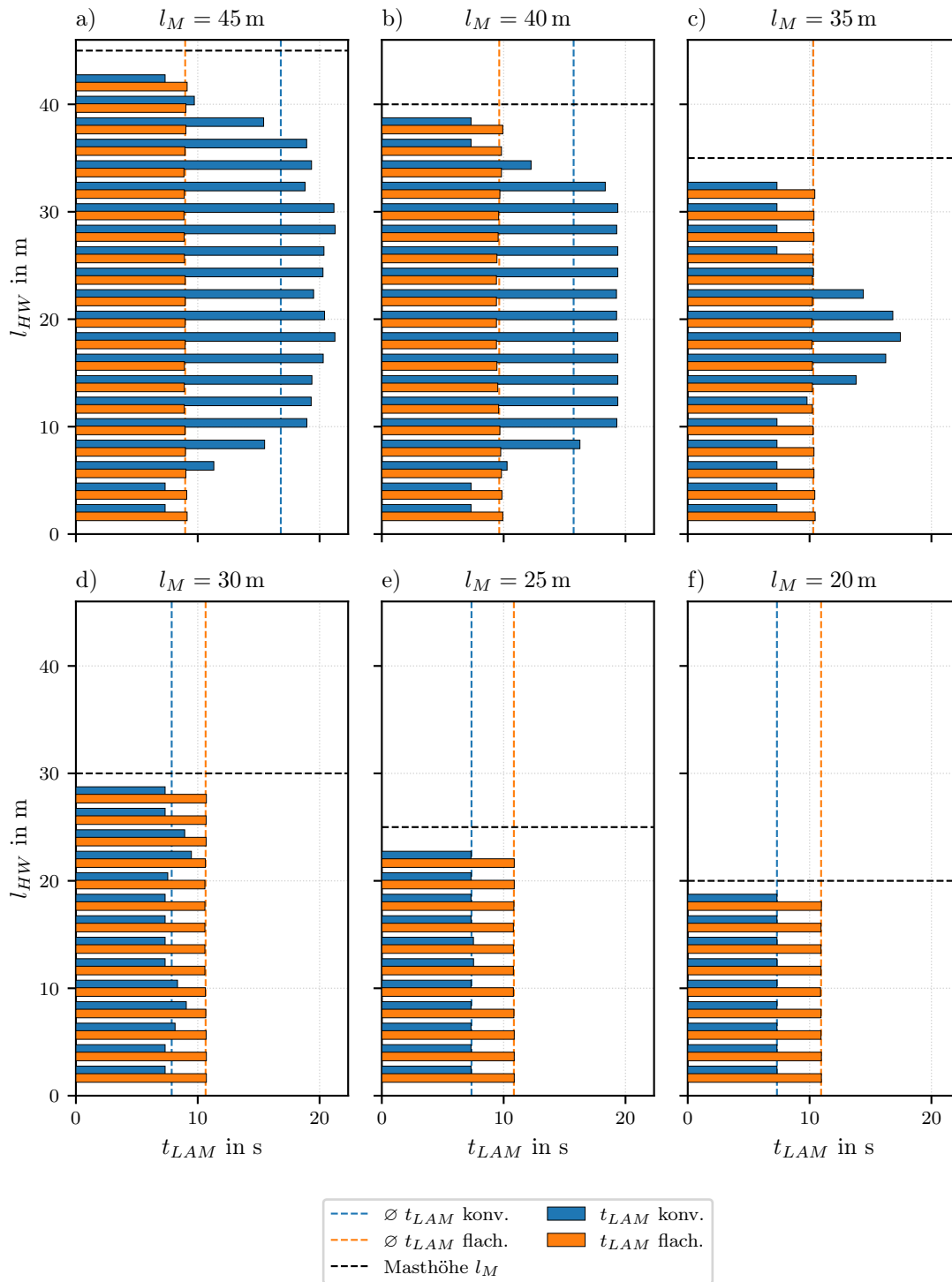
**Abbildung E.6:** a) Vergleich der gemessenen Mastauslenkungen  $w_P$  für den LAM-Einfahrvorgang mit flachheitsbasierter Folgeregelung; b) Vergleich der mittelwertfreien Mastauslenkungen in der Nachschwingphase; Beladung  $m_L = 476$  kg,  $h_L \approx 0$  m und  $m_L = 532$  kg,  $h_L = 0,45$  m mit und ohne Berücksichtigung von  $h_L$ ,  $J_L$  im Modell

# F Verbesserungspotential LAM-Steuerung

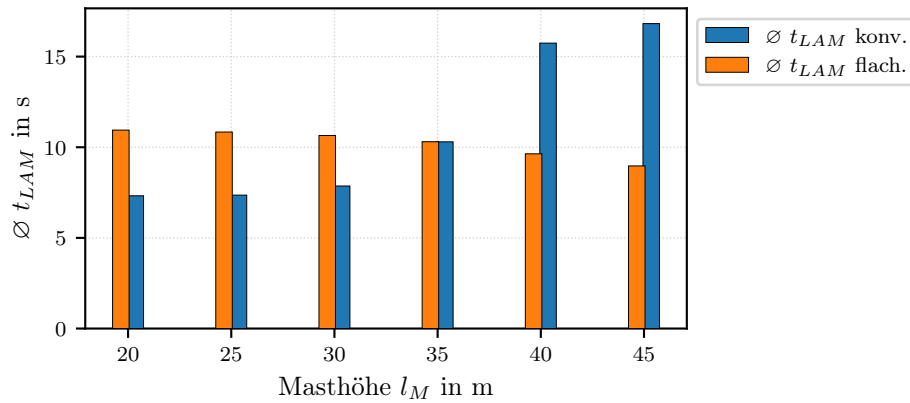
Die Bewertung des Verbesserungspotentials hinsichtlich der Materialflussleistung durch Einsatz einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung erfolgt zunächst anhand der LAM-Spielzeiten. Als Beispiel dient das Referenz-RBG mit einem LAM. Um herauszufinden, ab welcher RBG-Höhe der Einsatz einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung sinnvoll ist, erfolgt die Betrachtung für eine RBG-Serie mit Masthöhen  $l_M \in \{20, 25, 30, 35, 40, 45\}$  m.

Abbildung F.1 stellt die mittleren LAM-Spielzeiten in Abhängigkeit der Höhenposition des Hubwagens für unterschiedliche Masthöhen dar. Es ist zu erkennen, dass mit absteigender Masthöhe  $l_M$  die Tragwerksteifigkeit ansteigt, was zur Senkung der Beruhigungszeit bei der konventionellen LAM-Betriebsweise führt. Bei Masthöhen  $l_M \leq 25$  m verschwindet die Beruhigungszeit bei der konventionellen LAM-Betriebsweise, sodass sich die mittleren LAM-Spielzeiten über die Höhenposition des Hubwagens angleichen.

Betrachtet man die durchschnittlichen LAM-Spielzeiten bei der flachheitsbasierten LAM-Steuerung, so stellt man fest, dass mit absteigender Masthöhe  $l_M$  die Tragwerksteifigkeit ansteigt, was zum Anstieg der durchschnittlichen LAM-Spielzeit führt. Ursache hierfür ist die ansteigende Eigenfrequenz der 1. Mode, dessen Schwingungskompensation durch flachheitsbasierte Trajektorie eine höhere LAM-Beschleunigung erfordert. Unter Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung führt das zwangsläufig zu einer Erhöhung der LAM-Ausfahrzeit (siehe Abschnitt 4.1.3, Stellgrößenbegrenzung). Die Sinnhaftigkeit einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung ist durch den Vergleich der durchschnittlichen LAM-Spielzeiten in Abhängigkeit von der Masthöhe ersichtlich (siehe Abbildung F.2). Eine Verbesserung der Materialflussleistung durch Einsatz einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung ist für die betrachtete RBG-Serie erst ab einer Masthöhe  $l_M \geq 35$  m möglich. Hierbei handelt es sich um die theoretisch mögliche Verbesserung. Aufgrund der Modellungenauigkeiten und der in der Praxis auftretenden Störgrößen kann deren Kompensation durch Einsatz eines Folgereglers zur Verlängerung der theoretischen LAM-Spielzeit führen. Um diese Unsicherheiten zu berücksichtigen, empfiehlt es sich, bei der Berechnung der relativen LAM-Spielzeitverbesserung die durchschnittliche Spielzeit  $\varnothing t_{LAM,flach}$  mit einem Sicherheitsbeiwert  $S_{LAM} = 1,05$  (entspricht einer LAM-Spielzeitverlängerung um 5 %) zu multiplizieren.



**Abbildung F.1:** Vergleich der LAM-Spielzeiten der konventionellen und der flachheitsbasierten Trajektorie für RBG mit verschiedenen Masthöhen

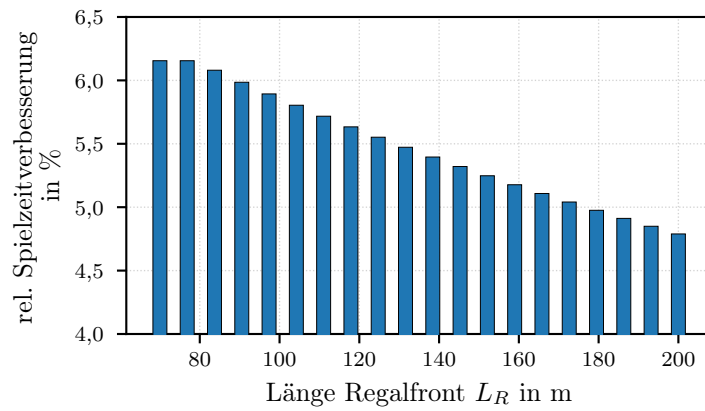


**Abbildung F.2:** Vergleich der durchschnittlichen LAM-Spielzeiten in Abhängigkeit der Masthöhe

Für das Referenz-RBG mit Masthöhe  $l_M = 40$  m berechnet sich die relative LAM-Spielzeitverbesserung z. B. wie folgt (Werte für  $\varnothing t_{LAM}$  siehe Abbildung F.2):

$$\begin{aligned}
 \text{Verbesserung}_{LAM,rel} &= \frac{(\varnothing t_{LAM,konv} - \varnothing t_{LAM,flach} S_{LAM})}{\varnothing t_{LAM,konv}} 100\%, \\
 &= \frac{(15,74 - 9,63 \cdot 1,05) \text{ s}}{15,74 \text{ s}} 100\% = 36\%.
 \end{aligned}
 \tag{F.1}$$

Ist die LAM-Spielzeitverbesserung durch flachheitsbasierte LAM-Steuerung gegeben, so erfolgt im zweiten Schritt die Bewertung deren Auswirkung auf die Materialflussleistung eines RBG unter Berücksichtigung der Regalfreilängeparameter. Für Einmast-RBG kann dies anhand des mittleren kombinierten Spiels nach FEM 9.851 [FEM03] bewertet werden. Mit (6.2) und (6.3) lassen sich diese Spielzeiten für die konventionelle und die flachheitsbasierte LAM-Betriebsweise und folglich die relative Spielzeitverbesserung berechnen. Abbildung F.3 stellt die relative Spielzeitverbesserung des mittleren kombinierten Spiels in Abhängigkeit von der Regalfreilänge  $L_R$  dar. Es ist zu erkennen, dass die relative Spielzeitverbesserung mit der Regalfreilänge abnimmt. Dies lässt sich dadurch begründen, dass der Anteil des LAM-Spiels im mittleren kombinierten Spiel mit der Regalfreilänge abnimmt. Wird z. B. Mindestverbesserung der Materialflussleistung von 5 % durch Einsatz einer flachheitsbasierten LAM-Steuerung gewünscht, so ist diese für das Referenz-RBG mit  $l_M = 40$  m nur bei einer Regalfreilänge  $L_R \leq 180$  m realisierbar.



**Abbildung F.3:** Relative Spielzeitverbesserung in Abhängigkeit von der Regalfrontlänge für das mittlere kombinierte Spiel nach FEM 9.851; RBG-Masthöhe  $l_M = 40$  m

# Literatur

- [Ada18] Adamy, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3., aktualisierte Auflage. Berlin: Springer Vieweg, 2018. ISBN: 978-3-662-55684-9. DOI: 10.1007/978-3-662-55685-6.
- [Arn99] Arnold, D.: „Zustandsregelung am Regalbediengerät - Beeinflussung der Biegeschwingungen des Mastes“. In: *Hebezeuge und Fördermittel* 39.12 (1999), S. 576–580.
- [AF09] Arnold, D. & Furmans, K.: *Materialfluss in Logistiksystemen*. 6., erweiterte Aufl. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 9783642014048. DOI: 10.1007/978-3-642-01405-5.
- [Bac12] Bachmayer, M.: „Effizientes Positionieren am Beispiel Regalbediengerät“. Dissertation. München: Universitätsbibliothek der TU München, 2012.
- [Bac+08] Bachmayer, M., Schipplick, M., Thümmel, T., Kessler, S., Ulbrich, H. & Günthner, W. A.: „Nachschwingungsfreie Positionierung elastischer Roboter durch numerische und analytische Trajektorienplanung am Beispiel Regalbediengerät“. In: *Tagungsband VDE/VDI-Tagung: Elektrisch-mechanische Antriebssysteme - Innovationen - Trends - Mechatronik*. 2008.
- [Bar08] Barthels, P.: *Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen: Dissertation*. Bd. 7. Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik. Karlsruhe: Univ.-Verl. Karlsruhe, 2008. ISBN: 9783866442177.
- [Bär17] Bärwolff, G.: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. 3. Auflage. Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 9783662550229. DOI: 10.1007/978-3-662-55022-9.
- [Bec+15] Beckmann, D., Schappler, M., Dagen, M. & Ortmaier, T.: „New approach using flatness-based control in high speed positioning: Experimental results“. In: *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT), 2015*. Piscataway, NJ: IEEE, 2015, S. 351–356. ISBN: 978-1-4799-7800-7. DOI: 10.1109/ICIT.2015.7125123.

- 
- [BMW15] BMWi Bundesministerium für Wirtschaft und Energie: „Industrie 4.0 und Digitale Wirtschaft“. 2015.
- [Bop93] Bopp, W.: „Untersuchung der statischen und dynamischen Positionsgenauigkeit von Einmast-Regalbediengeräten“. Dissertation. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1993.
- [Bra12] Brański, A.: „Modes Orthogonality of the Mechanical System Simple Supported Beam-Actuators-Concentrated Masses“. In: *Acta Physica Polonica A* 121.1A (2012), S. 126–131. ISSN: 0587-4246. DOI: 10.12693/APhysPolA.121.A-126.
- [Cra89] Crawford, F. S.: *Schwingungen und Wellen*. 3., verbesserte Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1989. ISBN: 9783322907776. DOI: 10.1007/978-3-322-90777-6.
- [DEM22] DEMATIC GmbH: *Dematic RapidStore ASRS*. 2022. URL: [https://www.dematic.com/content/dam/dematic/downloads/brochures/NA\\_BR\\_1060\\_RapidStore\\_Family.pdf](https://www.dematic.com/content/dam/dematic/downloads/brochures/NA_BR_1060_RapidStore_Family.pdf) (abgerufen am: 12. 11. 2022).
- [Die99] Dietzel, M.: *Beeinflussung des Schwingungsverhaltens von Regalbediengeräten durch Regelung des Fahrantriebs: Dissertation*. Bd. 48. Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH). Karlsruhe: Inst. f. Fördertechnik u. Logistiksysteme, 1999.
- [DIN92] DIN 15350: *Regalbediengeräte; Grundsätze für Stahltragwerke; Berechnungen*. Berlin, 1992.
- [Dör18] Dörr, K.: *Travel Time Models and Throughput Analysis of Dual Load Handling Automated Storage and Retrieval Systems in Double Deep Storage*. Bd. 92. Wissenschaftliche Berichte des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme des Karlsruher Instituts für Technologie. Karlsruhe, Baden: KIT Scientific Publishing, 2018. ISBN: 3731507935.
- [FEM97] FEM 9.101: *Terminologie - Regalbediengerät - Definition*. Deutsches Nationalkomitee der Fédération Européenne de la Manutention, 1997.
- [FEM03] FEM 9.851: *Leistungsnachweis für Regalbediengeräte - Spielzeiten*. Deutsches Nationalkomitee der Fédération Européenne de la Manutention, 2003.

- [Fil+16] Filippatos, A., Dannemann, M., Wohlfahrt, D., Modler, N. & Schmidt, T.: „Design of a highly damped fibre-reinforced lightweight mast for automated storage systems in logistics“. In: *23rd International Congress on Sound and Vibration 1* (2016), S. 2831–1839. DOI: 10.13140/RG.2.1.2728.3447.
- [Fli+92] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. & Rouchon, P.: „Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats“. In: *Comptes Rendus de l'Académie des Science* (1992).
- [Fli+93] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. & Rouchon, P.: „On Differentially Flat Nonlinear Systems“. In: *Nonlinear Control Systems Design 1992* (1993), S. 159–163. DOI: 10.1016/B978-0-08-041901-5.50031-2.
- [Fli+95] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. & Rouchon, P.: „Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples“. In: *International Journal of Control* 6 (1995), S. 1327–1361. DOI: 10.1080/00207179508921959.
- [Fli09] Fließbach, T.: *Mechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*. 6. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2009. ISBN: 9783827421487. DOI: 10.1007/978-3-8274-2188-3.
- [Föll16] Föllinger, O.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 12., überarbeitete Auflage. Berlin und Offenbach: VDE Verlag, 2016. ISBN: 9783800742028.
- [GS18] Galkina, A. & Schlacher, K.: „Flatness-Based Model Predictive Control with Linear Programming for a Single Mast Stacker Crane“. In: *IFAC-PapersOnLine* 51.2 (2018), S. 31–36. ISSN: 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.03.006.
- [GKL12] Gasch, R., Knothe, K. & Liebich, R.: *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. 2. Aufl. 2012. Berlin und Heidelberg: Springer, 2012. ISBN: 9783540889762. DOI: 10.1007/978-3-540-88977-9.
- [Gaw04] Gawronski, W. K.: *Advanced structural dynamics and active control of structures*. Mechanical Engineering Series. New York, NY: Springer-Verlag New York Inc, 2004. ISBN: 9780387721330. DOI: 10.1007/978-0-387-72133-0.



- [GJ90] Gawronski, W. K. & Juang, J.-N.: „Model reduction in limited time and frequency intervals“. In: *International Journal of Systems Science* 21.2 (1990), S. 349–376. ISSN: 0020-7721. DOI: 10.1080/00207729008910366.
- [Git22] GitHub: *GitHub - python-control: The Python Control Systems Library is a Python module that implements basic operations for analysis and design of feedback control systems.* 2022. URL: <https://github.com/python-control/python-control> (abgerufen am: 04.01.2022).
- [GKL09] Görges, D., Kroneis, J. & Liu, S.: „Active Vibration Control of Storage and Retrieval Machines“. In: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - 2008*. New York, NY: ASME, 2009, S. 1037–1046. ISBN: 978-0-7918-4326-0. DOI: 10.1115/DETC2008-49756.
- [Haj16] Hajdu, S.: „Mast vibration reduction of single-mast stacker cranes via modern control methods“. Dissertation. Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2016.
- [HG13] Hajdu, S. & Gaspar, P.: „Investigation of the influence of lifted load on dynamical behavior of stacker cranes through unstructured uncertainties“. In: *2013 IEEE 14th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI 2013)*. Hrsg. von Anikó Szakál. Piscataway, NJ: IEEE, 2013, S. 179–184. ISBN: 978-1-4799-0197-5. DOI: 10.1109/CINTI.2013.6705188.
- [HG16] Hajdu, S. & Gáspár, P.: „Reducing the mast vibration of single-mast stacker cranes by gain-scheduled control“. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 26.4 (2016), S. 791–802. DOI: 10.1515/amcs-2016-0056.
- [Hat01] Hatch, M. R.: *Vibration simulation using MATLAB and ANSYS*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. ISBN: 1584882050.
- [HH11] Hompel, M. ten & Heideblut, V.: *Hochregallager*. 2011. URL: <http://www.logipedia.de/lexikon/Hochregallager> (abgerufen am: 09.02.2022).
- [HSD18] Hompel, M. ten, Schmidt, T. & Dregger, J.: *Materialflusssysteme: Förder- und Lagertechnik*. 4. Auflage. VDI-Buch. Berlin: Springer Vieweg, 2018. ISBN: 9783662561805. DOI: 10.1007/978-3-662-56181-2.

- [Hüb10] Hübner, K.-T.: „Tragsicherheit automatisierter Hochregallager unter stoßartigen Beschickungslasten durch Regalbediengeräte“. Dissertation. Garching b. München: Technischen Universität München, 2010.
- [KNV10] Kuczera, T., Nikic, I. & Vorwerk, C.: „Analyse des dynamischen Verhaltens von Schwerlast-Regalbediengeräten“. In: *Logistics Journal Proceedings* (2010). DOI: 10.2195/LJ\_PROC10\_Kuczera.
- [Küh01] Kühn, I.: *Untersuchung der Vertikalschwingungen von Regalbediengeräten: Dissertation*. Bd. 53. Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Förder-technik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH). Karlsruhe: Inst. f. Fördertechnik u. Logistiksysteme, 2001.
- [Lau+87] Laub, A., Heath, M., Paige, C. & Ward, R.: „Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 32.2 (1987), S. 115–122. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1987.1104549.
- [LA89] Liu, Y. I. & Anderson, B. D. O.: „Singular perturbation approximation of balanced systems“. In: *International Journal of Control* 50.4 (1989), S. 1379–1405. DOI: 10.1080/00207178908953437.
- [Lun10] Lunze, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 8., neu bearb. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer Berlin, 2010. ISBN: 978-3-642-13807-2. DOI: 10.1007/978-3-642-13808-9.
- [Lun16] Lunze, J.: *Regelungstechnik*. 9., überarbeitete und aktualisierte Auflage. Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0. DOI: 10.1007/978-3-662-52676-7.
- [MPS16] Magnus, K., Popp, K. & Sextro, W.: *Schwingungen: Grundlagen - Modelle - Beispiele*. 10., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 9783658138219. DOI: 10.1007/978-3-658-13821-9.
- [Moo81] Moore, B.: „Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 26.1 (1981), S. 17–32. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102568.
- [PV01] Piazzzi, A. & Visioli, A.: „Optimal noncausal set-point regulation of scalar systems“. In: *Automatica* 37.1 (2001), S. 121–127. ISSN: 00051098. DOI: 10.1016/S0005-1098(00)00130-8.

- [rai19] raiser Engineering GmbH & Co. KG: *raiser Regalbediengeräte – Standards neu gedacht*. Hrsg. von raiser Engineering GmbH & Co. KG. 2019. URL: <https://www.raiser-rbg.de/download/engineering/rbg/raiser-rbg-final-web.pdf> (abgerufen am: 23.08.2019).
- [Röb17] Röbenack, K.: *Nichtlineare Regelungssysteme: Theorie und Anwendung der exakten Linearisierung*. 1. Aufl. 2017. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 9783662440919.
- [Sch01] Schiller, M.: „Beanspruchungsermittlung und Optimierung der Tragwerksstruktur von Regalbediengeräten“. Dissertation. Stuttgart: Universität Stuttgart, 2001.
- [SG11] Schipplick, M. & Günther, W. A.: „Potentiale einer flachheitsbasierten Antriebssteuerung am Beispiel Regalbediengerät“. In: *at - Automatisierungstechnik* 59.4 (2011), S. 7. ISSN: 0178-2312. DOI: 10.1524/auto.2011.0918.
- [Sch19] Schmidt, T., Hrsg.: *Innerbetriebliche Logistik*. Fachwissen Logistik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. ISBN: 9783662579299. DOI: 10.1007/978-3-662-57930-5.
- [SM17] Schmidt, T. & Modler, N.: *Einsatz faser- bzw. textilverstärkter Funktionswerkstoffe zur Schwingungsdämpfung bei Hubmasten von Regalbediengeräten: Schlussbericht IGF-Nr. 18366 BR*. 2017.
- [Sch94] Schumacher, M.: „Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Einmast-Regalbediengeräten“. Dissertation. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1994.
- [SB17] Schuth, M. & Buerakov, W.: *Handbuch Optische Messtechnik: Praktische Anwendungen für Entwicklung, Versuch, Fertigung und Qualitätssicherung*. Hanser eLibrary. München: Hanser, 2017. ISBN: 9783446436619. DOI: 10.3139/9783446436619.
- [Sko+17] Skoblar, A., Žigulić, R., Braut, S. & Blažević, S.: „Dynamic response to harmonic transverse excitation of cantilever Euler-Bernoulli beam carrying a point mass“. In: *FME Transactions* 45.3 (2017), S. 367–373. ISSN: 1451-2092. URL: <http://scindeks.ceon.rs/article.aspx?artid=1451-20921703367S>.
- [Spu19] Spura, C.: „EULER-BERNOULLI-Balkentheorie (schubstarrer Balken)“. In: *Stereostatik*. Hrsg. von Christian Spura. Lehrbuch. Wiesbaden: Sprin-

- ger Vieweg, 2019, S. 169–222. ISBN: 978-3-658-19978-4. DOI: 10.1007/978-3-658-19979-1\_9.
- [Sta21a] Statistisches Bundesamt: *Einzelhandelsumsatz als Konjunkturindikator - Vergleich mit Internethandel, Märkte*. 2021. URL: <https://www.destatis.de/DE/Themen/Querschnitt/Corona/Wirtschaft/kontextinformationen-wirtschaft.html#einzelhandel> (abgerufen am: 09.02.2022).
- [Sta21b] Statistisches Bundesamt: *Onlinehandel gewinnt immer mehr an Bedeutung*. 2021. URL: <https://www.destatis.de/DE/Themen/Wirtschaft/Grosshandel-Einzelhandel/einzelhandel-online-handel.html> (abgerufen am: 09.02.2022).
- [SSH08] Staudecker, M., Schlacher, K. & Hansl, R.: „Passivity Based Control and Time Optimal Trajectory Planning of a Single Mast Stacker Crane“. In: *IFAC Proceedings Volumes 41.2* (2008), S. 875–880. ISSN: 14746670. DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00150.
- [SGM08] Stelzmann, U., Groth, C. & Müller, G.: *FEM für Praktiker*. 5., neu bearb. Aufl. Bd. 44. Edition expertsoft. Renningen: Expert-Verl., 2008. ISBN: 9783816928423.
- [TGK20] Tkany, C., Grotjahn, M. & Kuhn, J.: „Flatness-Based Feedforward Control of a Stacker Crane with Online Trajectory Generation“. In: *2020 4th International Conference on Automation, Control and Robots*. Piscataway, NJ: IEEE, 2020, S. 79–87. ISBN: 978-1-7281-9207-9. DOI: 10.1109/ICACR51161.2020.9265504.
- [Trö11] Tröster, F.: *Steuerungs- und Regelungstechnik für Ingenieure*. 3., überarb. und erw. Aufl. Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure. München: Oldenbourg, 2011. ISBN: 9783486589849. DOI: 10.1524/9783486705256.
- [VDI93] VDI 2361: *Regalbediengeräte (regalabhängig)*. 1993.
- [VDI13] VDI 3968: *Sicherung von Ladeeinheiten - Anforderungsprofil*. 2013.
- [Wau14] Wauer, J.: *Kontinuumsschwingungen: Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldsystem*. 2., überarb. u. erw. Aufl. 2014. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. ISBN: 9783834822420.
- [WB95] Welch, G. & Bishop, G.: *An introduction to the Kalman filter*. Chapel Hill, NC, USA, 1995.

- [Wie96] Wiedemann, J.: *Leichtbau*. 2., neubearb. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer, 1996. ISBN: 3540607463.
- [ZR14] Zacher, S. & Reuter, M.: *Regelungstechnik für Ingenieure: Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen*. 14., korrig. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 9783834822161. DOI: 10.1007/978-3-8348-2216-1.
- [Zha+16] Zhakov, A., Schmidt, T., Dannemann, M. & Modler, N.: „Einsatz faser- bzw. textilverstärkter Verbundwerkstoffe zur Schwingungsdämpfung bei Hubmasten von Regalbediengeräten“. In: *Logistics Journal : Proceedings 2016* (2016).