O MÉTODO AXIOMÁTICO E O PROBLEMA DA CONSISTÊNCIA ABSOLUTA

Arlete Cerqueira Lima
Prof. Adjunto do Dep. de Educação
Prof. Emérito (UFBA)
E-mail: arlete27@ig.com.br
Universidade Estadual de Feira de Santana – Dep. de Educação
Tel./Fax (75) 224-8084 – BR 116 – KM 03,
Campus - Feira de Santana/BA – CEP 44031-460

RESUMO — *Este artigo foi escrito especialmente para aqueles iniciados em Matemática que se interessam por Lógica, Filosofia e História da Matemática. A metodologia escolhida foi a do diálogo entre Sócrates (século IV a.C.) e Gödel (1906-1978), em local previamente marcado - no céu - onde a contemporaneidade é absoluta, pois passado e futuro se fundem. Sabendo, durante uma diversificada conversa com Hilbert (1862-1943), que o método axiomático foi exaustivamente explorado nos séculos XIX e XX e que, através dele, os matemáticos conseguiram (ou quase conseguiram) a síntese do pensamento matemático, Sócrates propõe-lhe que o deixe atualizado sobre tais coisas, pois, como filósofo, tem necessidade de conhecer a evolução das teorias científicas. Hilbert recomenda a Sócrates procurar Gödel que, em 1931, com apenas 25 anos, publicou um trabalho revolucionário sobre o assunto, abalando os fundamentos não só da Matemática, mas, também, da Lógica, mexendo, conseqüentemente com a Filosofia.*

PALAVRAS-CHAVE: *Axiomatização; Consistência; Completude.*

ABSTRACT — *This article was written especially for those who, possessing basic skills in Mathematics, are now interested in Logic, Philosophy and the History of Mathematics. The chosen methodology is based on dialogues between Socrates (IV century B.C..) and Goedel (1906-1978). They meet in Heaven in a contemporary scenario where the future and the past come together. When Socrates is told by Hilbert (1862-1943) that the axiomatic method was widely used in the XIX and XX centuries and that, through this method, mathematicians achieved (or almost achieved) a general synthesis of mathematical thought, he asks Hilbert to elucidate such marvels further, since as a philosopher he cannot afford to neglect the evolution of scientific theories. Hilbert suggests that Socrates should look for Goedel's advice on the matter, this young German having been* *responsible, at the age of 25, for a revolutionary work on the subject which had shaken the pillars supporting not only the world of Mathematics, but also the world of Logic and, subsequently, of Philosophy.*

KEY WORDS: *Axiomatization; Consistency; Completeness.*

E assim começa o diálogo.

G – Meu caro Sócrates, que bom rever-te! Confesso estar ansioso por este encontro!

(Sócrates e Gödel se abraçam).

S – Por Zeus, Gödel, é minha a alegria em estar contigo! Hilbert me falou com tanto entusiasmo sobre os teus trabalhos, e de uma tal maneira, que me fez lembrar dos questionamentos filosóficos do meu amigo Platão: *que a Matemática não cria ou inventa seus objetos, mas, descobre-os.*

G – Concordas tu também, Sócrates, que os objetos matemáticos existem antes de serem descobertos?

(Gödel dá uma longa risada.)

S – Juro que muito gostaria de discutir contigo o realismo platônico, todavia estou tão ansioso para conhecer a revolução que plantaste no séc. XX que pediria para irmos direto ao assunto.

G – Não fiques impaciente, meu caro amigo, mas confesso a minha dificuldade em como começar ... e nem mesmo sei o que Hilbert te falou sobre os meus trabalhos!

S – Hilbert me falou sobre tantas coisas, e tão rapidamente, que não fui capaz de fazer as associações mais simples entre elas. Lembro-me da admiração dele por um artigo que publicaste em uma revista alemã, cujo título, se não me falha a memória, é: *Sobre as Proposições Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos*. Já muito ouvi falar dos Principia, a célebre obra de BERTRAND RUSSELL e WHITEHEAD (1910) que pretendeu apresentar a Matemática Pura como um capítulo da Lógica, mas não sei o que são *proposições indecidíveis*... Hilbert fez menção à *formalização de uma teoria matemática* e aos *problemas de consistência e completude* advindos dessa formalização...Falou-me sobre *modelos de teorias matemáticas, ... de metamatemática, de ...*

(Sócrates faz uma pausa, tentando relembrar a conversa com Hilbert)

G – Hilbert te falou sobre a introdução do simbolismo algébrico não só na Matemática, mas também na Lógica ... de Aristóteles?

S – Com certeza! Recordo-me ter ele afirmado que isso se deveu essencialmente a Leibniz, no séc.XVII, quando buscava uma linguagem universal ...

G – Ele chegou a explicar como, nessa linguagem simbólica, a sintaxe das proposições é respeitada, não importando, entretanto, o seu conteúdo semântico? Por exemplo, se considerarmos a lógica aristotélica ...

S – Interrompo-te, Gödel, para dizer que, da minha conversa com Hilbert, essa foi a que mais entendi. Talvez pelo fato de eu conhecer bem a Lógica do meu amigo Aristóteles lembro-me que, utilizando símbolos, Hilbert me apresentou à famosa *Álgebra de Boole*, às *Leis de De Morgan* e outras propriedades...

(GÖDEL DEIXA QUE SÓCRATES RECORDE DE TODA A INICIAÇÃO QUE LHE FOI PROPORCIONADA POR HILBERT)

G – Acho que já sei como começar, Sócrates! Reforçando algumas partes tratadas por Hilbert, diria que a formalização de uma teoria ou de um sistema dedutivo consiste não só na sua *axiomatização,* mas, também, *na expressão desse sistema em linguagem simbólica*, drenando as suas expressões de qualquer significado. Os axiomas e teoremas de um sistema formalizado nada mais são que *cadeias* ou *seqüências finitas de signos* arranjados, segundo um conjunto de leis pré-estabelecidas, usando regras de inferência da Lógica!

S – Para melhor fundamentar essa nossa conversa, poderias dar um exemplo, Gödel, de preferência no próprio campo da Lógica, não só para otimizar o meu diálogo com Hilbert, mas, principalmente, pelo fato de estar eu entusiasmadíssimo com o crescimento que a mesma teve com a introdução do simbolismo algébrico.

G – Atenderei ao teu pedido, meu caro Sócrates! O *Cálculo Sentencial*, também chamado de *lógica elementar das proposições,* está alicerçado em 4 axiomas, segundo os Principia Mathematica:

Axioma 1. $(p \vee p) \Rightarrow p$

Axioma 2. $p \Rightarrow (p \vee q)$

Axioma 3. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$

Axioma 4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \vee p) \Rightarrow (r \vee q))$

S – Ao me falar sobre a Álgebra de Boole, Hilbert informou-me que as letras “p”, “q”, “r”, etc., podem ser substituídas por sentenças e, portanto, são chamadas *variáveis sentenciais*. Referiu-se também aos *conectivos sentenciais* “~”, “^”, “v”, “⇒” que representam a abreviatura das palavras *não*, *e*, *ou*, *implica*, respectivamente. Que os parênteses, “(” e “)” são *signos de pontuação*. Enfim, deixou-me a par desse vocabulário que compõe o Cálculo Sentencial.

G – Diria, Sócrates, que possuis uma excelente memória. Continua, por favor, o teu diálogo com Hilbert!

S – Hilbert falou-me ainda sobre as *Regras de Formação*, através das quais podemos saber que combinações dos signos do vocabulário são aceitáveis como *fórmulas*, isto é, como sentenças.

G – Bem, a tua explanação é clara, mas, serias capaz de ilustrá-la, Sócrates?

S – Por exemplo, se p, q , r são sentenças, $\sim p$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ são também sentenças. Entretanto, p v ⇒ Þ ^ não o é.

G - Continua, Sócrates!

S – Também há as *Regras de Transformação*: elas descrevem a estrutura das fórmulas a partir das quais são deriváveis outras fórmulas. Estas são, de fato, as *Regras de Inferência*. Os *teoremas do sistema* são, na verdade, qualquer fórmula derivável dos axiomas pela aplicação sucessiva das Regras de Transformação. E ainda, *a demonstração de um teorema* nada mais é que uma *seqüência finita de fórmulas* na qual cada elemento dessa seqüência ou é um *axioma* ou *uma fórmula derivada de seqüências anteriores*, mediante as Regras de Transformação.

G – E se eu disser que tua explanação não está completa?

S – Já te disse, e repito, que, da minha conversa com Hilbert essa foi a parte que de fato entendi. Presumo que estás a me solicitar detalhes. Pois bem. Destacarei, dentre as Regras de Transformação: a) a *Regra de Substituição* que diz: quando são feitas substituições da variável em uma fórmula, cumpre efetuar a mesma substituição toda vez que ocorrer a variável; b) a *Regra de Separação* (ou *modus ponens*) afirma que, de duas fórmulas S1 e S1$\Rightarrow$ S2, é sempre possível derivar S2. Enfim, resumindo tudo o que Hilbert me informou, a principal preocupação de Boole e de seus seguidores foi a de desenvolver uma álgebra da Lógica que fornecesse uma notação precisa para o tratamento de tipos mais gerais e mais variados de dedução do que os abrangidos pelos princípios lógicos de Aristóteles.

G – Satisfaz-me, meu caro Sócrates, que tenhas compreendido tudo tão bem! E tens aí um exemplo de um sistema ou teoria formalizada. Informo-te que o processo de formalização teve seu apogeu no fim do séc.XIX, com G. Boole, na Lógica e com o grupo Bourbaki, com as estruturas algébricas, topológicas e de ordem, no séc. XX.

S – Tendo em vista o que já discutimos sobre os sistemas formalizados, *sou levado a intuir que axiomas e regras de inferência são suficientes para dar conta de todas as proposições que podem ser formalmente expressas na área sob investigação!*

G – Por Zeus! Acabaste de tocar no ponto nevrálgico deste nosso diálogo: não só tu, Sócrates, mas os grandes matemáticos assim pensavam. E foram justamente as minhas investigações publicadas em 1931, no trabalho já citado por Hilbert, que mostraram não ser verdadeira a tua intuição. O problema, Sócrates, está no *quantificador universal* que usaste: *todas* (as proposições). Na Matemática, existem sistemas formalizados simples para os quais vale a tua intuição. Nesses casos, os sistemas dizem-se *completos*.

S – Ah! Então é esse o problema da *completude* do qual Hilbert me falou! E ele freqüentemente associava as palavras *completude* e *consistência* ao se referir aos sistemas formalizados! Acho que agora é a hora e a vez de detalhares, para mim, o problema da consistência!

G – Para ti que estás dominando tão bem a lógica de Aristóteles e a álgebra de Boole, não será difícil entender todos os seus meandros. *A consistência ocorre quando o conjunto de axiomas não é contraditório,* isto é*, é impossível, usando as Regras de Transformação, derivar dos axiomas a fórmula S juntamente com sua negação formal ~S*.

S – E o que demonstraste no teu trabalho de 1931? Se possível, Gödel, expressa-te com palavras simples, pois, como sabes, tenho muitas lacunas sobre a Matemática.

G – Em realidade, eu demonstrei, Sócrates, que é impossível, dada uma teoria matemática formalizada, mostrar que ela não possui contradições, *permanecendo-se dentro dos seus limites;* em outras palavras, há sempre questões para as quais não temos respostas: jamais poderão ser demonstradas como verdadeiras ou como falsas...dentro dos referidos limites.

S – Tais questões são as proposições que adjetivaste de *indecidíveis?*

G – Por certo, Sócrates! Complementando a resposta à tua pergunta, eu demonstrei algo mais: *que os sistemas formalizados são essencialmente incompletos*; em outras palavras, *dado qualquer conjunto consistente de axiomas, há enunciados verdadeiros que não podem ser derivados desse conjunto!*

S – Deixas-me perplexo, Gödel, mas, por todos os deuses, juro que precisaria, neste momento, de uma explicação e de um exemplo. A explicação é a tua restrição de *permanecer dentro dos limites da teoria considerada.* E o exemplo *é o de alguma questão que, pelo menos até agora, não pôde ser demonstrada como verdadeira ... ou como falsa ...*

G – *Permanecer dentro dos limites* significa que a demonstração de toda proposição da teoria considerada só pode utilizar um conjunto de axiomas, bem como proposições dele derivadas e regras de transformação da Lógica, previamente determinados. Quanto ao exemplo, poderia citar vários: *todas as conjecturas que, através dos tempos, os matemáticos nunca conseguiram resolver...*

S – A conjectura de Cantor, por exemplo, sobre a qual tanto já discutimos!

G – Exatamente, Sócrates! Como sabes, eu mesmo muito trabalhei sobre ela, quando buscava uma axiomatização para a teoria dos números transfinitos! Mas essa é uma conjectura ainda muito recente. Um bom exemplo é a conhecida conjectura de Goldbach, formulada em 1742. Ela afirma que *todo número par , maior que 4, é a soma de dois números primos.*

(Durante um pequeno intervalo, Sócrates procura um contra-exemplo para a conjectura de Goldbach e não encontra!)

S – Por Zeus! Como é possível que uma proposição tão pertinente ao nosso cotidiano, envolvendo apenas os conceitos de adição, de número par e de número primo, não possa ser demonstrada como verdadeira ... ou ... como falsa!

G – Aproveito para reforçar que: um problema está no quantificador *todo*; ainda, que o enunciado de Goldbach pode ser até verdadeiro, mas, não derivável dos axiomas da Aritmética.

S – As tuas considerações me fazem lembrar de Euclides (séc.III a.C.) que, pelo que sei, foi o primeiro matemático a axiomatizar a geometria elementar. Posso inferir que ele morreu com a certeza de que era possível derivar dos axiomas que escolhera, não só todas as verdades geométricas conhecidas, mas, quaisquer outras que pudessem vir a ser descobertas no futuro?

G – Estás a me perguntar, meu caro Sócrates, se Euclides morreu ciente de ter criado um sistema axiomatizado completo? É provável, embora o famoso axioma das paralelas tenha sido sempre um ponto de desconfiança para o próprio Euclides e uma pedra no sapato de todos os matemáticos que o sucederam. Só no séc.XIX foi provado não ser possível derivar esse axioma de outros da Geometria. E isso se deveu principalmente aos trabalhos de Gauss, Bolyai, Lobachewsky e Riemann.

S – Por acaso, Gödel, tal fato te ajudou a intuir que se pode dar uma demonstração da impossibilidade de provar certas proposições, dentro de um dado sistema?

G – Certamente, Sócrates, e eu escolhi o campo da Aritmética para tal. Não posso negar que isso motivou outros matemáticos e lógicos a fazerem uma revisão das bases axiomáticas de muitos outros sistemas. Tanto que, em 1900, no Segundo Congresso Internacional, em Paris, Hilbert apresentou um conjunto de 10 problemas não resolvidos em Matemática; o primeiro foi sobre a conjectura de Cantor - *a hipótese do continuum* - do qual já falamos em outros encontros e o segundo, sobre *a consistência dos axiomas da Lógica.*

S – Sei que Hilbert muito se preocupou com o problema da consistência nos sistemas axiomatizados, mas, ao procurá-lo, ele me pediu para discutir tal assunto contigo. Porque ele me recusou o prazer de dialogar sobre os seus próprios resultados?

G – Pelos deuses, Sócrates, também não entendi essa atitude de Hilbert. Apesar de eu ter chegado a conclusões muito mais gerais, as suas contribuições foram fundamentais para todos esses questionamentos que conduziram os matemáticos a uma revisão do método axiomático!

S – Se não te incomodares, Gödel, poderias, invertendo temporariamente a situação, me falar dos trabalhos de Hilbert, pois confesso admirá-lo profundamente.

G – Farei o que me solicitas, Socrates, não só por também muito admirar Hilbert, mas, porque as suas elucubrações e descobertas servirão para entenderes melhor os fundamentos do meu trabalho. Tentarei fazer um resumo das suas principais tentativas e conclusões. Hilbert provou inicialmente que se a Aritmética é consistente, então, a Álgebra é consistente e, conseqüentemente, também o é a Geometria.

S – Certamente pelo fato de a Aritmética ser a base da Álgebra e esta, através das coordenadas de Descartes, espelhar a Geometria.

G – É verdadeiro o teu raciocínio, mas, se bem observares, tudo está a depender de uma prova de consistência da Aritmética. Por esse motivo, tais resultados foram chamados de *provas relativas de consistência*. Ao perceber que tais provas não resolviam o problema, Hilbert buscou, com certa ansiedade, uma *prova absoluta* de consistência da Aritmética! E foi aí que ele constatou uma série de dificuldades.

S – Por exemplo, Gödel.

G – A primeira constatação foi a de que os axiomas da Aritmética são interpretados por *modelos* compostos de uma quantidade infinita de elementos.

S – Podes ilustrar, Gödel?

G – Se considerares, por exemplo, o axioma *todo número tem um sucessor* ...

S – Infiro que seria necessário um número infinito de *passos* para exaurir o conteúdo de tal axioma!

G – Exatamente, Sócrates! E a conclusão de Hilbert foi: para *modelos finitos,* é possível provar a consistência através de uma verificação direta e exaustiva de um número limitado de elementos ou de propriedades do sistema formalizado em estudo, ou seja, através do que ele chamou de *processos finitários*. Entretanto, para *modelos infinitos* - os importantes em Matemática - não há condições de afirmar que eles não contêm contradições!

S – Posso inferir que, apesar de o modelo ser um bom instrumento, não nos leva à conclusão desejada!

G – Por esse motivo, Hilbert desiste da prova absoluta através dos modelos e faz uma nova tentativa, utilizando a *metamatemática*.

S – Ah! Lembro-me que, naquela minha diversificada conversa com Hilbert, ele fez alusões enfáticas à metamatemática ... mas, confesso não ter assimilado bem o seu significado ...

G – A palavra “metamatemática” foi criada pelo próprio Hilbert e, para resumir o seu sentido, diria, grosso modo, que os sistemas formais pertencem à Matemática, enquanto a descrição e discussão, enfim, a teorização dos mesmos pertence à metamatemática.

S – Poderias ilustrar com um exemplo simples, Gödel?

G – No universo dos conjuntos numéricos, quando eu afirmo que a + b = b + a estou dizendo Matemática. Por outro lado, é metamatemática afirmar que *o enunciado “a + b = b + a” é uma propriedade dos conjuntos numéricos*. Essa última proposição, Sócrates, não expressa um fato aritmético ou algébrico e, por isso não pertence à Matemática. Pertence, sim, à metamatemática por descrever uma determinada cadeia de signos, como uma propriedade matemática.

S – Vê se entendi, Gödel: os enunciados metamatemáticos contêm os nomes de certas expressões matemáticas, mas, não, as próprias, da mesma maneira que, quando falamos de uma cidade, não colocamos a própria cidade na sentença, mas, apenas, o nome da mesma.

G – Exatamente isso, Sócrates! Acrescento apenas que, para fazer as devidas distinções, convencionou-se o uso de aspas. Por exemplo, não seria correto escrever: Atenas é uma palavra de seis letras, mas, seria correto: “Atenas” é uma palavra de seis letras ... ou ... Atenas é a capital da Grécia.

S – Resumindo, são usadas aspas para distinguir a designação do designado! Convido-te a voltar ao ponto em que interrompemos nossa conversa, quando te referias à nova tentativa de Hilbert: a busca de uma prova absoluta de consistência através da metamatemática! E acho que um exemplo muito me ajudaria!

G – Farei o que me pedes, Sócrates. Voltemos, então, a considerar os 4 axiomas já mencionados neste nosso diálogo, os quais serviram de alicerce para o Cálculo Proposicional dos Principia, juntamente com as Regras de Formação e de Tranformação.

S – Recordo-me, inclusive, de tuas considerações: foi a partir desse sistema de Lógica, com acréscimo de algo mais - que decidimos não pormenorizar — que Russell e Whitehead tentaram demonstrar que a Aritmética se reduz à Lógica. O teu objetivo, agora, é mostrar como Hilbert conseguiu uma prova absoluta, usando a metamatemática, de que tal sistema de axiomas é consistente, ou seja, que é impossível derivar dele uma fórmula S juntamente com a sua negação ~ S.

G – Isso mostra, claramente, a potência da tua memória! Pois bem, Sócrates, apesar de tais axiomas parecerem óbvios, podemos derivar deles teoremas não tão triviais. Este, por exemplo, $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$, é uma proposição verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos de p e q, ou seja, p e q tanto podem ser proposições verdadeiras como falsas. Para exercitares a tua iniciação no manejo do formalismo lógico, sugeriria que provasses que a expressão considerada é, de fato, uma tautologia!

S – Além de uma sugestão, é um desafio que aceitarei, Gödel. Ao dissecar, para mim, a Álgebra de Boole, Hilbert usou a seguinte definição de implicação: $a \Rightarrow b = \sim a \vee b$. Assim, usando algumas propriedades desse sistema formalizado, concluo que:

$$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) = \sim p \vee (p \vee q) = (\sim p \vee p) \vee q = 1 \vee q = 1$$

ou seja, tal expressão é uma tautologia!

G – Não posso deixar de elogiar a tua inteligência, sem esquecer a didática de Hilbert! Suponhas, agora, Sócrates, que alguma fórmula S, bem como sua negação ~S, fossem dedutíveis dos 4 axiomas e, usando a Regra de Substituição, peço-te para substituir p por S na fórmula que demonstraste ser um teorema.

S – Obtenho imediatamente:

$S \Rightarrow (\sim S \Rightarrow q)$, qualquer que seja a proposição q.

G – Usando agora a Regra de Transformação *modus ponens*, como podes dispor a dupla implicação que obtiveste?

$S \Rightarrow (\sim S \Rightarrow q)$ (premissa)
S (premissa)
$\sim S \Rightarrow q$ (conclusão)

G - Estás a rememorar o teu amigo Aristóteles hem! Considera, agora, a conclusão obtida e a ela apliques, mais uma vez, o *modus ponens*.

S – Já posso antever o resultado:
$\sim S \Rightarrow q$ (premissa)
$\sim S$ (premissa)
q (conclusão)

G – Podes traduzir, em palavras, a conclusão geral?

S – Se S e ~S são fórmulas dedutíveis dos axiomas, então q é dedutível. Mas, como q tanto pode ser verdadeira como falsa, toda e qualquer fórmula será dedutível dos axiomas.

G – Podes sintetizar ainda mais o que acabaste de falar?

S – Concluo que se pode derivar qualquer fórmula de um conjunto contraditório de axiomas! Ou, em símbolos:

$S \wedge \sim S \Rightarrow q$, qualquer que seja q.

G – Peço-te, agora, que uses a contraposta da implicação que acabaste de concluir.

S – Não sei o que pretendes, uma vez que a contraposta de uma implicação lhe é equivalente: existe q, tal que $\sim q \Rightarrow \sim (S \wedge \sim S)$, ou, na linguagem usual: se existe, pelo menos, uma fórmula que não é um teorema, digo, derivável dos axiomas, então, o sistema é consistente!

G – Bravo, meu caro Sócrates! És capaz de exibir uma tal fórmula?

(SÓCRATES PENSA UM POUCO)

S – Por Zeus, juro que não! Sinto que me falta um referencial...

G – É chegada a hora e a vez da metamatemática, Sócrates!

S – Então, deverás usar alguma propriedade que caracterize os 4 axiomas considerados.

G – Estás chegando perto, Sócrates! Teremos que escolher uma propriedade que, além de ser comum a todos os axiomas, deverá ser hereditária sob as Regras de Transformação.

S – O que afirmas me parece coerente com os objetivos pretendidos. Permitas-me resumir, Gödel, só para eu fixar o que diz respeito à metamatemática: a propriedade escolhida deverá ser comum a todos os axiomas e a qualquer fórmula deles derivada pelas Regras de Transformação, ou seja, todo teorema também deve possuí-la; além disso, para que o sistema seja consistente, basta exibir, pelo menos, uma fórmula que não goze da referida propriedade! Se conseguirmos isso, teremos uma prova de consistência absoluta!

G – Pelos deuses, como é impecável a tua capacidade de síntese! És capaz, agora, de exibir uma propriedade que satisfaça a todas essas condições?

(SÓCRATES ELUCUBRA EM VOZ ALTA A PROPRIEDADE: CADA FÓRMULA DEVERÁ TER UM NÚMERO FINITO DE SIGNOS ... CONSTATA QUE ELA É COMUM AOS 4 AXIOMAS, ALÉM DE SER HEREDITÁRIA. ENTRETANTO, NÃO ENCONTRANDO UMA FÓRMULA COM UM NÚMERO INFINITO DE SIGNOS ... DESISTE! MAS, DEPOIS DE UMA PAUSA SILENCIOSA ...)

S – Acho que encontrei uma, Gödel! *Cada axioma goza da propriedade de ser uma tautologia;* toda fórmula deles derivada através das Regras de Transformação também o é. Por outro lado, existe, pelo menos, uma fórmula, $p \Rightarrow q$, que não é uma tautologia. Logo, os 4 axiomas que alicerçam o Cálculo Proposicional dos Principia formam um sistema consistente!!! Em outras palavras, não podemos derivar do Cálculo Sentencial uma fórmula S e sua negação ~S. Mas, não era exatamente esse o princípio da não-contradição do meu amigo Aristóteles?

G – Juro até pelos deuses desconhecidos que irias chegar a essa conclusão! Só que, no tempo de Aristóteles, a Lógica não era simbólica, nem axiomatizada, nem se falava em consistência e em completude.

S – Disso muito bem sei eu, Gödel! O fato é que chegamos a uma prova de consistência absoluta e convido-o a brindar, com vinho, a excelência da criatividade de Hilbert!

(SÓCRATES E GÖDEL, EFUSIVOS, DEGUSTAM O MESMO TIPO DE VINHO UTILIZADO NO BANQUETE DE PLATÃO)

S – Acho que, quanto a Hilbert, dentro das suas limitações finitárias, nossos objetivos foram cumpridos. E foi tão grande o nosso deleite nesse diálogo que não falamos sobre as tuas revolucionárias conclusões - que não têm caráter finitário!

G – Não mais hoje, Sócrates, porém, num segundo encontro, poderei traçar, para ti, os esquemas que me permitiram provar que existe ao menos uma fórmula da Aritmética para a qual nenhuma seqüência de fórmulas constitui uma prova.

S – É o problema da *indecibilidade?*

G – Certamente. Mas, complementando, eu demonstrei que, se a Aritmética é consistente, ela é incompleta! E dizer que a Aritmética é incompleta significa afirmar que existe um enunciado aritmético verdadeiro que não é formalmente demonstrável dentro dela.

S – Queres dizer que: se a Aritmética é consistente, sua consistência não pode ser estabelecida por qualquer raciocínio metamatemático que possa ser representado dentro do formalismo da própria Aritmética!

G – Teu raciocínio é perfeito, Sócrates! Entretanto, não me interpretes mal: o que acabo de afirmar não exclui a prova metamatemática da consistência da Aritmética; exclui, sim, provas de consistência que não são representáveis dentro do cálculo aritmético. E, como não são de caráter finito, ultrapassam os objetivos iniciais de Hilbert.

S – Por Zeus, Gödel, juro que foi exatamente isso que percebi, pois a tua didática é fantástica!

G – O mérito pertence a ti. O que utilizei, embora de modo parcial, foi o método que te imortalizou — a maiêutica — ou a arte do diálogo. E agora, a todos os deuses invoco eu, Sócrates, para que me ajudem a esclarecer o porquê dessa tua necessidade de conhecer com tanta profundidade a Matemática!

S – A resposta é tão simples, meu amigo, que estás a invocar os teus deuses em vão! Sem ela *ansas philosophiae non habes.*

(ABRAÇANDO SÓCRATES, NUM GESTO DE DESPEDIDA E SUSSURANDO, GÖDEL REPETE: DE FATO, SEM A MATEMÁTICA A FILOSOFIA NÃO TEM ASAS. AS MÃOS DE SÓCRATES E DE GÖDEL SE ENCONTRAM E ELES SE ABRAÇAM ... E ELES MARCAM O SEGUNDO ENCONTRO PROMETIDO...)

REFERÊNCIAS

ESTEVÉZ, Emilio Dias. **El Teorema de Gödel**. Pamplona: Ediciones Universidade de Navarra, 1975.

GÖDEL, Kurt. **On formally Indecidable Propositions of the Principia Mathematica and Related Systems**. Raven Press Books, New York, 1965.

LIMA, Arlete Cerqueira. **Lógica e Linguagem**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1993.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **Gödel's Proof**. The World of Mathematics. New York: Tempus, 1988. v.3.