ASCLEPIO. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia
74(2), julio-diciembre 2022, p608
ISSN-L: 0210-4466
https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.21

ESTUDIOS / STUDIES

EUCLIDES EN LA PRÁCTICA: UN TRATADO SOBRE EL FUNDAMENTO Y LA CONSTRUCCIÓN DE PANTÓMETRAS EN EL SIGLO XVII ESPAÑOL

Elena Ausejo
Universidad de Zaragoza
E-mail: ichs@unizar.es
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3539-2457

Recibido: 23 marzo 2021; Aceptado: 4 mayo 2022; Publicado: 2 diciembre 2022

Cómo citar este artículo/Citation: Ausejo, Elena (2022) “Euclides en la práctica: un tratado sobre el fundamento y la construcción de pantómetras en el siglo XVII español”, *Asclepio*, 74 (2): p608. https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.21

RESUMEN: Apenas iniciado el siglo XVII, un matemático de la solvencia, consideración y difusión del jesuita Christoph Clavius (1537-1612) comenzó su *Geometria practica* (Maguncia, 1606) con dos capítulos dedicados a la construcción y uso de dos instrumentos matemáticos. Quedó así incorporado al acervo matemático académico, además del cuadrante común, un instrumento para dividir fácilmente cualquier recta en cualquier número de partes iguales o proporcionales que denominó *Instrumentum Partium* –posteriormente pantómetra–. Este trabajo aborda un inédito manuscrito anónimo español del siglo XVII sobre construcción de pantómetras, probablemente de uso docente, desde el punto de vista de su contribución al desarrollo de la aritmetización de la geometría mediante la consideración numérica de las magnitudes continuas en términos de cantidad. El texto fundamenta la operatividad instrumental de las pantómetras –superior al cálculo aritmético en cuanto a economía de tiempo y errores– en el rigor geométrico clásico de los *Elementos* de Euclides, especialmente el libro VI. No obstante, aborda el problema de la inconmensurabilidad desde un punto de vista práctico, en términos de aproximaciones con un margen de error sensorialmente imperceptible e irrelevante a efectos de aplicación práctica.

PALABRAS CLAVE: Instrumentos matemáticos; Pantómetras; Geometría Práctica; Siglo XVII; España.

EUCLID’S IN PRACTICE: A TREATISE ON FOUNDATION AND CONSTRUCTION OF PANTOMETERS IN 17TH CENTURY SPAIN

ABSTRACT: At the beginning of the seventeenth century, the Jesuit Christoph Clavius (1537-1612) –a competent and well-known mathematician– began his *Practical Geometry* (Mainz, 1606) with two chapters devoted to the construction and use of two mathematical instruments. Thus, in addition to the common quadrant, an instrument for easily dividing any line into any number of equal or proportional parts, that he called *Instrumentum Partium* –later *pantometer*– became part of the academic mathematics teaching. This paper looks at a 17th-century Spanish unpublished anonymous manuscript –probably a course– on the construction and use of sectors from the viewpoint of its contribution to the development of the arithmetization of geometry by means of the numerical consideration of continuous magnitudes as quantities. The author bases the instrumental operability of sectors –that surpassed geometric methods or arithmetic calculations in terms of time and errors savings– on Euclid’s *Elements,* especially Book VI. As for incommensurability, the reduction of incommensurable quantities to the nearest commensurable quantities is accepted, for it is possible without noticeably error by the senses and irrelevant in practice.

KEY WORDS: Mathematical Instruments; Coignet-Type Sectors; Practical Geometry; 17th Century; Spain.

Copyright: © 2022 CSIC. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional (CC BY 4.0)

1. INTRODUCCIÓN

Tratado de la fabrica y uso de Las Pantometras es un manuscrito anónimo de 89 hojas (28 x 20 cm.) datado en el siglo XVII[1]. El término *Pantómetra,* procedente del griego *pantós* (todo) y *métron* (medida), define un instrumento matemático, a saber, un compás de proporción cuyas piernas llevan marcadas en sus dos caras diversas escalas divididas en partes iguales o proporcionales. La denominación fue inicialmente acuñada como *Regulae Pantometrae* –*Reglas Pantometras* en español (Coignet, 1618)[2]– por el flamenco Michiel Coignet (1549-1623)[3], que estuvo al servicio de la corte de los Habsburgo como matemático e ingeniero de los Archiduques Alberto e Isabel, gobernadores de los Países Bajos meridionales desde 1596 hasta el final de sus días (Meskens, 2013, pp. 18-21).

El autor se identifica como profesor aludiendo a sus enseñanzas de perspectiva, anteriores a las de este instrumento (Mss/9614, ff. 47r-47v). Se trata pues de un texto docente que se estructura en tres partes claramente diferenciadas –proemio y dos capítulos, el primero dedicado a la construcción de las doce divisiones de las pantómetras y el segundo al uso del instrumento–. Con ello, el tratado va más allá del ámbito de los manuales de uso comunes –destinados a los profesionales– que se comercializaban junto con el instrumento sobre el que versaban, en cuanto que incorpora la comprobación de la sólida fundamentación geométrica de las divisiones de las pantómetras, que justifica y valida la asimilación de la inconmensurabilidad con fines prácticos.

La singularidad de este manuscrito reside en sus contenidos matemáticos, que explican la graduación de las doce líneas del instrumento en términos euclídeos o arquimedianos, aritméticos o geométricos y también trigonométricos. Se trata de contenidos ausentes de los tratados sobre este tipo de instrumentos estudiados hasta ahora. Por otra parte, el manuscrito proporciona información que permite su datación en la primera mitad del siglo XVII (décadas de los años 30 y 40) y su ubicación en el ámbito de los jesuitas matemáticos ibéricos que trabajaron con las pantómetras de Coignet. De hecho, Claude Richard, catedrático de matemáticas en el Colegio Imperial de la Compañía de Jesús en Madrid (1630-1664), impartió en 1656 un curso titulado *Tratado de la division de las doce lineas rectas divididas de las pantometras con el uso práctico dellas en la geometría práctica y juntamente las demostraciones de esas divisiones y del uso,* que mejoró y amplió el manuscrito de su anónimo predecesor (Ausejo, 2022) .

Este trabajo analiza las tres secciones desde el punto de vista de su contribución al desarrollo de la aritmetización de la geometría mediante la consideración numérica de las magnitudes continuas en términos de cantidad. Se estudia la fundamentación de la operatividad instrumental de las pantómetras en el rigor geométrico clásico de los *Elementos* de Euclides sin que ello impida abordar el problema de la inconmensurabilidad desde un punto de vista práctico, en términos de aproximaciones con un margen de error sensorialmente imperceptible e irrelevante a efectos de aplicación práctica.

2. PROEMIO

El *Prohemio* (sic) (Mss/9614, ff. 1r-4v) introduce el instrumento remontándose al capítulo primero del primer libro de la geometría práctica de Clavio (Clavius, 1606, p. 5), que trata de la fábrica y uso del *Instrumentum Partium* (fig. 1) para dividir fácilmente cualquier recta en cualquier número de partes iguales o proporcionales entre sí como cualquier número dado a otro[4] (Mss/9614, f. 1r). Relata la evolución de este instrumento –al que se le añadió otra división para dividir el círculo en partes iguales–, afirma que su uso puede extenderse hallando otras divisiones y concluye introduciendo las pantómetras de Coignet (fig. 2) –que datan *de pocos Annos acá*[5]–. También en

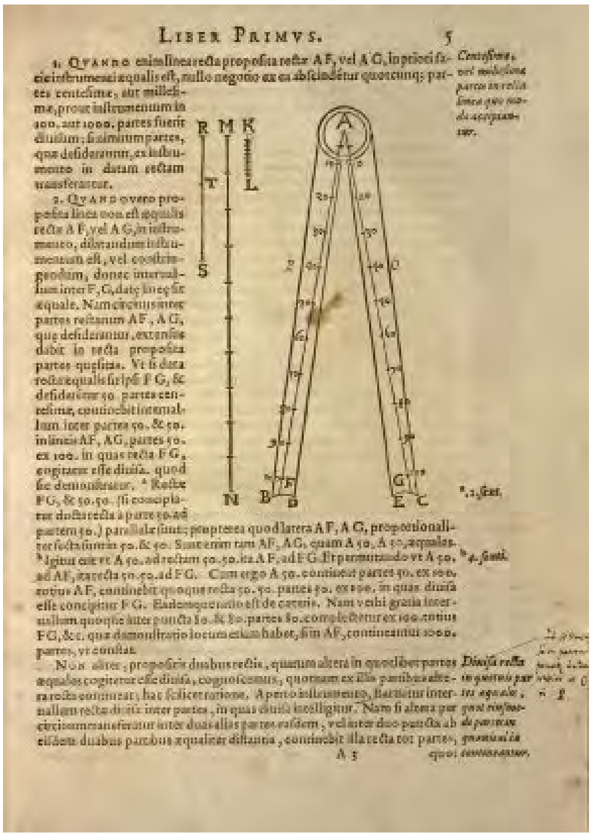
LIBER PRIMVS. 5

Figura 1: *Instrumentum Partium* (Clavius, 1606, p. 5) un segundo proemio, con el que se inicia el segundo capítulo del tratado (Mss/9614, ff. 37r-38v), se reitera la referencia a Clavio, se cita a Miguel Conette *francé*s como primer autor que incorpora las doce divisiones en manuscritos de cuarenta y cinco proposiciones sobre su uso y se menciona su impresión en Francia[6].

Así pues, el Proemio inicial continúa con la descripción de la utilidad de las dos caras A/B, C/D de dos pares de rectas pivotantes con doce escalas grabadas, esto es, tres rectas igualmente graduadas en ambas piernas de cada cara (fig. 2).

En ambas piernas de la primera cara del primer par de reglas (A), la línea central está divida en cien partes iguales, la línea exterior –marcada por un cuadrado en su extremo final– sirve para aumentar y disminuir cualquier figura plana y la línea interior –marcada por un cubo en su extremo final– se utiliza para aumentar y disminuir cualquier figura sólida (Mss/9614, ff. 1r-1v).

En la segunda cara del primer par de reglas (B), la línea central representa la división de cualquier círculo en grados[7], la línea exterior sirve para transformar cualquier polígono regular en otro de igual superficie y la línea interior para inscribir en el círculo polígonos regulares de hasta 20 lados (Mss/9614, f. 1v).

En ambas piernas de la primera cara del segundo par de reglas (C), la línea central proporciona los senos de todo el primer cuadrante de grado en grado, la exterior se usa para transformar cualquiera de los cinco poliedros regulares en otro de igual volumen y la interior para fabricar un cuerpo de un metal del mismo peso que otro cuerpo de otro metal (Mss/9614, ff. 1v-2r).

Por último, en la segunda cara del segundo par de reglas (D), la línea central proporciona las tangentes de cero a cuarenta y cinco grados, la exterior divide el área del semicírculo en partes iguales mediante rectas paralelas y la interior el volumen de la semiesfera mediante planos paralelos (Mss/9614, ff. 2r-2v).

Seguidamente el autor declara expresamente que estas son las pantómetras que se fabrican en Flandes, que son diferentes de las francesas –de las que se han publicado algunos breves tratados sobre su uso–. También alude al compás de proporción[8] como antecedente de las pantómetras, que le superan en precisión debido al desgaste de sus puntas (Mss/9614, ff. 2v, 37r).

En cuanto a la funcionalidad de las pantómetras, el autor insiste en la posibilidad de incorporar nuevas divisiones específicas para diferentes aplicaciones matemáticas, entre las enumera una detallada serie: las divisiones de las columnas en arquitectura; la representación de

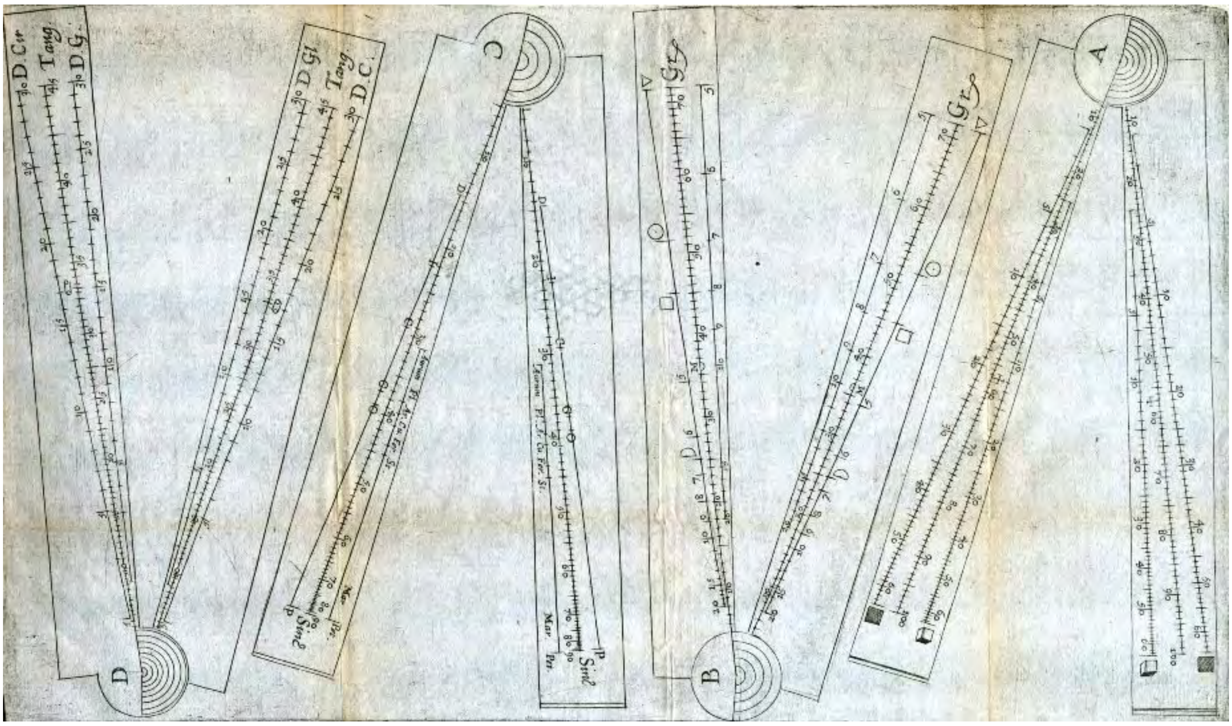

Figura 2: *Pantómetras* (Connette, 1626, p. 28)

las proporciones de las partes del cuerpo humano en pintura y escultura; la división del monocordio para los tonos de la música; la proporción de los movimientos de los planetas y los diámetros y distancias de sus orbes en astronomía; la proporción de los pies y leguas de diferentes naciones en agrimensura, geografía y cartografía terrestre y náutica; las proporciones de las fortificaciones militares; los ángulos de refracción de diferentes medios transparentes y los grados de las lentes de los telescopios en dióptrica (Mss/9614, ff. 2v-3r)[9].

Por otra parte, el autor argumenta que el uso de las pantómetras facilita y abrevia la operativa aritmética, con el consecuente ahorro de tiempo y disminución de errores de cálculo. Adicionalmente, anuncia que las operaciones con pantómetras son válidas para cualquier tamaño y cualquier unidad de medida (Mss/9614, ff. 3r-3v).

No obstante, en el proemio del segundo capítulo (Mss/9614, ff. 37r-37v) distingue los usos que son igual o más fácilmente practicables sin pantómetras que con ellas –como el trazado del círculo– de los que se hacen más fácilmente mediante pantómetras –como las secciones cónicas, en particular el trazado de la parábola–, siendo únicamente estos últimos los que el autor ha decidido tratar[10].

Por último, el Proemio aborda el fundamento geométrico de las pantómetras (Mss/9614, ff. 3v-4v), que sitúa en la proposición cuarta del libro sexto de los *Elementos* de Euclides (*Els*.VI.4)[11], con lo cual señala que la pantómetra es un instrumento de medición para ser utilizado en cálculos de ratios y proporciones. Introduce además el concepto de lados –y ángulos– correspondientes –*que los geómetras llaman homólogos*–, un concepto clave para el fundamento de las pantómetras. Esta proposición, de uso frecuente en todo el libro sexto, implica que los triángulos equiángulos son semejantes y que los triángulos semejantes a un mismo triángulo son semejantes entre sí –un resultado que es ampliable a cualquier figura rectilínea–.

Finalmente se ilustra la operativa de la pantómetra con un ejemplo, en el que dado un cuadrado de lado DE se construye otro cuadrado de lado DH tal que $DE^2:DH^2 = 36:12$, abriendo la pantómetra hasta que el segmento DE pueda ser trasladado con el compás –preferible a una regla– de modo que encaje entre los números 36 de la línea de los planos (A□); seguidamente, sin mover la pantómetra, se toma la distancia entre los números 12 de la línea de los planos, que será el segmento DH buscado, puesto que los triángulos $D_{36}AE$, $D_{12}AH$ son isósceles, luego sus bases $D_{36}E$, $D_{12}H$ –las imaginarias rectas transversales– son paralelas y los triángulos semejantes[12].

No obstante, en el proemio del segundo capítulo (Mss/9614, ff. 38r-38v) insiste en la fundamentación geométrica de la operativa de las pantómetras sustentándola primordialmente en la aplicación de (*Els*.VI.12)[13], que enseña a hallar una cuarta proporcional a tres rectas dadas –siempre que se haga *en líneas o en cualquier otra cantidad que tenga la proporción de número a número*–, con lo cual se refuerza la consideración de la pantómetra como un instrumento de medición para ser utilizado en cálculos de proporciones.

3. LA FÁBRICA Y USO DE LAS DOCE DIVISIONES DE LAS PANTÓMETRAS

Comienza el primer capítulo (Mss/9614, ff. 4v-6r) presentando una clasificación de los diferentes tipos de divisiones que contienen las pantómetras directamente relacionada con su precisión. Son divisiones geométricas las dos primeras, esto es, la línea de partes iguales A_{100} y la línea de los planos A□, ambas graduadas mediante construcciones geométricas ortodoxamente euclidianas. Son divisiones mecánicas la línea de los sólidos A❑ y casi todas las relativas al círculo –a falta de pruebas geométricas para la división de la circunferencia en partes iguales–. Y son divisiones físicas las que dependen de experiencias físicas, como la división de los metales (C_{Pet})[14].

Seguidamente se expone una serie de cuestiones comunes a todas las divisiones de las pantómetras, que se inicia indicando cómo suplir la falta de pantómetras: con solo tener la división de la recta, quien tuviera las tablas de las demás divisiones puede suplir la falta de pantómetras operando aritméticamente[15].

Por otra parte, se aclara que las pantómetras están diseñadas para trabajar con cantidades conmensurables, en proporción de número a número, sin que sea posible aumentar o disminuir una línea en una proporción inconmensurable –de hecho no es necesario en la práctica–. Sin embargo, si es posible reducir cantidades inconmensurables a sus conmensurables más próximas sin que en la práctica se aprecie *diferencia sensible* alguna[16].

A mayor abundamiento, en el proemio del segundo capítulo (Mss/9614, f. 37v) se indica que en caso de que haya que dividir una línea recta en partes de *un número dado que tenga una fracción junta* se debe *reducir el número con su fracción a un número entero por regla aritmética*[17]. También se considera la posibilidad de que haya que tomar una distancia transversal mayor o menor que la apertura máxima o mínima de la pantómetra, que se resuelve tomando una porción entera o un múltiplo entero de la distancia en cuestión

 Asclepio. 74(2), julio-diciembre 2022, p608. ISSN-L: 0210-4466, https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.21

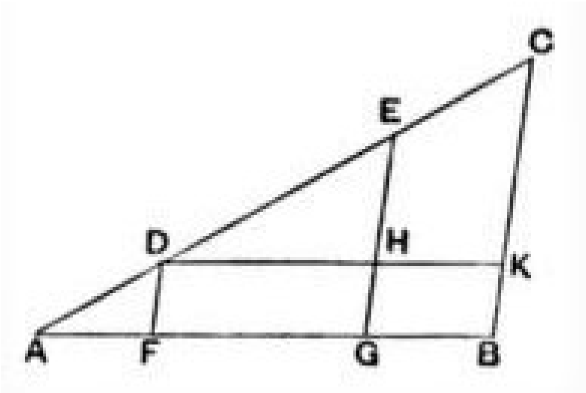

Figura 3: (*Els.*VI.10)

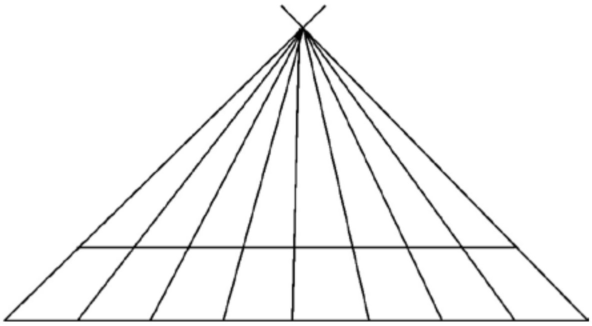

Figura 4: Reconstrucción (Mss/9614, f. 6r)

y multiplicando o dividiendo el resultado obtenido por la porción o múltiplo utilizado.

También se especifica que todas las divisiones parten del pivote central y suelen tener la misma longitud –una cualidad que el autor no considera necesaria, sino conveniente–[18].

Finalmente explica cómo aumentar o reducir proporcionalmente una línea graduada si la longitud de la línea a ajustar no difiere mucho de la graduada (*Els.* VI.10) (fig. 3), mediante un sencillo método geométrico en caso contrario (fig. 4).

3.1. Divisiones geométricas

La división de la línea de partes iguales A_{100} se enseña en (*Els.*VI.10)[19] (Mss/9614, f. 7r), de modo que las aportaciones más relevantes de esta división se encuentra en los nueve problemas resueltos en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 38r-45v).

En el primero se hallan dos líneas que tengan entre si la proporción de dos números dados, detallando el procedimiento para cualquier combinación de números menores o mayores que cien, enteros, fraccionarios o mixtos.

El segundo problema muestra el uso de la pantómetra para resolver geométricamente una regla de tres –o cuarta proporcional (*Els.*VI.12)– para convertir cualquier proporción entre líneas en fracciones decimales[20], una aplicación importante a dos siglos de distancia del sistema métrico decimal.

Los cinco últimos problemas muestran el aumento y disminución de las líneas y su división en cualquier proporción de número a número.

Finaliza la primera división de la pantómetra con una afirmación taxativa de su utilidad *para reducir los números a líneas y al revés, las líneas a números*, una convergencia de aritmética y geometría instrumentalizada con fines prácticos (Mss/9614, f. 45v)[21].

La división de la línea de los planos A□, para aumentar y disminuir figuras planas en cualquier proporción o construir una figura plana semejante a otra en una proporción dada (Mss/9614, ff. 7r-10r), se sustenta en

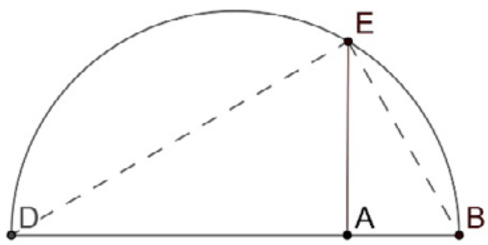

Figura 5: Reconstrucción (Mss/9614, f. 7r)

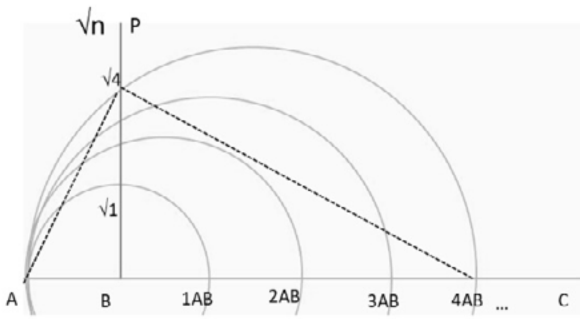

Figura 6: Reconstrucción (Mss/9614, f. 7r)

(*Els.*VI.20). Se introduce mostrando la triplicación de una figura ABC –un triángulo– con una construcción apenas esbozada (fig. 5), aunque el autor evoca (*Els*.VI.18) para sustentar la triplicación buscada[22].

Seguidamente se plantea la división de una línea de modo que las figuras planas que se tracen sobre ella se excedan en proporción aritmética de la sucesión de los números naturales –sesenta y cinco divisiones para sesenta y cuatro figuras–. Para ello, se trazan semicírculos desde A con diámetro *n.*AB que cortan la perpendicular BP en $\sqrt{n}(1 \leq n \leq 64)$, de manera que $BP_n^2=AB_*nAB=n_*AB^2$ (fig. 6)[23].

Alternativamente, se obtiene la *multiplicación* del lado de la figura AB por la sucesión de los números naturales sin trazar los círculos[24]: trazando una recta BP perpendicular a AB, señalando en ella el segmento BD=BA y el segmento BE igual a la diagonal AD se obtiene que BE es el lado de $2(AB)^2$; el proceso continua marcando BF igual a la diagonal AE, donde BF resulta ser el lado de $3(AB)^2$, y así sucesivamente hasta 64. Cada diagonal es una hipotenusa, el lado homólogo de la figura semejante –dispuesta en ángulo recto– igual a la suma de las figuras precedentes.

No obstante, defiende a continuación como método *mas seguro* el uso de la *Tabla para la división de los Planos* en *las Pantometras* –para la que reserva el folio 9v en blanco–, con *dos géneros de números*: los primeros contienen la serie natural del 1 al 100 y los segundos *las raíces de los cuadrados que se van excediendo en proporción aritmética*[25], advirtiendo que la tabla completa se ajusta de manera que $(1000)^2=100(100)^2$, considerando $(141)^2=19881$@$2(100)^2$ y $(173)^2=29929$@$3(100)^2$ –de modo que el cuadrado de lado 141 dobla al cuadrado de lado 100–. Alude entonces al problema de la inconmensurabilidad como causa de la inexactitud de las tablas numéricas frente a las construcciones geométricas, si bien defiende la bondad de sus aproximaciones, con un margen de error sensorialmente imperceptible que *basta en cualquier materia práctica* (Mss/9614, ff. 45v-51r)[26].

Siete proposiciones explican el uso de esta división –como ya se venía haciendo en los anteriores tratados de uso del instrumento– en el segundo capítulo[27] (Mss/9614, ff. 38r-45v). No obstante, la primera de ellas –proposición décima– es original, pues menciona expresamente la aplicabilidad de esta división a las figuras comprendidas entre líneas curvas o mixtilíneas, si bien solo detalla el procedimiento para elipses y para segmentos circulares, hipérbolas, parábolas y elipses[28].

3.2. Divisiones mecánicas

La primera de estas divisiones es la línea de los sólidos A□ para aumentar y disminuir figuras sólidas en cualquier proporción o construir una figura sólida semejante a otra en una proporción dada (Mss/9614, ff. 10r-15r), se presenta como un célebre problema geométrico no resuelto, que se funda en la búsqueda de dos medias proporcionales a dos líneas dadas, cuyo origen ha sido relatado por Vitrubio en el décimo libro de su arquitectura y por Diógenes Laercio en su vida de Euclides. Entre los grandes autores clásicos y modernos que han hallado soluciones a este problema, todas ellas mecánicas, cita a Eutocio Ascalonita en sus *Comentarios s*obre el libro segundo de Arquímedes *De Sphera*

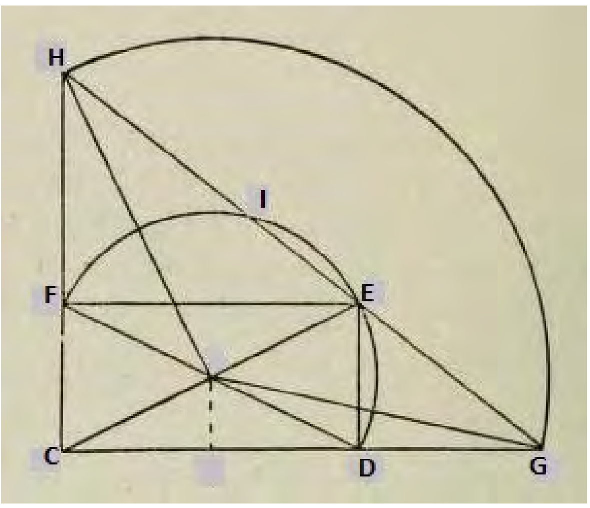

Figura 7: Reconstrucción (Mss/9614, f. 11v)

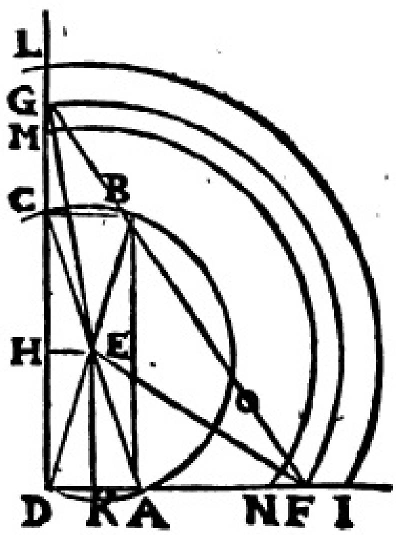

Figura 8: (Clavius, 1606, p. 268)

y cilindro, Papo Alexandrino al principio del libro 3º de las *Collectiones* y Clavio en la proposición decimoquinta del libro sexto de su *Geometria Practica*.

De entre todas las soluciones propuestas en estas fuentes expone la que considera más fácil y *acomodada a la fábrica*, a saber, una variación de la propuesta por Filón de Bizancio (Clavius, 1606, pp. 267-268), tomada de entre los métodos recogidos por Clavio (Clavius, 1606, pp. 266-272)[29].

Esta solución demuestra que HF y DG son medias proporcionales entre CD y CF, puesto que $\frac{CD}{HF} = \frac{HF}{DG} = \frac{DG}{CF}$ (fig. 7).

Seguidamente, para resolver la triplicación del cubo, aplica el procedimiento ya expuesto a un rectángulo (fig. 7) en el que el lado de la altura CF sea el lado del cubo que se quiera triplicar y el lado de la base CD sea el triple del lado de la altura (CD=3CF). Hallando las dos medias proporcionales HF y DG entre CF y CD se tendrá $\frac{CF}{HF} = \frac{HF}{DG} = \frac{DG}{3CF}$, de donde resulta[30] $3(CD)^3=HF^3$, o sea, que HF es el lado del cubo que triplica el volumen del cubo de lado CF.

Añade que esta proposición se funda es un *teorema geométrico que dice que los cuerpos semejantes tienen la proporción triplicada de sus lados homólogos como lo demuestra Euclides en particular en las pirámides, paralelepípedos*, *conos, cilindros y globos, pero es universal en todos los cuerpos y semejantes* (*Els.*XII.8.Cor.*,* XI.33, XI.37, XII.11, XII.12, XII.13, XII.14, XII.17.Cor., XII.18).

Bajo este supuesto –dice– es fácil dividir una línea de tal manera que las figuras sólidas construidas sobre ella –desde su inicio hasta cada división– se excedan en proporción aritmética de la sucesión de los números naturales. No obstante, como quiera que la construcción de esta división mediante el cálculo de las dos medias proporcionales es larga y difícil, proporciona a continuación algunas observaciones y prácticas para facilitarla[31]:

Hallar las continuas proporcionales tercera, cuarta, quinta, etc., a los lados inicial y duplicado, a fin de cuadruplicar, octuplicar el sólido, y así en proporción doble (16, 32, 64, etc.); síguense las continuas proporcionales a los lados inicial y triplicado, que permitirán multiplicar un sólido por 9, 27, 81, etc. De este modo se obtienen las líneas para todos los números no primos. Adicionalmente, deja espacio para transcribir una *Tabla para la división de los sólidos en las pantómetras* análoga a la presentada al final de la división segunda.

Cuatro proposiciones explican el uso de esta división en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 51v-55v), entre las que destaca la primera –proposición decimoséptima–, que enseña a construir –en tres pasos– paralelogramos proporcionales dados dos lados de la base y la altura. Para pirámides, conos, cilindros, esferas y conoides se toma eje, altura, diámetro o lado de la base para hallar el nuevo eje, altura, diámetro o lado de la base. Naturalmente, la vigésima –y última– proposición (Mss/9614, ff. 51v-55r) muestra el procedimiento para hallar dos líneas proporcionales entre dos líneas dadas[32].

3.2.1. *El uso de las razones trigonométricas en las divisiones mecánicas*

Explicadas las divisiones de la cara A se aborda la cara B comenzando con la división cuarta $B_{Gr,}$ para dividir el círculo en sus grados (Mss/9614, ff. 15v-17v). El autor expone que la mayoría de las operaciones geométricas dependen de los ángulos –como muestran los instrumentos geométricos y cosmográficos–, cuya medida propia son los arcos de círculo comprendidos entre las dos líneas rectas[33]. Por ello, esta división del círculo y sus arcos en partes iguales es la más usada, pues las divisiones proporcionales solo son factibles mediante curvas como la espiral, la cuadratriz, etc., como puede verse en (Clavius, 1591, pp. 349-359). Lamenta el autor que para la división del círculo se eligiera un sistema posicional sexagesimal –que genera divisiones mecánicas– en lugar de optar por una sucesión geométrica de razón ½.

En cualquier caso, como la división del círculo en sus grados es conocida, la construcción de la línea de la pantómetra se obtiene sobre un semicírculo con diámetro AB dividido en arcos de grado en grado, trazando con un compás arcos de círculo con centro en A desde la circunferencia a su diámetro[34]. Las divisiones del diámetro resultantes señalan la longitud de las cuerdas de los respectivos grados –hasta 72° en las pantómetras flamencas, hasta 180° en las francesas–[35], por lo que concluye ofreciendo para la división de la línea una *Tabla para la división de los grados* –para la que reserva la mayor parte del folio 17v en blanco– que es una tabla de senos de medio en medio grado, *porque los mismos números vienen a corresponder a las cuerdas de todos los grados del semicírculo*[36].

Entre las tres proposiciones sobre el uso de esta división en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 55r-61r) destaca la última –proposición vigesimotercera–, que enseña a construir un cuadrante de círculo en el que se puedan tomar cualesquiera grados y minutos[37].

Seguidamente se plantea la división quinta para inscribir en el círculo cualquier figura regular, concretamente los polígonos regulares de tres a veinte lados (Mss/9614, ff. 17v-19r)[38], un problema resuelto para el triángulo (*Els*.IV.5), el cuadrado (*Els*.IV.6), el pentágono (*Els*.IV.11), el hexágono (*Els*.IV.15) y el polígono de quince lados (*Els*.IV.16), así como para los polígonos cuyo número de lados duplica el número de lados de un polígono regular (*Els*.III.30).

No obstante, la construcción de los polígonos de siete, nueve, once, trece, diecisiete y diecinueve requiere dividir el círculo mecánicamente, o bien mediante líneas curvas –como la espiral o la cuadratriz–[39]. Alternativamente, cabe hallar los grados y minutos del arco de círculo subtenso por el lado del polígono en cuestión –dividiendo los 360° grados del círculo por el número de lados del polígono– y obtener el lado correspondiente duplicando el seno de la mitad del arco –usando la *Tabla para la división de los grados* dada en la anterior división–, con lo que obtendrá la cuerda del arco de círculo subtenso por el lado del polígono en cuestión. Hecho esto, la graduación de la línea de la pantómetra se obtiene sobre el diámetro A de un círculo trazando con un compás los arcos de círculo con centro en A desde la circunferencia a este diámetro, que señalan la longitud de los lados de los correspondientes polígonos (fig. 9). Finalmente, concluye presentando estos lados en una ausente *Tabla Para las Figuras Regulares inscriptas en el Círculo* –para la que reserva la mitad del folio 18v en blanco–[40].

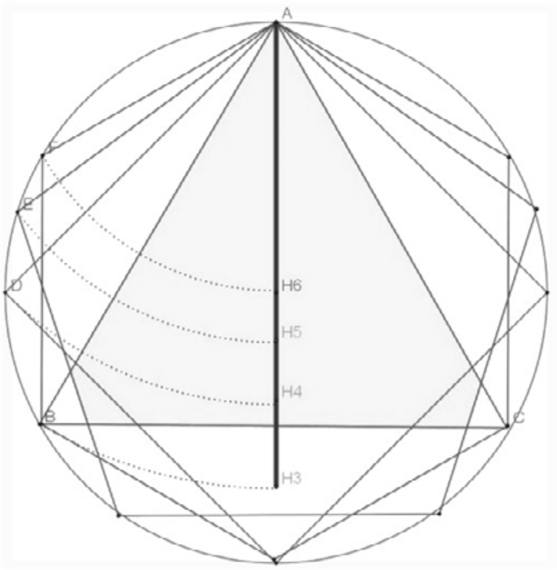

Figura 9: Reconstrucción (Mss/9614, f. 18v)

La explicación de las divisiones de la cara B de la pantómetra concluye con la división sexta B_Δ para transformar cualquier polígono regular en otro de igual superficie (Mss/9614, ff. 19r-21r) hallando los lados de las figuras planas regulares cuyas áreas sean todas iguales entre sí sobre la base de (*Els*.VI.25), si bien opta por exponer un método más acomodado a la práctica que requiere menos operaciones.

A tal efecto utiliza la figura construida para la anterior (fig. 9), añadiendo en el diámetro vertical las marcas de las perpendiculares al mismo trazadas desde los vértices de los polígonos inscritos, de modo que los cuadrados de los lados de dichos polígonos –que son cuerdas trazadas desde A– son entre sí como los segmentos determinados por las perpendiculares trazadas sobre el diámetro, lo que permite convertir cualquier figura regular en otra de igual área, en particular con referencia al triángulo equilátero de partida[41]. No obstante, para la división de la pantómetra recurre a una tabla –para la que reserva espacio en el folio 21r– en la que toma –también de la anterior tabla– los arcos subtensos de los lados de las figuras regulares en el círculo de la división anterior.

Sea como fuere, como el lado del triángulo equilátero inicial es la cuerda de 120° –173 para un radio dividido en cien partes iguales–, su área $\frac{\sqrt{3}}{4}(173)^2$ permite hallar el radio del círculo isométrico $-\frac{173}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} =$ 64.24, siendo 128.48 el diámetro a señalar en la división B_D con el símbolo ʘ-[42]. También se sabía en geometría práctica que la media proporcional entre el radio de este círculo y su semicircunferencia $(\sqrt{\pi(64.24)^2} = 113.86)$ era el lado del cuadrado isométrico[43]. Adicionalmente, era posible encontrar inspiración en (*Els*.III.25) para abordar desde una perspectiva trigonométrica los segmentos de un círculo, donde el área del triángulo es $2r^2$ *(1/2) sen (a/2) cos (a/2).* Por otra parte, el área de cualquier polígono regular de *n* lados inscrito en un círculo es *n* veces la mitad del producto del perímetro por la apotema, de modo que el lado del polígono de igual superficie es la cuerda de su ángulo central para el radio *r* que hace que su área –*(n/2)* r^2 *sen* $\frac{360}{n}$– sea igual a la del círculo isométrico.

Entre las cuatro proposiciones sobre el uso de esta división en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 62r-64r) destacan la vigesimoséptima y la vigesimoctava, que explican el uso de la marca de cruz griega señalada en la división de la línea de partes iguales A_{100} debajo del número cincuenta y siete (fig. 2), donde siempre que el radio de círculo se ajuste en el intervalo entre las cruces, los intervalos entre números iguales marcarán la longitud del arco de dichos números o grados.

Aunque el autor no explica el fundamento de esta marca, es claro que se basa en la proposición tercera de la *Medida del círculo* de Arquímedes (Heath, 1897, p. 93) tomando la razón de la circunferencia a su diámetro como 22 a 7 ($\pi \cong 3\ \frac{1}{7}$), de forma que la razón del diámetro a la circunferencia es como 7 a 22 (*Els.*V.7 Corol.). Para una recta dividida en 360 partes iguales el

 Asclepio. 74(2), julio-diciembre 2022, p608. ISSN-L: 0210-4466, https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.21

diámetro del círculo dado es 114 $\frac{12}{22}$ partes de las 360, y el radio del círculo cuya semicircunferencia es una recta dividida en 180 partes iguales es 57 $\frac{6}{22}$ (*Els.*V.11, V.15). Marcando la cruz en 57 $\frac{6}{22}$ en ambas líneas A_{100}, donde 60 es la tercera parte de la semicircunferencia y la sexta parte de la circunferencia cuyo radio es 57 $\frac{6}{22}$. Por tanto, la línea A_{100} está dividida proporcionalmente en + y 60 como el radio del círculo a la sexta parte de su circunferencia. Análogamente se tiene que 72 es la quinta parte de la circunferencia, 45 la octava, 40 la novena, 36 la décima, etc. Este era un logro de gran interés, dado que la medición de longitudes de arcos era necesaria para la construcción de segmentos circulares en la práctica geométrica.

Explicadas las tres divisiones de la cara B de la pantómetra, se aborda la cara C de la segunda pantómetra comenzando con la división séptima de los senos hasta 90° (C_{Sin}) anunciada en la división cuarta (B_{Gr}) (Mss/9614, ff. 21r-22r). De ella dice el autor que se trata de una división conocida y fácil pero no de menos uso en una infinidad de problemas en cualquier parte de las matemáticas. Explica la graduación de esta séptima división sobre una recta AB vertical trazando un semicírculo de centro B y radio BA que es el diámetro del semicírculo CAD –puesto que CD es una recta horizontal perpendicular a AB que pasa por B–. Dividiendo este semicírculo en 180°, las rectas paralelas al diámetro CD trazadas de grado en grado señalan sobre el radio AB las longitudes de los senos de 1° a 90°. Alternativamente se remite a las longitudes de los números pares de la tabla de cuerdas en B_{Gr}.

De las nueve proposiciones sobre el uso de esta división en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 64r-67v) las cinco últimas están dedicadas a la resolución de triángulos. Las anteriores enseñan el manejo de la pantómetra como alternativa a las tablas de senos y cuerdas, pero destacan en particular las proposiciones trigésimo primera y trigésimo tercera, que muestran mediante ángulos complementarios las relaciones del verseno y la tangente con el seno[44] –que utilizará más adelante–.

La novena división exterior (C_p) se usa para transformar cualquiera de los cinco poliedros regulares en otro de igual volumen (Mss/9614, ff. 27v-30v), en la que se trata de hallar los lados de los cuerpos regulares cuyos volúmenes son iguales entre sí. Para ello se basa en (*Els.*XIII Props.13-18), que además de construir los cinco sólidos platónicos inscritos en una esfera muestran las proporciones entre el cuadrado del diámetro de dicha esfera y los cuadrados de las aristas de estos poliedros. Con esta información obtiene las aristas de los cinco poliedros regulares, calcula sus volúmenes para una esfera de 329 partes basándose en Clavio (Clavius, 1591, XV.32; Clavius, 1606, pp. 210-218) y presenta una tabla de los lados de estos volúmenes reducidas a cubos, a la que añade el volumen de la esfera en la que se inscriben multiplicando la tercera parte del semidiámetro por toda la superficie de dicha esfera[45], cuya raíz cúbica es 265. Por último, calcula los lados de los volúmenes tabulados reducidos a un cubo de lado 1000 partes de manera que todos sus volúmenes sean iguales entre si[46]. Desafortunadamente, de nuevo reserva espacio en el folio 30r para una ausente tabla de los lados de los cuerpos iguales a un cubo dado.

Finalmente se aborda la cara D de la segunda pantómetra comenzando con la división décima de las tangentes hasta 45° (D_{Tang}) (Mss/9614, ff. 30v-32r), que el autor califica como muy conocida, fácil y de gran uso en matemáticas. Si bien no es posible poner todas las tangentes en las pantómetras –porque crecen en infinito–, basta con señalarlas hasta 45° para hallar las siguientes (Mss/9614, f. 82v).

Aunque es posible obtener las tangentes operando con la división de los senos (C_{Sin}) –como se ha explicado en la nota 44–, es más práctico disponer de una división propia, que pasa a exponer (fig. 10).

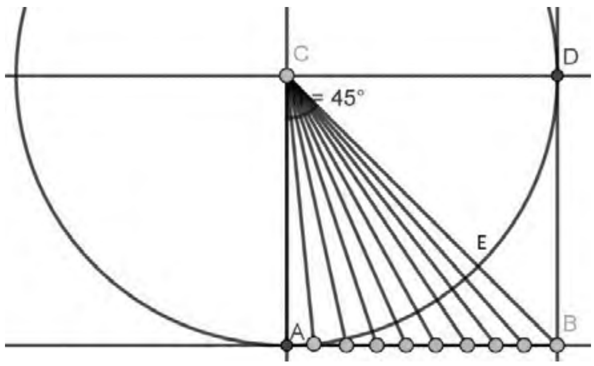

Figura 10: Reconstrucción (Mss/9614, f. 31v)

Siendo AB la línea de la pantómetra a graduar, se traza la perpendicular AC de igual longitud, un cuadrante de círculo AED con centro en C y la hipotenusa CB –que divide en el punto E el arco AD del cuadrante en dos partes iguales–. Dividiendo el arco AE en sus 45° iguales y trazando desde C rectas hasta AB que pasen por cada uno de los grados previamente señalados, las intersecciones marcadas por estas rectas dividen la recta AB en las tangentes de 0 a 45°. Finalmente, se deja espacio en el folio 32v para una ausente Tabla para las Tangentes de 1° a 45°, en la que recomienda incluir las tangentes de 30 en 30 minutos.

En cuanto al uso de esta división (Mss/9614, ff. 82r-85v), enseña el manejo de esta línea para la determinación de los ángulos agudos de un ángulo recto y concluye con la construcción de relojes horizontales y verticales –proposiciones cuadragésimo cuarta y quinta–.

La undécima división (D_{Cir}) (Mss/9614, ff. 32v-35r) transciende el ámbito euclidiano, entrando en terreno arquimediano con la división del área del círculo en partes iguales mediante rectas paralelas. Nuevamente la ausencia de gráficos y tabla imposibilita una reconstrucción cierta. No obstante, el cálculo de longitudes y senos de los arcos y el uso de la sagita (Mss/9614, f. 86) como lado homólogo muestran que conoce el procedimiento para hallar el área del segmento circular como la diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo cuya base es la cuerda del arco (Coignet, 1626, pp. 30-31)[47].

La duodécima división (D_{Gl}) (Mss/9614, ff. 35r-36v) trata la división de la esfera en partes iguales mediante planos paralelos de manera igualmente oscura. No obstante, (Coignet, 1626, pp. 52-54), muestra como la altura del casquete esférico es el lado homólogo con el que se gradúa la división, una vez hallado el radio de la esfera.

4. CONCLUSIONES

Este manuscrito –que pudiera ser una copia al dictado de un curso– trata de la construcción y el uso de las pantómetras, un instrumento que no solo simplificaba y abreviaba las construcciones geométricas y las operaciones aritméticas, sino que además era especialmente apropiado para el manejo de razones y proporciones en una amplia gama de objetos geométricos de una a tres dimensiones –independientemente de su tamaño y del sistema métrico en uso–.

El capítulo dedicado a la construcción desvela la graduación de las doce líneas del instrumento centrándose en la verificación de su fundamento matemático, a fin de validar la fiabilidad de su uso, particularmente en los problemas cuyo tratamiento pantométrico agiliza la obtención de la solución. No obstante, más que demostrar detalladamente las graduaciones de las líneas, el autor las justifica, en términos euclídeos o arquimedianos, aritméticos o geométricos y también trigonométricos.

Con ello el autor se ubica en la estela de Clavio, no solo por remitirse a su *Instrumentum Partium* para presentar las pantómetras, sino también por aceptar la reducción de cantidades inconmensurables a sus conmensurables más próximas sin que en la práctica se aprecie *diferencia sensible* alguna. Igualmente atribuye a la inconmensurabilidad la inexactitud de las tablas numéricas frente a las construcciones geométricas, si bien defiende la bondad de sus aproximaciones, con un margen de error sensorialmente imperceptible que *basta en cualquier materia práctica* –del mismo modo que Regiomontano valora la obtención de una aproximación numérica cuando no es posible hallar la cantidad exacta–. A mayor abundamiento, destaca en las pantómetras su utilidad *para reducir los números a líneas y las líneas a números*, en consonancia con Regiomontano y Clavio en cuanto a la consideración de las magnitudes geométricas en términos numéricos. En conjunto, las pantómetras representaban una convergencia de aritmética, geometría y trigonometría, instrumentalizada con fines prácticos, que contribuyó al proceso de asimilación de la inconmensurabilidad. De hecho, la consideración numérica de las magnitudes continuas como cantidades no fue ajena al despertar de la geometría cartesiana.

Ciertamente el uso de las pantómetras no era especialmente difícil, pues consistía en abrir las piernas del instrumento, tomar la distancia desde el pivote a un punto de una de las tres líneas y tomar la longitud del intervalo entre dicho punto y el correspondiente en la misma línea de la otra pierna (Drake, 1978, p. 11). No obstante, el uso correcto del instrumento requería la comprensión de los resultados proporcionados por cada línea y la asimilación de una serie de conceptos básicos: triángulos equiángulos, semejanza, lados homólogos y la definición de una magnitud como *una parte* –o *partes*– de otra magnitud. A tal efecto tiene sentido este pionero tratado docente.

Las pantómetras fueron aprobadas por los matemáticos y apreciadas por los profesionales de diferentes ámbitos durante casi doscientos años, hasta final del siglo XVIII.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Ad Meskens su información sobre la disponibilidad de la copia digital del manuscrito Coignet, Michiel, *El uso de las doze divisiones geometricas, puestas en las dos reglas pantometras*, B 264708 Collectie Stad Antwerpen, Erfgoedbibliotheek Hendrik Conscience.

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto de Investigación HAR2015-70985-P (MINECO/FEDER, UE) –dirigido por Antoni Malet– y por el Grupo de Investigación de Historia Intelectual e Institucional de la Universidad de Zaragoza (GIHII, DGA H20_17R).

NOTAS

1 Se conserva en la Biblioteca Nacional de España con signatura MSS/9614 y se encuentra disponible en la Biblioteca Digital Hispánica, [consultado el 22/03/2021]. En lo sucesivo se utilizará (Mss/9614) en las referencias a este tratado.

2 Coignet, Michiel (1618), *El uso de las doze divisiones geometricas, puestas en las dos reglas pantometras,* Manuscrito B 264708, Collectie Stad Antwerpen, Erfgoedbibliotheek Hendrik Conscience, [en línea], disponible en: https://dams.antwerpen.be/asset/ijFikoIe8gDjEXYeWf0whqBQ/j2hLXDnMXnKNPQZiggcGtmuY, [consultado el 22/03/2021].

3 Para su biografía científica completa y sus pantómetras véase especialmente (Meskens, 2013, pp. 14-21, 113-137). Su nombre fue ligeramente modificado en las traducciones y ediciones de sus manuscritos e impresos, por ejemplo (Connette, 1626).

4 La referencia a Clavio como inventor del instrumento sugiere que el autor del tratado podría situarse en el ámbito de los jesuitas matemáticos ibéricos que trabajaron con las pantómetras de Coignet, entre los que se encuentra Joannes della Faille (1597-1652) (Meskens, 2013, pp. 136-137).

5 Esta referencia cronológica a las pantómetras de Coignet sugiere una datación del texto en las décadas de los años 30 y 40 del siglo XVII, habida cuenta de que, tras el fallecimiento de Coignet, *P.G.S. Mathematicien* publicó un libro (Connette, 1626) que contiene la traducción al francés de alguno de los manuscritos de Coignet sobre pantómetras junto con la traducción del italiano al francés de alguno de sus manuscritos sobre el compás de Fabrizio Mordente, que en ambos casos habían circulado en diferentes idiomas desde el principio del siglo (Meskens, 2013, p. 231), por ejemplo (Coignet, 1618) y *L'uso del compasso di Fabricio Mordenti di Salerno mathematico del serenissimo Principe Alessandro Farnese Duca di Parma, composto per Micaelo Coignetto: propositioni geometriche cavate dalli primi sei libri delli elementi d'Euclide*, Manuscrito MSS/19709/32, Biblioteca Nacional de España, [en línea], disponible en: Biblioteca Digital Hispánica. Por otra parte, desde el principio del tratado la ortografía del texto sugiere un autor o amanuense no hispano.

6 El manuscrito (Coignet, 1618) se ajusta a esta descripción y el impreso en Francia a (Connette, 1626).

7 Medidos por sus cuerdas, como se verá más adelante.

8 De Fabrizio Mordente (Camerota, 2000).

9 Por ejemplo (Coignet, 1618, ff. 23r-24r) y (Connette, 1626, pp. 77-90) usan las pantómetras respectivamente en cartografía y astronomía. (Zaragoza, 1675, Lámina I, pp. 3 y 16) muestra una pantómetra militar con las divisiones exteriores específicamente destinadas a partes esenciales de la fortificación –lados de la fortificación y semigola–.

10 La referencia al trazado de la elipse es particularmente interesante, dado que se conserva un manual manuscrito sobre el uso de las pantómetras de Coignet con notas de Della Faille sobre la construcción de elipses, que son interpretables en términos de ecuaciones paramétricas (Meskens, 2005, p. 66). El autor del tratado podría situarse en el ámbito de los discípulos de Della Faille y pudiera ser una copia al dictado de las clases impartidas.

11 (*Els*.VI.4) demuestra que en triángulos equiángulos –cuyos ángulos correspondientes son iguales– no necesariamente equiláteros los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden ángulos iguales son correspondientes. Para los *Elementos* de Euclides se utiliza (Heath, 1956) en la versión de (Joyce, 1998).

12 Curiosamente esta ilustración omite cualquier referencia a los conceptos previamente mencionados –triángulos equiángulos, ángulos iguales–; de hecho, ni tan siquiera menciona que los triángulos están en posición de Tales. El texto deja además media página vacía (Mss/9614, f. 4r) para la ilustración del ejemplo, un vacío que se repite en lo sucesivo en toda la obra, dificultando la reconstrucción gráfica del texto. En cuanto a la redacción, el texto es totalmente retórico, no usa símbolos matemáticos para razones ni proporciones de magnitudes. Nótese que usamos los subíndices de las letras mayúsculas para señalar en que punto de la graduación de la línea finalizan los segmentos.

13 En el texto se menciona (*Els*.VI.14), que es una errata, pues la redacción corresponde a (*Els*.VI.12). Nótese que Descartes aplicó esta proposición a tres segmentos de longitud *1*, *a* y *b* para obtener como resultado el producto de *a* por *b* (Descartes, 1637, p. 298).

14 La división octava –interior en la cara C– es la única división física de la pantómetra (Mss/9614, ff. 22r-27r), donde señala –en latín– los siguientes metales y no metales: *Aurum, Pl[umbum], Ar[gentum], Cu[prum], Fer[rum], St[annum]*, *Mar[mor]* y *Pet[ra]* (fig. 2). Mediante prismas rectos rectangulares de igual altura y peso de cada uno de estos materiales es posible graduar esta división (C_{Pet}) sumergiendo cada uno de ellos en un recipiente de agua hasta su superficie superior, de manera que los intervalos entre los pares de puntos señalados dan los diámetros de las esferas –o los lados homólogos de otros sólidos– del mismo peso y semejantes entre sí. Por último, presenta una tabla de los pesos de las balas de los metales cuyo diámetro sea un pie antiguo romano, a la que añade otra –en el segundo capítulo– que muestra el aumento proporcional de un cubo de oro en cubos de igual peso de otros metales (Mss/9614, f. 79r).

15 Las pantómetras no eran un artículo al alcance de cualquier estudiante. De hecho se conservan dos cartas (1638-39) de della Faille a su amigo Van Landren –en Amberes– donde tramita los pedidos de pantómetras y otros instrumentos matemáticos que le encargan empleados de la Corte de Madrid. Una de las pantómetras costaba cuatro escudos o 48 reales en plata (Van der Vyver, 1977, pp. 129, 142-143).

16 Este argumento procede de Clavio, que en su construcción de la cuadratriz acepta la intersección de la curva con el eje "sin error perceptible, es decir, un error que puede ser detectado por los sentidos" (*sine notabili errore, qui scilicet sum sensum cadat*) (Clavius, 1606, p. 321; Clavius, 1591, Libro VI, p. 350)**.** Véase (Bos, 2001, pp. 159-166). Por otra parte, cabe destacar que el pensamiento matemático de Clavio tuvo una influencia considerable en la formación de Descartes en el colegio jesuita de La Flèche (Sasaki, 2003, pp. 45-48). Sobre las nociones de proporcionalidad, número y magnitud véase (Malet, 1990; Malet, 2006).

17 Se trata de convertir un número mixto $a\,\frac{b}{c}$ en una fracción $(a \times c + b)/c$, véase (Mss/9614, ff. 39v-40v).

18 Estas características no se aprecian con claridad en las imágenes de manuscritos e impresos, pero pueden verse en las pantómetras que se conservan, por ejemplo la pieza inventariada con número 56559 en el Catálogo general del Museo Arqueológico Nacional, disponible en: http://ceres.mcu.es/pages/SimpleSearch?Museo=MAN [consultado el 22/03/2021]. Como se verá más adelante, la igualdad longitudinal de las divisiones es más que conveniente para que las líneas trigonométricas estén sincronizadas con la división en partes iguales del radio del círculo sobre el que se establecen –representada en la línea A_{100}–. No obstante, al autor explica

las divisiones con una referencia genérica a la longitud de la línea que se quiere graduar, incluso en las divisiones de las razones trigonométricas.

19 Que en cierto modo es una generalización de *(Els.*VI.9).

20 El problema se plantea para una línea dada estimada en *partes* de un número dado, donde *a* es el número de sus *partes* iguales del número dado *b*, y la solución debe ser también una línea. En ningún momento indica que el número *a* deba ser *una parte* del número *b*, es decir, un divisor propio (*Els.* VII. Defs. 3, 4, 20), lo que implica la aceptación de fracciones irreducibles como resultado. Así, para *a*=2 y *b= 3* el resultado sería $(2/3)_*100$, que se situaría entre el números 66 y 67 en la pantómetra –los problemas tercero y cuarto muestran como hallar centésimas y milésimas en las pantómetras–.

21 Para una explicación detallada sobre como Regiomontano y Clavio promueven la consideración de las magnitudes geométricas en términos numéricos véase (Malet, 2006, pp. 70-71).

22 Trazando AB, AD=3AB, una semicircunferencia en BD y AE perpendicular a AD desde A hasta la semicircunferencia puede describirse sobre AE una figura AED semejante y semejantemente descrita a la dada ABC –que es igual a AEB–. Esto es así porque AE es media proporcional de AB y AD (*Els.*VI.13), luego $AE^2=AD_*AB=3AB_*AB=3AB^2$. Como además el ángulo del triángulo DEB en E es recto –como todos los triángulos en una semicircunferencia–, estos dos triángulos adyacentes a la perpendicular AE son semejantes entre sí y semejantes al triángulo DEB (*Els.*VI.8), lo que implica que $AD:AB=AD^2:AE^2$ (*Els.*VI.20 *Corol.*)*,* esto es, las figuras rectilíneas semejantes están entre sí en razón duplicada de sus lados homólogos.

23 Nótese que trata del mismo procedimiento utilizado por Descartes para obtener la raíz cuadrada (Descartes, 1637, p. 298).

24 Mediante el Teorema de Pitágoras (*Els*.I.47) y (*Els*.VI.1). El procedimiento que se describe a continuación se superpone al anteriormente ilustrado (fig. 6), en el lado izquierdo de la recta BP, y produce la misma graduación.

25 Una tabla de cuadrados y cubos de 1 a 1000 se encuentra en (Clavius, 1606, pp. 377-386).

26 Para una explicación detallada sobre como Regiomontano valora la obtención de una aproximación numérica cuando no es posible hallar la cantidad exacta véase (Malet, 2006, p. 71).

27 Aumentar, multiplicar y disminuir una figura plana en la proporción de un número dado; hallar la proporción que tienen entre sí dos figuras semejantes, la media proporcional y la tercera proporcional entre dos líneas dadas, cuantas líneas en proporción continua a dos líneas dadas en proporción continua se quiera, la cuarta proporcional a tres líneas dadas aunque no estén en proporción continua se encuentran en (Connette, 1626, proposiciones 10, 8, 11, 21, 45, 46).

28 Opera con los ejes de la elipse y con la base y diámetro de los sectores. Esta proposición confirma que el autor está familiarizado con el uso de las secciones cónicas, que ya había mencionado –en particular la parábola– al principio de este segundo capítulo.

29 Así se deduce del texto –que carece de demostración y de ilustración en el espacio en blanco reservado a tal efecto–, dado que no se menciona expresamente ni al autor ni la fuente utilizada.

30 De la igualdad entre las dos primeras proporciones se obtiene $(HF)^2= CF_*DG$ y de la igualdad entre la primera y tercera proporción resulta $3(CF)^2= HF_*DG$, luego $(HF)^2 = 3(CF)^3/HF$, de modo que $(HF)^3 = 3(CF)^3$.

31 Para resolver este problema Descartes recurre al mesolabio, un instrumento procedente de la antigüedad clásica (Descartes, 1637, pp. 269-371).

32 También explica cómo aumentar y disminuir una figura sólida en la proporción de un número dado y hallar la proporción que tienen entre sí dos figuras sólidas semejantes.

33 Arcos de los sectores circulares.

34 No es descartable el uso de un transportador, que a finales del siglo XVI era un instrumento construido con gran precisión, véase el catálogo electrónico *Epac*: http://www.mhs.ox.ac.uk/epact/search.php, [consultado el 22/03/2021].

35 Advierte el autor que las divisiones disminuyen conforme se acercan a 180° –perdiendo fiabilidad–, estando en las pantómetras flamencas mas espaciadas y mejor definidas; cuentan además con una división de los senos hasta 90° en la línea central de la cara C de la pantómetra (C_{Sin}).

36 Finalmente reconoce que B_{Gr} es la línea de la cuerdas, puesto que aplica la igualdad *crd a = 2 sen (a/2).* Cabe destacar que las cuerdas eran *partes*, no *una parte* del radio (*Els*.I.Def.4), pero su uso en geometría se hallaba sólidamente establecido en virtud de su probada utilidad desde la antigüedad y se extendió en el Renacimiento a todas las razones trigonométricas a partir de (Regiomontanus, 1534).

37 El autor comienza con un procedimiento que atribuye a Tycho Brahe. El hecho de que este problema ocupe la mayor parte del espacio dedicado a este instrumento muestra su vigencia en la época.

38 Nótese que esta división incluye el triángulo mientras que la de Coignet parte del pentágono (fig. 2).

39 Las dos proposiciones –vigesimocuarta y vigesimoquinta– sobre el uso de esta división en el segundo capítulo (Mss/9614, ff. 61r-62r) ilustran la construcción de los polígonos de nueve y siete lados con la pantómetra.

40 Una tabla de los lados de los polígonos de tres a ochenta lados inscritos en un círculo cuyo radio esté dividido en 10^7 partes iguales puede verse en (Clavius, 1606, p. 177).

41 Adicionalmente esboza de manera muy poco precisa la graduación de los perímetros de las figuras regulares –que en ausencia del gráfico no nos es posible reconstruir con certeza– para utilizar la proporcionalidad entre perímetros y lados.

42 El adjetivo *isométrico* se utiliza en este artículo conforme a la primera acepción de la palabra *isometría* de la Real Academia Española, cuyo significado es *igualdad de medidas*. En ningún caso se trata de la proyección isométrica, que no se formalizó hasta el siglo XIX.

43 Véanse los problemas 64 y 65 en *Geometría práctica aplicada a la fortificación y arte militar* (f. 30r), manuscrito del siglo XVII que se conserva en la Biblioteca Nacional de España con signatura MSS/9118, disponible en la Biblioteca Digital Hispánica, [consultado el 22/03/2021].

44 Versen $((90-\alpha) = r - r\,\text{sen}\,(180-\alpha);\ \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,(\alpha)}{\text{sen}\,(90-\alpha)})$

45 *(r/3) (4pr²) = 4pr³/3*; para p=3,141 y *r*= 164,5 obtiene 18692135.

46 Para ello resuelve la siguiente proporción $265:L_{PInscrito} = L_{PIsométro}:1000$ –en términos algebraicos–, resuelve la ecuación $(\chi \times L_{PInscrito})^3 = 265^3$ de manera que $\chi \times L_{PInscrito}$ es el lado del poliedro isométrico.

47 La sagita es el verseno (en este caso *versen* $\alpha = r - r\cos\alpha = 2\,r\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$); $\frac{r^2}{2}(\frac{\pi\alpha}{180} - \text{sen}\,\alpha)$ *)* es el área del segmento circular.

Asclepio. 74(2), julio-diciembre 2022, p608. ISSN-L: 0210-4466, https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.21

BIBLIOGRAFÍA

Ausejo, Elena (2022), "Using Euclid in a practical context: Claude Richard's course on sectors at the Jesuit Imperial College in 17th century Spain", *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 45 (90), doi: 10.47101/llull.2022.45.90.ausejo [en espera de activación].

Bos, Henk J.M. (2001), *Redefining Geometrical Exactness: Descartes Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, New York, Springer-Verlag, [en línea], doi: 10.1007/978-1-4613-0087-8.

Camerota, Filippo (2000), *Il compasso di Fabrizio Mordente. Per la storia del compasso di proporzione*, Firenze, Olschki.

Clavius, Christoph (1591), *Euclidis Elementorum libri XV*, Coloniae, Ioh. Baptistae Ciotti, [en línea], disponible en Google Libros, [consultado el 22/03/2021].

Clavius, Christoph (1606), *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Geometria practica*, Moguntia, ex Typographeo Ioannis Albini, [en línea], disponible en: http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:DEWR2C0N, [URL permanente, consultado el 22/03/2021].

Coignet, Michiel (1618), *El uso de las doze divisiones geometricas, puestas en las dos reglas pantometras,* Manuscrito B 264708, Collectie Stad Antwerpen, Erfgoedbibliotheek Hendrik Conscience, [en línea], disponible en: https://dams.antwerpen.be/asset/ijFikoIe8gDjEXYeWf0whqBQ/j2hLXDnMXnKNPQZiggcGtmuY, [consultado el 22/03/2021].

Coignet, Michiel (1626), *Géometrie reduite en une facile et briefve practique par deux excellens instrumens*, Paris, Charles Hulpeau.

Connette, Michel (1626), *La geometrie redvite en une facile et briefve practique, par deux excellens instruments, dont l'un est le pantometre ou compas de proportion de Michel Connette, Ingenieur du seu Serenissime Archiduc Albert,* Paris, Hulpeau, [en línea], disponible en: http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:3SYMQ7HR, [URL permanente, consultado el 22/03/2021].

Descartes, René (1637), *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus La dioptrique, Les météores et La géométrie qui sont des essais de cette méthode*, A Leyde de l'imprimerie de Jan Maire, [en línea], disponible en: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594, [consultado el 22/03/2021].

Drake, Stillman (1978), *Galileo Galilei, Operations of the geometric and military compass, 1606. Translated, with an introduction by Stillman Drake*, Washington D.C., Smithsonian Institution Press.

Heath, Thomas L. (1897), *The Works of Archimedes*, Cambridge, At University Press.

Heath, Thomas L. (1956), *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary,* New York, Dover Publications.

Joyce, David E. (1998), *Euclid's Elements*, Clark University, Department of Mathematics and Computer Science, [en línea], disponible en: https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/aboutText.html, [consulta 22/03/2021].

Malet, Antoni (1990), "Changing notions of proportionality in pre-modern mathematics". *Asclepio*, 42 (1), pp. 183–211, [en línea], https://doi.org/10.3989/asclepio.1990.v42.1.574, [consultado el 22/03/2021].

Malet, Antoni (2006), "Renaissance notions of number and magnitude", *Historia Mathematica*, 33 (1), pp. 63-81, [en línea], https://doi.org/10.1016/j.hm.2004.11.011, [consultado el 22/03/2021].

Meskens, Ad (2005), *Joannes della Faille s. j. Mathematics, Modesty and Missed Opportunities,* Brussel, Belgisch Historisch Instituut te Rome.

Meskens, Ad (2013), *Practical mathematics in a commercial metropolis*, Dordrecht, Springer, [en línea], doi: 10.1007/978-94-007-5721-9, [consultado el 22/03/2021].

Regiomontanus, Joannes (1534), *Doctissimi ... Ioannis de Regio Monte De triangulis omnimodis libri quinque*, Norimbergae, In aedibus Io. Petrei, [en línea], disponible en: https://bvpb.mcu.es/es/catalogo_imagenes/grupo.do?path=30162, [consulta 22/03/2021].

Sasaki, Chikara (2003), *Descartes's Mathematical Thought*, Springer Netherlands, [en línea], doi: 10.1007/978-94-017-1225-5, [consultado el 22/03/2021].

Van der Vyver, Omer (1977), "Lettres de J.Ch. della Faille, S.I., Cosmographe du roi à Madrid, à M.F. Van Langren, cosmographe du roi à Bruxelles, 1634-1645", *Archivium Historicum Societatis Iesu,* 46, pp. 73-183.

Zaragoza, José de (1675), *Fabrica y uso de varios instrumentos mathematicos con que siruio al rey... Carlos Segundo en el dia de sus catorze años...*, Madrid, Antonio Francisco de Zafra, [en línea], disponible en Biblioteca Digital Hispánica, [consultado el 22/03/2021].