

令和元年6月19日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17079

研究課題名（和文）一般化割当て問題における安定集合

研究課題名（英文）The stable set in a generalized assignment problem

研究代表者

坂東 桂介（BANDO, Keisuke）

信州大学・学術研究院社会科学系・講師

研究者番号：50735412

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は一般化割当て問題と呼ばれる枠組みで、複数の買い手と複数の売り手の間で実現される取引について分析を行った。一般化割当て問題では、各主体の効用関数の準線型性を必ずしも仮定しない。本研究では安定集合解において実現される取引の性質について分析を行い、安定集合解を求めるアルゴリズムを新たに提案した。このアルゴリズムはオークションにおける談合行動として解釈することができる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では複数の買い手と複数の売り手の間の市場取引を行い、安定集合解を求めるアルゴリズムを新たに提案した。このアルゴリズムは、オークションで財を落札した勝者が財を落札できなかったある特定の敗者に対して金銭移転を行い、入札を控えさせるような交渉を表しており、オークションにおける談合行動が安定的な帰結として実現されうることを示唆している。

研究成果の概要（英文）：We analyze the model of a generalized assignment problem in which many sellers trade with many buyers with monetary transfers. In this model, each agent may not have a quasi linear utility function. We investigate equilibrium behavior in the Von Neumann-Morgenstern (vNM) stable set, which is a solution concept proposed in cooperative game theory. We provide an algorithm that finds a vNM stable set under certain conditions. This algorithm can be interpreted as a collusion behavior among buyers (or sellers) in a multi-item auction.

研究分野：ゲーム理論

キーワード：マッチング理論 安定集合 安定マッチング

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19(共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究はマッチング理論に関する研究である。マッチング理論では二つの異なる集団（男性と女性、企業と労働者など）の間で、どのようなマッチングを結ぶのが望ましいのか、又はどのようなマッチングが形成されるのかについて分析する。マッチング理論はGale and Shapley(1962)による安定結婚問題を起点とし、彼らの研究以降、様々なマッチングモデルが分析されている。

割当て問題とはShapley and Shubik (1971)によって提案されたマッチング理論のモデルであり、複数の買い手と売り手によって構成される市場における非分割財の取引を分析するための枠組みである。各売り手は一つの非分割財（家など）を所有しており、各買い手は売り手から最大で一つの非分割財を購入したいと考えている状況を扱う。割当て問題ではプレイヤー間の金銭移転が可能のため、安定結婚問題とは分析手法が大きく異なる。割当て問題は様々な経済問題に対して応用されており、例えば、住宅市場における競争均衡価格やキーワードオークションにおける入札制度を分析するうえで、基礎となるモデルになっている。

Shapley and Shubik (1971) は割当て問題におけるコアの分析を行った。コアは配分間の支配関係により定義される概念である。ある買い手と売り手が既存の取引をやめて新たな取引を行う誘引がある場合、その配分は支配されるという。この時、コアは支配されない配分の集合として定義される。Shapley and Shubik (1971)は割当て問題においてコア配分は必ず存在することを示している。

Shubik (1984)は割当て問題における安定集合解の分析を行った。安定集合解とはフォンノイマンとモルゲンシュテルンが提案した協力ゲーム理論における解で、コアと密接に関連する概念である。安定集合は外部安定性(安定集合外の点は安定集合内の点により支配される)かつ内部安定性(安定集合内の点は安定集合内の他の点に支配されない)を満たす集合として定義される。コアと安定集合が存在する場合、コアは安定集合に含まれることが知られている。しかし、コア配分が存在するからといって安定集合が存在するとは限らない。Shubik (1984) は、安定集合の形状を予想したが、完全な証明を与えることはできなかった。Nunez and Rafels (2013)は Shubik (1984) による予想が正しいことを証明し、割当て問題における安定集合の存在を示した。

私は過去の研究(Bando, 2014)で、安定結婚問題において安定集合解を簡単に求めるアルゴリズムを提案している。その考え方を割当て問題に応用することにより、より一般的な分析が可能になると考え、本研究に至った。

2. 研究の目的

本研究では割当て問題における安定集合の性質を、より一般的な枠組みで分析することを目的とする。コアではなく安定集合に着目する理由は、安定集合によりコアでは説明することができない現実の行動(例えば、談合など)が説明可能となるという点にある。本研究では複数の売り手と買い手が関与するオークションにおいて談合がおこるメカニズムをより深く理解するために安定集合を均衡概念として用いる。

通常の割当て問題では、各買い手の効用関数は金銭に関する準線形関数で与えられている。これは、現在の所得は財に対する支払い意思額に影響を与えないという意味の強い仮定である。また、各買い手及び各売り手は最大で一人の相手しか取引ができないことも仮定されている。これらの仮定は安定集合の存在を示すうえで重要な仮定となっている。本研究ではこれらの仮定に依拠しない新たなアプローチを提案し、より一般的な割当て問題において安定集合が存在するか否かを明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 各プレイヤーの効用関数が準線形とは限らない一般化割当て問題における安定集合解の存在問題を考察する。ただし、各プレイヤーは最大で一人の相手しか取引できないことを単純化のために仮定する。このような状況で安定集合解を分析するためには、既存研究とは異なる新たなアプローチを導入する必要がある。本研究では競り上げオークションをベースにした新たなアルゴリズムを提案する。価格競り上げオークションとは、最も低い価格0からスタートして、超過需要の財があればその財の価格を上げ、このプロセスを超過需要がなくなるまで行う手続きである。この際に、ある買い手の財の落札価格は、他の買い手によって競り上げられ高騰することがある。この時、買い手にとっては落札価格が高騰する原因となった他の買い手に対して、金銭移転を行い、入札を控えさせる談合を行うインセンティブがある。本研究が提案するアルゴリズムはこのような談合行動によって生じる帰結を計算するものなので、談合アルゴリズムと呼ばれる。本研究は談合アルゴリズムにより、一般化割当て問題において安定集合解の存在問題を考察する。

(2) また、各買い手及び各売り手は複数の相手と取引できる場合を考える。このような状況は契約付き多対多マッチング問題(Hatfield and Kominers, 2016)として定式化することができる。ここでは、安定集合よりも基礎的な解概念である安定マッチングに着目し、その存在問題を考察する。多対多マッチング問題ではHatfield and Kominers (2016)は安定マッチングが存在するためには、各主体の選好が代替性を満たしている必要があることを証明している。一方で、多対一マッチング問題(片側は最大で一人の相手としか取引できない)では、代替性よりも弱い概念である観測可能代替性のもとで安定マッチングが存在することが証明されている (Hatfield, et al. 2017)。本研究では観測可能代替性を仮定した場合の多対多マッチング問題における安定マッチングの存在問題を考察する。

4. 研究成果

(1) 割当て問題における談合アルゴリズムと安定集合

通常の割当て問題において、全ての買い手と売り手がマッチした場合の余剰が正である場合、談合アルゴリズムによって安定集合解が得られることを証明した。また、本研究の提案したアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムではないが、多くの場合は非常に短い計算時間で済むことをシミュレーションにより確認した。この結果は、"Essential μ -compatible subgames for obtaining a von Neumann-Morgenstern stable set in an assignment game" と題された論文としてまとめた。この論文は、国際会議"The 9th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT-2016, Liverpool, UK)"に採択された。談合アルゴリズムは準線形を仮定しない一般的な割当て問題でも定義することが可能である。いくつかの数値例では、準線形性を仮定しない一般的な割当て問題においても談合アルゴリズムにより安定集合解を求められることが確認できた。一方で、この結論が一般的に成り立つのかどうかは未解決な問題である。

(2) 契約付き多対多マッチングにおけるマッチングにおける安定マッチング

本研究では契約付き多対多マッチングにおいて観測可能代替性を満たす場合の、安定マッチングの存在条件を明らかにした。また、修正累積オファープロセスと呼ばれるアルゴリズムを新たに提案し、存在条件のもとでは安定マッチングに収束することを証明した。この結果は、"Existence of a stable outcome under observable substitutability across doctors in many-to-many matching with contracts"と題された論文としてまとめた。この論文の成果を国際会議"The Lisbon Meetings in Game Theory and Applications 2018"及び"East Asian Game Theory Conference 2019"(共著者が発表)で報告した。

(3) 多者間マッチング問題における安定マッチング

(2)の研究では、各プレイヤーの選好は観測可能代替性を満たすことを仮定している。本研究では、各プレイヤーの選好に対して制限を一切行わない場合における安定マッチングの存在条件を考察した。特に、買い手と売り手の間の取引構造に着目し、それが安定マッチングの存在にどのような影響を与えるのかについての分析を行った。この研究では、買い手と売り手の間の取引構造が非循環的であるならば安定マッチングが存在し、さらに安定マッチングがパレート効率的であることを明らかにした。この結果は、"On stable outcomes of the multilateral matching"と題された論文としてまとめた。また、この論文の成果を国際会議"European Meeting on Game Theory (SING13)"、"18th meeting of the Association for Public Economic Theory"(共著者が発表)、"East Asian Game Theory Conference 2017"(共著者が発表)で報告した。

<参考文献>

- ・ K. Bando (2014), On the existence of a strictly strong Nash equilibrium under the student optimal deferred acceptance algorithm. *Game and Economic Behavior* 87, 269-287.
- ・ D. Gale, L. Shapley (1962), College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly* 69, 9-15.
- ・ J.W. Hatfield, S. D. Kominers (2015) Multilateral matching, *Journal of Economic Theory* 156, 175-206.
- ・ J.W. Hatfield, S. D. Kominers (2017) Contract design and stability in many-to-many matching, *Games and Economic Behavior* 101, 78-97.
- ・ J.W. Hatfield, S. D. Kominers, A. Westkamp (2017) A Stability, strategy-proofness, and cumulative offer mechanisms," Working Paper.
- ・ M. Nunez, C. Rafels (2013), Von Neumann-Morgenstern solutions in the assignment market, *Journal of Economic Theory*, 148.
- ・ M. Shubik (1984), *A Game Theoretical Approach to Political Economy*, MIT Press, Cambridge, MA.
- ・ L. Shapley, M. Shubik (1971), The Assignment Game I: the core, *International Journal of Game Theory*, 11, 111-130.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, "Existence of a Stable Outcome under Observable Substitutability across Doctors in Many-to-Many Matching with Contracts," SSRN Working PAPER, 全 28 頁, 2018, (査読無し)
Available at SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3165311
- ② Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, "On Stable Outcomes of the Multilateral Matching," SSRN Working PAPER, 全 104 頁, 2017, (査読無し)
Available at SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2959978
- ③ Keisuke Bando and Kenzo Imamura, "A necessary and sufficient condition for weak Maskin monotonicity in an allocation problem with indivisible goods," *Social Choice and Welfare*, 47, 589-606, 2016. (査読あり)

[学会発表] (計 6 件)

- ① Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, “Existence of a Stable Outcome under Observable Substitutability across Doctors in Many-to-Many Matching with Contracts” The 1st Mini-conference on Matching in Waseda 2019 (2019年3月20日)
- ② Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, “Existence of a Stable Outcome under Observable Substitutability across Doctors in Many-to-Many Matching with Contracts” RISS-CEE 共催ワークショップ マッチング理論の現在とその社会実装に向けて (2018年11月11日)
- ③ Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, “Existence of a Stable Outcome under Observable Substitutability across Doctors in Many-to-Many Matching with Contracts” The Lisbon Meetings in Game Theory and Applications 2018 (2018年10月25日)
- ④ Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, “On Stable Outcomes of the Multilateral Matching,” European Meeting on Game Theory (SING13) (2017年7月5日)
- ⑤ Keisuke Bando and Toshiyuki Hirai, “On Stable Outcomes of the Multilateral Matching,” 一橋大学経済理論ワークショップ (2017年1月21日)
- ⑥ Keisuke Bando and Yakuma Furusawa, “Essential μ -compatible subgames for obtaining the von-Neumann Morgenshtern Stable set,” The 9th International Symposium on Algorithmic Game Theory (2016年9月21日)

6. 研究組織

(1) 研究分担者
なし

(2) 研究協力者
なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。