第５回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することを実現する指導法開発
－ 指導法開発の意味 －

Development of Teaching Methods to Realize Explorative Proving: Meaning of teaching development

宮崎樹夫　清水静海　岩永恭雄　市川大輔
信州大学　帝京大学　信州大学　信州大学教育学部
教育学系　教育学部　教育学部　附属長野中学校

要　約

本研究では，中学校数学で課題探究力を育むために，課題探究として証明することに着目し，それを実現する指導法の開発を次の様に捉えた：「課題探究として証明することのカリキュラム開発枠組みにおける様々な学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法の確定」。その上で，指導法の開発には次の三段階が必要であることを指摘し，小単元「平行線と角の性質」で例示した：ア．学習レベルの移行に必要な学習活動を考案する，イ．学習活動を実現する指導法を単元展開に組み込む，ウ．授業実践で指導法を評価・改善する。

キーワード：課題探究，証明すること，指導法

１．指導法開発の必要性

『社会の不安定さが国内外で日々高まる時代にあって我々は子ども達に何を遺すべきであるのか。』 この問に対する答えが教育界や産業界で模索され続け，ジェネリックスキル（清水禎文，2012）や「育成されるべき資質・能力」が注目されている。特に，課題探究力は，思考力の主要な核であり，主体的・対話的で深い学びによる意図的な育成が喫緊の課題である。

学校数学は，数学での課題探究を支える「証明すること」を，発見と正当化に要する知性のモデルとして重視してきた(Miyazaki & Fujita, 2015)ことにより，課題探究力を育むに相応しい内容・活動を備えている。既に，資質・能力としての課題探究力を学校数学で「証明する力」として“紐解き”，内容・活動として“具体化する”(Pepper, 2011)ために，中学校数学科において，課題探究として証明することのカリキ

ュラムを開発した(Miyazaki 他, 2016)。

開発されたカリキュラムに基づく授業実践には，課題探究として証明することを実現する指導法が必要となる。そこで，本研究では次の問に答えることを目的とする：課題探究として証明することを実現する指導法の開発とは何を意味するか。

２．課題探究として証明することのカリキュラム開発

(1) 課題探究として証明すること

数学における証明することには課題探究としての本性が内在している（宮﨑・岩永・松岡, 2015）。実際，知識の可謬性のもと，事柄や証明の正誤は疑いを発生させ，事柄及び証明の生成は共同体による長期的な議論の収束を通じて疑いの解消による信念を獲得させる。そこで，本研究では，課題探究として証明することを，事柄の生成，証明の生成（構想⇔構成），評価・改善・発展の三側面の相互作用として捉える（Miyazaki & Fujita, 2015）。

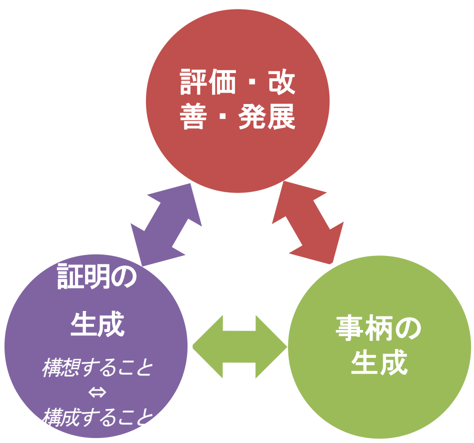

図 1　課題探究として証明すること

(2) カリキュラム開発枠組み

証明の生成に焦点化し，証明を構想すること（横軸）と，証明を構成すること（縦軸）に基づいて，カリキュラム開発枠組みを次のように設定した(宮﨑・永田・茅野, 2012; 茅野・宮川, 2016)。

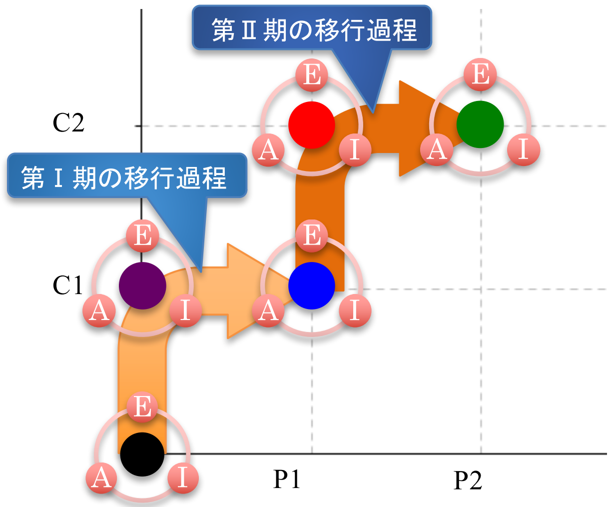

図 2　カリキュラム開発枠組み

証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

P1：前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉える。

P2：前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。

一方，証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

C1：事柄の特述あるいは特述に相当する言明において，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

C2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

それぞれのレベルの組み合わせと学習レベルの移行可能性により，第Ⅰ期の移行[学習レベル O ⇒ (P1, C1)]と，第Ⅱ期の移行[学習レベル (P1, C1) ⇒ (P2, C2)]が定まり，いずれの学習レベルでも，評価・改善・発展(EIA)が意図される。学年との対応については，第Ⅰ期の移行が第１学年で，第Ⅱ期の移行が第２学年及び第３学年で達成されることにした。なお，枠組みの基点となる学習レベル O は，「前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する」ことである。

⑶ 枠組みに基づく内容−活動対応表の作成

中学校学習指導要領解説数学編の「第２章目標及び内容　第３節 各学年の内容」をもとに，各内容で意図される学習レベル及び移行をカリキュラム開発枠組みに基づいて整理したものが,内容−活動対応表である。

表１　第２学年の内容−活動対応表（例）

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	文字を用いた式でとらえ説明できること／目的に応じた式の変形	(P1, C1) → (P2, C1) (P2, C1)＋EIA
図形	平行線と角の性質	(P1, C1) → (P1, C2)
	多角形の角についての性質	(P1, C2)＋EIA
	合同の意味と三角形の合同条件	
	証明の必要性と意味及び方法	(P1, C2) → (P2, C2)
	三角形や平行四辺形の性質	(P2, C2)＋EIA

３．課題探究として証明することを実現する指導法

⑴内容と活動の特性に基づく指導法

学校教育における指導法について，その適用範囲に着目すると，教科や領域に依存しない汎用性の高いものと，教科や領域の特性に基づく固有性の高いものとに区別することができる。本研究では，課題探究として証明することの実現を目的としているので，教科や領域の特性に基づく固有性の高い指導法に着目する。

特に，課題探究として証明することのカリキュラム開発では，課題探究として証明することの意味に基づいて開発枠組みを構築し，学習レベルの各移行の特性に基づいて「内容−活動対応表」を作成している。そのため，本研究で開発される指導法は，教科の内容や活動の特性に基づくといえる。

⑵課題探究として証明することを実現する指導法の開発

①「指導法の開発」の捉え

カリキュラム開発枠組みにおける学習レベルの移行は実践上最も重要な課題である。この課題を解決するには，この学習レベルの移行を実現する指導法の開発が必要である。本研究では，課題探究として証明することを実現する指導法の開発を，様々な学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法の確定と捉える。

②指導法開発の三段階

学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法の確定には，次の三段階が少なくとも必要である。

ア．学習レベルの移行に必要な学習活動を考案する

学習レベルの各移行には，低位のレベルから高位のレベルがあり，この移行を実現ために学習活動の考案が必要となる。

例えば，学習レベル(P1, C1)から(P1, C2)への移行において，その高まりは証明の構成における[C1⇒C2]である。

C1：事柄の特述あるいは特述に相当する言明において，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成する。

C2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成する。

この高まりの実現には，演繹的推論を普遍例化と仮言三段論法に分化し，この分化に基づいて前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成することが必要である。

演繹的推論を普遍例化と仮言三段論法に分化することについて，証明の構成としてC1 では仮言三段論法に比べ普遍例化が暗黙的であるため，学習活動では普遍例化の顕在化に焦点をあて，これに必要な全称命題を明示的にするために全称命題を記述・共有するとともに，普遍例化を証明の構成

に顕在的に活用するために単称命題群からなる C1 レベルの証明に全称命題を組み込み C2 レベルに高めることが考えられる。

一方，普遍例化と仮言三段論法の分化に基づいて前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成することについては，仮言三段論法による普遍例化の系列によって前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖が形成されることから，学習活動では仮言三段論法による普遍例化の系列に焦点をあて，この系列を顕在化するために，単称命題群からなる C1 レベルの証明について，全称命題の用い方「どの全称命題がどの順序で用いられているか」を明示することが考えられる。

以上のことから，学習レベル(P1, C1)から(P1, C2)への移行を実現する学習活動として次の３つが考案された。

A) 全称命題の共用
B) 単称命題群への全称命題の組込
C) 単称命題群における全称命題の用い方の明示

イ．学習活動を実現する指導法を単元展開に組み込む

学習レベルの移行は，ある小単元全体を通して実現される。そのため，学習レベルの移行に必要な学習活動は，その小単元の 1 つの内容に限らず，授業として連続する複数の内容で実現が意図されることが多い。そこで，学習活動を実現する指導法を単元展開に組み込むことが必要となる。

例えば，カリキュラム開発枠組み(図 2)において，学習レベル(P1, C1)から(P1, C2)への移行は小単元「平行線と角の性質」で意図されている。開発された指導法を実施する中学校では，この小単元で No. 1-10 の内容が扱われていたため各内容と学習レベルの移行を次のように対応付けた（表 2)。特に，この小単元では内容「三角形の内角の和」で証明の構成として C2 レベルの証明が一般に求められていることから，第 1 時から第 4 時までに(P1, C1)から(P1, C2)へ徐々に高め，第 5 時以降で(P1, C2)に習熟するように設計した。

表 2　内容と開発枠組みの対応

No.	内容	枠組みとの対応
1	対頂角が等しい	(P1, C1)→(P1, C2)
2	同位角が等しい⇔平行	(P1, C1)→(P1, C2)
3	錯角が等しい⇔平行	(P1, C1)→(P1, C2)
4	同側内角の和は 180°	(P1, C1)→(P1, C2)
5	三角形の内角の和	(P1, C2)
6	内角と外角の関係	(P1, C2)
7	「くの字」形	(P1, C2)
8	多角形の内角の和	(P1, C2)
9	多角形の外角の和	(P1, C2)
10	「くさび」形	(P1, C2)

第 1 時から第 4 時までに(P1, C1)から(P1, C2)へ徐々に高めるには，指導法として，普遍例化に必要な全称命題の共用促進が必要である。また，(P1, C2)に習熟するには，全称命題による普遍例化を証明の構成に顕在的に活用するために証明の構成が C1 レベルの証明に全称命題を組み込み, その上で, 仮言三段論法による普遍例化の系列に焦点をあて，証明の構成が C1 レベルである証明における全称命題の用い方を明示する活動の設定が指導法として必要である。

以上のことから, 学習レベル(P1, C1)から(P1, C2)への移行に必要な学習活動を実現するための指導法が次のように単元展開に組み込まれた。

第 1−4 時：全称命題の共用促進
第 5−6 時：単称命題群に全称命題を組み込む活動の設定
第 7 時と第 10 時: 単称命題群における全称命題の用い方を明示する活動の設定

ウ．授業実践で指導法を評価・改善する

学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法が単元展開に組み込まれたら, 単元展開全体の授業実践を通じて指導法に

ついて有効性と限界を特定し，必要に応じ改善することが必要である。

実際，長野県長野市にある公立中学校第２学年の１クラス（男子 16 人，女子 19 人）で学習レベル(P1, C1)から(P1, C2)への移行に必要な学習活動 A，B，C を実現する指導法による授業が小単元「平行線と角の性質」全体で実践された（期間：2014 年 12 月 10 日～2015 年 1 月 20 日；当時，授業者は公立中学校で経験年数 15 年を有していた）。

第１時から第４時の指導法「全称命題の共用の促進」に関して，第１時から第３時で普遍例化に必要となる全称命題として明示されたのは次の６つである。

❶平角は 180°である。
❷対頂角は等しい。
❸同位角が等しいならば,２つの直線は平行である。
❹２つの直線が平行であるならば,同位角は等しい。
❺２つの直線が平行であるならば，錯角は等しい。
❻錯角が等しいならば，２つの直線は平行である。

これらの全称命題は授業毎に番号を付して文章で別々の画用紙に書き表され，授業の終盤で黒板に掲示された。また，毎時間の生徒用ワークシートには，全称命題❶～❻が累積的にリストアップされ，クラス全体で根拠して用いてよい事柄として共用されていった。

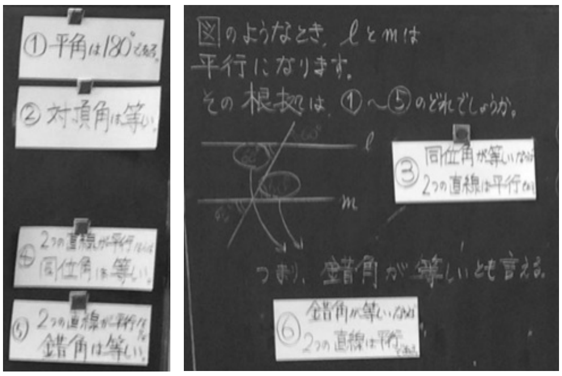

図３　全称命題の共用促進

第４時では，同側内角に関する学習問題について，解決の見通しとして全称命題❶～❻を使えばよいことが確認され，学習課題「今まで学習してきたことをつかって∠C＋∠H＝180°になる理由をかこう。」が据えられた。

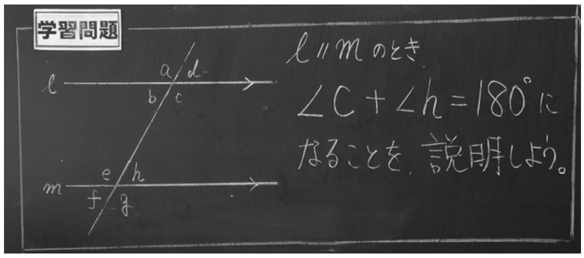

図４　同側内角に関する学習問題（第４時）

自力・協働解決後，教師は次の２つの解答を取り上げ，色チョークで下線を書き加えながら全称命題が組み込まれている点が望ましいと評価することで，共有された全称命題を証明の構成に組み込むことを促進した。

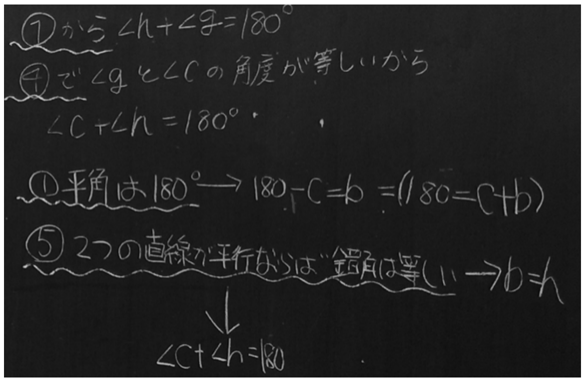

図５　共有された全称命題の活用促進

指導法「全称命題の共用促進」について，６つの全称命題をクラス全体で根拠して用いてよい事柄として共有したことによって，証明の構成にそれらを適用する準備を調えることができたことがわかる。また，教師が，共有された全称命題を証明の構成に活用していくことを促進したことにより，証明の構成 C2 レベルとして普遍例化に必要な全称命題をどのように組み込めばよいかが生徒達に明らかになったと考えられる。以上のことから，指導法「全称命題の共用促進」は学習レベルの移行に有効であると判断された。

一方，本小単元では，いずれの授業においても授業の見通しの段階で証明の構想P1 レベルとして，前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉えることが求められる。しかしながら，実際には，前提と結論を結びつけるための着想や対象（全称命題）を捉えるに留まり，全称命題をどのように根拠として使えばよさそうかまで構想するには至っていなかった。このことから，学習レベルの移行に際して変化しない証明の構想 P1 レベルについて，小単元全体で一貫して手立てを講じる必要があることが明らかになった。

４．結論・意義・今後の課題

本研究の結論は次の通りである：課題探究として証明することを実現する指導法の開発は，カリキュラム開発枠組みにおける様々な学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法の確定を意味し，この指導法の開発には次の三段階が必要である：ア．学習レベルの移行に必要な学習活動を考案する，イ．学習活動を実現する指導法を単元展開に組み込む，ウ．授業実践で指導法を評価・改善する。

本結論により，課題探究として証明することのカリキュラムに基づいて，様々な学習レベルの移行について，それに必要な学習活動を実現する指導法開発が促進される。

今後の課題は次の通りである。

- 各領域のカリキュラム開発枠組みに基づいて学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法を確定する。
- 指導法による効果と限界を捉えるための評価法を開発する。

謝辞　本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金（No. 24243077, 16H02068, 16H03057, 26282039）の助成を受けている。

参考文献

茅野公穂，宮川健 (2016). 「課題解決として証明することのカリキュラム開発　：領域「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化」. 日本数学教育学会 第 4 回春期研究大会論文集． pp. 163 - 166.

Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Fujita, T. Ichikawa D., Shimizu, S, & Iwanaga Y. (2016). Developing a Curriculum for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry, *Proc. of the 13th ICME.*

Miyazaki, M. & Fujita, T. (2015). Proving as an explorative activity in mathematics education: new trends in Japanese research into proof. In B. Sriraman. (Ed.), *First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India (International Sourcebooks in Mathematics and Science Education)* (pp. 1375 - 1407), Charlotte, NC: Information Age Publishing.

宮崎樹夫, 岩永恭雄, 松岡樂 (2015).「課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築」, 日本数学教育学会　第3回春期研究大会論文集, pp. 1 - 6.

宮崎樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂（2012）.「中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムに関する研究：カリキュラム開発のための枠組みの構築」, 日本数学教育学会　第45回数学教育論文発表会論文集, pp. 887 - 892.

Pepper, D. (2011). Assessing key competences across the Curriculum - and Europe, *European Journal of Education, 46*(3), 335 - 353.

清水禎文 (2012). 「ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景」, 東北大学大学院教育学研究科研究年報, 61(1), pp. 275 - 287.