SOBRE LAS SUCESIONES MONOTONAS

Por

Hiroshi AMAKI

Como sabemos, hay relación íntima entre la monotonía de la sucesión de números reales y la desigualdad. El objeto del presente trabajo es conseguir unos cuantos teoremas sobre la sucesión monótona. En el libro [2] de K. Knopp, se propone el siguiente problema:

Si la sucesión de números reales $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n > 0)$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$, es monótona, la sucesión formada con los términos de la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$,

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots\cdots+b_n}\right\}, \quad n=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$$

es también monótona. En particular, para $b_1=b_2=\cdots\cdots\cdots=b_n=1$, la sucesión $\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right\}$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$, es monótona.

Resolver este problema es muy fácil.

Y ahora demostremos los teoremas siguientes sobre la sucesión monótona. En primer lugar, del problema precedente, inmediamente, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1. Si la sucesión de números reales $\{a_n\}$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$, es monótona, y los términos de la sucesión $\{p_n\}$, $n=1, 2, \cdots\cdots\cdots$, son positivos, la sucesión formada con los términos de ellas

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}, \quad n=1, 2, 3, \cdots\cdots,$$

es monótona.

Demostración. Poniendo

$$A_n=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n},$$

$$A_{n+1}=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n+p_{n+1}a_{n+1}}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+p_{n+1}}$$

, puede demostrarse directamente del modo siguiente. La diferencia de A_n y A_{n+1}, es decir,

$$A_{n+1}-A_n=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n+p_{n+1}a_{n+1}}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+p_{n+1}}-$$
$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}$$
$$=\frac{(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)p_{n+1}a_{n+1}-p_{n+1}(p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n)}{(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+p_{n+1})(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)}$$

$$=\frac{p_{n+1}p_1(a_{n+1}-a_1)+p_{n+2}p_2(a_{n+1}-a_2)+\cdots\cdots+p_{n+1}p_n(a_{n+1}-a_n)}{(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+p_{n+1})\,(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)}$$

Por tanto, se escribe

$$A_{n+1}-A_n=\frac{p_{n+1}\sum_{i=1}^{n}p_i\ (a_{n+1}-a_i)}{(\sum_{i=1}^{n+1}p_i)\ (\sum_{i=1}^{n}p_i)}$$

Supongamos, por ejemplo, que la sucesión $\{a_n\}$ sea creciente. Luego, evidentemente, la diferencia $A_{n+1}-A_n$ es no negativa. De aquí resulta que la sucesión $\{A_n\}$ es monótona creciente. Análogamente se demuestra que la sucesión $\{A_n\}$ es monótona decreciente, si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Ahora bien demos el segundo teorema.

Teorema 2. Si la sucesión de números reales $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ $(b_n>O)$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$, es monótona creciente (o decreciente), y la sucesión de números reales $\left\{\frac{c_n}{d_n}\right\}$ $(d_n>O)$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$, es monótona decreciente (o creciente), la sucesión formada con los términos de ellas

$$\left\{\frac{\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}}{\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}}\right\},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

es monótona creciente (o decreciente).

Demostración. Poniendo

$$A_n=\frac{\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}}{\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}},\quad A_{n+1}=\frac{\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}+\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}}{\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}+\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}}$$

, la diferencia de A_n y A_{n+1} es :

$$A_{n+1}-A_n=\frac{\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}+\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}}{\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}+\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}}-\frac{\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}}{\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}}$$

$$=\frac{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\left(\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}\right)-\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\left(\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{c_n}\right)}{\left(\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}+\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\left(\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\frac{b_1}{d_1}-\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\frac{a_1}{c_1}\right)+\left(\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\frac{b_2}{d_2}-\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\frac{a_2}{c_2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\frac{b_1}{d_1}-\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\frac{a_n}{c_n}\right)}{\left(\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}+\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\right)\left(\frac{b_1}{d_1}+\frac{b_2}{d_2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{d_n}\right)}$$

Por tanto, se escribe

$$A_{n+1}-A_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\frac{b_i}{d_i}-\frac{b_{n+1}}{d_{n+1}}\frac{a_i}{c_i}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i}{d_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{d_i}\right)}$$

En otra parte, como la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es creciente, y la sucesíón $\left\{\frac{c_n}{d_n}\right\}$ es decreciente, se tienen

$$a_i\ b_{n+1} \leqq a_{n+1}\ b_i \qquad (i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$$
$$c_{n+1}\ d_i \leqq c_i\ d_{n+1} \qquad (i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$$

Luego la diferencia $A_{n+1}-A_n$ es no negativa. De aquí resulta que la sucesión $\{A_n\}$ es monótona creciente. Análogamente se demuestra que la sucesión $\{A_n\}$ es monótona decreciente, si la sucesión $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ es decreciente.

Finalmente, vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema. 3. Dados un número entero positivo m y la sucesión de términos positivos $\{a_n\}$, $n=1, 2, \cdots\cdots$, la sucesión formada con los términos de $\{a_n\}$ y m, es decir,

$$\left\{\frac{a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots\cdots\cdots+a_n^{m+1}}{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots\cdots+a_n^m}\right\}, \quad m=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$$

es monótona creciente.

Demostración. Poniendo

$$F=\frac{a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots\cdots\cdots+a_n^{m+1}}{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots\cdots+a_n^m}$$

, la diferencia de F_m y F_{m+1} es :

$$F_{m+1}-F_m=(a_1^{m+2}+a_2^{m+2}+\cdots\cdots+a_n^{m+2})(a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m)-$$
$$(a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+\cdots\cdots+a_n^{m+1})^2$$

Luego, por la fórmula de Leibniz sobre potencia de un polinomio [1], cada término del desarrollo de $F_{m+1}-F_m$ es :

$$\left.\begin{array}{l} a_i^m\, a_j^{m+2}-a_j^{m+1}\ a_j^{m+1}=a_i^m\, a_j^{m+1}\ (a_j-a_i) \\ a_j^m\, a_i^{m+2}-a_i^{m+1}\ a_j^{m+1}=a_j^m\, a_i^{m+1}\ (a_i-a_j) \end{array}\right. \qquad (i,\ j=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$$

Considerando ahora le suma de ambos igualdades precedentes, obtenemos la siguiente :

$$a_i^{m+1}\ a_j^m\ (a_j-a_i)+a_j^m\, a_i^{m+1}(a_i-a_j)$$
$$=a_i^m\, a_j^m\ (a_i-a_j)^2$$

Por consiguiente, se tiene

$$F_{m+1}-F_m \geqq O, \quad o\ sea\ F_{m+1} \geqq F_m$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Fricke ; Lehrbuch der Algebra, Erster Band, Braunschweig, Druch und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Akt. Ges., 1924, 26-27.

[2] K. Knopp ; Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Zweite Auflage, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924, p. 107.