SUR LA CATÉGORIE DU CAS

Par

Hiroshi AMAKI

(Reçu le 27 novembre 1968)

La notion de ≪contexte≫ est la notion essentielle qui est utile à construire un modèle mathématique du cas. Dans ce travail, nous donnons certains résultats qui concernent cette notion, à l'aide de la théorie des ensembles. Expliquons les notations et la terminologie qui seront utilisées dans la suite.

Considérons un ensemble Γ dont les éléments sont nommés **mots**. Désignons par T le semi-groupe libre engendré par Γ. Tout élément de T, par définition, sera une **phrase**. Choisissons un certain sous-ensemble $\Phi \subseteq$ T. Chaque élément de Φ sera, par définition, une phrase **marquée**. Maintenant, considérons une partition P de Γ en ensembles disjoints, et désignons par $P(x)$ le terme de P qui contient le mot x. Il s'ensuit que, pour deux mots quelconques y et z, $P(y) = P(z)$, ou bien $P(y) \cap P(z) = \phi$, où l'ensemble ϕ est vide. Par définition, $P(x)$ est le paradigme de x. Un système $\{\Gamma, P, \Phi\}$ s'appelle un **langage paradigmatique**.

Nous appelons encore **contexte** toute paire ordonnée de phrases (f_1, f_2), et écrivons $\gamma = (f_1, f_2)$. Par définition, un mot x est **admis** par le contexte s'il existe un mot $y \in \Gamma$ tel que la phrase $f_1\, yf_2$ soit marquée. Par définition, un mot x est **directement admis** par le contexte, si la phrase $f_1\, xf_2$ est marquée.

Pour ces notions, voir [1] et [2].

Maintenant, nous désignons par $A(\gamma)$ l'ensemble des mots admis par le contexte γ ; par $B(\gamma)$ l'ensemble des mots directement admis par γ. Alors, il est évident que $B(\gamma) \subseteq A(\gamma)$. Mais, la réciproque n'est pas vraie. Donnerons l'exemple. Soient $\Gamma = \{x, y, z\}$, $P(x) = \{x, y\}$, $P(z) = \{z\}$, $\Phi = \{xxx, xzx\}$ et $\gamma = (x, x)$. Comme on le voit facilement, $B(\gamma) = \{x, z\}$ et $A(\gamma) = \{x, y, z\}$. Donc, le mot y appartient à l'ensemble $A(\gamma)$, mais la phrase xyx n'est pas marquée.

Ensuite, considérons deux contextes γ_1 et γ_2. Dans le livre [2] par S. Marcus, on a démontré la proposition suivante :

Soient γ_1 et γ_2 deux contextes pour lesquels $B(\gamma_1) = B(\gamma_2)$. Alors, nous avons $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$. Mais, la réciproque n'est pas vraie.

Pour cela, nous proposons quelques propositions suivantes, pour examiner la proposition ci-dessus plus précisément.

Proposition 1. Soient γ_1 et γ_2 deux contextes pour lesquels $B(\gamma_1) \subseteq B(\gamma_2)$.

Alors nous avons $A(\gamma_1) \subseteqq A(\gamma_2)$.

Démonstration. Soient

$$\gamma_1 = (f_1, f_2) \text{ et } \gamma_2 = (g_1, g_2). \text{ Soit } x \varepsilon A(\gamma_1).$$

Alors, il existe un mot $y \varepsilon P(x)$, tel que la phrase $f_1 y f_2$ est marquée, ou bien $f_1 y f_2 \varepsilon \Phi$. Donc, $y \varepsilon B(\gamma_1)$. De l'inclusion $B(\gamma_1) \subseteqq B(\gamma_2)$, il résulte que $y \varepsilon B(\gamma_2)$. Mais, $x \varepsilon P(y)$; selon la définition de $A(\gamma_1)$, nous avons donc $x \varepsilon A(\gamma_2)$. Par conséquent

$$A(\gamma_1) \subseteqq A(\gamma_2)$$

Exemple. Soit le langage paradigmatique $\{\Gamma, P, \Phi\}$ défini de la manière suivante :

$\Gamma = \{x, y, z\}$, $P(x) = \{x\}$, $P(y) = \{y, z\}$, $\Phi = \{xxx, yzy, yxy\}$. Soient $\gamma_1 = (x, x)$, et $\gamma_2 = (y, y)$. Alors nous avons $B(\gamma_1) = \{x\}$, $B(\gamma_2) = \{x, z\}$, $A(\gamma_1) = \{x\}$, et $A(\gamma_2) = \{x, z\}$. Par conséquent. si $B(\gamma_1) \subseteqq B(\gamma_2)$, alors $A(\gamma_1) \subseteqq A(\gamma_2)$.

Proposition 2. Il existe un langage paradigmatique $\{\Gamma, P, \Phi\}$, et deux contextes γ_1 et γ_2 de $L = \{\Gamma, P, \Phi\}$, tel que $B(\gamma_1) \subseteqq B(\gamma_2)$, mais $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$.

Démonstration. Soient

$\Gamma = \{x, y, z\}$, $P(x) = \{x\}$, $P(y) = \{y, z\}$, et $\Phi = \{xxx, xyx, yyy, yzy, yxy\}$. Posons $\gamma_1 = (x, x)$ et $\gamma_2 = (y, y)$. Alors, nous avons $B(\gamma_1) = \{x, y\}$, $B(\gamma_2) = \{x, y, z\}$, $A(\gamma_1) = \{x, y, z\}$, $A(\gamma_2) = \{x, y, z\}$.

Par conséquent, $B(\gamma_1) \subseteqq B(\gamma_2)$ et $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$.

Nous donnons, de plus, un exemple tel que $B(\gamma_1) \not\supseteq B(\gamma_2)$, mais $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$.

Exemple. Soient

$\Gamma = \{x, y, z, w\}$, $P(x) = \{x, y\}$, $P(z) = \{z, w\}$, et $\Phi = \{xxx, xzx, yxy, ywy\}$. Posons $\gamma_1 = (x, x)$ et $\gamma_2 = (y, y)$. Alors, nous avons $B(\gamma_1) = \{x, z\}$, $B(\gamma_2) = \{x, w\}$, $A(\gamma_1) = \{x, y, z, w\}$, $A(\gamma_2) = \{x, y, z, w\}$. Par conséquent, $B(\gamma_1) \neq B(\gamma_2)$ et $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$.

Or, nous allons introduire un nouvau terme.

Nous dirons que la partition Q est un **grossissement** de la partition P, si l'on a $P(x) \subseteqq Q(x)$ pour tout $x \varepsilon \Gamma$. Ce terme a été proposé par P. Braffort dans [3]. Maintenant, soit la partition Q un grossissement de la partition P, et posons $\gamma = (f_1, f_2)$. Nous désignons par $C(\gamma)$ l'ensemble des mots admis par le contexte γ. Alors, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3. Pour tout contexte γ, $B(\gamma) \subseteqq A(\gamma) \subseteqq C(\gamma)$.

Démonstration. Il est évident que $B(\gamma) \subseteqq A(\gamma)$. Nous devons montrer que $A(\gamma) \subseteqq C(\gamma)$. Soit $x \varepsilon A(\gamma)$. Donc, il existe un mot $y \varepsilon P(x)$ tel que la phrase $f_1 x f_2$ est marquée. De $P(x) \subseteqq Q(x)$, il résulte que $y \varepsilon Q(x)$; d'aprés la définition de $C(\gamma)$, nous avons donc $x \varepsilon C(\gamma)$, la proposition 3 est démontrée.

Or, soient $\gamma_1 = (f_1, f_2)$ et $\gamma = (g_1, g_2)$. Nous avons la suivante :

Proposition 4. Soient γ_1 et γ_2 deux contextes pour lesquels $A(\gamma_1) = A(\gamma_2)$.

Soit la partition Q un grossissement de la partition P. Dans ces conditions, nous avons $C(\gamma_1) = C(\gamma_2)$.

Démonstration. Soit $x \varepsilon C(\gamma_1)$. Il existe donc un mot $y \varepsilon Q(x)$ tel que la phrase $f_1\ yf_2$ est marquée. Donc, $y \varepsilon B(\gamma_1)$. Par suite, selon la proposition 3, nous avons $y \varepsilon A(\gamma_1)$. Par hypothése, $y \varepsilon A(\gamma_2)$. Il existe donc un mot $z \varepsilon P(y)$ tel que la phrase $g_1\ zg_2$ est marquée. De $P(x) = P(y)$ et du fait que, pour tout $x \varepsilon E$, $P(x) \subseteqq Q(x)$, il s'ensuit que $z \varepsilon Q(x)$. Donc, $x \varepsilon C(\gamma_2)$. Par conséquent, nous avons $C(\gamma_1) \subseteqq C(\gamma_2)$.

Pareillement, du fait que la hypothése est symétrique par rapport à γ_1 et γ_2, il s'ensuit que $C(\gamma_1) \supseteqq C(\gamma_2)$, et la proposition est ainsi démontrée.

Bibliographie

[1] Braffort, F., Éléments de linguistique, Euratom, Cetis, Enseignement préparatoire aux techniques de la documentation automatique, Bruxelles (1960).

[2] Marcus, S., Introduction mathématique à la linguistique structurale, Dunod, Paris, 1967.

[3] Marcus, S., Algebraic Linguistics ; Analytical Models, Academic Press, New York and London, 1967