Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No.78,1997
信州大学工学部紀要 第78号

遺伝的アルゴリズムを用いたファジィ推論の最適化の収束性

内堀 晃彦* 　師玉 康成** 　山浦 弘夫**

(平成9年5月30日受理)

The Convergency of Optimizing Fuzzy Logic with Genetic Algorithm

Akihiko UCHIBORI* 　Yasunari SHIDAMA** 　Hiroo YAMAURA**

We considered the convergency of Genetic Algorithm (GA) for Fuzzy Logic. The compactness of family of membership functions which define production rules implies the convergency of the algorithm. And because of the continuity of the cost function, the existence of optimal solution is assured.

For considering the convergency of the GA, it is necessary to discuss the convergency of infinite sequence of a family of membership functions used in the Algorithm. Therefore, the compactness of the sequence is very important. *Ascori – Alzelà*'s theory implies the compactness. And the compactness and the continuity of the cost function imply the existence of optimal solution.

1. はじめに

近年，ファジィ推論を用いた制御の最適化を遺伝的アルゴリズムを用いて行うことの有用性がKarrなどによって報告されている[1)]．これらはファジィ推論に用いられるファジィ集合を遺伝的アルゴリズムによって逐次修正するものだが，これらのアルゴリズムの収束性や最適解の存在などの問題に関する考察は，十分なされていない．

本稿では，このアルゴリズムの収束性に関する議論のために，対象となる空間の性質に注目した．ファジィ推論の最適化に遺伝的アルゴリズムを用いると，ファジィ集合を用いたif~then規則のルール群の無限列が発生する．このアルゴリズムの収束性について考察するには，if~then規則中に現れるファジィ集合族の無限列の収束を調べる必要があり，その集合族のコンパクト性が重要になる．

本論文では，ファジィ推論の遺伝的アルゴリズムを用いた最適化問題を考察し，その収束性や最適解の存在について上記のコンパクト性を用いて調べ，簡単な検索エージェントを例にしたシミュレーション結果について報告する．

* 大学院博士後期課程 システム開発工学専攻
** 情報工学科 教授

2. ファジィ集合族の収束性と最適解の存在

2.1 収束性と最適解の存在

ファジィ推論を行なう際には，プロダクションルールをファジィメンバーシップ関数で表現する．ファジィ推論を最適化するということは，このメンバーシップ関数を最適化するということである．

遺伝的アルゴリズムでファジィ推論を最適化すると，何世代にもわたるファジィメンバーシップ関数の列が生じる．このアルゴリズムの収束について考察するということは，この関数列の収束性について考察するということであり，このためには，ファジィ集合族のコンパクト性という性質が重要になる．遺伝的アルゴリズムを行う際に生じるルール群は，条件部と結論部のメンバーシップ関数に特徴づけられる．適応度にいくつかの集積点がみられるということは，この遺伝的アルゴリズムにより生成されうるメンバーシップ関数の無限列が集積点をもつということになる．

メンバーシップ関数μを以下の集合 $F(\Delta,\gamma)$ の要素とする．

$$
\begin{aligned}
&\Delta\text{及び}\alpha\text{を十分大きな正数},\ \gamma\text{を十分小さな正数とする}\\
&F(\Delta,\gamma) \overset{\triangle}{=} \{\mu:[0,\alpha]\to[0,1],\ \forall x,x'\in[0,\alpha],\\
&|\mu(x)-\mu(x')| \le \Delta|x-x'|,\\
&\min_{x\in[0,\alpha]} \mu(x) \ge \gamma\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

このメンバーシップ関数の集合 $F(\Delta,\gamma)$ は，ファジィ推論に用いられる，ほとんど全てのメンバーシップ関数を実質的に含んでいる．また，このメンバーシップ関数は演算$\vee$，$\wedge$，γ以上の頭切りについて代数的に閉じている．ファジィ推論における，頭切りされた結論部の和集合の集合も，これらと同等の性質を持つものと考えてよい．

メンバーシップ関数の無限列の集積点等を調べるにはこの $F(\Delta,\gamma)$ のコンパクト性が重要である[4)]．

$F(\Delta,\gamma)$ は区間 $[0,\alpha]$ 上の連続関数全体 $C[0,\alpha]$ の部分集合として，一様位相に関してコンパクトである (後節に証明を示す)．すなわち，$\{\mu\}$ を $F(\Delta,\gamma)$ の任意の無限列とするとき，$\{\mu\}$ の無限部分列 $\{\mu_k\}$ と$\mu_\infty\in F(\Delta,\gamma)$ が存在して $\{\mu_k\}$ はμ_∞に一様収束する[4)]．これは $\{\mu\}$ がいくつかの集積点を持つことを意味している．

$F(\Delta,\gamma)$ のコンパクト性が成り立つので，プロダクションルールがメンバーシップ関数の n 重対で構成されているとすると，プロダクションルールで用いるファジィメンバーシップ関数の n 重対を含む $F(\Delta,\gamma)^n$もコンパクトである．したがって，この $F(\Delta,\gamma)^n$の元によって定められるルールによる適応度を表す関数が連続であるとすると，この適応度関数の無限列は必ず集積点を持つことになる．

また，コンパクトな集合からの連続な写像には最大値，最小値の存在が保証されているので，$F(\Delta,\gamma)$ の適応度を最大にするプロダクションルールの存在が保証される。

2.2 充足解への収束

遺伝的アルゴリズムにとって生じる世代を G, G 全体の集合をΠとする．遺伝的アルゴリズムではΠの一つの要素である世代 $G_i \in \Pi$から，交叉，突然変異という操作を行って，新たな $G_{i+1} \in \Pi$ を作りだす．これを関数 a ： $\Pi \to \Pi$で表しておく．すなわち

$$G_{i+1} = a(G_i)$$

ただし a は

$$a(G) = \begin{cases} G' & (G' \in S(G)) \\ G & (S(G) = \phi) \end{cases}$$
$$S(G) = \{G' \mid G' \in \Pi; J(G') > J(G)\}$$

ここで適応度関数 $J(G)$ の極大点を与える G を充足解と呼ぶことにする．E.Polak の文献 [6)]によれば，a および $J(G)$ が次の条件を満たすとき，このアルゴリズムによって生成される $\{G_i\}$ は有限列であってその最後の要素が充足解，あるいは無限列であってその任意の集積点は充足解になる．

(条件 1)　$J(G)$ は上に有界 (2)

(条件 2)　$(\forall G \in \Pi$; 非充足解), $\exists\varepsilon(G)$, $\exists\delta(G) > 0$,

$\forall G' \in B(G, \varepsilon(G))$,

$J(a(G')) - J(G') \geq \delta(G) > 0$

ただし,

$$B(G, \varepsilon(G)) = \{G' \in \Pi \mid d(G', G) < \varepsilon(G)\}, \tag{3}$$

$$d(G', G) = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{2}(\| \mu^l_{if^r_k} - \mu'^l_{if^r_k} \|_\infty + \| \mu^l_{then^r_k} - \mu'^l_{then^r_k} \|_\infty)$$

2.3 $F(\Delta, \gamma)$ のコンパクト性の証明

$F(\Delta, \gamma)$ のコンパクト性を示す．

[証明]

これは $Ascori - Alzel\grave{a}$の定理による．任意の $\mu \in F(\Delta, \gamma)$ および $x \in [0, \alpha]$ について $0 \leq \mu(x) \leq 1$ が成り立つ．したがって $F(\Delta, \gamma)$ は一様有界である．

また任意の $\varepsilon > 0$ について，$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon/\Delta$ とおけば，任意の$\mu \in F(\Delta)$, 及び $x, x' \in [0, \alpha]$ に対して,

$$|x - x'| \leq \gamma(\varepsilon) \text{ ならば } |\mu(x) - \mu(x')| \leq \Delta|x - x'| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，$F(\Delta,\gamma)$ は同程度連続 [2]．よって $F(\Delta,\gamma)$ の閉包$\overline{F(\Delta,\gamma)}$ はコンパクトである．次に$\overline{F(\Delta,\gamma)} = F(\Delta,\gamma)$ すなわち $F(\Delta,\gamma)$

$$\mu_n \in F(\Delta,\gamma),\ \mu_n \xrightarrow{\text{一様}} \mu_\infty\ (n \to \infty)$$

である任意の $\{\mu_n\}$ をとれば，任意の $x, x' \in [0,\alpha]$ について

$$\begin{aligned} |\mu_\infty(x) - \mu_\infty(x')| &= |\mu_\infty(x) - \mu_n(x) + \mu_n(x) \\ &- \mu_n(x') + \mu_n(x') - \mu_\infty(x')| \\ &\leq \Delta|x - x'| + 2||\mu_\infty - \mu_n||_\infty \\ &\to \Delta|x - x'|\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

ただし，$||\mu||_\infty \overset{\triangle}{=} \sup\{|\mu(x)|; x \in [0,\alpha]\}$

したがって $|\mu_\infty(x) - \mu_\infty(x')| \leq \Delta|x - x'|$ となるから$\mu_\infty \in F(\Delta)$ であり，$\overline{F(\Delta,\gamma)} = F(\Delta,\gamma)$ が示される．すなわち $F(\Delta,\gamma)$ はコンパクトである．**q.e.d**

3. 応用例とシミュレーション

遺伝的アルゴリズムを用いたファジィ推論の最適化の様子を簡単な検索エージェントを例に説明する．ここでは,「複数のエージェントが，検索空間の状態に応じて自律的に移動する場所を決定し，協力しながら空間全体を検索するエージェント群」を例にとる．検索空間は連続な 2 次元空間とし，エージェントはこれ自身も自分が存在するための一定の占有面積を持つとする．エージェントは自分の周りの一定面積を検索し，(空間全体ではなく)近傍の情報を得て次の検索場所を決定する．得られる情報は，近傍における他の検索エージェントの占める面積と，自分の検索済みの場所の面積の二つだけである．

エージェントはファジィ推論によって次に自分が検索する方向を決める．その際に考慮するのは，先に述べた自分の近傍の，他のエージェントに検索された場所の総面積と，検索されていない場所にいる他のエージェントの占有面積である．まず対象とする検索エージェントを中心に全方位 2πを n 等分し，それぞれの方位の，他のエージェントの占有面積の総和 x_kと，すでに検索済みの場所の総面積 y_kを調べる．そして，検索する方向を次のファジィルールによって決める．

ルール

R_k^1： if (方位 kの近傍にいる他のエージェントの
占有面積 x_kが少ない)
then (その方向へ進む距離を大きくする.)

R_k^2： if (方位 kの近傍にそのエージェントの
検索済みの場所の総面積 y_kが少ない)
then (その方向へ進む距離を大きくする.)

このルールに用いられる条件部，結論部のメンバーシップ関数

$$
\begin{aligned}
R_k^1: &\qquad \mu_{if}{}_k^1,\ \mu_{then}{}_k^1 \\
R_k^2: &\qquad \mu_{if}{}_k^2,\ \mu_{then}{}_k^2
\end{aligned} \tag{4}
$$

は，(1) 式のファジィメンバーシップ関数の集合 $F(\Delta,\gamma)$ から選択する．$F(\Delta,\gamma)$ のコンパクト性が成り立つので，この if-then ルールで用いたファジィメンバーシップ関数の $4n$ 重対を含む $F(\Delta,\gamma)^{4n}$ もコンパクトである．したがって，この $F(\Delta,\gamma)^{4n}$ の元によって定められるルールによる検索エージェント群 E の適応度を表す関数値 J_E の無限列は必ず集積点を持つことになる．適応度 J_E は, これを構成している検索エージェント全体が検索できた場所の総面積とする．これは，全く異なった性質を持つ (全く異なった遺伝子を持つ) エージェント群が世代を経るにつれ，いくつかの特徴を持った塊に収斂していくことができることを示している．

方位 k への移動距離を表す数値 $m_k(x_k,y_k)$ は，この方位の他のエージェントの占有面積の総和 x_k, および検索済みの場所の総面積 y_k に基づいて 2 つのルール R_k^1, R_k^2 から Mamdani の方法で求める．すなわち，頭切りと重心計算である．

方位は n 個であるので上記の手続きによって，n 個の数値 $m(x_1,y_1),\cdots,m(x_n,y_n)$ が求められる．これより n 個のベクトル

$$
\begin{aligned}
v_k &= (m_k(x_k,y_k)\cos(\frac{2\pi}{n}k), \\
&\qquad m_k(x_k,y_k)\sin(\frac{2\pi}{n}k)) \\
&\quad k=1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{5}
$$

を作り，これらの合成ベクトルを求め，最終的に検索オブジェクトの進むべき距離と方位が求まる．

上記の n 対のルール (4) のメンバーシップ関数の最適化に遺伝的アルゴリズムを用いる．

このシミュレーションではメンバーシップ関数 $\mu_{if}{}_k^1, \mu_{then}{}_k^1, \mu_{if}{}_k^2, \mu_{then}{}_k^2$ を，フーリエ級数近似してその A,a,b を遺伝子情報として選択・交叉・突然変異等の操作を行なう．

$$
\begin{aligned}
\mu(\theta) &= \sum_m A_m\{a_m\cos(m\theta) + b_m\sin(m\theta)\} \\
&\quad (0\le\theta<2\pi)
\end{aligned} \tag{6}
$$

検索エージェント o はこれの行動を決定するファジィルールによって特徴づけられるので

$$
\begin{aligned}
o &= (\mu_{if}{}_1^1, \mu_{then}{}_1^1, \mu_{if}{}_1^2, \mu_{then}{}_1^2, \\
&\quad \cdots, \mu_{if}{}_n^1, \mu_{then}{}_n^1, \mu_{if}{}_n^2, \mu_{then}{}_n^2) \\
&\quad \in F(\Delta,\gamma)^{4n}
\end{aligned}
$$

と表すことができる．検索エージェント群 E は Q 個の検索エージェント o から成っていて全て同一の遺伝子を持っている．

１つの世代 G におけるエージェント群 Eの総数は N個に固定されている．($ie: G = (E^1, \cdots, E^l, \cdots, E^N)$)

このシミュレーションで発生し得るエージェント群全体の集合 Uは,

$$U = F(\Delta, \gamma)^{4n}$$

とみなすことができる．また, 1 世代 G のエージェント群数は Nに固定されているから, 世代全体の集合Πは, $\Pi = U^N$とおくことができる．

世代 $G = (E^1, \cdots, E^N)$ に対する評価関数 $J(G)$ は次のものを用いた．

$$J(G) = \sum_{l=1}^{N} J_E^l \tag{7}$$

ところで本稿の $J(G)$ はその決め方から必ず上に有界である ((2) 式の (条件 1) が成立)．また, 証明は省くが $J(G)$ は G について連続である．従って, 使用する遺伝的アルゴリズムによって a が G について, 連続的な作用素として定義されるならば, 十分に小さい$\varepsilon(G)$ をとれば, (3) 式の (条件 2) が毎回, 成り立っているものとしてよい．

さらに$\Pi = U^N = (F(\Delta, \gamma)^{4n})^N = F(\Delta, \gamma)^{4nN}$ で, $F(\Delta, \gamma)$ はコンパクトであるのでΠもコンパクトである．したがって任意の無限列 $\{G_i\}$ は必ず集積点をもつ．よって $\{G_i\}$ は充足解に収束することが期待できる．

上の設定のもとにシミュレーションを実行した．これのアルゴリズムは以下のようにまとめられる．

[Step0]

ランダムに生成した同一の遺伝子をもつエージェント群 Eを一定数生成し,

これを世代 $G_0 = (E_0^1, E_0^2, \cdots, E_0^N)$ とする．

各 E_0^lの適応度 $J_{E_0^l}$, $(l = 1, 2, \cdots, N)$ を求める．

$i = 0$

[Step 1]

i 世代 G_iの遺伝子から $i+1$ 世代のエージェント群の集まり G_{i+1}を,

$J_{E_{i+1}^l}$ $(l = 1, 2, \cdots, n)$ を用いた遺伝的アルゴリズムにより生成する．

[Step 2]

各 $E_{i+1}^l = (o_{i+1,1}^l, \cdots, o_{i+1,Q}^l)$ について $o_{i+1,1}^l, o_{i+1,2}^l \cdots, o_{i+1,Q}^l$の順で

ファジィ推論によって検索を行い,

その結果から各エージェント群の適応度 $J_{E_{i+1}^l}$ $(l = 1, 2. \cdots, N)$, 及び

世代全体の適応度 $J(G_{i+1})$ を求める．

[Step 3]

$J(G_i) < J(G_{i+1})$ ならば,$i = i+1$ として G_iより G_{i+1}を生成し,

[Step 2] に戻る．

そうでなければ終了.

Fig.1 にシミュレーション結果を示す.

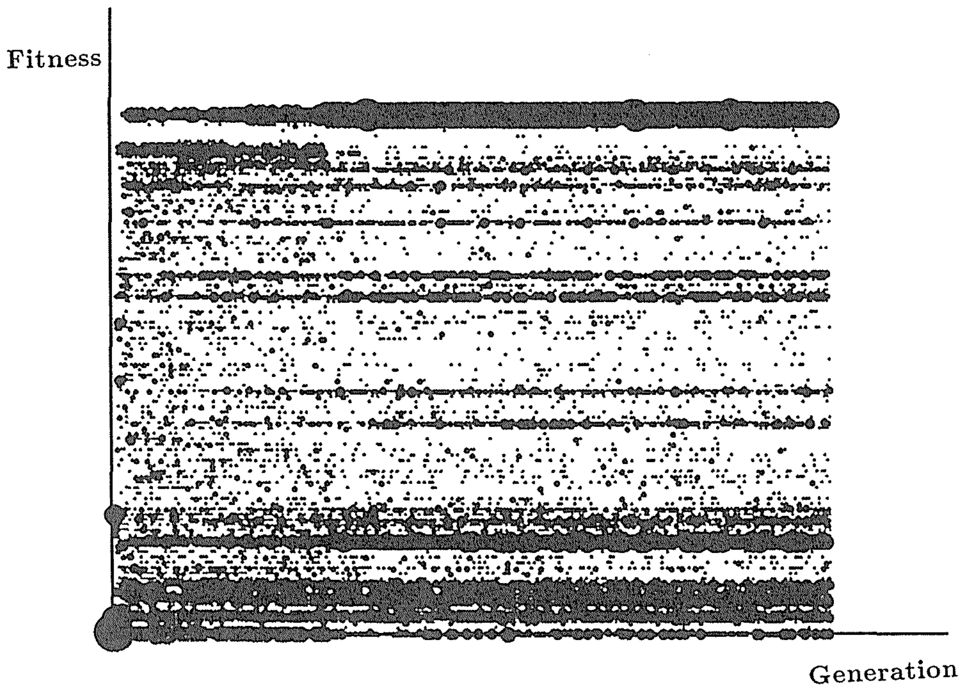

Fig 1. Relation between Generation and Fitness

4. おわりに

遺伝的アルゴリズムを用いたファジィコントロールの最適化についてこれを簡単な検索問題に適用し，その収束性について考察した．収束性については，遺伝的アルゴリズムによって生じるファジィ集合を用いた if〜then 規則群の無限列の収束性を調べる必要があり，これはファジィ集合族の無限列のコンパクト性により検討した.

これらは任意の遺伝的アルゴリズムの最適解への収束を保証するほど強力なものではない．しかし，ともすれば最適解への収束性を高めるための手法の改善のみに議論がいきがちになるこの種の研究分野において (もちろんその議論は非常に重要であるが)，本論文はその理論的な基礎を築くための第一歩になると考えている.

参考文献

1) C.L.Karr："Design of an Adaptive Fuzzy Logic Controller Using a Genetic Algorithm" (1991),*Proc. of 4th Int. Conf. on Genetic Algorithm*

2) 畝見達夫：ＧＡの制御への応用，計測と制御, **32**,1 pp.58-62 (1993)

3) 小林重信：遺伝的アルゴリズムの現状と課題，計測と制御, **32**,1 pp.2-9 (1993)

4) コルモゴルフ, フォミーン著 (山崎三郎, 柴岡泰光訳)：函数解析の基礎 (岩波書店, 1979)

5) 中村八束, 不破泰著：コンピュータウィルス—自己増殖プログラム— (昭晃堂, 1991)

6) E. Polak : *Computational Methods in Optimization*, New York, Academic, 1971

7) A. Uchibori, H. Yamazaki, Y. Shidam and H. Yamaura "An Optimizing Fuzzy Logic with Genetic Algorithm", *proc. ICEC'96 1996 IEEE 3rd International Conference on Evolutionary Computation* (Nagoya, Japan, 1996) pp.239-242