JOUR. FAC. SCI., SHINSHU UNIV. Vol. 1, No. 1, pp. 19—23, Sept. 1966

Sur des Sommes de Nombres Entiers Relativement Premiers à n

Par SABURÔ UCHIYAMA

Institut Mathématique, Faculté des Sciences
Université de Shinshû

(Reçu le 27 septembre 1966)

Notre propos dans cette note est de donner quelques évaluations pour des certaines sommes de nombres entiers premiers à un nombre entier n.

Soit n un nombre entier $\geqq 3$, et soient

$$1 = a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_{\phi(n)} = n-1$$

les nombres entiers positifs inférieurs et relativement premiers à n.

D'après un travail récent [5] de M. C. Hooley on a pour $n/\phi(n) \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)/2} (a_{2j} - a_{2j-1}) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n.$$

Il en résulte immédiatement que, pour tel n que $n/\phi(n)$ tend vers ∞ avec n,

$$\sum_{j \text{ pair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} + \frac{n}{4} + o(n) \tag{1}$$

et

$$\sum_{j \text{ impair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} - \frac{n}{4} + o(n), \tag{2}$$

puisqu'on a

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)} a_j = \frac{n\phi(n)}{2}.$$

Mais, la condition $n/\phi(n) \to \infty$ n'est pas nécessaire pour que la relation (1) ou (2) soit valable. En effet, si $n = 2^r$ est une puissance de 2, on a alors $n/\phi(n) = 2$ et

$$\sum_{j \text{ pair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} + \frac{n}{4},$$

$$\sum_{j \text{ impair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} - \frac{n}{4} .$$

Si par contre n est un nombre de la forme 3^r, on a $n/\phi(n) = 3/2$ et

$$\sum_{j \text{ pair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} + \frac{n}{6} ,$$

$$\sum_{j \text{ impair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} - \frac{n}{6} .$$

Il est possible de prouver en général que l'on a

$$\sum_{j \text{ pair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} + O(n)$$

et

$$\sum_{j \text{ impair}} a_j = \frac{n\phi(n)}{4} + O(n)$$

pour tout nombre entier n dont le nombre $v(n)$ des diviseurs premiers distincts est borné. Ce résultat est un cas particulier d'une proposition plus générale, comme on va voir dans ce qui suit.

Soient maintenant k et l deux nombres entiers tels que $0 \leq l < k \leq \phi(n)$. Nous posons:

$$A(n;\ k,\ l) = \sum_j a_{kj+l} ,$$

où le signe $\sum_j$ indique la sommation étendue aux valeurs entières de j satisfaisant les inégalités $1 \leq kj + l \leq \phi(n)$. Il y a alors une relation asymptotique:

$$A(n;\ k,\ l) = \frac{n\phi(n)}{2k} + O(n) + O\left(\left(\frac{n\phi(n)2^{v(n)}}{k}\right)^{1/2}\right) , \tag{3}$$

les constantes impliquées dans les O étant absolues, c'est-à-dire, indépendantes de k et de l. En particulier, si k divise $\phi(n)$, on aura pour $l=0$

$$A(n;\ k,\ l) = \frac{n\phi(n)}{2k} + \frac{(k-1)n}{2k} + O\left(\left(\frac{n\phi(n)2^{v(n)}}{k}\right)^{1/2}\right)$$

et pour $l \neq 0$

$$A(n;\ k, l) = \frac{n\phi(n)}{2k} - \frac{(k-2l+1)n}{2k} + O\left(\left(\frac{n\phi(n)2^{v(n)}}{k}\right)^{1/2}\right) .$$

Nous notons que la fonction $2^{v(n)}$ est d'ordre de la grandeur $O(n^\varepsilon)$ pour tout

$\varepsilon > 0$ (voir: [2; Théorème 315]). Donc, si k est supérieur à n^{ε} pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, on a

$$\left(\frac{n\phi(n)2^{\nu(n)}}{k}\right)^{1/2} = o(n) \ .$$

Or, en posant $c_j = pj + q$ $(1 \leqq j \leqq \phi(n))$, où p et q sont des constantes indéfinies, nous considérerons la somme:

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)} (a_j - c_j)^2 \ .$$

Choisissons les valeurs de p et de q pour lesquelles cette somme soit possiblement petite. On vérifie sans peine que telles valeurs de p et de q sont comme il suit:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p = \dfrac{n\phi(n) + (-1)^{\nu(n)}\,\phi(m) - 2^{\nu(n)-1}}{(\phi(n)-1)(\phi(n)+1)} \\[2ex] q = -\dfrac{n + (-1)^{\nu(n)}\,\phi(m) - 2^{\nu(n)-1}}{2\,(\phi(n)-1)} \end{array} \right. ,$$

où m désigne le plus grand diviseur de n, n'ayant aucun facteur carré autre que l'unité. Il s'en suit alors que

$$p = \frac{n}{\phi(n)} + O\left(\frac{1}{\phi(n)}\right) ,$$

$$q = -\frac{n}{2\phi(n)} + O(1)$$

et

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{\phi(n)} (a_j - c_j)^2 = O(n2^{\nu(n)}) \ .$$

Pour obtenir (4) et (5) nous avons utilisé les formules suivantes:

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{\phi(n)} a_j = \frac{n\phi(n)}{2} \qquad (n \geqq 2) ,$$

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{\phi(n)} a_j^2 = \frac{\phi(n)}{6}(2n^2 + (-1)^{\nu(n)}\, m) \qquad (n \geqq 2)$$

et

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{\phi(n)} ja_j = \frac{\phi(n)}{24}(8n\phi(n) + 6n + 2(-1)^{\nu(n)}\phi(m) - 2^{\nu(n)}) \ (n \geqq 2);$$

(6) et (7) sont bien connues (voyez par exemple : [6; pp. 42 et 45]), et (8) est due à M. E. Spence [7].

Or, il est facile de voir par un calcul direct que l'on a

$$\sum_j c_{kj+l} = \frac{n\phi(n)}{2k} + O(n) .$$

On a de plus

$$\sum_{l=0}^{k-1} (A(n;\, k,\, l) - \sum_j c_{kj+l})^2 = \sum_{l=0}^{k-1} \Big(\sum_j (a_{kj+l} - c_{kj+l})\Big)^2$$

$$\leqq \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\phi(n)}{k} \sum_j (a_{kj+l} - c_{kj+l})^2$$

$$= \frac{\phi(n)}{k} \sum_{j=1}^{\phi(n)} (a_j - c_j)^2$$

$$= O\left(\frac{n\phi(n)2^{\nu(n)}}{k}\right) .$$

Le résultat (3) est ainsi démontré.

On notera que, si k est un diviseur de $\phi(n)$, alors

$$\sum_j c_{kj+l} = \begin{cases} \dfrac{n\phi(n)}{2k} + \dfrac{(k-1)n}{2k} + O\left(\dfrac{\phi(n)}{k}\right) & \text{pour } l=0, \\[2ex] \dfrac{n\phi(n)}{2k} - \dfrac{(k-2l+1)n}{2k} + O\left(\dfrac{\phi(n)}{k}\right) & \text{pour } l \neq 0. \end{cases}$$

Nous pouvons encore démontrer de la même manière que l'on a pour $n \to \infty$

$$\sum_j a^s_{kj+l} \sim \frac{n^s\phi(n)}{(s+1)k} ,$$

s étant un nombre positif quelconque; cette relation est valable uniformément pour l, $0 \leqq l < k$, pourvu que la valeur de l'entier positif k ne soit pas trop grand en comparaison de celle de $\phi(n)$.

Remarque. —— M. P. ERDÖS [1; p. 224] a énoncé une conjecture concernant la somme

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)-1} (a_{j+1} - a_j)^2 .$$

En effet, il espère qu'elle soit $O\,(n^2/\phi(n))$.

Par rapport à cette conjecture M. HOOLEY [3, 4] a montré qu'on a pour $0 \leqq \alpha < 2$

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)-1} (a_{j+1} - a_j)^\alpha = O\left(\frac{n^\alpha}{(\phi(n))^{\alpha-1}}\right)$$

et pour $\alpha = 2$

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)-1} (a_{j+1} - a_j)^{\alpha} = O(n(\operatorname{loglog} n)^2) .$$

Or, nous remarquons que le raisonnement de M. Hooley [3], légèrement précisé, nous donne le résultat

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)-1} (a_{j+1} - a_j)^2 = O\left(\frac{n^2}{\phi(n)} \operatorname{loglog} 2m\right) , \tag{9}$$

où m est le plus grand diviseur de n, libre des facteurs carrés > 1. Par la présente méthode de cette note on peut démontrer aisément que

$$\sum_{j=1}^{\phi(n)-1} (a_{j+1} - a_j)^2 = O(n 2^{\nu(n)}) ,$$

et cependent ce résultat est en général plus faible que (9).

Références

[1] Erdös, P. Some unsolved problems, Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Közl. **6** (1961), 221–254.

[2] Hardy, G. H., et Wright, E. M. *An introduction to the theory of numbers*, 4^e éd., Oxford, 1960.

[3] Hooley, C. On the difference of consecutive numbers prime to n, Acta Arith. 8 (1963), 343–347.

[4] Hooley, C. On the difference between consecutive numbers prime to n:II, Publ. Math. Debrecen **12** (1965), 39–49.

[5] Hooley, C. On the difference between consecutive numbers prime to n:III, Math. Zeitschr. **90** (1965), 355–364.

[6] Nagell, T. *Introduction to number theory*, Uppsala, 1951.

[7] Spence, E. Formulae for sums involving a reduced set of residues modulo n, Proc. Edinburgh Math. Soc. **13**(II) (1963), 347–349.