УДК 539.3

Р.М. Кушнір [1], докт. фіз.-мат. наук, проф.; Г.Т. Сулим [1], докт. фіз.-мат. наук, проф., Я.М. Пастернак [2], докт. фіз.-мат. наук, проф.
[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2] Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ НИТКОВИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

R.M. Kushnir, DSc, Prof., H.T. Sulym, DSc, Prof., Ia.M. Pasternak, DSc, Prof.

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF THERMOMAGNETOELECTROELASTIC SOLIDS WITH THREAD-LIKE INHOMOGENEITIES

Abstract. This study presents a solid approach in the numerical analysis of thermomagnetoelectroelastic solids containing thin thread-like inhomogeneities. The peculiarities of the application of integral equation approach to the analysis of thread-like inhomogeneities are discussed. The solid boundary element technique is developed, which can be applied to the analysis of 3D ill-posed boundary-value problems with boundary conditions set on spatial curves. The models of thermomagnetoelectroelastic thread-like inhomogeneities are developed. Several numerical examples are studied.

На даний час зросла практична зацікавленість до створення нових математичних моделей та методів їхнього аналізу у механіці та термомагнітоелектромеханіці структурно-неоднорідних тіл, особливо спрямованих на проєктування композитних та інтелектуальних матеріалів, в тім і волокнистих [1]. За математичного (особливо числового чи аналітично-числового) моделювання останнього типу структурно неоднорідних (композитних) матеріалів, зазвичай, виникає необхідність враховувати істотну відмінність розмірів волокон наповнення у різних напрямах [1]. Зокрема, для ниткових неоднорідностей з’ясовано [2], що у разі знесення умов контакту між середовищем та неоднорідністю на деяку просторову криву (яка суміщається з осьовою лінією L включення) вдається на 2 порядки зменшити розмірність задачі і отримати одновимірні (все ж уздовж просторової кривої) інтегральні рівняння термопружності [2]. Проте результуюча крайова задача є погано обумовленою і для забезпечення збіжності процесу обчислень вона потребує певної регуляризації [2]. Завдяки останній вдалося отримати аналітично-числові розв’язки задач термопружності для середовища із прямолінійним теплопровідним деформівним нитковим включенням скінченної довжини. Проте для практики важливо також мати загальні числові підходи, що дали би можливість розв’язувати загальніші задачі термомагнітоелектропружності тіл, що містять як поодинокі, так і групові ниткові неоднорідностей, форма яких не обов’язково є прямолінійною. Для цього у даному дослідженні створено підхід на основі концепції методу граничних елементів.

Розглянемо рівняння теплопровідності тіла із нитковою неоднорідністю [3]

$$\begin{aligned} &\int_L \Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left[\gamma(\mathbf{x})-\gamma(\mathbf{x}_0)\right]dL(\mathbf{x})+ \\ &\quad +\gamma(\mathbf{x}_0)\left[\int_{L\setminus L_\varepsilon}\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})+B(\mathbf{x}_0)\right]=\theta^{\mathrm{incl}}\left(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}_0)\right)-\theta^{\infty}(\mathbf{x}_0), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок задачі теплопровідності для безмежного однорідного середовища [4]; $\gamma(\mathbf{x})$ – шукана функція впливу неоднорідності; $B(\mathbf{x}_0)=\int\limits_{L_\varepsilon}\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})$; $\theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}_0))$ – функційна залежність, яку можна вважати моделлю ниткової неоднорідності; L_ε – контур малого радіусу ε, що огинає точку колокації $\mathbf{x}_0$.

Введемо у розгляд кусково-гладку функцію

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\begin{cases}1, & |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\ge\varepsilon,\\ \dfrac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}{\varepsilon}, & |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\varepsilon.\end{cases} \tag{2}$$

Для неї легко довести, що

$$\int_L\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})=\int_{L\setminus L_\varepsilon}\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})+C(\mathbf{x}_0), \tag{3}$$

де $C(\mathbf{x}_0)=\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\,\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL$ – регулярний інтеграл, що залежить лише від орієнтації кривої L у точці $\mathbf{x}_0$ (а для ізотропних тіл узагалі є сталою величиною). З урахуванням (3) рівняння (1) набуде такого регуляризованого вигляду, придатного для безпосереднього впровадження у обчислювальну схему методу граничних елементів:

$$\begin{aligned}&\gamma(\mathbf{x}_0)\left[\int_L\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})-C(\mathbf{x}_0)+B(\mathbf{x}_0)\right]+\\&\quad+\int_L\Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left[\gamma(\mathbf{x})-\gamma(\mathbf{x}_0)\right]dL(\mathbf{x})=\theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}_0))-\theta^{\infty}(\mathbf{x}_0).\end{aligned} \tag{4}$$

У такий самий спосіб вдається модифікувати також інтегральні рівняння термомагнітоелектропружності [3, 4]

$$\begin{aligned}&\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left(\tilde{p}_J(\mathbf{x})-\tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)\right)dL(\mathbf{x})+\left[\int_{L\setminus L_\varepsilon}U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})+A_{IJ}(\mathbf{x}_0)\right]\tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)+\\&\quad+\int_L V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\gamma(\mathbf{x})\,dL(\mathbf{x})=\tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}),\tilde{p}_J(\mathbf{x}))-\tilde{u}_I^{\infty}(\mathbf{x}_0).\end{aligned} \tag{5}$$

Тут $U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок магнітоелектропружності; $V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – функція Ґріна термомагнітоелектропружності; $A_{IJ}(\mathbf{x}_0)=\int\limits_{L_\varepsilon}U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})$; $\tilde{u}_I^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}),\tilde{p}_J(\mathbf{x}))$ – математична модель ниткової неоднорідності; $\tilde{p}_I(\mathbf{x})$ – шукана функція розподілу зусиль, електричного зміщення та магнітної індукції на поверхні, що контактує із нитковою неоднорідністю. Позначені великими літерами індекси змінюються від 1 до 5, таким чином відповідні компоненти змінних включають механічні, електричні та магнітні складові.

Використавши (2), отримаємо очевидну тотожність

$$\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})=\int_{L\setminus L_\varepsilon}U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})+E_{IJ}(\mathbf{x}_0), \tag{6}$$

де $E_{IJ}(\mathbf{x}_0)=\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\,U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL$ – регулярний інтеграл, що залежить лише від орієнтації кривої L у точці $\mathbf{x}_0$.

Підставивши (6) у (5) отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left(\tilde{p}_J(\mathbf{x})-\tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)\right)dL(\mathbf{x})+\\&\quad+\left[\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})-E_{IJ}(\mathbf{x}_0)+A_{IJ}(\mathbf{x}_0)\right]p_J(\mathbf{x}_0)=\\&\quad=\tilde{u}_I^{\mathrm{incl}}(\mathbf{x}_0)-\int_L V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\gamma(\mathbf{x})\,dL(\mathbf{x})-u_I^{\infty}(\mathbf{x}_0),\end{aligned}\tag{7}$$

де усі інтеграли є регулярними та збіжними при числовому визначенні.

Ввівши у (4) та (7) такі позначення для множників позаінтегральних членів:

$$X_\theta(\mathbf{x}_0)=\left[\int_L \Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})-C(\mathbf{x}_0)+B(\mathbf{x}_0)\right],\tag{8}$$

$$X_{IJ}(\mathbf{x}_0)=\left[\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\omega(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,dL(\mathbf{x})-E_{IJ}(\mathbf{x}_0)+A_{IJ}(\mathbf{x}_0)\right],\tag{9}$$

інтегральні рівняння (4) та (7) набудуть вигляду

$$\int_L \Theta(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left[\gamma(\mathbf{x})-\gamma(\mathbf{x}_0)\right]dL(\mathbf{x})+X_\theta\gamma(\mathbf{x}_0)=\theta^{\mathrm{incl}}\left(\mathbf{x}_0,\gamma(\mathbf{x}_0)\right)-\theta^{\infty}(\mathbf{x}_0),\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\int_L U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\left(\tilde{p}_J(\mathbf{x})-\tilde{p}_J(\mathbf{x}_0)\right)dL(\mathbf{x})+X_{IJ}\,p_J(\mathbf{x}_0)=\\&\qquad=\tilde{u}_I^{\mathrm{incl}}(\mathbf{x}_0)-\int_L V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\gamma(\mathbf{x})\,dL(\mathbf{x})-u_I^{\infty}(\mathbf{x}_0).\end{aligned}\tag{11}$$

Для розв’язування системи інтегральних рівнянь (10), (11) використано схему методу граничних елементів. При цьому криву L розбивали на розривні квадратичні елементи. Крайові функції інтерполювалися на кожному елементі за допомогою поліномів Лагранжа. Завдяки використаній у (10) та (11) регуляризації, діагональні елементи матриць результуючих систем рівнянь обчислюються через позадіагональні елементи та регулярні функції (8) та (9) і не потребують якихось інших схем обчислення особливих інтегралів.

Запропоновано також математичні моделі чутливих до впливу різних фізичних полів ниткових включень. Розв’язано низку задач, що засвідчили високу швидкість запропонованого методу і точність отриманих числових результатів.

Література

1. Rinaldi R.G., Blacklock M., Bale H., Begley M.R., Cox B.N. Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 3D tow representations // J Mechanics Physics Solids. – 2012. – 60. – P. 1561–1581.
2. Сулим Г.Т., Пастернак Я.М., Третяк Т.В. Моделювання деформівних термопружних ниткових включень в ізотропному середовищі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – 64, № 1. – С. 73–86.
3. Pasternak Ia.M., Sulym H., Holii O. Thermoelasticity and effective properties of solids containing flexible and deformable thread-like inhomogeneities // International Journal of Engineering Science. – 2022. – 178. – 103729.
4. Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H. Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagnetoelectroelastic solids // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2017. – **74**. – P. 70–78.