

GRADO: ECONOMÍA

Curso 2021/2022

Análisis de Series temporales financieras: Modelización ARIMA

Autor: Iván Rodríguez Ortiz

Director: María Paz Moral Zuazo

Bilbao, a 18 de junio de 2022



Resumen	4
1. Introducción	5
2. Modelos ARIMA	7
2.1. Conceptos básicos	7
2.1.1. Serie temporal	8
2.1.2. Proceso estocástico estacionario	9
2.1.3. Operador de retardo	11
2.2. Modelo Lineal General	11
2.2.1. Modelo Autorregresivo, AR	12
2.2.2. Modelo de Medias Móviles, MA(q)	15
2.2.3. Modelo Autorregresivo de medias móviles, ARMA(p,q)	17
2.4. Procesos no estacionarios. Modelos ARIMA	18
3. Modelización Box - Jenkins	20
3.1. Identificación	20
3.2. Estimación	27
3.3. Validación	28
3.4. Predicción	30
4. Marco práctico	31
4.1. Identificación	31
4.2. Estimación	37
4.3. Validación	38
4.4. Predicción	41
5. Conclusiones	44
6. Bibliografía	45

Índice de figuras

<i>Figura 1.1. Volumen medio diario negociado durante abril de 2019</i>	6
<i>Figura 2.1. Casos de coronavirus por 100.000 habitantes en los últimos 14 días en España</i>	9
<i>Figura 2.2: Evolución del Índice de Precios de España</i>	9
<i>Figura 2.3: Correlograma del proceso $Y_t = \delta + 0,5 Y_{t-1} + a_t$</i>	15
<i>Figura 2.4: Correlograma de un proceso MA(1)</i>	17
<i>Figura 3.1. Gasto mensual en vehículos nuevos en EEUU, Enero 1975 - Octubre 1991</i>	21
<i>Figura 3.2. Gráfico rango-media de la serie de gastos en vehículos nuevos</i>	21
<i>Figura 4.1. Gráfico de cotizaciones máximas semanal del IBEX-35</i>	31
<i>Figura 4.2. Gráfico rango media de la serie cotizaciones semanales máximas del IBEX-35</i>	32
<i>Figura 4.3. FAC y FACP de la serie original</i>	33
<i>Figura 4.4. Primeras diferencias de la serie original</i>	33
<i>Figura 4.5. FAC y FACP de las primeras diferencias de la serie original</i>	34
<i>Figura 4.6. Residuos de los modelos estimados</i>	38
<i>Figura 4.7. Correlograma de los residuos</i>	39
<i>Figura 4.8. Predicciones de la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35</i>	42

Índice de cuadros y tablas

<i>Cuadro 4.1. Resultados de estimación máximo-verosímil del modelo ARIMA(1,1,0) o modelo 1</i>	36
<i>Cuadro 4.2. Resultados de estimación máximo-verosímil del modelo ARIMA(0,1,1) o modelo 2</i>	37
<i>Tabla 3.1. Características de los correlogramas de procesos ARMA estacionarios</i>	26
<i>Tabla 4.1. Estadísticos principales de la serie original</i>	32
<i>Tabla 4.2. Estadísticos principales serie transformada</i>	34
<i>Tabla 4.3. Contraste de Dickey - Fuller Aumentado</i>	35
<i>Tabla 4.4. Contraste de media cero de los residuos</i>	39
<i>Tabla 4.5. Criterios de información de Akaike (AIC), bayesiano de Schwarz (BIC) y de Hannan-Quinn (HQC)</i>	40
<i>Tabla 4.6. Estadísticos de evaluación de las predicciones de los modelos ARIMA(1,1,0) y ARIMA(0,1,1)</i>	41
<i>Tabla 4.7. Predicciones de la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35</i>	42

Resumen

En este documento se evalúa la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35 con el objetivo de formular un modelo de series temporales capaz de sostener el comportamiento de dicha serie y, a su vez, ofrecer predicciones óptimas. Para el desarrollo del análisis, se exponen, en primer lugar, los aspectos formales de la modelización ARIMA. A continuación se presenta el esquema a seguir para el estudio de la serie, la metodología Box-Jenkins. Este protocolo se centra en: la identificación del modelo; la estimación del mismo, a través del programa econométrico Gretl; la validación del modelo, mediante los contrastes estadísticos necesarios; la predicción, con las correspondientes conclusiones. Finalmente se alcanza la conclusión que el modelo ARIMA(1,1,0) replica adecuadamente la serie.

Abstract

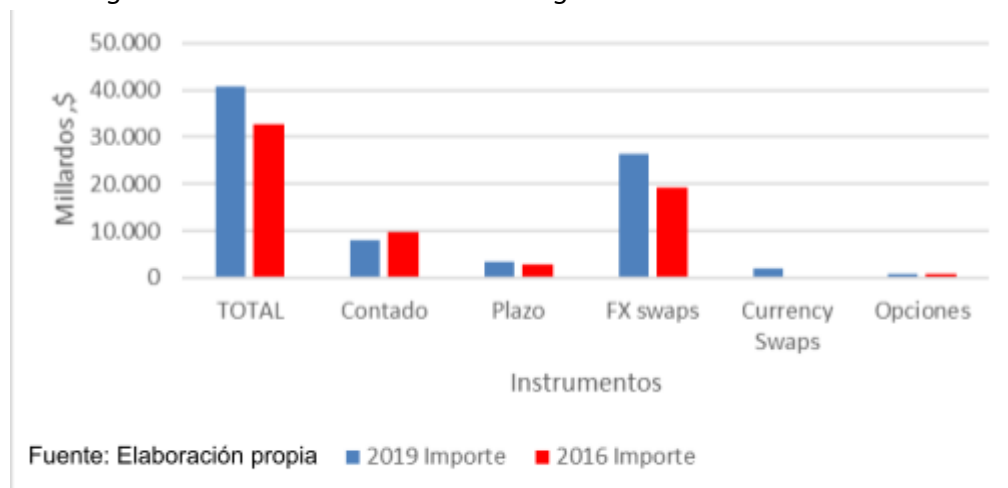
This document evaluates the series of maximum weekly prices of the IBEX-35 with the aim of formulating an appropriate time series model to capture the behavior of that series and, in turn, offer optimal predictions. For the development of the analysis, first, the formal aspects of the ARIMA modeling are exposed. Then, the scheme to follow for the study of the series, the Box-Jenkins methodology, is presented. This protocol focuses on: model identification; its estimation; model validation through a set of diagnostic tests; and prediction, with the corresponding implications. Finally, it is concluded that the ARIMA(1,1,0) model adequately replicates the series.

1. Introducción

En la actualidad, la bolsa de valores se trata de un mercado mayormente virtual donde operan desde pequeños inversores hasta las mayores multinacionales (Roldán,2017). Sin embargo, la idea fundamental de la creación de este mercado consistía en posibilitar los intercambios financieros necesarios para permitir a su fundadora, la Compañía Holandesa de las Indias Orientales (1602), los viajes comerciales futuros (Círculo de Empresarios de la Cartuja, 2017). De esta manera, los grandes inversores colocaban sus ahorros en este mercado emergente, con ánimo de obtener altas rentabilidades, a medida que se iba desarrollando, poco a poco, un mayor tejido productivo y una sólida red de transporte comercial. Esta invención, que se popularizó a lo largo de todas las economías desarrolladas, comenzó a evolucionar. A medida que se consolidaba como institución reglada, las funciones de canalizar el ahorro y ofrecer liquidez se ampliaron, dando lugar a una tercera función principal, la seguridad jurídica. Con ello aparecieron también nuevos objetos de inversión como los índices bursátiles, que reflejan el estado agregado de las mayores empresas de cada país.

Sin embargo, su extensión geográfica, el aumento del número de grandes empresas y el desarrollo tecnológico facilitaron la entrada de pequeños inversores, conocidos como minoristas. La masiva entrada de estos pequeños inversores a los mercados bursátiles, junto con el auge del pensamiento especulativo y el aumento de la volatilidad de los precios de las acciones, supuso que, en los últimos años, el 86% de estos pequeños inversores esperanzados obtuvieran pérdidas (Martín,2018). No es de extrañar que la mayoría de esas pérdidas tuvieran su reconversión en beneficio para otros grandes inversores. Además, la creación de nuevos submercados dentro del mercado bursátil como, por ejemplo, el mercado de divisas, ha generado un aumento desmesurado del volumen transaccionado. Ejemplo de ello es que, según el Banco de España, “El volumen medio diario negociado durante abril de 2019 fue de 40,7 miles de millones de dólares USA” (Banco de España, 2019).

Figura 1.1. Volumen medio diario negociado durante abril de 2019



De este modo, como los dos pilares fundamentales para el desarrollo de buenas inversiones se basan en la gestión del riesgo y la capacidad predictiva, se estudia la modelización ARIMA, desarrollada por *George E. P. Box* y *Gwilym Jenkins*, que es la metodología de series temporales que se va a aplicar. El objetivo principal de este trabajo, por tanto, es el acercamiento al estudio de series temporales. A lo largo del grado estudiado, economía, han sido objeto de estudio asignaturas como estadística o econometría, cada una con su vertiente teórica y aplicada. Por tanto, con ánimo de conocer y aprender nuevos métodos, así como de retomar conceptos pasados, se ha desarrollado el siguiente trabajo. Este consta de cuatro partes totalmente diferenciadas. La primera de ellas, la metodología, trata de presentar los conceptos básicos, el modelo lineal general y el caso no estacionario, que es el que da título a este trabajo. La segunda parte del trabajo detalla el proceso o el mecanismo a seguir para el desarrollo de un modelo predictivo adecuado. Por último, en la tercera parte se aplica todo lo aprendido en el primer y segundo apartado sobre una serie de datos económicos y se exponen las conclusiones del trabajo en el cuarto y último apartado.

En este caso, se ha optado por la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35. La captación de los datos se ha realizado a través de la página web de *Investing.com* y el estudio de la metodología se ha realizado mediante la búsqueda bibliográfica. En lo que se refiere al alcance de las conclusiones estas quedan bastante acotadas por tratarse de una introducción al ámbito de estudio. No se trata, lógicamente, de recomendaciones de inversión.

2. Modelos ARIMA

2.1. Conceptos básicos

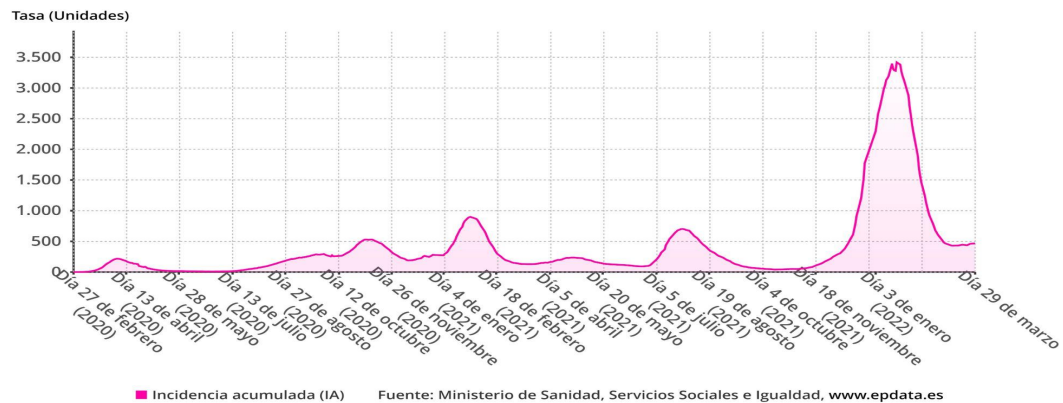
Una vez expuesto el contexto en el que se desarrolla el trabajo y detallados todos los objetivos que se persiguen con el mismo, se presenta en este nuevo bloque la construcción del modelo que tratará de predecir o acotar en el momento “t” el valor de una variable “I” periodos hacia delante. Por tanto, a modo de preludio de la modelización general del modelo ARIMA, se presentan, a continuación, ciertos conceptos fundamentales para su desarrollo.

2.1.1. Serie temporal

Una serie temporal se define como una sucesión de observaciones de una variable recogidas y ordenadas en el tiempo. Las series temporales univariantes se pueden denotar como Y_t , con $t = 1, \dots, T$. El subíndice t indica el momento del tiempo, que va desde $t=1$ hasta $t=T$, que es el tamaño de la muestra. Estas observaciones suelen estar recogidas en intervalos equidistantes y pueden ser discretas, cuando se recoge el valor en un momento concreto del tiempo, o continuas, cuando se recoge su valor ininterrumpidamente. Este trabajo y debido a la naturaleza de las variables a analizar en los siguientes apartados se centrará en el análisis de variables discretas.

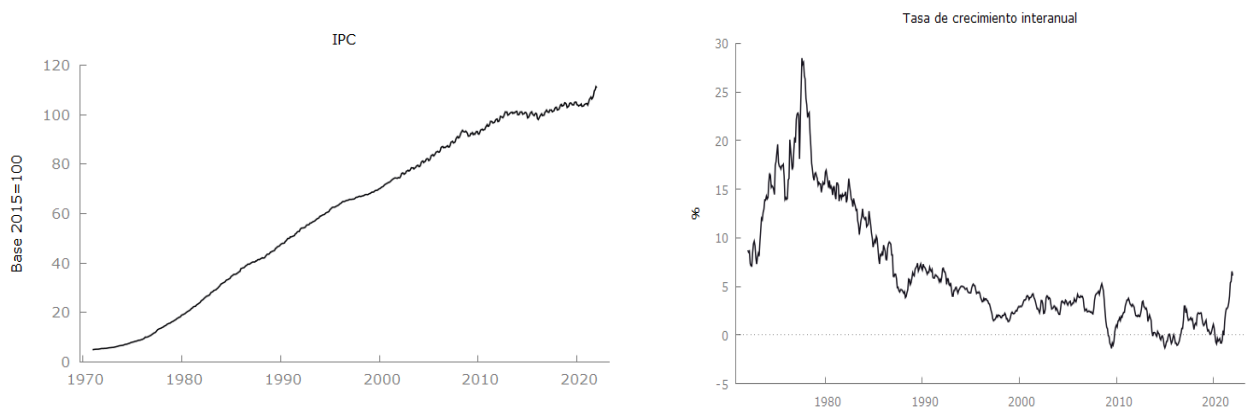
Aquí es interesante detallar que, al contrario de lo que sucede en gran parte de los métodos estadísticos de análisis de datos, donde las observaciones proceden de un muestreo aleatorio y su orden no es determinante, en el análisis de series temporales ocurre justamente lo contrario. En este caso, el orden es fundamental y rompe con el supuesto de independencia. Si bien el ámbito de aplicación en este trabajo es el económico, su uso no se limita a este campo de estudio, lo que permite su utilización en el análisis de cualquier conjunto de valores ordenados en el tiempo. Las predicciones sobre nuevas olas de contagio durante la pandemia de la COVID-19 son un claro ejemplo de esto mismo. En la figura 2.1 se representa, por ejemplo, la evolución de la tasa de incidencia de covid por cada 100.000 habitantes en España desde el 27 de febrero de 2020 hasta el 29 de marzo de 2022. En él se aprecian las distintas olas que han tenido lugar en dicho periodo.

Figura 2.1. Casos de coronavirus por 100.000 habitantes en los últimos 14 días en España



Otro claro ejemplo de serie temporal, más enfocado al ámbito económico, puede ser, por ejemplo, la evolución del índice de precios al consumo. Su tasa de crecimiento es el indicador más utilizado para medir la evolución de la inflación. En los gráficos de la figura 2.2 se muestran los valores mensuales del IPC en España y su tasa de crecimiento interanual desde el año 1971 hasta el año 2022. Se observa que el IPC tiene una tendencia creciente a lo largo de toda la serie donde destaca, sobre todo, el inicio de la serie, que se caracteriza por altas tasas de inflación y fuertes impulsos. Ejemplo de ello es el año 1977, donde la tasa de crecimiento interanual incluso superó el 20%. A partir del año 1980 la serie se controla y las variaciones son cada vez menores, y es a partir del año 2002 que hay algo de estacionalidad debido a un cambio en el método de cálculo del IPC, que incorporó, entre otras novedades, los efectos de las rebajas. Tal y como se ve, existe una relación dinámica en la serie que puede ser aprovechada para predecir.

Figura 2.2: Evolución del Índice de Precios de España



Fuente: Banco de España, serie BE 2621.4

2.1.2. Proceso estocástico estacionario

Tal y como indican Franses et al. (2014, p. 34) el hecho de que los datos se observen secuencialmente y estén interrelacionados sugiere que quizá haya información en la serie observada $\mathbf{Y}_{t-1}=(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1)$ que pueda servir para predecir el comportamiento de Y_t , esto es, el objeto de interés es la distribución de Y_t condicionada al conjunto de información \mathbf{Y}_{t-1} , es decir $f(Y_t | \mathbf{Y}_{t-1})$ y, en particular, su media y su varianza condicional.

Se pueden desarrollar modelos a través de la teoría de los procesos estocásticos que aprovechen la dependencia entre las observaciones y exploten esos patrones. Un proceso estocástico es “una familia de variables aleatorias que, en general, están relacionadas entre sí y siguen una ley de distribución conjunta” (González, 2009, p.15). Una serie temporal dentro de este marco, por tanto, se interpreta como una realización muestral del proceso estocástico, lo que implica, en otras palabras, que una serie temporal es un conjunto ordenado de observaciones en la que cada una corresponde a una variable aleatoria diferente.

Una vez obtenida una serie temporal, el objetivo es identificar un proceso estocástico que la haya podido generar. Para obtener estimadores consistentes de los momentos del proceso, el análisis se restringe a una clase particular de procesos, los procesos estocásticos estacionarios. Si bien la estacionariedad puede ser estricta o débil, en la práctica la primera es difícil de comprobar. Por eso se opta por la segunda definición, que es más práctica y consiste en que todas las variables aleatorias del proceso tengan (1) la misma media, (2) la misma varianza y (3) la covarianza entre dos variables cualesquiera del proceso estocástico dependa exclusivamente del número de periodos de distancia entre ellas. En resumen:

1. $E(Y_t) = \mu < \infty, \forall t$
2. $V(Y_t) = E[Y_t - \mu]^2 = \sigma_Y^2 < \infty, \forall t$
3. $cov(Y_t, Y_s) = E[Y_t - \mu][Y_s - \mu] = \gamma_{|t-s|} = \gamma_k < \infty, \forall t, s$

La covarianza γ_k se denomina autocovarianza de orden k y permite medir la relación lineal entre los elementos del proceso estocástico que se distancian k periodos. La función de autocovarianzas es el conjunto de las autocovarianzas del proceso estocástico. Un ejemplo de proceso estocástico estacionario es el ruido blanco, que es una secuencia de variables aleatorias de media cero, varianza constante y autocovarianzas nulas. Se dice que a_t es un ruido blanco y se denota $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ si:

$$\diamond E(a_t) = 0, \quad \forall t \quad (1.1)$$

$$\diamond V(a_t) = \sigma^2, \quad \forall t \quad (1.2)$$

$$\diamond Cov(a_t, a_s) = 0, \quad \forall t \neq s \quad (1.3)$$

La función de autocovarianzas recoge las propiedades dinámicas del proceso, pero depende de las unidades de medida de Y_t . De ella se obtiene la función de autocorrelación o FAC. El elemento k -ésimo de la FAC es el coeficiente de autocorrelación de orden k , que mide el grado de asociación lineal entre observaciones separadas k periodos:

$$\rho_k = \text{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{Y_k}{Y_0}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde $\rho_0=1$, $|\rho_k| \leq 1$ y $\rho_k=\rho_{-k}$. La representación gráfica de los coeficientes ρ_k en función de valores positivos del retardo k es el correlograma.

Junto con la media, la varianza y la función de autocorrelación, el último elemento que caracteriza a un proceso estocástico estacionario es la función de autocorrelación parcial o FACP. La función de autocorrelación parcial también recoge el grado de asociación lineal entre las variables Y_t e Y_{t-k} , pero tiene en cuenta y ajusta el efecto de las variables intermedias $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k+1}$. El coeficiente de autocorrelación parcial se denota por ρ_{kk} y es igual al coeficiente ρ_k de la siguiente ecuación:

$$Y_t = \beta_0 + \rho_1 Y_{t-1} + \rho_2 Y_{t-2} + \dots + \rho_k Y_{t-k} + u_t \quad (2)$$

Los estimadores consistentes de la FAC y de la FACP son sus análogos muestrales. Los coeficientes de autocorrelación parcial muestrales r_{kk} se obtienen de la estimación ρ_k en la regresión anterior (2) y los coeficientes de autocorrelación muestrales, que permiten medir la interdependencia entre las observaciones y analizar la estructura de correlación de una serie temporal, se obtienen a través de la siguiente expresión:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} \quad (3)$$

2.1.3. Operador de retardo

Con el fin de simplificar la notación, en ocasiones es aconsejable utilizar el operador de retardo para escribir el retraso de Y_t de una forma más simple y abreviada:

$$L^k Y_t = Y_{t-k}$$

De este modo, $L^{-4} Y_t = Y_{t+4}$ y $L^0 Y_t = Y_t$, por ejemplo.

2.2. Modelo Lineal General

Dado que se está construyendo un modelo que nace del análisis de una variable que tiene dependencia temporal, la idea fundamental consiste en explotar el patrón de regularidad que tenga la serie temporal, de modo que pueda reproducirse un modelo formado por una parte

estructural y otra aleatoria (innovación). Esta premisa podrá expresarse como combinación lineal de los valores pasados infinitos más una innovación:

$$Y_t = \delta + \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \pi_3 Y_{t-3} + \dots + a_t \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

En términos del operador de retardo:

$$Y_t = \delta + (\pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots) Y_t + a_t \rightarrow \Pi_\infty(L) Y_t = a_t + \delta \quad (4)$$

donde,

$$\Pi_\infty(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \dots$$

La expresión (4) es la forma puramente autorregresiva AR(∞) del proceso. De ella puede obtenerse la expresión en forma media móvil pura MA(∞) del proceso:

$$Y_t = \frac{\delta}{\pi_\infty(L)} + \frac{a_t}{\pi_\infty(L)} = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (5)$$

Como las formulaciones (4) y (5) dependen de infinitos parámetros, no son útiles en la práctica. Por tanto, $\Pi_\infty(L)$ se aproxima por el cociente de dos polinomios de orden finito:

$$\Pi_\infty(L) \simeq \frac{\varphi_p(L)}{\theta_q(L)}$$

donde:

- $\varphi_p(L) = (1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p)$ se denomina polinomio autorregresivo y tiene p parámetros $\varphi_1, \dots, \varphi_p$.
- $\theta_q(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$ se denomina polinomio de medias móviles y tiene q parámetros $\theta_1, \dots, \theta_q$.

De esta manera se llega a la forma ARMA (p,q) del proceso:

$$\varphi_p(L) Y_t = \delta + \theta_q(L) a_t \quad (6)$$

Este es el modelo general con el que se va a trabajar, el proceso Autorregresivo de Medias Móviles de órdenes finitos ARMA(p,q), ecuación (6). Como casos particulares se tienen los modelos AR(p), cuando q=0, y MA(q), si p=0. A continuación, se describen las propiedades de cada uno de ellos.

2.2.1. Modelo Autorregresivo, AR

Como bien señala el prefijo griego “auto”, este modelo consiste en proponer una regresión de la variable que se pretende estudiar en función de los valores pasados de esa misma variable. Es decir, representa el valor de la variable en función de su pasado. Como en todo modelo de

regresión, se incluye un error de predicción, que en este caso es un ruido blanco. La expresión general del modelo AR(p) es la siguiente:

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t \quad t = 1, 2, \dots \quad a_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2) \quad (7)$$

o también $\varphi_p(L) Y_t = \delta + a_t$.

El proceso AR(p) será estacionario si el módulo de todas las raíces del polinomio autorregresivo $\varphi_p(L)$ está fuera del círculo unidad. En ese caso, las características de un proceso AR(p) son las siguientes:

- Una condición necesaria pero no suficiente para que el proceso sea estacionario es

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p < 1.$$

- La media será constante y finita: $E(Y_t) = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_p} = \mu$.

- El correlograma simple decae exponencialmente o en forma de onda seno-coseno sin llegar a anularse.

- La estructura de la FACP es la siguiente:

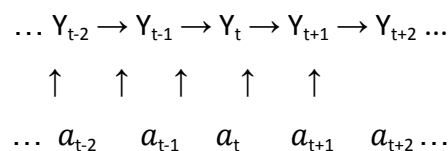
$$\rho_{kk} = \begin{cases} \rho_{kk} \neq 0 & k = 1, 2, \dots, p \\ \rho_{kk} = 0 & k = p + 1, p + 2, \dots \end{cases}$$

de modo que el correlograma parcial es igual a cero a partir del orden p.

Como ejemplo, se demuestran algunos de estos resultados en el caso más sencillo, un AR(1) sin constante:

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t \quad t = 1, 2, \dots \quad a_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2) \quad (8)$$

cuyo esquema figura de la siguiente forma:



El modelo nunca será anticipante, es decir, el valor presente de Y_t no viene explicado por valores futuros de Y o de las innovaciones. El proceso AR(1) será estacionario si $(1 - \varphi) = 0$

tiene raíces fuera del círculo de unidad, es decir, si $|\varphi| < 1$. En el caso de que un AR(1) sea estacionario:

1. La media será constante y finita.

$$E(Y_t) = E(\varphi Y_{t-1} + a_t) = \varphi E(Y_{t-1}) + E(a_t)$$

$$(1 - \varphi) E(Y_t) = 0$$

$$E(Y_t) = \frac{0}{1-\varphi} = 0$$

2. La varianza será constante y finita.

$$Y_0 = E(Y_t - E(Y_t))^2 = E(Y_t)^2 = E(\varphi Y_{t-1} + a_t)^2 = \varphi^2 E(Y_{t-1})^2 + E(a_t)^2 + 2\varphi E(Y_{t-1} + a_t)$$

$$Y_0 = \varphi^2 V(Y_{t-1}) + \sigma^2 = \varphi^2 Y_0 + \sigma^2$$

$$(1 - \varphi^2) Y_0 = \sigma^2$$

$$Y_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2} \quad (9)$$

3. Los procesos AR(1) muestran una función de autocorrelación que, en general, decae rápidamente conforme aumenta el orden del retardo, pero nunca llega a cero. Para obtener la estructura de la FAC en un AR(1) se retoma la expresión del coeficiente de autocorrelación:

$$\rho_k = \frac{Y_k}{Y_0}$$

Este es el cociente entre la autocovarianza de orden k y la de orden 0, por eso se acude a la función de la autocovarianza. La autocovarianza de orden 0 no es más que la propia varianza del proceso, ecuación (9). La autocovarianza de orden $k > 0$ presenta la siguiente estructura:

$$Y_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)]$$

como $\mu = 0$ e $Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t$, entonces,

$$E[(\varphi Y_{t-1} + a_t) Y_{t-1}] = \varphi E(Y_{t-1})^2 + E(a_t Y_{t-1}) = \varphi_1 Y_0$$

Luego, en el caso general, la autocovarianza de orden k es:

$$Y_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = E[(\varphi Y_{t-1} + a_t) Y_{t-k}] = \varphi Y_{k-1}$$

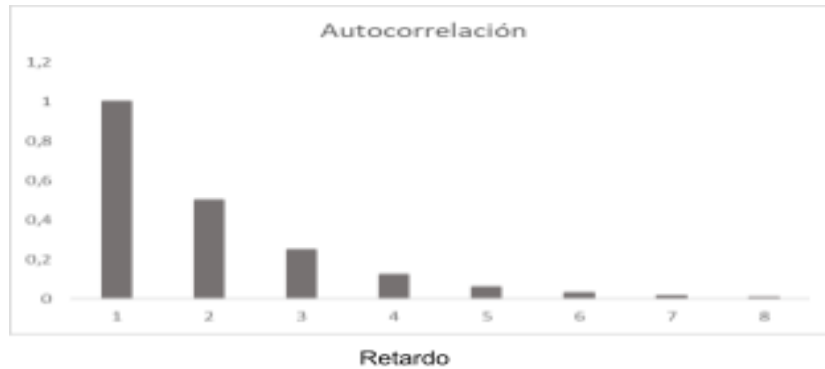
Por tanto, resulta de una relación recursiva para la función de un autocorrelación:

$$\rho_k = \varphi \rho_{k-1} = \varphi^k$$

En la figura 2.3 se muestra el correlograma de un proceso AR(1) estacionario.

4. Los coeficientes de autocorrelación parcial de la FACP de un AR(1) son $\rho_{11} = \varphi$ y $\rho_{kk} = 0$ para $k > 1$.

Figura 2.3: Correlograma del proceso $Y_t = \delta + 0,5 Y_{t-1} + a_t$



Si un proceso estocástico es estacionario este no presentará tendencia y su variabilidad se encontrará parcialmente acotada, esto es, se mantendrá constante. Por tanto, la condición de estacionariedad $|\varphi| < 1$ es necesaria para que la media y la varianza del proceso AR(1) sean finitas. Para comprobarlo, aplicando la regla de la cadena de manera retroactiva, se llega a la forma MA (ver ecuación 5) del proceso (8):

$$Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t = a_t + \varphi a_{t-1} + \varphi^2 a_{t-2} + \varphi^3 a_{t-3} + \dots$$

Su media es:

$$E(Y_t) = E(a_t) + \varphi E(a_{t-1}) + \dots = E(a_t) (1 + \varphi + \varphi^2 + \dots)$$

Su varianza es:

$$V(Y_t) = V(a_t) + \varphi^2 V(a_{t-1}) + \dots = \sigma^2 (1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots)$$

Por tanto, para que $E(Y_t)$ y $V(Y_t)$ existan y sean números reales, los términos $(1 + \varphi + \varphi^2 + \dots)$ y $(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots)$ deben ser finitos, lo que se cumple si $|\varphi| < 1$. En caso contrario, ni la media ni la varianza están definidas. Por ejemplo, en un AR(1) con $\varphi = 1$, que se conoce como paseo aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + a_t$$

aplicando la regla de la cadena de manera retroactivamente Y_t se puede reescribir:

$$Y_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + a_{t-3} + \dots$$

donde $E(Y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} E(a_{t-j})$ y $V(Y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} V(a_{t-j})$ no están definidos.

2.2.2. Modelo de Medias Móviles, MA(q)

Un segundo tipo de procesos son los modelos de medias móviles, que determina el valor de Y en el momento t en función de la innovación contemporánea y los q retardos correspondientes.

$$Y_t = \delta + a_t + \theta a_{t-1} + \dots + \theta a_{t-q} = \delta + \theta_q(L) a_t$$

Las propiedades de un proceso MA(q) son:

- Siempre es estacionario.
- Al igual que en el modelo AR(p), en el modelo MA(q) el futuro no influye en el pasado, por lo que tampoco es anticipable.
- Es necesario establecer ciertas condiciones para que sea invertible, es decir, para que los parámetros de la forma AR(∞) en la ecuación (4) no crezcan a medida que aumenta el retardo. En concreto, para que la influencia de Y_{t-k} sea menor conforme k aumenta, el módulo de las raíces de la ecuación característica $\theta_q(L)=0$ debe caer fuera del círculo unidad:

$$\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q = 0$$

Una condición necesaria pero no suficiente para que sea invertible es la siguiente:

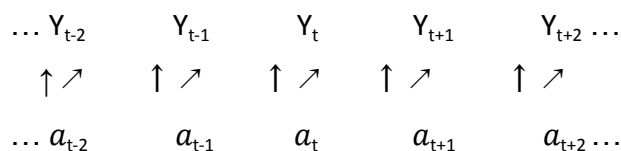
$$-(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q) < 1$$

- La FAC de un proceso MA(q) presenta un corte a partir del retardo finito j.
- La FACP de un proceso MA(q) decrece exponencialmente o en forma de onda hacia cero, pero no se anula.

El caso más sencillo es el MA(1):

$$Y_t = a_t + \theta a_{t-1}$$

cuyo esquema figura de la siguiente forma:



Es fácilmente comprobable que el modelo MA(1) es estacionario para todo valor de θ , por lo que no es necesario imponer ninguna restricción sobre θ . En el caso general tampoco será necesario imponer ninguna condición, ya que el modelo MA de orden q finito es el resultado de interrumpir el modelo lineal general infinito a partir del retardo q, de modo que siempre será estacionario porque el número de innovaciones que conforman Y_t es finito.

- La media siempre es constante. $E(Y_t) = E(a_t) + \theta E(a_{t-1}) = 0$

- La covarianza es constante y finita.

$$\gamma_0 = E(Y_t - E(Y_t))^2 = E(a_t + \theta a_{t-1} - 0)^2 = \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 = (1 + \theta^2) \sigma^2$$

Para definir la estructura de la FAC en un MA(1) se procede como en el caso de un AR(1). En este caso, la función de autocovarianzas es la siguiente:

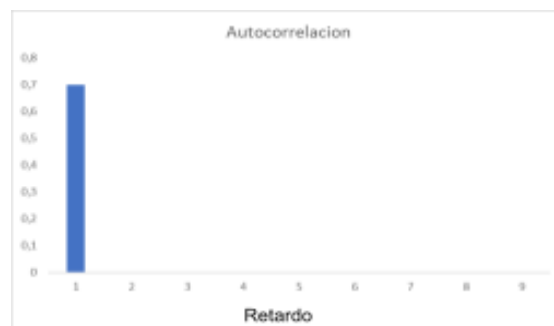
$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_0 = V(a_t + \theta a_{t-1}) = (1 + \theta^2) \sigma^2 & k=0 \\ \gamma_1 = E[(a_t + \theta a_{t-1})(a_{t-1} + \theta a_{t-2})] = \theta \sigma^2 & k=1 \\ \gamma_k = 0 & k>1 \end{cases}$$

A través de ella se obtienen los diferentes coeficientes de autocorrelación que, conjuntamente, estructuran la FAC:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\theta}{1 + \theta^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Un ejemplo de correlograma de un MA(1) viene representado en la figura 2.4.

Figura 2.4: Correlograma de un proceso MA(1)



2.2.3. Modelo Autorregresivo de medias móviles, ARMA(p,q)

El modelo general es el modelo mixto, ARMA(p,q). Los procesos autorregresivos de medias móviles determinan Y_t en función de su pasado hasta el retardo p , de la innovación contemporánea y el pasado de la innovación hasta el retardo q :

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad a_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Utilizando la notación del operador de retardo, el modelo se puede expresar de la siguiente manera:

$$(1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p) Y_t = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q) a_t + \delta$$

$$\varphi_p(L) Y_t = \theta_q(L) a_t + \delta$$

Las propiedades de los modelos ARMA son las siguientes:

- El modelo ARMA(p,q) no es anticipable por la propia formulación del modelo.
- El modelo ARMA es estacionario si el módulo de las raíces del polinomio autorregresivo $\varphi_p(L)$ está fuera del círculo unidad:

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 \dots - \varphi_p L^p) = 0$$

Una condición necesaria pero no suficiente es que:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p < 1$$

- Es invertible si el módulo de las raíces del polinomio de medias móviles $\theta_q(L)$ está fuera del círculo unidad.
- Si el proceso es estacionario, su media es $E(Y_t) = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p}$.
- La FAC tiende a cero a medida que aumenta el orden del retardo, pero no se anula y el correlograma presenta la misma dinámica, los primeros q coeficientes dependen de los parámetros autorregresivos y de medias móviles y, a continuación, decrece exponencialmente o sinusoidalmente porque sigue la misma estructura que la parte AR(p).
- La FACP y el correlograma parcial se comportan de manera similar a la FAC y al correlograma simple, ya que ambos decrecen rápidamente pero no se anulan.

2.4. Procesos no estacionarios. Modelos ARIMA

La estacionariedad en media implica que la serie no presente ningún tipo de tendencia a largo plazo y evolucione en torno a un valor constante. En caso de que esta condición no se cumpla se puede transformar mediante un proceso de diferenciación, dando lugar a un modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles de órdenes p, d, q . A estos modelos también se les conoce por su acrónimo como modelos ARIMA (p, q, d) y se basan en tomar diferencias hasta conseguir que la serie sea estacionaria en media.

El hecho de que una serie no sea estacionaria en media está vinculado a la parte autorregresiva del modelo. En concreto, a que alguna de sus raíces no esté fuera del círculo unidad ($|L_i| < 1$ o $L_i=1$). Como el comportamiento de las series económicas no estacionarias no suele ser explosivo, se dará por supuesto que alguna raíz es igual a la unidad, $L_i=1$. En caso de que un modelo ARMA tuviera una sola raíz unitaria, la integración del modelo quedaría de la siguiente manera:

$$\varphi_p(L) = \varphi_{p-1}(L) (1 - L)$$

El polinomio $\varphi_{p-1}(L)$ es estacionario porque todas sus raíces tienen módulo fuera del círculo unidad. El polinomio $(1-L)$ es el que recoge la raíz unitaria. Si se sustituye en el modelo ARMA(p, q):

$$\varphi_{p-1}(L) (1 - L) Y_t = \theta_q(L) a_t + \delta \quad \rightarrow \quad \varphi_{p-1}(L) \Delta Y_t = \theta_q(L) a_t + \delta$$

Por tanto, $Z_t = \Delta Y_t$ es un proceso estacionario ARMA($p-1, q$). En caso de que tuviera más de una raíz unitaria, la expresión general quedaría así:

$$\varphi_{p-1}(L) \Delta^d Y_t = \theta_q(L) a_t + \delta \quad (9)$$

donde el orden de integración d es el número de raíces unitarias, es decir, de diferencias que hay que tomar para que el proceso sea estacionario. La expresión (9) define el proceso autorregresivo integrado de medias móviles, ARIMA(p, d, q). Por consiguiente, si se quiere obtener una serie estacionaria habrá que tomar d sucesivas diferencias de orden 1 sobre la serie:

$$Z_t = (1 - L)^d Y_t$$

La estacionariedad en varianza supone que la dispersión de las observaciones de la serie se mantiene constante a lo largo de la misma. Un motivo de incumplimiento puede ser que la varianza dependa del nivel de la serie, por ejemplo. El procedimiento para corregir la no estacionariedad en varianza consiste en aplicar la transformación Box-Cox:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} Y_t^\lambda - 1 & \lambda \neq 0 \\ \text{Ln} Y_t & \lambda = 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde $\lambda=1$ es el caso estacionario en varianza.

3. Modelización Box - Jenkins

En este nuevo bloque se presenta la metodología de Box-Jenkins para la selección de un modelo de predicción de una variable que se desarrolla en 4 etapas: Identificación, estimación, validación y predicción (Box y Jenkins, 1973).

3.1. Identificación

En esta primera etapa se tratará de identificar los órdenes p , d , q que sean apropiados para reproducir las características de la serie temporal observada. También se estudiará la conveniencia de introducir o no una constante δ . Esta etapa está compuesta por dos fases, el análisis de estacionariedad y la elección de órdenes p , q y la inclusión del término independiente.

Fase 1: Análisis de estacionariedad

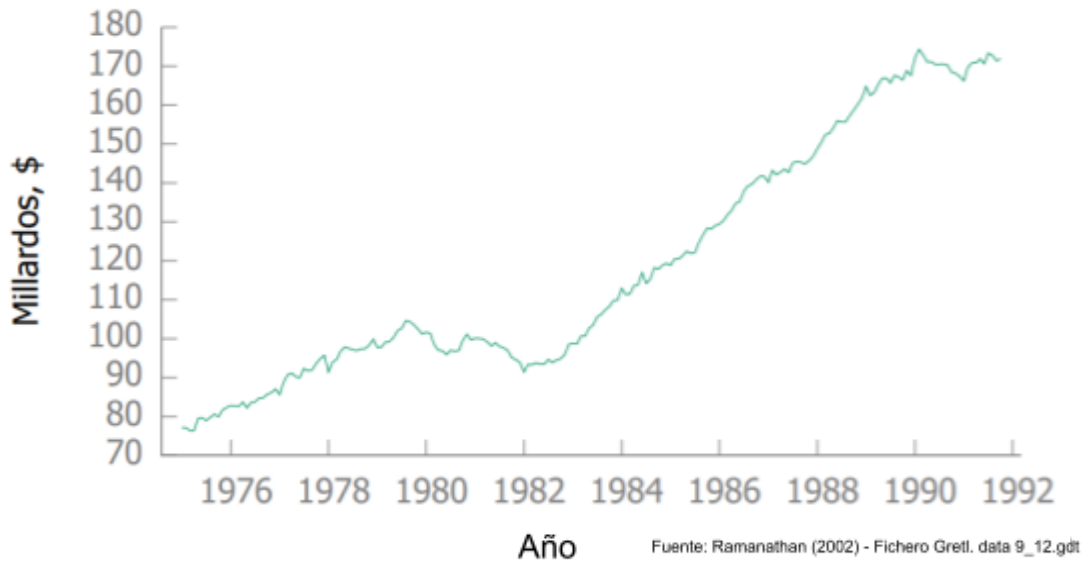
En la práctica, los datos reales de muchas series temporales presentan saltos, tendencias y variabilidad no estable en el tiempo, lo que rompe con la condición de estacionariedad. En esta fase, por tanto, se analiza si la serie temporal cumple con la estacionariedad en varianza y en media y en su defecto se proponen las transformaciones necesarias. Para ello, se utilizan distintos gráficos y contrastes estadísticos.

Estacionariedad en varianza

Para analizar la estacionariedad en varianza se acude al gráfico original de la serie y al de las transformaciones correspondientes y se observa si la dispersión de la serie permanece estable o si, por el contrario, hay una tendencia en la varianza. En caso de que el gráfico original presente indicios de no estacionariedad, en la transformación de Box - Cox (10) se debe escoger el parámetro λ necesario para corregirla. Esta es la forma general de transformación, pero como las series económicas suelen ser positivas y sin valores cero, las transformaciones más comunes son, o la logarítmica, si la desviación típica es proporcional a su nivel, o la raíz cuadrada, si la varianza es proporcional a su nivel.

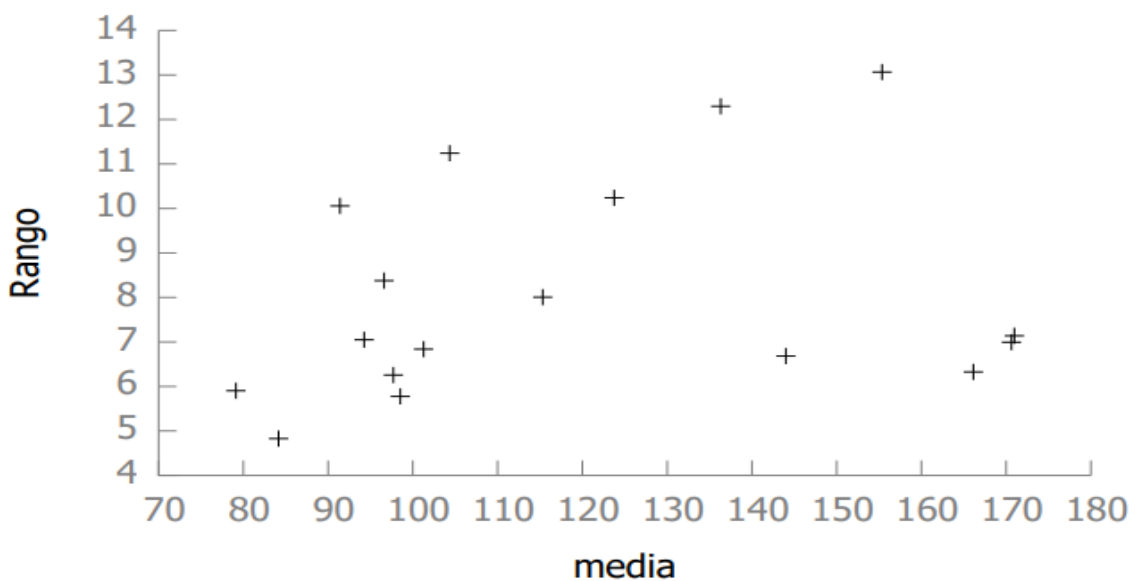
Otra herramienta para contrastar si la varianza es estable a lo largo del proceso es el gráfico rango-media. Generalmente, la variabilidad de las series económicas se relaciona con el nivel de la serie. Normalmente la varianza es mayor cuando el nivel de la serie aumenta. Este gráfico permite analizar si existe alguna relación de este tipo.

Figura 3.1. Gasto mensual en vehículos nuevos en EEUU, Enero 1975 - Octubre 1991



Por ejemplo, en la serie temporal mensual que se muestra en la figura 3.1 es evidente que la serie no es estacionaria en media, ya que presenta una tendencia creciente. Para comprobar si es estacionaria en términos de varianza, la serie se divide en N tramos iguales y en cada uno de ellos se calcula el rango (R , medida de la variabilidad) y la media (Media, medida del nivel). La figura 3.2 representa gráficamente los pares $(Media_i, \overline{R}_i)$, $i = 1, \dots, N$, la media en el eje horizontal y el rango en el eje vertical para comprobar si hay relación entre ellas. Es notable que no sigue un patrón regular, por lo que, a priori, se podría asumir que la serie es estacionaria en varianza.

Figura 3.2. Gráfico rango-media de la serie de gastos en vehículos nuevos



Para completar este análisis gráfico, en la siguiente regresión:

$$\bar{R}_i = \beta_1 + \beta_2 * Media_i + u_i$$

se puede contrastar si la pendiente β_2 es significativa, es decir:

$$H_0: \beta_2 = 0$$

$$H_a: \beta_2 \neq 0$$

aplicando el estadístico t habitual:

$$t = \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{des}(\beta_2)} \sim t(N-2) \text{ bajo } H_0 \text{ con } N = n^\circ \text{ intervalos}$$

N es el número de intervalos y la regla de contraste será rechazar la hipótesis nula de varianza constante si el valor-p es menor que el nivel de significación fijado.

Estacionariedad en media

Para comprobar si la serie cumple con la estacionariedad en media se puede acudir al gráfico de la serie original y de la transformada, al correlograma estimado y al contraste de Dickey-Fuller.

-Gráficos de la serie original y de la transformación en diferencias

Como la estacionariedad en media implica que exista una sola media para toda la serie, se puede determinar a través del gráfico original si ésta oscila en torno a un valor o, en cambio, presenta tendencia y tramos con medias diferentes. En este último caso, se realiza el gráfico de la serie en diferencias para comprobar si es estacionaria. Se repite el proceso hasta llegar al orden de diferenciación d de la serie original que presenta un patrón estacionario.

-Correlograma muestral

Como la FAC teórica de un proceso estocástico estacionario en media decae exponencialmente a cero, se puede determinar mediante el correlograma estimado si éste decae rápidamente o no. Si no lo hace, entonces se pueden representar los correlogramas de las diferencias sucesivas hasta alcanzar un patrón coherente con la condición de estacionariedad y, de este modo, determinar el orden de diferenciación d .

-Contraste Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

El contraste estadístico ADF (Dickey y Fuller, 1979) es el más conocido para determinar la presencia de una tendencia estocástica en una serie temporal, es decir, permite conocer si una serie es estacionaria o integrada.

En el caso más sencillo, en un AR (1), se tiene que si $\varphi = 1$ el proceso no es estacionario, sino que es un paseo aleatorio. Por tanto, en $Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t$, $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$ se plantea el contraste:

$$H_0: \varphi = 1 \rightarrow \text{Raíz unitaria, } Y_t \text{ no es estacionario, es I(1)}$$

$$H_a: \varphi < 1 \rightarrow \text{Raíz no unitaria, } Y_t \text{ es estacionario}$$

La región crítica será la cola inferior de la distribución del estadístico de contraste, que en este caso es el estadístico t habitual ($t = \frac{\hat{\beta} - 1}{\widehat{des}(\hat{\varphi})}$). El problema surge porque bajo H_0 en $Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t$ el regresor no es estacionario, $\text{pLim} \frac{X'X}{T}$ no está definido y no se cumplen las hipótesis básicas bajo las que la distribución asintótica de t es $N(0,1)$ bajo H_0 . Dickey y Fuller obtuvieron los valores críticos correctos y reformularon el modelo restando Y_{t-1} a ambos lados:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \varphi Y_{t-1} - Y_{t-1} + a_t \\ \Delta Y_t &= (\varphi - 1)Y_{t-1} + a_t \\ \Delta Y_t &= \beta Y_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim RB(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (11)$$

Del mismo modo, también se reformulan las hipótesis:

$$H_0: \varphi = 1 \rightarrow \beta = 0 \quad (\text{raíz unitaria, } d=1)$$

$$H_a: \varphi < 1 \rightarrow \beta < 0 \quad (\text{estacionario, } d=0)$$

El contraste de Dickey-Fuller se basa, por tanto, en estimar $\hat{\beta}$ en la ecuación (11) y contrastar su significatividad con el estadístico t :

$$t = \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta})}}$$

donde:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=2}^T Y_{t-1} \Delta Y_t}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2} \quad \text{y} \quad \widehat{V}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2}$$

Se utilizarán las tablas elaboradas por Dickey y Fuller (1979) para obtener el valor crítico al nivel de significación fijado. Si el estadístico muestral t (arriba mostrado) es menor que dicho valor crítico, se rechazará H_0 de raíz unitaria y que el proceso no sea estacionario frente a la hipótesis alternativa de AR(1) estacionario. En el caso del proceso general AR(p), Dickey y Fuller (1979) reformulan el modelo para poder contrastar si existe alguna raíz unitaria:

$$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \alpha_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + a_t, \quad a_t \sim RB(0, \sigma^2) \quad (12)$$

donde $\beta = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p - 1$. Las hipótesis del contraste son:

$$H_0: \beta = 0 \text{ (es decir, } \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{p-1} = 1, \text{ hay raíz unitaria, } d=1)$$

$$H_a: \beta < 0 \text{ (} \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{p-1} < 1, \text{ el proceso es estacionario, } d=0)$$

Al igual que en el caso anterior, se utiliza el estadístico $t(\beta)$ para contrastar la hipótesis y se pueden utilizar las mismas tablas. Se rechaza la hipótesis nula de existencia de una raíz unitaria si el estadístico $t(\beta)$ es menor que el nivel crítico de dichas tablas para el nivel de significación fijado. En el caso de que la hipótesis nula no sea rechazada, se fija $d=1$ y se trabaja con $Z_t = \Delta Y_t$.

La regresión auxiliar (12) se puede ampliar, añadiendo una constante o tendencia, si fuera preciso. En la práctica se debe elegir el número de retardos a incluir en la regresión auxiliar (12) del contraste. Los criterios más utilizados son el menor criterio de información de Akaike (AIC), Bayesiano de Schwarz (BIC) o el procedimiento de lo "general a lo particular". Este último consiste en comenzar estimando la regresión auxiliar con un número de retardos p grandes. Si el último retardo es relevante, se realiza el contraste, y si no lo es, este se elimina y se repite el paso anterior con $p-1$. El proceso concluye cuando se encuentra el retardo que sea relevante al nivel de significación fijado.

Para contrastar si hay dos raíces unitarias, en primer lugar se contrasta si ΔY_t tiene una raíz unitaria (es decir, $d=2$ frente a $d=1$) con la regresión auxiliar:

$$\Delta^2 Y_t = \beta \Delta^2 Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta^2 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p \Delta^2 Y_{t-p} + a_t, \quad a_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

donde p se ha elegido con el procedimiento descrito. Si no se rechaza H_0 se elige $d=2$ y en el otro caso, se contrasta si Y_t tiene una raíz unitaria con la ecuación (12). En función del resultado se elige $d=1$ (si no se rechaza H_0) o $d=0$ (si se rechaza).

Fase 2: Elección órdenes p, q y δ

En la fase anterior se han realizado las transformaciones necesarias sobre los datos Y_t obteniendo la serie estacionaria Z_t :

$$Z_t = \Delta^d Y_t \quad \text{o} \quad Z_t = \Delta^d \ln(Y_t)$$

donde Z_t sigue un proceso ARMA (p, q) estacionario.

$$Z_t = \delta + \varphi_1 Z_{t-1} + \dots + \varphi_p Z_{t-p} + a_t + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

El objetivo de esta fase se centra, en primer lugar, determinar el orden de los parámetros p y q del proceso que mejor se ajusten y reproduzcan la serie, y en segundo lugar, estudiar si es conveniente introducir una constante δ o no.

Para determinar los órdenes p y q se comparan las funciones de autocorrelación teóricas y muestrales. Si el proceso es estacionario, la FAC y la FACP muestrales son estimadores consistentes de la FAC y la FACP poblacionales. A través de la estimación de los distintos coeficientes de autocorrelación muestral se obtienen la FAC y la FACP muestrales con sus correspondientes correlogramas.

En la tabla 3.1 se resumen los patrones que sirven para elegir los órdenes p y q . Al comparar la FAC muestral con las propiedades de los modelos ARMA pueden surgir problemas de detección. En las situaciones donde el correlograma simple no presenta cortes de ningún tipo la identificación se ve complicada, ya que con la información disponible sería indistinguible un proceso $AR(p)$ de un proceso $ARMA(p,q)$. Sin embargo, comparar la FACP con el correlograma muestral sí permite diferenciar el modelo $AR(p)$ del modelo $ARMA(p,q)$. Salvo que el correlograma muestral de la serie Z_t tenga un corte después de un retardo j , lo que permitiría distinguir un $MA(q)$ de cualquier otro proceso, es necesario introducir la FACP para poder distinguir a qué modelo teórico corresponde la serie Z_t .

Tabla 3.1. Características de los correlogramas de procesos ARMA estacionarios

Tipo de proceso	FAC	FACP
MA (q)	Se anula para $j > q$	Decrece rápido y no se anula
AR(p)	Decrece rápido y no se anula	Se anula para $j > q$
ARMA(p,q)	Decrece rápido y no se anula	Decrece rápido y no se anula

Asimismo, es conveniente realizar los respectivos contrastes sobre las estimaciones de la FAC y la FACP para determinar qué valores son nulos y cuáles no. Se acude a los contrastes de significación individual sobre los coeficientes de autocorrelación simple y parcial:

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_a: \rho_k \neq 0$$

$$H_0: \rho_{kk} = 0$$

$$H_a: \rho_{kk} \neq 0$$

El estadístico de contraste y su distribución asintótica bajo H_0 son:

$$r_k \sim N\left(0, \frac{1}{T}\right) \rightarrow \sqrt{T} r_k \sim N(0,1)$$

La misma distribución $N\left(0, \frac{1}{T}\right)$ se utiliza para los contrastes sobre la FACP. Se rechaza H_0 al nivel de significación del 5% si $|r_k| > \frac{1,96}{\sqrt{T}}$ o si $|r_{kk}| > \frac{1,96}{\sqrt{T}}$, respectivamente.

Una vez determinados los órdenes p y q , se estudia la inclusión del término independiente. Dado que se trata de una serie estacionaria (por naturaleza o porque se ha transformado en pasos previos), la media de la serie será constante. Ahora, queda por determinar si esta es cero o no. Para ello se realiza un contraste:

$$H_0: E(Z_t) = 0$$

$$H_a: E(Z_t) \neq 0$$

donde el estadístico de contraste que se utiliza es:

$$t = \frac{\bar{Z}}{\hat{\sigma}_{\bar{Z}}} \sim^{H_0} t(T^*-1)$$

Se rechazará la hipótesis nula de que la media sea cero y se incluirá el parámetro δ al nivel de significación α si:

$$|t| > t_{\alpha/2}(T^*-1), \text{ donde } T^* \text{ es el tamaño de la muestra de la serie estacionaria } Z_t$$

La varianza de la media muestral se aproxima a través del siguiente estimador:

$$\hat{\sigma}_{\bar{Z}}^2 = \frac{S_Z^2}{T^*} (1 + 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_s)$$

donde $S_Z^2 = \frac{\sum(Z_t - \bar{Z})^2}{(T^*-1)}$ y $r_1 \dots r_s$ son los coeficientes de autocorrelación de Z significativos. Por tanto, al tener autocorrelación, el estadístico de contraste habitual sobre la media se corrige por el factor $\frac{1}{\sqrt{1 + 2r_1 + \dots + 2r_s}}$.

3.2. Estimación

Una vez identificado aquel modelo que más se asemeje a los datos disponibles, en esta segunda etapa se utilizarán estos para estimar el valor de los diferentes parámetros sujeto a que este modelo sea el apropiado. En este apartado se estimarán los parámetros δ y $\beta = (\varphi_1, \dots, \varphi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ por Máxima verosimilitud o Mínimos Cuadrados Ordinarios. En este último caso, el criterio de estimación es:

$$\text{Min} \sum_t a_t^2 \quad (13)$$

Se expresan las innovaciones en función de los parámetros desconocidos del modelo y de la muestra:

$$a_t = Z_t - \delta - \sum_{i=1}^p \varphi_i Z_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Como los valores iniciales de las innovaciones dependen de valores no observados (por ejemplo, a_1 es función de Z_1, Z_0, Z_{-p+1} y a_0, a_{-1}, a_{-q+1}), se aplican los estimadores Mínimos Cuadrados Condicionados. Se impondrá la condición de que las p primeras observaciones de Z_t serán tratadas como los valores iniciales para calcular las p innovaciones y las anteriores se considerarán cero. De este modo el primer elemento en (13) es $t=p+1$ y se perderán varias observaciones para poder estimar.

3.3. Validación

Esta tercera etapa evalúa si el modelo propuesto se ajusta bien a la serie. Para ello, se centra en comprobar si los coeficientes estimados son significativos y cumplen las condiciones generales de estacionariedad e invertibilidad y si los residuos obtenidos del modelo se comportan como ruido blanco. El análisis de los coeficientes en el caso general ARMA(p,q) se basa en un contraste de significación para detectar si la estructura del modelo propuesta es relevante:

$$\begin{aligned} H_0: \delta = 0 & \quad \text{frente } H_a: \delta \neq 0 \\ H_0: \varphi_i = 0 & \quad \text{frente } H_a: \varphi_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ H_0: \theta_i = 0 & \quad \text{frente } H_a: \theta_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

donde la distribución de los estimadores, el estadístico de contraste y el criterio de rechazo son los habituales:

$$\widehat{\beta}_i \sim N(\beta_i, V(\widehat{\beta}_i)) \quad \forall i \quad \text{y} \quad t = \frac{\widehat{\beta}_i - 0}{\sqrt{V(\widehat{\beta}_i)}} \sim^a N(0,1) \quad \text{bajo } H_0: \beta_i = 0$$

Se rechaza H_0 frente a $H_a: \beta_i \neq 0$ a un nivel de significación α si:

$$|t| > N_{\alpha/2}(0,1)$$

También se comprueba si se cumplen las condiciones de estacionariedad e invertibilidad. Para ello, se calculan las raíces del polinomio autorregresivo y las del polinomio de medias móviles, resolviendo $\widehat{\varphi}(L)=0$ y $\widehat{\theta}(L)=0$ respectivamente.

Para determinar si los residuos se comportan como ruido blanco, es decir, que su media sea cero, su varianza constante y estén incorrelacionados, se comprueba mediante el gráfico de los residuos frente al tiempo el comportamiento de estos. Se observa si oscilan sobre el valor cero y la dispersión con la que lo hacen. Se puede contrastar si la media es cero:

$$H_0: E(a_t) = 0$$

$$H_a: E(a_t) \neq 0$$

donde el estadístico de contraste y su distribución bajo H_0 son:

$$t = \sqrt{T} \frac{\widehat{a}}{S(\widehat{a})} \sim N(0,1)$$

donde \widehat{a} y $S(\widehat{a})$ son la media y la desviación típica de los residuos, respectivamente. Como el ruido blanco es una sucesión de variables incorrelacionadas, la FAC y la FACP serán cero para cualquier retardo. Por eso, el análisis de residuos se ayuda de su FAC y FACP muestrales para determinar si estos se comportan como un ruido blanco. Para ello se realizan una batería de contrastes para $k = 1, 2, \dots, M$:

$$H_0: \rho_k(a) = 0$$

$$H_a: \rho_k(a) \neq 0$$

Como el coeficiente de autocorrelación muestral de los residuos $r_k(\widehat{a}) = \widehat{\rho}_k(a)$ bajo la hipótesis nula se distribuye :

$$r_k(\widehat{a}) \sim N\left(0, \frac{1}{T^*}\right)$$

La regla de rechazo es, a un nivel de significación del 5%, aproximadamente:

$$\left| r_k(\widehat{a}) \right| \geq \frac{1,96}{\sqrt{T^*}}$$

Otra forma de comprobar la condición de ruido blanco es el contraste de significatividad conjunta sobre un grupo de coeficientes de autocorrelación, donde las hipótesis son:

$$H_0: \rho_1(a) = \rho_2(a) = \dots = \rho_M(a) = 0$$

$$H_a: \rho_i(a) \neq 0 \text{ para algún } i=1, \dots, M$$

y el estadístico de contraste generalmente utilizado es el propuesto por Ljung-Box (1978)

$$Q^*(M) = T^* (T^* + 2) \sum_{i=1}^M \frac{r_i^2(\widehat{a})}{T^* - i} \underset{H_0, a}{\sim} \chi^2(M - p - q)$$

En este caso, se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación α si

$$Q^*(M) > \chi_{\alpha}^2(M - p - q)$$

En caso de que se rechace la hipótesis de ruido blanco, se reformula el modelo añadiendo algún término adicional hasta conseguir un modelo que se ajuste correctamente a la serie.

3.4. Predicción

El objetivo de esta cuarta y última etapa consiste en predecir el valor futuro de Y_{t+l} con información en el periodo t , que se denota $I_t = (Y_1, Y_2, \dots, Y_t)$. Se conoce como predicción "l" periodos hacia delante, $\hat{Y}_t(l)$. Se utiliza el predictor por punto óptimo que es el que minimiza el error cuadrático medio, $ECM(\hat{Y}_t(l)) = E[Y_{t+l} - \hat{Y}_t(l)]^2$.

Se demuestra que el predictor óptimo es $\hat{Y}_t(l) = E(Y_{t+l} / I_t)$. Por ejemplo, en el proceso AR(1) estacionario, $Y_t = \varphi Y_{t-1} + a_t$, la predicción un periodo hacia delante, $l=1$, es:

$$\hat{Y}_t(1) = E[Y_{t+1} / I_t]$$

Como $Y_{t+1} = \varphi Y_t + a_{t+1}$, entonces:

$$\hat{Y}_t(1) = E[\varphi Y_t + a_{t+1} / I_t] = \varphi Y_t$$

La predicción dos periodos hacia delante, $l=2$, es:

$$\hat{Y}_t(2) = E[\varphi Y_{t+2} + a_{t+2} / I_t] = \varphi \hat{Y}_t(1) = \varphi^2 Y_t$$

En general, la función de predicción en un AR(1) sin constante es $\hat{Y}_t(l) = \varphi^l Y_t = \varphi \hat{Y}_t(l-1)$. Si no se conoce φ , se sustituye por su estimador $\hat{\varphi}$.

En el caso de un MA(1), $Y_t = a_t + \theta a_{t-1}$, la predicción un periodo hacia delante, $l=1$, es:

$$\hat{Y}_t(1) = E[\theta a_t + a_{t+1}] = \theta a_t$$

Si Y_t es invertible se puede obtener a_t de $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$. Si θ y a_t son desconocidos, se sustituyen por el estimador de θ y el error de ajuste \hat{a}_t . En el caso de la predicción dos periodos hacia delante se tiene que:

$$Y_{t+2} = \theta a_{t+1} + a_{t+2}$$

La predicción para $l=2$ es:

$$\hat{Y}_t(2) = 0$$

En general, en un MA(1), la predicción para $l>1$ es:

$$\hat{Y}_t(l) = 0$$

En el caso de la predicción un periodo hacia delante en un ARIMA(0,1,1), como el proceso es integrado, se deshacen las diferencias sobre las predicciones del proceso estacionario:

$$Z_{t+1} = \Delta Y_{t+1} = \theta a_t + a_{t+1}$$

$$\widehat{Z}_t(1) = E[\theta a_t + a_{t+1}] = \theta a_t$$

De modo que se reescribe $Z_{t+1} = Y_{t+1} - Y_t$ dando lugar a $Y_{t+1} = Z_{t+1} + Y_t$. Entonces, la predicción es:

$$\widehat{Y}_t(1) = Y_t + \theta a_t$$

En el caso de las predicciones dos o más periodos hacia delante, $l > 1$, la predicción es $\widehat{Y}_t(l)$. La predicción por intervalo se calcula mediante un intervalo de confianza $1-\alpha$ sobre la distribución del error de predicción. Por ejemplo:

$$IC_{95\%}(Y_{t+l}) = [\widehat{Y}_t(l) \pm 1,96 \sqrt{ECM(\widehat{Y}_t(l))}]$$

4. Marco práctico

En esta segunda sección se va a aplicar la metodología Box Jenkins sobre las cotizaciones máximas semanales del IBEX-35, Y_t , desde la primera semana del año 1999 hasta febrero 2022 para proponer un modelo que permita realizar buenas predicciones. La fuente de datos para esta parte práctica es la página web de *Investing.com*, y el programa econométrico utilizado es Gretl, versión 2020d.

4.1. Identificación

En este caso, el conjunto de datos está formado por 1209 observaciones y su representación gráfica se detalla en la siguiente figura 4.1. Los estadísticos más importantes de la serie se recogen en la tabla 4.1.

Figura 4.1. Gráfico de cotizaciones máximas semanal del IBEX-35



Fuente: elaboración propia a partir de los datos de *Investing.com*

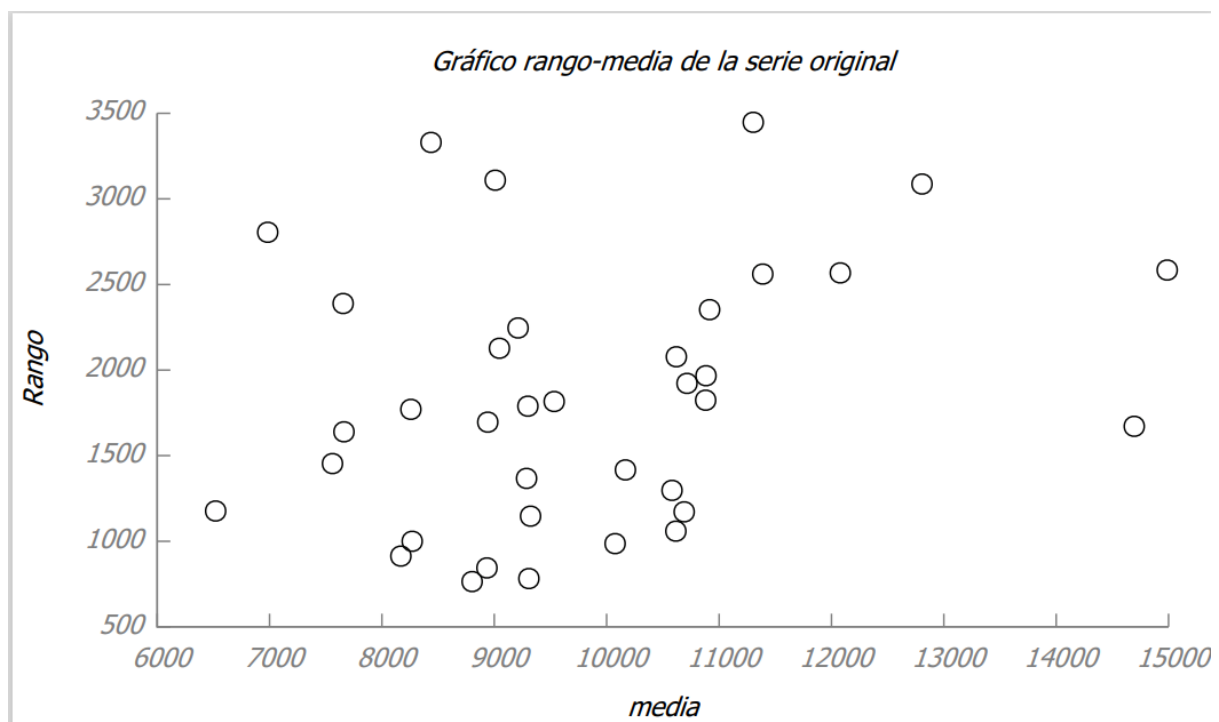
La serie, que comienza en enero de 1999, se caracteriza por una primera etapa en forma de valle. Alcanza el mínimo de toda la serie en octubre de 2002 con un valor de 5665,6 puntos seguido de una fuerte recuperación donde se alcanza el máximo en noviembre de 2007 con un valor de 16040 puntos. A continuación, da paso a una segunda etapa mucho más acotada tanto en tendencia como en dispersión y con un menor nivel debido a la crisis económica del año 2008. A simple vista se puede observar que la segunda etapa presenta cierto comportamiento estacionario mientras que la primera puede presentar cierta tendencia alcista. Se observan saltos en el nivel de la serie que se asocian a modelos no estacionarios, como, por ejemplo, un paseo aleatorio.

Tabla 4.1. Estadísticos principales de la serie original

Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Desviación típica	Asimetría	Curtosis
9835.1	9676.8	5665.6	16040	1956.3	0.74636	0.82045

En primer lugar, se analiza la estacionariedad en varianza. Para comprobar si esta tiene componente estacionario, se acude al gráfico rango-media de la serie (ver figura 4.2) que permite analizar si la varianza depende del nivel o no. A priori, parece ser que la dispersión de la serie no está relacionada con el nivel. La regresión auxiliar del rango sobre la media indica que la pendiente no es significativa. La regla de contraste será rechazar la hipótesis nula si el valor p es menor que el nivel de significación fijado, $\alpha = 0,05$. El valor p del contraste (valor $p = 0,1206$) indica que no parece haber evidencia para rechazar la hipótesis nula. Por tanto, no se rechaza y se puede confirmar que la varianza es constante a lo largo de la serie temporal.

Figura 4.2. Gráfico rango media de la serie cotizaciones semanales máximas del IBEX-35

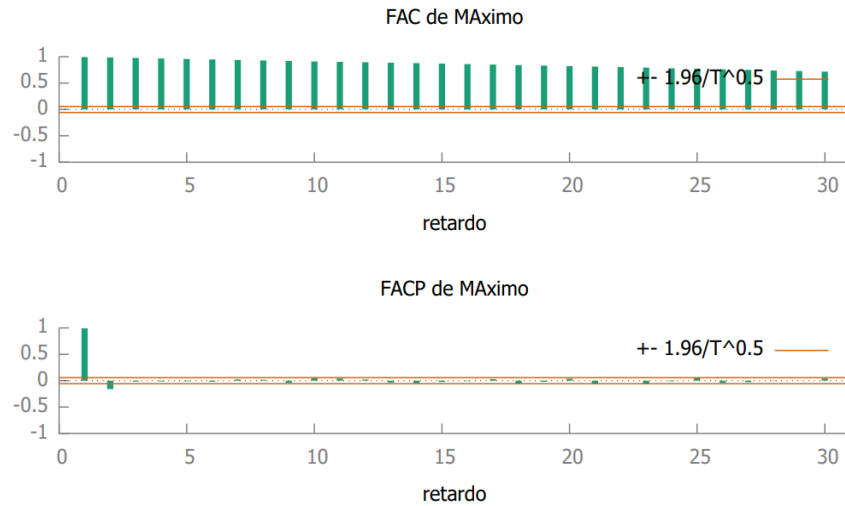


En $R_i = \beta_1 + \beta_2 * Media_i + u_i$, el valor p para $H_0 : \beta_2 = 0$ es 0,1206.

En segundo lugar se estudia la estacionariedad en media, y para ello, se estudia el correlograma muestral de la serie temporal. La FAC y la FACP de la serie se recogen en la figura 4.3. Tal y como se ha detallado en el marco teórico, si la serie fuera estacionaria en media, el correlograma muestral decaería rápidamente a cero. Como no lo hace, y además, el correlograma muestral parcial presenta un corte brusco y un primer coeficiente próximo a 1, se puede asegurar que la

serie no es estacionaria en media. De modo que se tomarán las diferencias necesarias hasta alcanzar el orden de diferenciación que haga la serie estacionaria en media.

Figura 4.3. FAC y FACP de la serie original.



A continuación se analiza si tomando primeras diferencias ($d=1$) se obtiene una serie estacionaria. En la figura 4.4 se representa el gráfico de la serie en diferencias y los principales estadísticos descriptivos en la tabla 4.2.

Figura 4.4. Primeras diferencias de la serie original

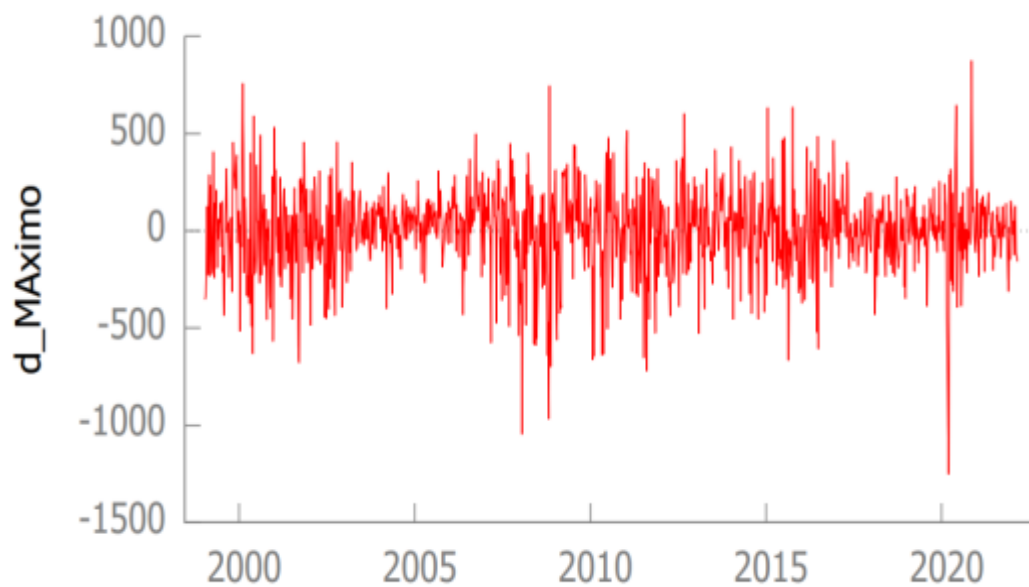


Tabla 4.2. Estadísticos principales serie transformada

Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Desviación típica
-1,997	17,70	-1253	874,8	219,138

De manera muy intuitiva se puede asegurar que la serie de incrementos semanales es estacionaria en media. Tal y como se muestra en la figura 4.4, la serie tiende a oscilar sobre el valor cero. Además, presenta una evolución bastante errática a lo largo del tiempo sobre este nivel. Se puede acudir al correlograma muestral de la serie diferenciada para tener una mayor seguridad, figura 4.5. A diferencia del anterior, en este caso es notable cómo la FAC decrece exponencialmente hacia cero, mientras que la FACP continúa presentando la misma estructura. Esta está formada por un único coeficiente relevante seguido de un corte brusco, aunque en este caso el valor del primer coeficiente de autocorrelación es mucho menor ($r_{11}=0,17$). Estos resultados son típicos de procesos estacionarios. Es aconsejable realizar un contraste analítico de raíz unitaria, para tener la mayor evidencia posible de que la serie es integrada de orden 1. En este caso se realiza el de Dickey - Fuller Aumentado, sobre la serie en diferencias y la serie original (ver tabla 4.3).

Figura 4.5. FAC y FACP de las primeras diferencias de la serie original

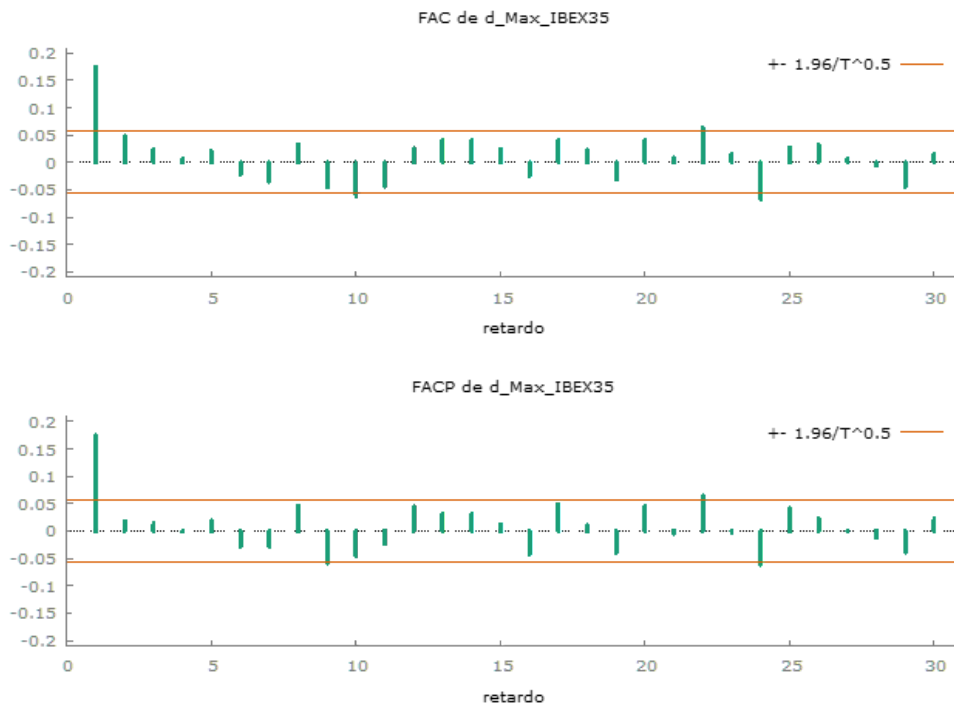


Tabla 4.3. Contraste de Dickey - Fuller Aumentado

Serie	Estadístico ADF (p-valor)	Número de retardos de la regresión auxiliar	Conclusión
Original	-2,28 (0,1771)	$p = 1$	No rechazo $H_0 : Y_t \sim I(1)$ al 5%
Diferencias de orden 1	-29,12 ($1,1 \cdot e^{-49}$)	$p = 0$	Rechazo $H_0 : \Delta Y_t \sim I(1)$ al 5%

*Para la selección de retardos de la regresión auxiliar se ha utilizado el AIC mínimo comenzando con $p=22$. Además se ha incluido una constante.

En el contraste de Dickey - Fuller Aumentado se rechaza la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria a un nivel de significación $\alpha = 0,05$ si el estadístico $t(\beta)$ es menor que el nivel crítico de las tablas elaboradas por Dickey y Fuller para ese nivel de significación. Solo se incluye una constante y no una tendencia porque en la serie original no se aprecian crecimientos estables a largo plazo. Para un tamaño muestral de $n=1207$ y un modelo con constante el valor crítico es aproximadamente $-2,86$. El estadístico de contraste para la serie en diferencias ($ADF = -29.1118$) es menor que el valor crítico, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se confirma que la serie no presenta ninguna tendencia. Por lo tanto, se puede asegurar que es estacionaria en media. Por el contrario, en la serie original no se rechaza la hipótesis nula, por lo que se considera que la serie de cotizaciones máximas semanales no es estacionaria, pero si lo son los incrementos semanales.

La serie Y_t es estacionaria en varianza y también lo es en media si se toman primeras diferencias. Por tanto, se trata de un proceso $ARIMA(p,1,q)$. A continuación habrá que determinar los órdenes p y q del proceso estacionario. Para ello se acude nuevamente a la figura 4.5 donde puede distinguirse que el primer retardo tanto de la FAC como de la FACP son significativos. De manera que se puede identificar la estructura del proceso que ha podido generar la serie temporal. En concreto, como la FAC decae rápidamente y no se anula, y la FACP se anula a partir del primer retardo, se puede identificar un proceso $ARIMA(1,1,0)$. Adicionalmente, como solo es relevante el primer coeficiente de la FAC, se propone también el modelo $ARIMA(0,1,1)$.

Contraste de Media

Por último, se analiza si la media del proceso es cero o no. La hipótesis nula y alternativa del contraste son las siguientes:

$$H_0: E(Z_t) = 0$$

$$H_a: E(Z_t) \neq 0$$

Se utiliza el estadístico de contraste t, corregido por el factor $\frac{1}{\sqrt{1 + 2r_1 + \dots + 2r_s}}$. Para un nivel de significación α del 5% y un tamaño muestral de 1207 el valor crítico es 1,96 y el estadístico de contraste es, atendiendo a la tabla 4.2,

$$t = \sqrt{1208} \times \frac{-1,997}{219,138} \times \frac{1}{\sqrt{2 \times 1,1746 + 1}} = -0,2726$$

Se rechazará la hipótesis nula de que la media sea cero y se incluirá el parámetro δ al nivel de significación α si:

$$|t| > t_{\alpha/2}(T^*-1)$$

De modo que no se rechaza la hipótesis nula y la serie transformada tiene media cero, por lo que no se incluye ningún parámetro δ .

4.2. Estimación

Una vez identificado los dos modelos que pueden representar la serie, se realiza la estimación. En este primer caso el modelo propuesto es el ARIMA(1,1,0) y se estimará por máxima verosimilitud exacta. Los resultados se recogen en el cuadro 4.1.

Cuadro 4.1. Resultados de estimación máximo-verosímil del modelo ARIMA(1,1,0) o modelo 1

	<i>coeficiente</i>	<i>Desv. típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>
φ	0.174931	0.0283527	6.170	6.84e-010 ***
<i>Media de innovaciones</i>		-1.665440	<i>D.T. innovaciones</i>	215.6818
<i>Ljung Box (Q*14)</i>		17.457	<i>Valor p de Q*(14)</i>	0.1792
<i>R-cuadrado</i>		0.987895	<i>R-cuadrado corregido</i>	0.987895
<i>Log-verosimilitud</i>		-8205.649	<i>Criterio de Akaike</i>	16415.30
<i>Criterio de Schwarz</i>		16425.49	<i>Crit. de Hannan-Quinn</i>	16419.14
<i>Raíces del polinomio AR</i>				
		<i>Real</i>	<i>Imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
<i>Raíz 1</i>	5.7166	0.0000	5.7166	

En este segundo caso el modelo propuesto es el ARIMA(2,1,0) y también se estimará por máxima verosimilitud exacta. Los resultados obtenidos se encuentran en el cuadro 4.2.

Cuadro 4.2. Resultados de estimación máximo-verosímil del modelo ARIMA(0,1,1) o modelo 2

	<i>coeficiente</i>	<i>Desv. típica</i>	<i>z</i>	<i>valor p</i>
<i>theta_1</i>	0.165535	0.0273836	6.045	1.49e-09 ***
<i>Media de innovaciones</i>		-1.726328	<i>D.T. innovaciones</i>	215.8765
<i>Ljung Box (Q*14)</i>		19.3238	<i>Valor p de Q*(14)</i>	0.1134
<i>R-cuadrado</i>		0.987870	<i>R-cuadrado corregido</i>	0.987870
<i>Log-verosimilitud</i>		-8206.737	<i>Criterio de Akaike</i>	16417.47
<i>Criterio de Schwarz</i>		16427.67	<i>Crit. de Hannan-Quinn</i>	16421.31
Raíces del polinomio AR				
		Real	Imaginaria	Módulo
Raíz 1		-6.0410	0.0000	6.0410

De esta manera, los modelos propuestos son:

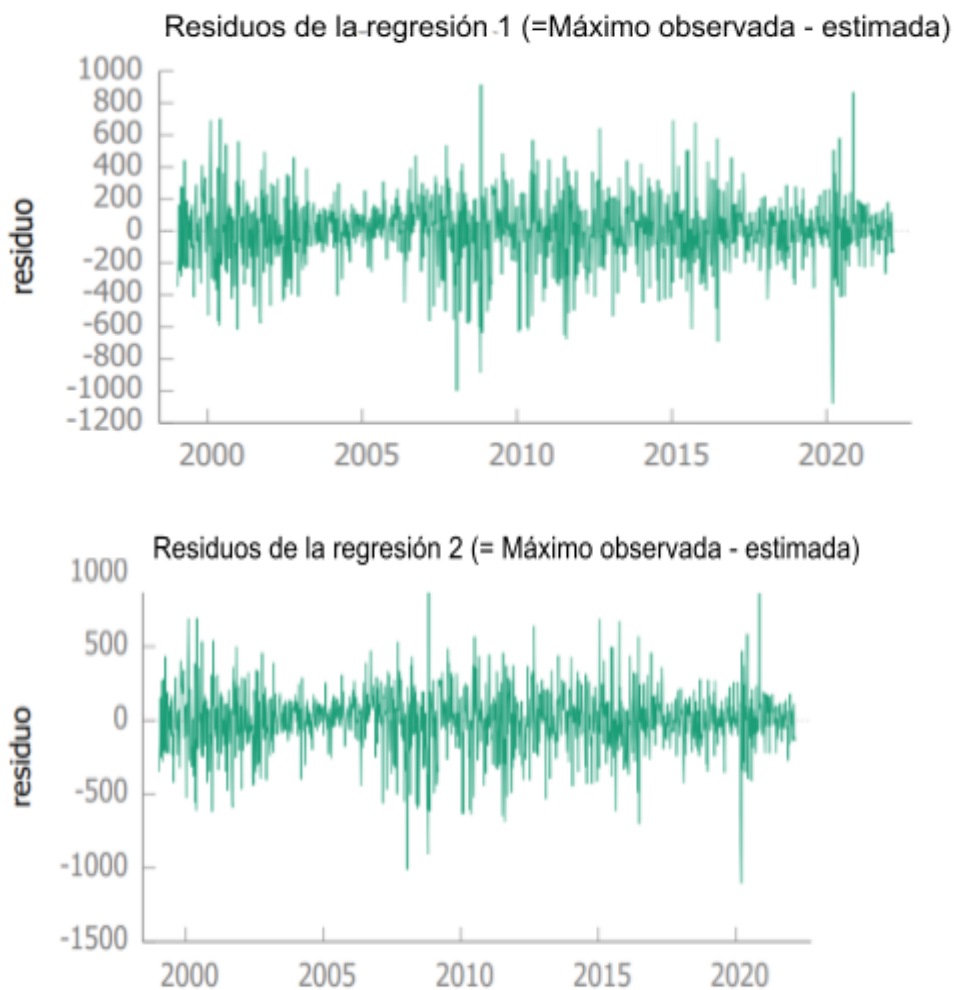
- ARIMA(1,1,0): $Y_t = 0,1749 Y_{t-1} + \hat{a}_t$
- ARIMA(0,1,1): $Y_t = 0,1655 \hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$

4.3. Validación

Ambas estimaciones proporcionan el estadístico de significatividad para cada coeficiente estimado. En ambos casos, los dos resultan ser significativos al 1%. Además, ambos coeficientes en valor absoluto son menores que 1, por lo que el módulo de las raíces de las estimaciones del polinomio de medias móviles $(1 + 0,1655 L)$ y el módulo de las raíces del polinomio autorregresivo $(1 - 0,175 L)$ caen fuera del círculo de unidad. Concretamente, el módulo de la raíz para el modelo ARIMA(1,1,0) es igual a $5,7166 = \frac{1}{0,175}$ y para el modelo ARIMA(0,1,1) es igual a $|-6,0410| = \frac{1}{0,1655}$. De esta manera, se asegura y se validan las condiciones de invertibilidad y estacionariedad.

En último lugar, para analizar el comportamiento de los residuos de ambos modelos se representan gráficamente estos frente al tiempo. El gráfico superior y el gráfico inferior de la figura 4.6 muestran el comportamiento de los residuos de los modelos ARIMA(1,1,0) y ARIMA(0,1,1) respectivamente.

Figura 4.6. Residuos de los modelos estimados



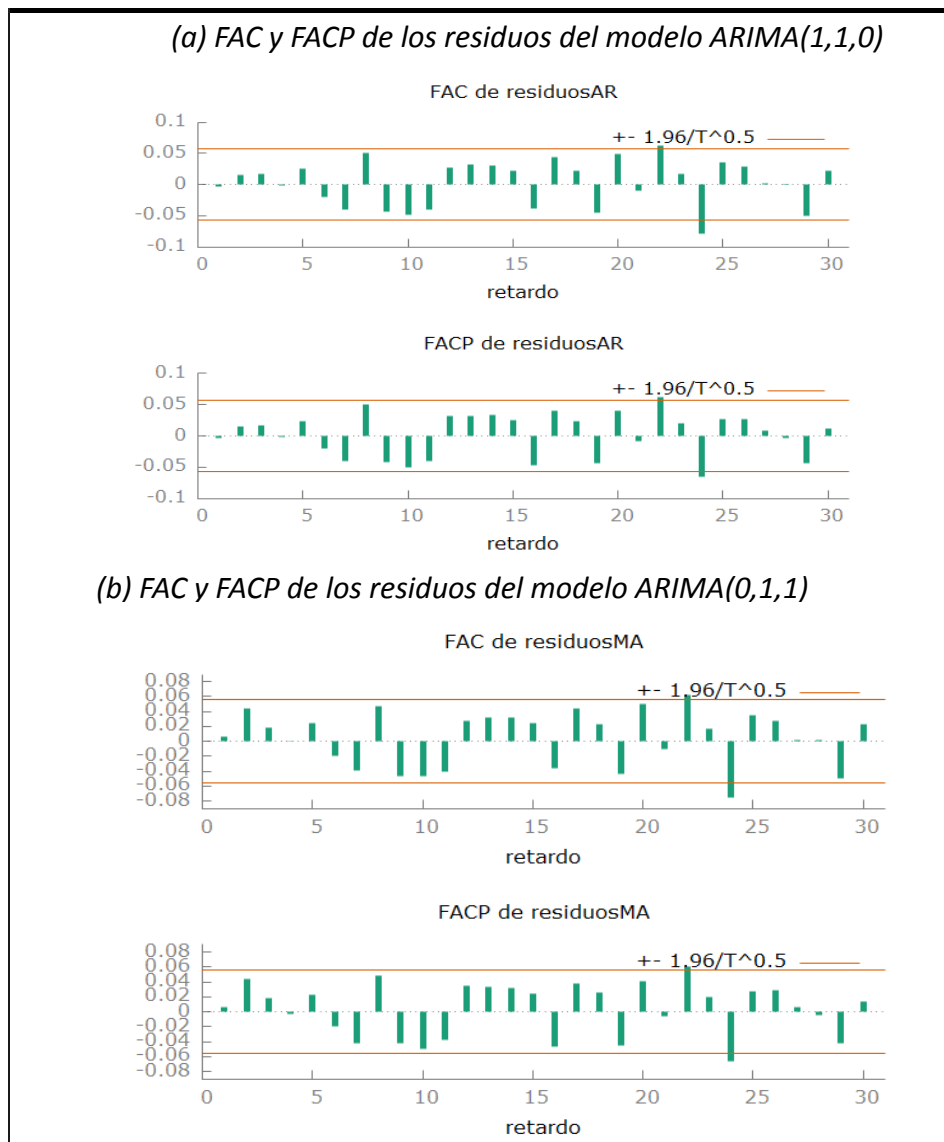
A simple vista parece que ambos oscilan sobre el valor cero con una varianza algo similar. Sin embargo, las estimaciones de ambos modelos reflejan que el modelo 2 tiene una mayor dispersión que el modelo 1. El contraste de media cero de los residuos presenta las siguientes conclusiones. En el caso del primer modelo estimado el valor-p es mayor que el nivel de significación $\alpha=5\%$, así que se puede concluir que los residuos tienen media cero, y en el caso del segundo modelo estimado el valor-p también es mayor que el nivel de significación $\alpha=5\%$, así que tampoco se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los residuos de ambos modelos tienen media cero. La tabla 4.4 resume los contrastes de media cero de los residuos de cada modelo.

Tabla 4.4 . Contraste de media cero de los residuos

Modelo	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(0,1,1)
Estadístico de contraste	$(-1.665-0)/6.208 = -0.268$	$(-1.726 - 0)/6.214 = -0.278$
Valor p a dos colas	0.7885	0.7812

Como el ruido blanco es una sucesión de variables aleatorias incorrelacionadas, la función de autocorrelación simple y parcial de los residuos debe ser prácticamente cero para cualquier retardo. En el gráfico (a) de la figura 4.7 se representan la FAC y FACP de los residuos del modelo ARIMA(1,1,0) y en el gráfico (b) de la misma figura los del modelo ARIMA(0,1,1). A simple vista parece que los residuos de ambos modelos están incorrelacionados.

Figura 4.7. Correlograma de los residuos



El análisis se complementa mediante un contraste de significatividad conjunto sobre los coeficientes de autocorrelación. Se aplicará el contraste de Ljung - Box sobre los primeras M=14 coeficientes:

$$H_0: \rho_1(a) = \rho_2(a) = \dots = \rho_{14}(a) = 0$$

En los dos modelos $k = 1$, por lo que el valor crítico al nivel de significación del 5% es $\chi^2(13)_{0,05} = 22,36$. Los resultados indican que el valor del estadístico de Ljung-Box para el modelo ARIMA(1,1,0) es igual a $Q^*=17,4573$ con un valor-p igual a 0,1792 y para el modelo ARIMA(0,1,1) el valor del estadístico de Ljung-Box es igual a $Q^*=19,3238$ con un valor-p igual a 0,113. La conclusión resultante es no rechazar la hipótesis nula en ninguno de los modelos.

4.4. Predicción

Las tres etapas anteriores han facilitado la construcción de dos modelos adecuados para la predicción de la serie temporal que se está analizando. Sin embargo, aunque los dos modelos sean capaces de ofrecer predicciones futuras medianamente certeras, la etapa de predicción se realiza sujeta a un único modelo. Para llevar a cabo la selección del modelo se decide cual es preferible a través de los criterios de información de Akaike (AIC), bayesiano de Schwarz (BIC) y de Hannan-Quinn (HQC). En concreto, el modelo seleccionado será aquel que presente menores valores en estos criterios.

Tabla 4.5. Criterios de información de Akaike, bayesiano de Schwarz y de Hannan-Quinn

Criterio	Modelo ARIMA(1,1,0)	Modelo ARIMA(0,1,1)
Akaike	16.415,30	16.417,47
Hannan-Quinn	16.419,14	16.421.31
Bayesiano de Schwarz (BIC)	16.425,49	16.427,67

Ambos criterios de información confirman que el modelo preferible es el modelo ARIMA(1,1,0), que es el que inicialmente parecía más adecuado. Se utiliza un segundo criterio, un estudio de bondad de predicción, para comprobar si la selección es correcta. Se restringe la muestra eliminando las últimas 8 observaciones, se re-estima cada modelo con la muestra restringida y se calculan las predicciones para las 8 observaciones eliminadas, junto con los errores de predicción. Se calculan los estadísticos sobre los errores de predicción recogidos en la tabla 4.6 y se decide cual es el modelo que genera predicciones de mayor calidad en función de cuál es el que genera menores valores. Por último, una vez escogido el modelo, se retoma el modelo

estimado con todas las observaciones y se realiza la predicción. Si los errores de predicción son e_t , entonces los estadísticos que evalúan la bondad de predicción son:

$$\text{Error medio, EM} = \frac{1}{n} \sum e_t$$

$$\text{Raíz del error cuadrático medio, RECM} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum e_t^2}$$

$$\text{Error absoluto medio, EAM} = \frac{1}{n} \sum |e_t|$$

Tabla 4.6. Estadísticos de evaluación de las predicciones de los modelos ARIMA(1,1,0) y ARIMA(0,1,1)

Estadísticos	Error medio	Raíz del Error Cuadrático medio	Error absoluto medio
ARIMA(1,1,0)	12,851	115,05	92,305
ARIMA(0,1,1)	23,592	116,36	95,426

Conforme a los resultados obtenidos se confirma que el modelo ARIMA(1,1,0) genera valores menores en lo que se refiere a error medio, raíz del error cuadrático medio y error absoluto medio de las predicciones. Esto permite concluir que ambos criterios confirman que el modelo preferible es el modelo ARIMA(1,1,0), de modo que se utilizará este para predecir la serie temporal de la cotización máxima del IBEX-35. En este caso, se escoge la opción de predicción dinámica con un intervalo de confianza del 95%, que queda representado por barras de error. El resultado gráfico y analítico de la predicción quedan recogidos en el gráfico de la figura 4.8 y en la tabla 4.7.

Figura 4.8. Predicciones de la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35

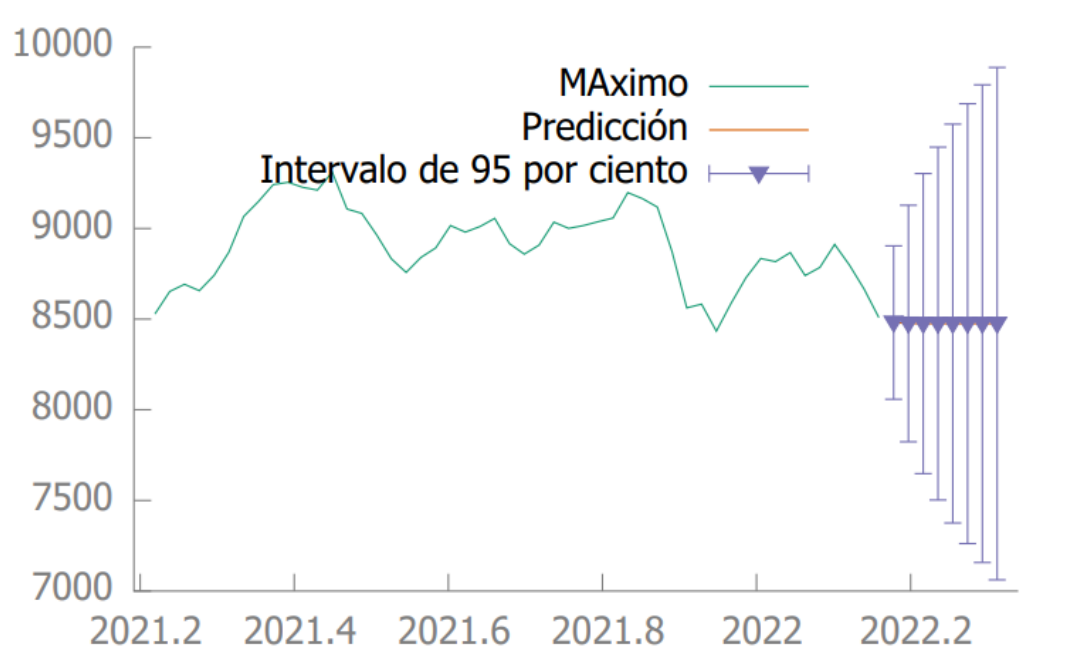


Tabla 4.7. Predicciones de la serie de cotizaciones máximas semanales del IBEX-35

Semana	Predicción	Desv. Típica	Intervalo de confianza 95%
2022-03-06	8480.95	215.682	8058.22 - 8903.68
2022-03-13	8476.12	332.770	7823.90 - 9128.34
2022-03-20	8475.27	422.305	7647.57 - 9302.98
2022-03-27	8475.13	496.537	7501.93 - 9448.32
2022-04-03	8475.10	561.126	7375.31 - 9574.89
2022-04-10	8475.10	619.027	7261.83 - 9688.37
2022-04-17	8475.10	671.959	7158.08 - 9792.11
2022-04-24	8475.09	721.016	7061.93 - 9888.26

5. Conclusiones

Tal y como se ha expuesto repetidamente en apartados anteriores, este trabajo busca reproducir el comportamiento de una serie económico-financiera con el ánimo de generar predicciones de calidad. Para ello, se ha optado por la modelización Box-Jenkin y por los datos recogidos en la página web de *Investing.com*. Las conclusiones generales del trabajo es que el modelo capaz de reproducir el comportamiento de la serie es el ARIMA(1,1,0). De esta manera, se asume que la serie no es estacionaria y se ha tenido que tomar diferencias para estimar el modelo. Las predicciones, en este sentido, señalan un descenso en el máximo en las siguientes semanas.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que la serie temporal analizada, y sobre la que se está prediciendo, es la serie de máximos semanales del IBEX-35. De este modo, no se debe confundir la predicción del modelo para cada periodo con el posible valor de cotización que acabe teniendo la serie, puesto que son variables diferentes.

En un principio, la varianza de la serie es estacionaria. Como las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie original (figura 4.3) muestran un comportamiento incompatible con una serie estacionaria en media, se han tomado diferencias para alcanzar una serie transformada que si es estacionaria en media. Además, el contraste de Dickey-Fuller, expuesto en la tabla 4.3, asegura que esa premisa es cierta. De manera que se han estimado dos modelos por máxima verosimilitud que han sido recogidos en los cuadros 4.1 y 4.2, respectivamente: un modelo ARIMA(1,1,0) y un modelo ARIMA(0,1,1).

Una vez estudiado el comportamiento de los residuos a través del contraste de media cero y del contraste de Ljung-Box, que ha permitido concluir que se comportan como un ruido blanco, se han sometido ambos modelos a distintos criterios de selección. Estos criterios han confirmado que el modelo preferible para realizar la predicción es el modelo ARIMA(1,1,0). Con ello, se han realizado las predicciones que quedan recogidas en la tabla 4.7 y representadas en la figura 4.8. A pesar de que las predicciones que ha ofrecido el modelo son bastante similares entre ellas, como es lógico, el intervalo de confianza de cada ellas se amplía a medida que aumenta "l".

Una alternativa para poder ampliar este trabajo consistiría en evaluar la serie de cotizaciones máximas mensuales del IBEX-35. Una vez formulado un modelo y realizadas las predicciones, se podrían comparar con las predicciones realizadas en este documento para comprobar cuán similares son. También podría realizarse la comparación de a través de la serie de cotizaciones semanales del IBEX-35.

6. Bibliografía

Banco de España Eurosistema. (2019). *Encuestas sobre el mercado de divisas y de derivados OTC 2019*. Recuperado el 18 de junio de 2022.

https://www.bde.es/bde/es/areas/estadis/estadisticas-por/operaciones-y-si/relacionados/Encuesta_sobre_l/encuesta-sobre-el-mercado-de-divisas-y-de-derivados-otc-2019-2e10216a589dc61.html

Box, George E.P. y Jenkins, Gwilym M. (1973). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden - Day.

La historia de la bolsa: ¿cómo empezó todo?.(2017). Recuperado el 18 de junio de 2022, Círculo de Empresarios de Cartuja,

<https://www.circuloempresarioscartuja.com/la-historia-de-la-bolsa-como-empezo-todo/#:~:text=El%20concepto%20de%20bolsa%20de,se%20realizaban%20importantes%20transacciones%20econ%C3%B3micas.>

Dickey, David A. y Fuller, Wayne A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association* **74**: 427-431.

Franses, Philip H; Dijk, Dick; Opschoor, Anne (2014). *Time Series Models for Business and economic forecasting*. 2ª ed, Cambridge University Press.

González, Pilar (2009). *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*. Sarriko-on.

<https://addi.ehu.es/handle/10810/12493>

Gretl (2020d). The gretl team. [Programa informático].<http://gretl.sourceforge.net/win32/>

Investing.com. *IBEX 35 datos históricos*

<https://es.investing.com/indices/spain-35-historical-data>

Ljung, Greta y Box, George, E.P.(1978). On a measure of lack of fit in the time series models. *Biometrika*, 65:297-303

Martin, P.(2018). *Los grandes vendedores de CFD revelan que hasta el 86% de sus clientes pierde dinero*. Recuperado el 18 de junio de 2022,

https://cincodias.elpais.com/cincodias/2018/08/16/mercados/1534432931_341827.html

Ramanathan, Ramu (2002). *Introductory Econometrics with Applications*, 5ª edición. South-Western.

Roldán, P. (2017). *Bolsa de valores*. Recuperado el 18 de junio de 2022, de Economipedia <https://economipedia.com/definiciones/bolsa-de-valores.html>