

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 532.516, 532.135
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-755-763>

Поступило в редакцию 22.11.2021
Received 22.11.2021

В. И. Байков, А. А. Ковалевская, А. Д. Чорный

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

УВЛЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ПРИСТЕННОМ ЭФФЕКТЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

(Представлено академиком О. Г. Пенязковым)

Аннотация. Проведен теоретический анализ увлечения неньютоновской жидкости движущейся наклонной поверхностью при пристенном эффекте скольжения. Приведена общая постановка задачи для неньютоновской жидкости. Решение этой задачи позволяет определить основные физические принципы и механизмы процесса во всем диапазоне скоростей извлечения, реализуемом на практике. Рассмотрен случай увлечения вязкопластической жидкости, обладающей конечным пределом текучести.

Ключевые слова: скорость извлечения, толщина пленки жидкости, статический и динамический мениск, пристенный эффект скольжения

Для цитирования. Байков, В. И. Увлечение неньютоновской жидкости наклонной поверхностью при пристенном эффекте скольжения / В. И. Байков, А. А. Ковалевская, А. Д. Чорный // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 6. – С. 755–763. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-755-763>

Valentin I. Baikov, Anastasiya A. Kovalevskaya, Andrei D. Chorny

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

WITHDRAWING A NON-NEWTONIAN FLUID BY A MOVING INCLINED PLATE WITH ACCOUNT FOR THE NEAR-WALL SLIP EFFECT

(Communicated by Academician Oleg G. Penyazkov)

Abstract. A fluid withdrawn by a moving inclined surface with account for the near-wall slip effect is analyzed theoretically. A non-Newtonian fluid task is stated in general form. The solving of this task enables revealing the basic physical principles and mechanisms of the process over the entire withdrawal velocity range realized in practice. The case of withdrawing a finite yield stress viscoplastic fluid is considered.

Keywords: withdrawal velocity, fluid film width, static and dynamic menisci, wall slip effect

For citation. Baikov V. I., Kovalevskaya A. A., Chorny A. D. Withdrawing a non-Newtonian fluid by a moving inclined plate with account for the near-wall split effect. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 755–763 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-755-763>

Опыты по гравитационному стеканию пленок неньютоновских жидкостей (растворов полимеров и дисперсных систем) [1–7] показали, что имеет место пристенный эффект скольжения. В непосредственной близости к стенке движущаяся неньютоновская среда расслаивается, образуя весьма тонкий пристенный слой с пониженной концентрацией полимера или дисперсной фазы по сравнению с объемной. По этому тонкому слою вся остальная масса жидкости скользит как по смазке. В процессе увлечения жидкости пленка уносится движущейся поверхностью и одновременно стекает по ней под действием силы тяжести. Поэтому естественно предположить наличие пристенного эффекта при увлечении реологически сложных сред. В [8] дано решение задачи увлечения неньютоновской жидкости плоской наклонной поверхностью. В настоящей работе приведено решение задачи увлечения реологически сложной жидкости с учетом пристенного эффекта скольжения.

Пусть плоская поверхность извлекается под некоторым углом β к поверхности жидкости, изначально покоящейся в открытой ванне (рисунок). Толщина слоя, уносимая плоской поверх-

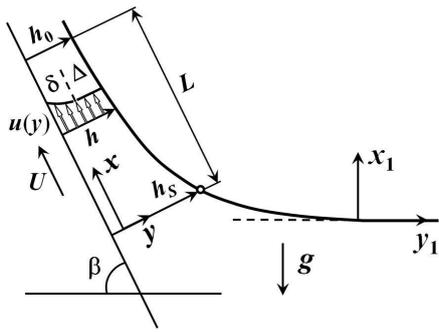


Схема увлечения жидкости наклонной поверхностью

Sketch of a fluid captured by a moving inclined plate

ностью, уменьшается с удалением от горизонтальной поверхности жидкости, стремясь к постоянной величине h_0 . Из-за действия силы тяжести извлекаемая поверхность захватывает с собой лишь часть приводимой ею в движение жидкости. Поэтому на свободной поверхности жидкости существует линия застоя h_s (перпендикулярная плоскости чертежа), где скорость движения равна нулю. В результате скорость свободной поверхности пленки жидкости, уносимой плоской поверхностью, возрастает от нуля на линии застоя до максимальной величины в области постоянной толщины пленки h_0 . Линия застоя отделяет пристеночную зону уносимой жидкости от зоны жидкости, остающейся в ванне. Запишем для каждой из этих зон уравнения для формы свободной поверхности жидкости, а затем сошьем полученные для них решения, что позволит найти толщину h_0 извлеченной пленки жидкости.

Примем линию застоя за начало отсчета и направим ось x вдоль плоской поверхности в направлении ее движения, а ось y – перпендикулярно поверхности. Над линией застоя толщина пленки h определяется соотношением сил внутреннего трения, поверхностного натяжения, гравитации и инерции. Эта зона называется зоной динамического мениска движущейся жидкости. Запишем для нее уравнения неразрывности и движения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \sin \beta + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cos \beta + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Они должны быть дополнены краевыми условиями. Полагаем, что плоская поверхность непроницаема для жидкости

$$v = 0 \text{ при } y = 0. \quad (4)$$

Между поверхностью твердого тела и движущейся по ней жидкости всегда существуют весьма большие силы молекулярного сцепления, так что непосредственно прилегающей к твердой поверхности полностью задерживается, как бы прилипая к стенке. Пристенный эффект у растворов полимеров и дисперсных систем не связан со скольжением жидкости относительно твердой стенки, узкой пристенной области жидкости, обогащенной растворителем или дисперсной фазой. Если пренебречь толщиной пристенного слоя жидкости, величина которого незначительна по сравнению с толщиной пленки, то течение в пристенном слое можно не рассматривать и сносить значение скорости жидкости и напряжения сдвига на внешней границе пристенного слоя на стенку. В соответствие со сказанным на твердой стенке имеем

$$u = U - u_c, \quad \tau_{xy} = \tau_w \text{ при } y = 0.$$

Полагаем, что u_c – скорость эффективного скольжения неньютоновской жидкости – однозначно определяется локальным напряжением сдвига τ_w на стенке

$$u_c = \chi \tau_w, \quad (5)$$

где χ – коэффициент скольжения – зависит от вида полимера или дисперсной среды и их концентрации.

На свободной поверхности пленки, уравнение которой записывается в виде $y = h(x)$, должны выполняться условия двух типов – кинематические и динамические. Так как в каждый момент времени через свободную поверхность пленки отсутствует поток жидкости, то кинематическим условием является

$$v = u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ при } y = h. \quad (6)$$

Динамические условия в общем виде выражают равенство нормальных и касательных напряжений, действующих со стороны жидкости и окружающего газа и имеют вид

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[\tau_{xx} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \tau_{yy} - 2\tau_{xy} \frac{dh}{dx} \right] \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \text{ при } y = h; \quad (7)$$

$$\tau_{xy} \left[1 - \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \frac{dh}{dx} \text{ при } y = h. \quad (8)$$

Из динамических условий (7), (8) следует, что при $y = h$

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[\tau_{yy} - \tau_{xy} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \quad (9)$$

или

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \tau_{yy} - \tau_{xy} \frac{dh}{dx}. \quad (10)$$

При интегрировании уравнения (2) от 0 до h и уравнения (3) от y до h с учетом условий (6), (8), (10) и уравнения неразрывности (1) можно получить

$$\begin{aligned} \sigma h \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} - \rho g \sin \beta - \rho g \cos \beta h \frac{dh}{dx} - \tau_{xy}(x, 0) - \\ - \frac{d}{dx} \int_0^h \left\{ \rho [u^2(x, y) - v^2(x, y)] + \tau_{yy}(x, y) - \tau_{xx}(x, y) \right\} dy + \\ + \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h \left\{ \int_y^h [\tau_{xy}(x, \eta) - \rho u(x, \eta)v(x, \eta)] d\eta \right\} dy = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (8), (9), (11) для тонкой пленки допускают существенное упрощение. Поскольку толщина пленки мала, все производные поперек пленки велики по сравнению с производными вдоль пленки ($\partial / \partial y \gg \partial / \partial x$). Обозначим через h_0 характерный поперечный размер, а через L – характерный продольный размер. Тогда для тонкослойных течений $\varepsilon = h_0 / L \ll 1$. Введем безразмерные переменные и параметры

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x}{h_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\varepsilon U}, \quad \bar{\tau}_{ik} = \frac{\tau_{ik} h_0}{\mu_c U}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho U^2}, \quad (12)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho U h_0}{\mu_c} = \frac{T(\gamma \text{Ca})^{3/2}}{(\sin \beta)^{1/2}}, \quad \text{Ca} = \frac{\mu_c U}{\sigma}, \quad T = h_0 \left(\frac{\rho g \sin \beta}{\mu_c U} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\mu_c^4}{\rho^4 g} \right)^{-1/3},$$

где μ_c – характерная вязкость. В результате с точностью до членов порядка ε^2 из уравнений (8), (9), (11) получим

$$\sigma h \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g \sin \beta - \rho g \cos \beta h \frac{dh}{dx} - \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad (13)$$

$$P - P_0 = \sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \tau_{yy}(x, y) \quad \text{при } y = h, \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \frac{dh}{dx} \quad \text{при } y = h. \quad (15)$$

Дальнейшее упрощение полученных уравнений возможно при задании конкретного реологического уравнения состояния жидкости. Рассмотрим вязкопластическую жидкость, для которой наибольшее распространение получила линейная модель Шведова–Бингама:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{du}{dy} + \mu_p \frac{du}{dy} \quad \text{при } |\tau| > \tau_0, \quad (16)$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq \tau_0.$$

Величину τ_0 называют пределом текучести, а коэффициент μ_p – пластической вязкостью. Обобщение реологического уравнения (16) на случай пространственного течения дано в [5]:

$$\tau_{ik} = \left[\frac{\tau_0}{\sqrt{0,5 e_{lm} e_{lm}}} + \mu_p \right] e_{ik} \quad \text{при } |\tau| > \tau_0; \quad e_{ik} = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq \tau_0.$$

Здесь $e_{ik} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, $e_{ik} = e_{ki}$.

В двумерном случае получим

$$\tau_{xx} = 2 \left(\frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2 \left(\frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \left(\frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (17)$$

$$A = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Проведя оценку членов в уравнениях (17) с точностью до членов порядка ε^2 , находим с помощью соотношений (12)

$$A = \frac{U}{h_0} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \quad \tau_{xy} = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \mu_p \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \tau_{xx} - \tau_{yy} = 4\varepsilon \left(\frac{\tau_0}{|\partial \bar{u} / \partial y|} + \mu_p \frac{U}{h_0} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}.$$

Тогда для зоны динамического мениска уравнения (13)–(15) с точностью для членов порядка ε^2 примут вид

$$\sigma \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g h \sin \beta - \rho g h \frac{d}{dx} \cos \beta - \left(\tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (18)$$

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - 2 \left(\frac{\tau_0}{|\partial u / \partial y|} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } y = h, \quad (19)$$

$$\tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = h.$$

Скорость эффективного скольжения для вязкопластической жидкости Шведова–Бингама, исходя из (5) и (16) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} u_c &= \chi(|\tau_w| - \tau_0) \quad \text{при } |\tau_w| - \tau_0 > 0, \\ u_c &= 0 \quad \text{при } |\tau_w| - \tau_0 \leq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение неразрывности (1) представим в интегральном виде. Для этого проинтегрируем его по y от 0 до h

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + v(x, y) \Big|_0^h = 0.$$

Воспользуемся условием (4) непроницаемости твердой стенки и с помощью правила Лейбница поменяем порядок интегрирования и дифференцирования

$$\frac{d}{dx} \int_0^h u(x, y) dy + u(x, h) + v(x, h) = 0.$$

Учтем кинематическое условие (6) и введем расход жидкости $Q = \int_0^{h(x)} u(x, y) dy$. Тогда получим формулу

$$\frac{dQ(h)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad Q(h) = \text{const},$$

которая означает, что в каждом поперечном сечении увлеченной пленки расход жидкости постоянен.

Найдем распределение скоростей $u(x, y)$ в пленке. Для этого получим решение для участка постоянной толщины $h = h_0 = \text{const}$. Здесь уравнения движения (1) примут вид

$$\frac{d}{dy} \left(\tau_0 \text{sign} \frac{du_0}{dy} + \mu_p \frac{du_0}{dy} \right) - \rho g \sin \beta = 0, \tag{21}$$

$$-\frac{dP}{dy} - \rho g \cos \beta = 0 \tag{22}$$

с граничными условиями

$$u_0 = U - u_{c0} \quad \text{при } y = 0; \quad \tau_0 \text{sign} \frac{du_0}{dy} + \mu_p \frac{du_0}{dy} = 0 \quad \text{при } y = h_0, \tag{23}$$

$$P = P_0 \quad \text{при } y = h_0. \tag{24}$$

Из соотношений (22), (24) находим $P - P_0 = \rho g(h_0 - y) \cos \beta$, а из (21) и второго условия (23) получим

$$\tau_0 \text{sign} \frac{du_0}{dy} + \mu_p \frac{du_0}{dy} = -\rho g(h_0 - y) \sin \beta.$$

Так как при увлечении пленки происходит ее стекание под действием силы тяжести, т. е. $\frac{du_0}{dy} < 0$, то

$$\mu_p \frac{du_0}{dy} = \tau_0 - \rho g(h - y) \sin \beta. \tag{25}$$

Отсюда и из второго условия реологического уравнения состояния (16), имеем при некотором значении $y = \delta$ равенство $0 = \tau_0 - \rho g(h_0 - \delta) \sin \beta$ или $\delta = h_0 - \tau_0 / \rho g \sin \beta$. Это означает, что в области $0 \leq y < \delta$ осуществляется вязкопластическое течение пленки, а в зоне толщиной $\Delta = h_0 - \delta = \tau_0 / \rho g \sin \beta$, где координата y лежит в пределах $\delta \leq y \leq h_0$, происходит квазитвердое движение пленки.

Интегрируя уравнение (25), с учетом первого условия (23), находим распределение скоростей для зоны вязкопластического течения ($0 \leq y < \delta$)

$$u_0(y) = U - u_{c0} + \frac{\tau_0}{\mu_p} y - \frac{\rho g}{\mu_p} h_0^2 \sin \beta \left(\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right). \tag{26}$$

Для скорости квазитвердой зоны Δ при $\delta \leq y \leq h_0$ получим, подставляя в (26) $y = \delta = h_0 - \tau_0 / \rho g \sin \beta$,

$$u_0^0 = U - u_{c0} + \frac{\tau_0 h_0}{\mu_p} - \frac{\rho g}{2\mu_p} h_0^2 \sin \beta - \frac{\tau_0^2}{2\mu_p \rho g \sin \beta},$$

а для расхода жидкости имеем

$$Q = \int_0^{\delta} u_0 dy + \int_{\delta}^h u_0^0 dy = (U - u_{c0}) h_0 + \frac{\tau_0 h_0^2}{2\mu_p} - \frac{\rho g h_0^3 \sin \beta}{3\mu_p} - \frac{\tau_0^3}{6\mu_p \rho^2 g^2 \sin^2 \beta}. \quad (27)$$

Исходя из соотношения (26), представим распределение скоростей $u(x, y)$ в зоне вязкопластического течения пленки в виде

$$u(x, y) = U - u_c + \frac{\tau_0}{\mu_p} y - a(x) \left(\frac{y}{h(x)} - \frac{y^2}{2h^2(x)} \right). \quad (28)$$

Из уравнения (28) следует

$$\tau_0 - \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_p \frac{a(x)}{h(x)} \left(1 - \frac{y}{h(x)} \right). \quad (29)$$

Отсюда и реологического уравнения состояния (16) вытекает, что в области $0 \leq y < \delta$, где δ определится условием

$$\delta(x) = h(x) - \frac{\tau_0 h^2(x)}{\mu_p a(x)}, \quad (30)$$

происходит вязкопластическое течение пленки, а в зоне толщиной

$$\Delta(x) = h(x) - \delta(x) = \frac{\tau_0 h^2(x)}{\mu_p a(x)},$$

где координата y находится в пределах $\delta(x) \leq y \leq h(x)$, происходит квазитвердое движение пленки со скоростью

$$u^0(x) = U - u_c + \frac{\tau_0 h(x)}{\mu_p} - \frac{a(x)}{2} - \frac{\tau_0^2 h^2(x)}{2\mu_p^2 a(x)}. \quad (31)$$

Для расхода жидкости в зоне динамического мениска получим с помощью соотношений (28), (30), (31) уравнение

$$Q = \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy + \int_{\delta(x)}^h u^0(x) dy = (U - u_c) h(x) + \frac{\tau_0 h^2(x)}{2\mu_p} - \frac{a(x) h(x)}{3} - \frac{\tau_0^3 h^4(x)}{6\mu_p^3 a^2(x)}. \quad (32)$$

Здесь Q находится из формулы (27) для участка постоянной толщины пленки h_0 . Уравнение (32) позволяет найти вид функции $a(x)$.

Для зоны динамического мениска исходя из выражений (18), (29) получим для определения толщины пленки $h(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\sigma \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g \sin \beta - \rho g \frac{dh}{dx} \cos \beta + \mu_p \frac{a(x)}{h^2} = 0. \quad (33)$$

Оно справедливо в пределах изменения толщины пленки от h_0 в зоне постоянной толщины до h_s на линии застоя. Найдем положение линии застоя h_s . По определению на линии застоя скорость поверхности пленки $u^0|_{h_s}$ равна нулю. Тогда из соотношения (31) следует

$$a_s^2 - 2a_s \left(U - u_{cs} + \frac{\tau_0 h_s}{\mu_p} \right) + \frac{\tau_0^2 h_s^2}{\mu_p^2} = 0,$$

отсюда

$$\frac{a_s}{U} = 1 - \frac{u_{cs}}{U} + \frac{\tau_0 h_s}{\mu_p U} - \left(1 - \frac{u_{cs}}{U}\right) \left[1 + \frac{2\tau_0 h_s}{\mu_p U} \left(1 - \frac{u_{cs}}{U}\right)^{-1}\right]^{1/2}. \quad (34)$$

Здесь a_s значение a при $h = h_s$, u_{cs} эффективная скорость скольжения при $h = h_s$. С другой стороны, ввиду постоянства расхода жидкости Q в каждом поперечном сечении пленки, из формулы (32) имеем

$$(U - u_{cs})h_s + \frac{\tau_0 h_s^2}{2\mu_p} - \frac{a_s h_s}{3} - \frac{\tau_0^3 h_s^4}{6\mu_p^3 a_s^2} = Q. \quad (35)$$

Система уравнений (34), (35) позволяет определить на линии застоя величины a_s и h_s . Решение этой системы уравнений относительно h_s дает

$$\frac{h_s}{h_0} = \frac{3Q}{Uh_0 \left(1 - \frac{u_{cs}}{U}\right)} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{Q}{Uh_0 \left(1 - \frac{u_{cs}}{U}\right)^2} \frac{\tau_0 h_0}{\mu_p U}\right]. \quad (36)$$

Определим скорости эффективного скольжения u_s и u_{cs} . Для этого воспользуемся соотношениями (20). Напряжение трения τ_w на стенке получим из формулы (29)

$$\tau_w = \left[\tau_0 - \mu_p \frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \mu_p \frac{a(x)}{h(x)}.$$

Тогда из соотношений (20) вытекает

$$u_c = \chi(\tau_w - \tau_0) = \chi \frac{\mu_p U}{h_0} \left[\frac{a(x)}{U} \frac{h_0}{h(x)} - \frac{\tau_0 h_0}{\mu_p U}\right]. \quad (37)$$

Отсюда

$$u_{cs} = \chi \frac{\mu_p U}{h_0} \left[\frac{a_s}{U} \frac{h_0}{h_s} - \frac{\tau_0 h_0}{\mu_p U}\right]. \quad (38)$$

Рассмотрим область течения жидкости, находящейся ниже линии застоя и остающейся в ванне. Здесь характерная скорость движения жидкости значительно меньше скорости извлечения пластины U , а характерный масштаб движения жидкости для широкой и глубокой ванны намного больше толщины h_0 увлекаемой пленки жидкости. Поэтому пространственные производные скоростей и напряжений значительно меньше, чем в области динамического мениска, и ими в уравнениях движения (2), (3) можно пренебречь по сравнению с силами тяжести и поверхностного натяжения. Тогда форму поверхности жидкости определяют соотношения

$$\rho g + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0 \quad (39)$$

с граничным условием

$$P - P_0 = -\sigma \frac{\partial^2 h_1}{\partial x_1^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)^2\right]^{-3/2} \quad \text{при } y_1 = h_1. \quad (40)$$

Здесь система координат связана с горизонтальной поверхностью жидкости в ванне и ось x_1 отсчитывается от нее вертикально вверх, а ось y_1 – параллельно горизонтальной поверхности жидкости (рисунок). Из равенств (39), (40) получим уравнение

$$\frac{d^2 h_1}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh_1}{dx_1}\right)^2\right]^{-3/2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1 \quad (41)$$

равновесной формы поверхности жидкости в поле силы тяжести. Поэтому зону ниже линии застоя назовем областью статического мениска.

Найдем форму поверхности жидкости в области статического мениска. Однократным интегрированием уравнения (41) и удовлетворением граничного условия $dh/dx_1 \rightarrow -\infty$ при $x_1 = 0$ (поверхность жидкости вдали от пластины горизонтальна), находим

$$\frac{dh_1}{dx_1} \left[1 + \left(\frac{dh_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1^2 - 1. \quad (42)$$

Для неподвижной стенки решение дифференциального уравнения (42) следует искать, полагая $h_1 = -b \operatorname{ctg} \beta$ при $x_1 = b$, где b – высота подъема жидкости под действием капиллярной силы. Она в случае полностью смачиваемой жидкостью твердой стенки определяется из требования

$$dh_1/dx_1 = -\operatorname{ctg} \beta \text{ при } x_1 = b \text{ и равна } b = \left(\frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \cos \beta) \right)^{1/2}.$$

Интегрирование уравнения (42), с учетом указанных выше условий, позволяет найти формулу поверхности жидкости ниже линии застоя

$$h_1 \left(\frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left(\sqrt{1 + \cos \beta} - \sqrt{1 - \cos \beta} \operatorname{ctg} \beta \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos \beta}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos \beta}} - \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma}}{2 - \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma}}. \quad (43)$$

Для определения толщины h_0 , наносимой пленки жидкости, сравним решение для зоны статического мениска с решением уравнения (33) динамического мениска. Очевидно, что на линии застоя h_s давление в жидкости, определяемое как со стороны динамической, так и статической области, должно быть одним и тем же. Тогда, исходя их условий (19), (40) и, учитывая, что член $2 \left(\frac{\tau_0}{|\partial u / \partial y|} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x}$ в условии (19) следует опустить, поскольку он на линии застоя h_s того же порядка малости, что и члены, отброшенные при выводе уравнений (39), (40), находим условие сращивания для динамической и статической областей $\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{d^2 h_1}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2}$ при $h = h_s$. Это условие на основании уравнения (41) принимает вид

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1 \text{ при } h = h_s. \quad (44)$$

Таким образом, для случая увлечения наклонной поверхностью вязкопластической жидкости при пристенном эффекте скольжения, получена замкнутая система уравнений (27), (31), (32), (36)–(38), (43) и (44), которая позволяет найти решение в диапазоне скоростей извлечения, реализуемом на практике.

Список использованных источников

1. Haeri, S. Experimental study of gravity-driven film flow of non-Newtonian fluids / S. Haeri, S. H. Hashemabadi // Chem. Eng. Comm. – 2009. – Vol. 196, N 5. – P. 519–529. <https://doi.org/10.1080/00986440802484481>
2. Withdrawal and drainage of thin film flow on a vertical cylinder / A. M. Siddiqui [et al.] // Scientific Research and Essays. – 2012. – Vol. 7, N 41. – P. 3554–3565. <https://doi.org/10.5897/sre12.233>
3. Obtaining flow curve for viscoplastic fluids through inclined open-channel apparatus / Y. T. São [et al.] // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. – 2021. – Vol. 43, N 5. – Art. 278. <https://doi.org/10.1007/s40430-021-02999-2>
4. Astarita, G. Non-newtonian gravity flow along inclined plane surfaces / G. Astarita, G. Marrucci, G. Palumbo // I & EC Fundamentals. – 1964. – Vol. 3, N 4. – P. 333–339. <https://doi.org/10.1021/i160012a010>
5. Carreau, P. J. Wall effects in polymer flow on inclined plane / P. J. Carreau, Q. H. Bui, P. Leroux // Rheology Acta. – 1979. – Vol. 18, N 5. – P. 600–608. <https://doi.org/10.1007/bf01520356>
6. Morrison, S. R. Wall effect in coquette flow of non-newtonian suspensions / S. R. Morrison, J. C. Harper // I & EC Fundamentals. – 1965. – Vol. 4, N 2. – P. 176–181. <https://doi.org/10.1021/i160014a014>
7. Balmforth, N. J. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics / N. J. Balmforth, I. A. Frigaard, G. Ovarlez // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 46, N 1. – P. 121–146. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141424>

8. Байков, В. И. Увлечение неньютоновской жидкости движущейся наклонной пластиной / В. И. Байков, А. Д. Чорный // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 6. – С. 761–768. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-761-768>

References

1. Haeri S., Hashemabadi S. H. Experimental study of gravity-driven film flow of non-Newtonian fluids. *Chemical Engineering Communications*, 2009, vol. 196, no. 5, pp. 519–529. <https://doi.org/10.1080/00986440802484481>
2. Siddiqui A. M., Akram M., Memon K. N., Islam S., Khalid Khan. Withdrawal and drainage of thin film flow on a vertical cylinder. *Scientific Research and Essays*, 2012, vol. 7, no. 41, pp. 3554–3565. <https://doi.org/10.5897/sre12.233>
3. São Y. T., Pereira J. B., Fiorot G. H., Maciel G. de F. Obtaining flow curve for viscoplastic fluids through inclined open-channel apparatus. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2021, vol. 43, no. 5, art. 278. <https://doi.org/10.1007/s40430-021-02999-2>
4. Astarita G., Marrucci G., Palumbo G. Non-newtonian gravity flow along inclined plane surfaces. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1964, vol. 3, no. 4, pp. 333–339. <https://doi.org/10.1021/i160012a010>
5. Carreau P. J., Bui Q. H., Leroux P. Wall effects in polymer flow on inclined plane. *Rheology Acta*, 1979, vol. 18, no. 5, pp. 600–608. <https://doi.org/10.1007/bf01520356>
6. Morrison S. R., Harper J. C. Wall effect in coquette flow of non-newtonian suspensions. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1965, vol. 4, no. 2, pp. 176–181. <https://doi.org/10.1021/i160014a014>
7. Balmforth N. J., Frigaard I. A., Ovarlez G. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 46, no. 1, pp. 121–146. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141424>
8. Baikov V. I., Chorny A. D. Capturing a non-newtonian fluid by a moving inclined plate. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 761–768 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-761-768>

Информация об авторах

Байков Валентин Иванович – д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

Ковалевская Анастасия Андреевна – аспирант. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nastya_kovalevskaya16@mail.ru.

Чорный Андрей Дмитриевич – канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: anchor@hmti.ac.by.

Information about the authors

Baikov Valentin I. – D. Sc. (Engineering), Chief researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

Kovalevskaya Anastasiya A. – Postgraduate student. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nastya_kovalevskaya16@mail.ru.

Chorny Andrei D. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anchor@hmti.ac.by.