La calculadora como herramienta didáctica en el aula. Una experiencia de formación de maestros y maestras

Mónica Marcela Parra-Zapata[1]
César Lau Mego[2]
Mónica Mercedes Zapata-Jaramillo[3]

Introducción

En este capítulo, y como introducción a lo que encontraremos en el presente libro, presentamos los alcances y las limitaciones de algunas situaciones didácticas con calculadora dentro de un proceso conjunto entre el Grupo de Investigación *Mathema Fiem de la U. de A.* y el *Programa Gakuhan de Casio Calculadoras*. Con el desarrollo de las situaciones se promovió la integración y el uso de la calculadora en clase de matemáticas hacia el análisis y la reflexión como centro de la actividad matemática en el aula.

1 Magíster en Educación-Educación Matemática. Profesora y Tutora PTA Institución Educativa Villa Flora-Secretaría de Educación de Medellín. Profesora Universidad de Antioquia. monikampz@gmail.com.
2 Director de la división académica de Casio para América Latina. cesar.slmg@gmail.com
3 Licenciada en Educación Básica Matemáticas. Profesora Institución Educativa Barrio Olaya Herrera-Secretaría de Educación de Medellín. monizapata25@gmail.com

El Proyecto es una iniciativa de la división académica de Casio Latinoamérica y grupo Statur que, en convenio con el grupo de investigación *Mathema-FIEM* de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, propuso una estrategia de formación de maestros y maestras que tuvo como objetivo el mejoramiento de la práctica docente con el objeto de diseñar y crear espacios reflexivos para el planteamiento de nuevas alternativas y la integración de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático con el apoyo de la calculadora. El proyecto contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín y se llevó a cabo durante los años 2021 y 2022.

Desde la invención de la calculadora esta ha evolucionado hasta la producción de nuevas calculadoras con multiplicidad de funciones, que posibilitan, entre otros asuntos, el cálculo, la verificación y la graficación. Esta transformación ha sido de tipo funcional y ha incluido la pregunta de su uso en la escuela y las oportunidades que deben proporcionar los profesores para usarlas en la clase.

La inclusión de las calculadoras en el currículo escolar ha producido un debate amplio en la comunidad académica en tanto se reportan opiniones encontradas en aspectos negativos y positivos de su inclusión. Algunas de las personas que se resisten a la incorporación de la calculadora en la edad escolar, sostienen algunas creencias que indican que: **i.** la calculadora no desarrolla el razonamiento matemático puesto que, para utilizarla, basta con seguir exactamente las instrucciones de funcionamiento, y **ii.** la calculadora limita la adquisición de las habilidades de cálculo numérico de los estudiantes (Conti et al., 2017).

Sin embargo, otros autores sostienen que la interacción con la calculadora en la clase de matemáticas con un uso intencionado puede ser ventajosa y posibilitaría el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008). Por su parte, el MEN (1998) destaca la importancia de usar las tecnologías, entre ellas, la calculadora, en la enseñanza y el aprendizaje. El MEN considera que su uso potencia el desarrollo del pensamiento matemático. Selva y Borba (2010) insisten en el uso de este instrumento en el aula porque prepararía a los estudiantes para su uso futuro en diferentes esferas de la sociedad y su amplio uso en diversas situaciones fuera del aula.

Las calculadoras como herramienta didáctica en el aula

La inclusión de la calculadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha permitido un amplio debate sobre las posibles consecuencias, negativas y positivas, que su uso puede tener y sobre cuál es la edad más adecuada para su uso. Aunque existen documentos diversos sobre los beneficios de usar la calculadora, se encuentran también opiniones que indican no usarlas, pues consideran que podría perjudicar las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Por su parte, algunas investigaciones reportan el papel que debe jugar la calculadora y de su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático (Campbell y Stewart, 1993; Albergaria y Ponte, 2008; Selva y Borba, 2010; MEN, 1998, 2006; Carmona-Mesa et al., 2018). En este sentido, el informe Cockcroft (1985) afirma que la investigación ha demostrado que los estudiantes que se habitúan al uso de la calculadora mejoran su actitud hacia las matemáticas, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas.

En este capítulo, y a lo largo del despliegue de la formación, se asume que la calculadora es una herramienta didáctica en el aula, que permite ejercitar determinados cálculos que favorecen una selección de estrategias apropiadas. A partir de ello, se intenta una reflexión acerca de la importancia que adquiere el uso de la calculadora en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y la manera de diseñar y potenciar algunas situaciones didácticas en el aula mediadas con esta tecnología.

En una perspectiva del aprendizaje, la calculadora funge como una tecnología que puede mejorar la actitud y disposición de los estudiantes hacia las matemáticas, al adquirir destrezas en los cálculos mentales y en la comprensión de conceptos y en la adquisición de estrategias adecuadas para la resolución de problemas. Usar calculadoras en clase permite el trabajo individual, las investigaciones reportan que promueven la interacción entre estudiantes y maestros y entre los estudiantes.

En términos de la enseñanza, la calculadora es una herramienta valiosa que enriquece las comprensiones matemáticas. Además, su uso permite que se ocupe más tiempo y esfuerzos en la comprensión de los conceptos, el análisis de situaciones y el pensamiento crítico. Resaltamos aquí que la calculadora por sí misma no es un elemento que garantice un manejo más estructural de los conceptos, sino que contribuye a que haya cambios en las instrucciones, en el diseño curricular y en las visiones que el profesor tiene de su actividad y de las matemáticas.

Por último, se concibe que la tecnología, en este caso las calculadoras, complementan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero no son la base del mismo. En esta medida, los cambios se deben producir a través de la incorporación de la calculadora en el aprendizaje y se deben integrar sin sacrificar la profundidad de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, cuando se trata de leer y comprender una situación problemática, escribir una apropiada ecuación a un problema, elegir las operaciones que hay que usar, interpretar correctamente la solución que aparece en el visor de la calculadora, y determinar si la respuesta es coherente o no con la situación. Las calculadoras, junto con las destrezas mentales, el lápiz y papel, y la estimación, cuando son apropiadas, componen las herramientas que ayudan a los estudiantes a resolver problemas (Ortiz, 2006).

Una experiencia de formación de maestros y maestras

Con miras a determinar posibilidades de transformaciones prácticas para la formulación y desarrollo de currículos pertinentes e interdisciplinares que acojan la perspectiva STEM+H; esta experiencia de formación de maestros y maestras de matemáticas de la ciudad de Medellín se consolidó en el marco del proyecto CODI 2020-34799: "La modelación matemática escolar como eje de integración interdisciplinar en un currículo basado en las áreas STEM+H: un camino para la transformación educativa de la básica primaria en la ciudad de Medellín" en vínculo con la división académica de Casio Latinoamérica y su Proyecto Gakuhan.

En la formación se propendió por un mejor desempeño en estudiantes y maestros con el ánimo de apoyar y fortalecer las habilidades matemáticas mediante la discusión y apropiación de nuevas maneras de, competencias matemáticas con el uso de tecnología, en especial, con la calculadora. Así, la formación motivó el uso de la calculadora como herramienta que concibe una nueva cultura de enseñanza y aprendizaje y, como consecuencia, el abandono de la concepción de saberse una fórmula de memoria para entender y aplicar, de manera coherente, la fórmula; es decir, una enseñanza y un aprendizaje que se centran en el desarrollo del pensamiento matemático.

En este sentido, la experiencia de formación fomentó la discusión en torno a algunos elementos conceptuales que fundamentan la propuesta de los documentos de referencia del país en matemáticas (MEN, 1998; 2006; 2016). De igual modo, se promovió la reflexión de los maestros y maestras de matemáticas sobre su práctica y su relación entre ella y la propuesta del MEN, además del fomento de situaciones didácticas mediadas con calculadora. Por estas razones se infiere que existen reflexiones acerca de cómo pueden evaluar los docentes el uso de la herramienta en la generación de conocimiento en las aulas.

La experiencia de formación reconoció que, como profesionales de la educación colombiana, los maestros y maestras deben mantenerse en la búsqueda y perfeccionamiento de diferentes estrategias educativas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Así mismo, es muy importante reflexionar sobre el impacto de las múltiples herramientas tecnológicas diseñadas o adaptadas para apoyar la Educación Matemática y, por esta razón, no es recomendable que el profesor se aleje de dichos recursos por causa del desconocimiento de la herramienta o del potencial pedagógico que puede tener. De esta manera, se espera crear espacios de reflexión sobre la práctica educativa en los que se amplíe el saber del maestro en diversos aspectos.

La experiencia de formación se consolidó en dos cohortes y contó con la participación de 42 maestros y maestras de la ciudad de Medellín. Para lograr los objetivos propuestos la experiencia de formación se orientó metodológicamente en siete momentos que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Orientación metodológica de la experiencia de formación.

MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
1	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento numérico.
2	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento variacional.
3	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento métrico.
4	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento espacial.
5	Asesoría.
6	Situaciones didácticas para desarrollo del pensamiento aleatorio.
7	Presentación experiencia de maestros y maestras.

Fuente: los autores.

Algunas situaciones de aula propuestas

En esta formación los maestros y maestras fueron partícipes de situaciones de aprendizaje en las que pudieron hacer uso de sus conocimientos matemáticos y reflexionar sobre su sentido en diferentes contextos. Las situaciones fueron propuestas en el marco de la formación descrita en el apartado anterior y en ellas se empleó en todo momento la calculadora científica como herramienta.

En las situaciones la calculadora se empleó como una herramienta que facilita la exploración de ideas y modelos, y que valida resultados obtenidos previamente con lápiz y papel. En este sentido, la calculadora apoyó la realización rápida de cálculos que son muy tediosos y repetitivos para la mente humana. Sin embargo, su uso en la escuela debe enfatizar más la comprensión de los procesos matemáticos más que la verificación de la mecánica de rutinas operativas.

De acuerdo con lo anterior, a continuación, se presentan cuatro situaciones desarrolladas por los maestros en la experiencia de formación y se discutieron aspectos matemáticos y de su desarrollo y algunas de las apreciaciones de los maestros y las maestras.

Situación 1: El mayor número primo

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico. En ella se propuso formar parejas, se tenía a la mano lápiz, papel y calculadora. La situación propuso dar un número primo mayor que el del compañero.

El estudiante que inicia escribe un número primo y lo lee al compañero, quien deberá, primero, verificar que el número que le dan es primo y, si lo es, escribir uno mayor con los recursos brindados (lápiz, papel y calculadora). La actividad continúa y puede terminar de varias formas:

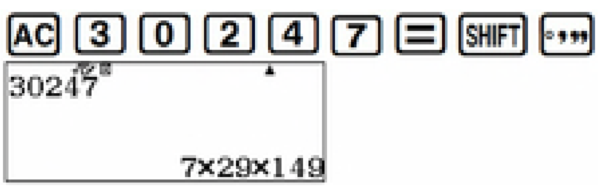
- cumplido un tiempo previamente acordado.
- cuando uno de los dos jugadores devuelve un número que no es primo.
- cuando uno de los jugadores ya no pueda hallar un número primo mayor.

Durante las sesiones los maestros y maestras reconocieron que no tenían disponible un algoritmo preestablecido para “ganar” el juego, esto los llevó a pensar sobre los números primos, criterios de divisibilidad, operaciones elementales de multiplicación y división, descomposición de números en factores con el uso de la calculadora para la exploración.

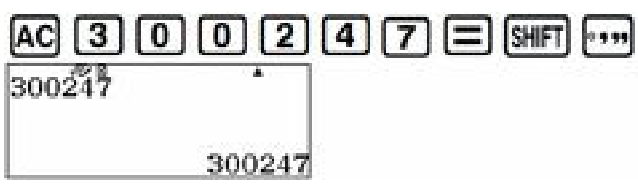
Una función que los profesores descubren al manipular la calculadora para buscar números primos es FACT., con la que pueden no solamente verificar si un número es primo o no, sino que es una manera de obtener números primos en los factores del número ingresado.

Observen cómo se puede factorizar un número cualquiera, por ejemplo 30247.

Para lograrlo se ingresa al modo 1 desde el MENU.



Ahora, veamos qué sucede al ingresar un número primo: 300247



Observe qué sucede cuando la calculadora no puede determinar si un factor es primo o no, lo presenta entre paréntesis, como en el siguiente ejemplo:

Veamos un ejemplo de cómo se desarrolla una partida:

- Jugador 1: 103
- Jugador 2: cómo 103 no es par, tampoco es divisible por 3, 5, 7 entonces es primo y te doy el número 127.
- Jugador 2: 127 es primo. Te doy el número 1003
- Jugador 1: 1003 no es primo.
- Gana Jugador 1

Situación 2: Racional o Irracional

Esta situación se propone para el desarrollo del pensamiento numérico, en ella se sugiere indicar cuántos de los siguientes números son irracionales. Justificar la respuesta.

$$A = \sqrt{2}$$
$$B = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$
$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

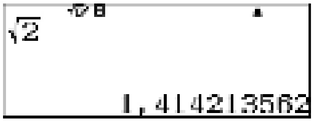
Esta situación tiene como objetivo reflexionar en torno a la manera como los docentes reconocen los números irracionales y qué aprenden los estudiantes con respecto a ellos. Algunas preguntas: ¿Qué es un número irracional? ¿Cómo reconocer un número irracional? ¿Cómo usar la calculadora para identificar números irracionales? ¿Es posible reconocer si un número es irracional con el apoyo de la calculadora?

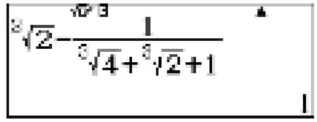
Es curioso que, a pesar de tener una calculadora a mano, algunos estudiantes clasifican los números como irracionales por su representación, sin efectuar operación alguna. Al preguntar por qué son irracionales, las respuestas son:

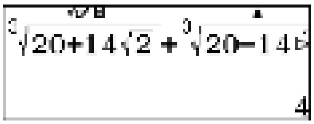
- "...son irracionales porque hay raíces que no se pueden simplificar".
- "...cuando se tienen raíces, los números son irracionales". (Comentarios de los maestros).

Desarrollo de la situación:

Cuando se usa la calculadora, los profesores encuentran los siguientes resultados:







Con estos resultados se advierten tres reacciones de los profesores:

- Aceptar los resultados y clasificar los números se acuerdo con ellos.
- Aceptar los resultados, pero reflexionar sobre las concepciones que se tienen sobre los números irracionales y qué información se brinda a los estudiantes.
- Negar la veracidad de resultados en la calculadora con razones como redondeo o truncamiento de cifras.

Posteriormente, se proponen rutas de verificación con lápiz y papel para comprobar el resultado obtenido en la calculadora porque algunos participantes no estaban seguros de que el resultado mostrado por la calculadora era correcto.

Hallemos el valor de B

$$B = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

Sea $a = \sqrt[3]{2}$

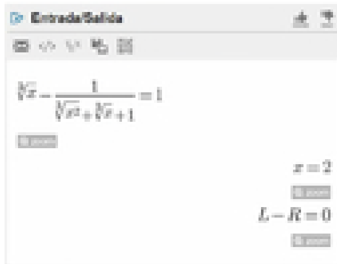
Entonces: $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{1}{a^2 + a + 1}$

Efectuando: $a - \frac{1}{a^2 + a + 1} = a - \frac{a-1}{(a^2 + a + 1)(a-1)} = a - \frac{a-1}{a^3-1} = a - \frac{a-1}{1} = a - (a-1) = 1$

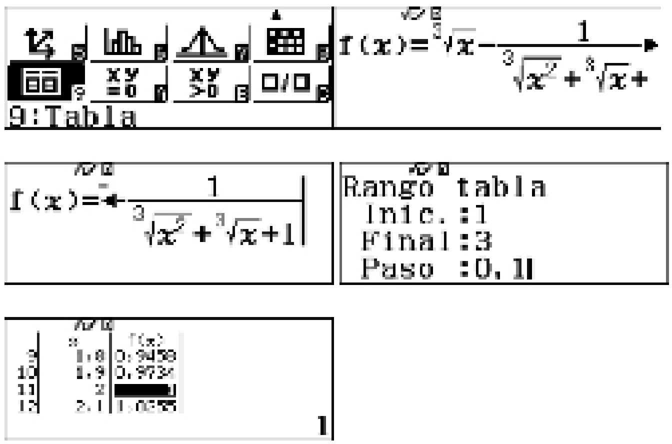
Otra manera para verificar el valor es resolver la siguiente ecuación en la calculadora:

$$\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 1$$

Con el uso de la función SOLVE, se le puede pedir a la calculadora que resuelva la ecuación:

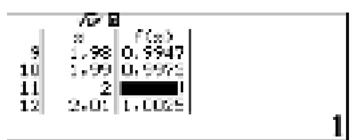


O, también, se puede acudir a una tabla



Aquí observamos que cuando *x* es 2 el valor de la función es 1.

Haciendo una tabla con un paso de 0.01 desde 1.9 hasta 2.1



Hallemos el valor de C:

$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(a+b)^3} + \sqrt[3]{(a-b)^3}$$

Entonces:

$$20 + 14\sqrt{2} = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

Si hacemos $b = \sqrt{2}$

$$20 + 14\sqrt{2} = \left(a + \sqrt{2}\right)^3 = a^3 + \sqrt{2}^3 + 3a^2\sqrt{2} + 3a\sqrt{2}^2$$

$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 2\sqrt{2} + 3a^2\sqrt{2} + 6a$$

$$20 + 14\sqrt{2} = a^3 + 6a + (2 + 3a^2)\sqrt{2}$$

$$a^3 + 6a = 20 \wedge 2 + 3a^2 = 14 \Rightarrow a = 2$$

$$C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4$$

¿? Preguntas:

- ¿Qué es un número irracional?
- ¿Podemos identificar un número irracional por su representación?
- ¿Cuáles son las "reglas" prácticas que suelen usarse para identificar un número que puede producir una concepción errada sobre ellos?

Situación 3: Pirandelas

Esta es una situación que tiene como objetivo poner en juego el pensamiento variacional de los estudiantes.

Consiste en formar pirámides con arandelas. La situación propone formar grupos de cuatro personas y construir los arreglos, según los siguientes gráficos.

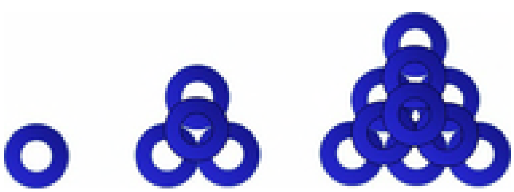


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Actividad 1. Construye la *pirandela* 4.

Actividad 2. Construye la *pirandela* 5.

Actividad 3. Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué está cambiando en la secuencia de las *pirandelas*?
2. ¿Cómo está cambiando esta característica de una *pirandela* a la siguiente en la secuencia?
3. Completa el siguiente cuadro con la cantidad de arandelas en cada caso.

Tabla 2. Registro de arandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base						
Borde de la base						
Total en la base						
Total en la pirandela						

Fuente: los autores.

4. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de *pirandelas* desde la primera hasta la sexta?

Actividad 4. Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?

Actividad 5. Determina cuántas *pirandelas*, como mínimo, se pueden formar con el uso de 1130 arandelas.

Posibles resoluciones para las actividades

Actividad 1. Construir la pirandela 4. A continuación, se presenta una imagen en la que se pueden observar los cuatro primeros arreglos.

Actividad 2.

a. **¿Qué está cambiando?** El propósito de esta pregunta es que los estudiantes logren identificar varias características que cambian en la secuencia cuando se pasa de una pirandela a la siguiente. Algunas de las características que podrían ser identificadas, son:

- El volumen de la pirandela
- La altura de la pirandela
- El peso de la pirandela
- La cantidad total de arandelas
- La cantidad de arandelas en la base
- La cantidad de arandelas en el borde de la base
- La altura de la pirandela

Es importante orientar al estudiante mediante preguntas, por ejemplo, si el estudiante dice: "el lado", usted puede decir: "ayúdame a entender, ¿a qué lado te refieres? ¿El lado de qué figura?" y luego se puede agregar: "¿qué es lo que cambia de ese lado? Lo que deseamos es que la descripción sea precisa, por ejemplo, se puede afirmar: "cambia la cantidad de arandelas en el lado de la base".

Los atributos que identifique el estudiante no necesariamente deben ser cuantitativos, también podría identificar cambios cualitativos, de acuerdo con la situación planteada. En todos los casos, el propósito es ayudar al estudiante a identificar el cambio y no obtener una respuesta "correcta" porque lo que se debe lograr es que el estudiante piense en el cambio.

b. ¿Cómo está cambiando?

Con respecto a la cantidad de arandelas en el lado de la base de la pirandela está aumentando en 1.

Con respecto a la cantidad de arandelas totales en la base

La cantidad de arandelas en la base de la siguiente pirandela se obtiene agregando a la cantidad actual una cantidad de arandelas igual al lugar que ocupa la siguiente pirandela. Estudiantes más avanzados podrán decir que la cantidad es igual a la suma de los n primeros números naturales, donde n es el lugar de la pirandela.

En cualquier caso, el propósito es identificar el patrón de cambio por lo que se debe guiar al estudiante para que identifique cómo es que cambian las cantidades o atributos definidos anteriormente.

c. Completa la siguiente tabla:

Tabla 3. Tabla de registro pirandelas.

	Pirandela 1	Pirandela 2	Pirandela 3	Pirandela 4	Pirandela 5	Pirandela 6
Lado de la base	1	2	3	4	5	6
Borde de la base	0	3	6	9	12	15
Total en la base	1	3	6	10	15	21
Total en la pirandela	1	4	10	20	35	56

Fuente: los autores.

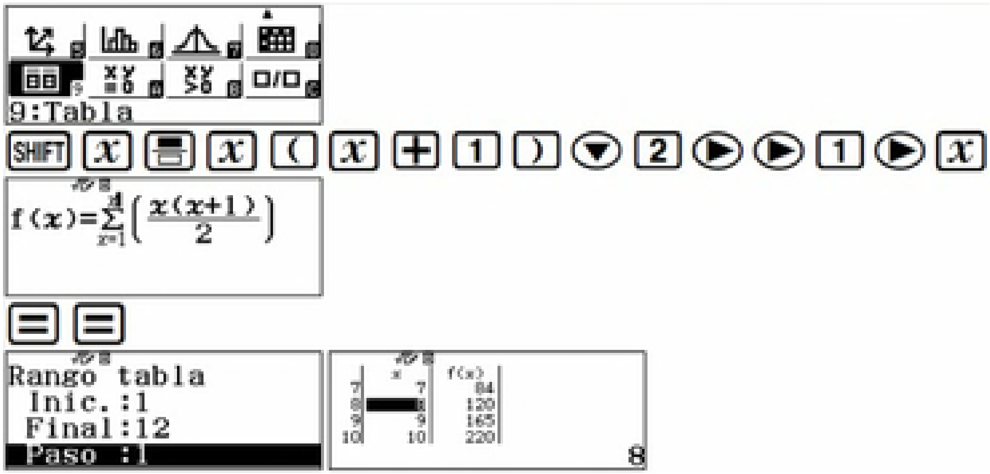
d. ¿Cuántas arandelas son necesarias para construir la secuencia de *pirandelas* desde la primera hasta la sexta?

Podemos hallar el valor directamente de nuestra tabla:
$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$

Actividad 3. Con las arandelas de las primeras 6 pirandelas, ¿cuál es la pirandela de mayor volumen que se puede formar?

La pirandela de mayor volumen es la que tiene más arandelas. Es preciso explorar cuántas arandelas se usan en cada pirandela.

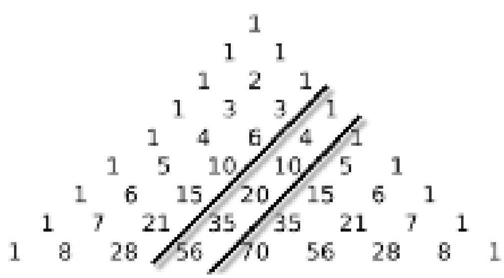
Como el número de arandelas en la pirandela n es igual a la suma de los números desde 1 hasta n, se sugiere hacer una tabla de valores en la que se evalúe la suma de los n primeros números enteros positivos, que representan la cantidad total de arandelas en cada caso.



La pirandela de mayor volumen que se puede formar es la pirandela 8

Otra ruta disponible para hallar la pirandela de mayor volumen es con una inecuación, considerando que la cantidad de arandelas debe ser menor o igual que 126. Es preciso determinar la expresión para la cantidad de arandelas en una pirandela definida. Se muestra cómo hacerlo con números combinatorios y el triángulo de Pascal:

Observe que la cantidad de arandelas totales son los elementos resaltados:



Donde cada uno de los números seleccionados es un número combinatorio.

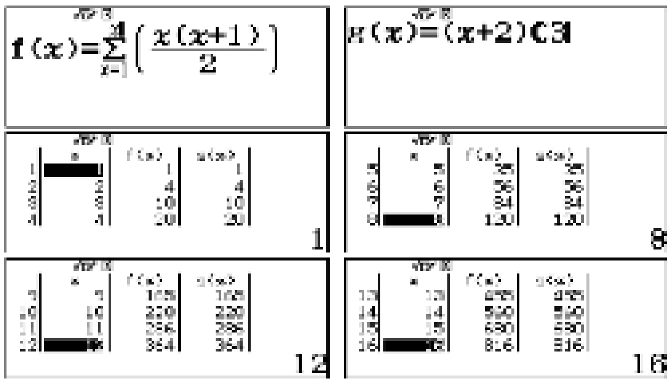
$$C_3^3 = 1; C_3^4 = 4; C_3^5 = 10; C_3^6 = 20; C_3^7 = 35;\ C_3^8 = 56$$

Pirandela	1	2	3	4	5	6
Cantidad de arandelas total	C_3^3	C_3^4	C_3^5	C_3^6	C_3^7	C_3^8

Entonces, podemos preguntarnos: ¿Cuál es la expresión correspondiente para la pirandela de lugar *x*, según la tabla?

Pirandela	x
Cantidad de arandelas total	C_3^{x+2}

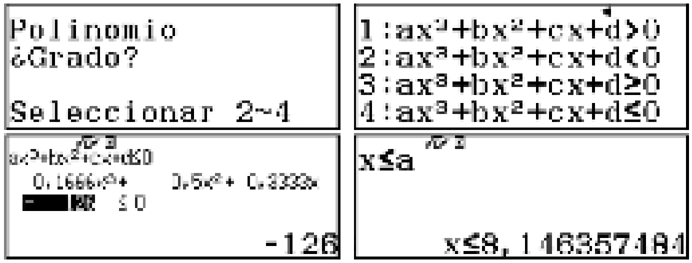
Antes de resolver la inecuación se comprueba que los valores coinciden si se ponen en una tabla de valores y se comparan con los obtenidos mediante suma de consecutivos usada anteriormente:

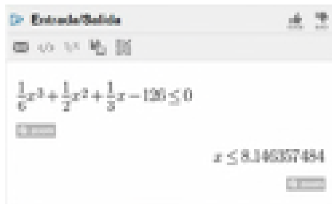


Entonces, la inecuación que se debe resolver es:

$$C_3^{x+2} \leq 126$$
$$\Rightarrow \frac{(x+2)!}{3!\,(x+2\text{-}3)!} \leq 126$$
$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x+2\text{-}1)(x+2\text{-}2)(x+2\text{-}3)!}{3!\,(x+2\text{-}3)!} \leq 126$$
$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)(x)}{3!} \leq 126$$
$$\Rightarrow \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \leq 126$$

En la calculadora esto se resuelve en el modo Desigualdad: MENU B





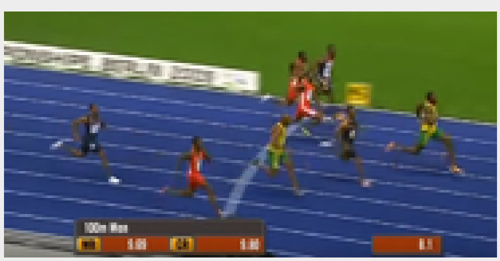
Se puede observar que la pirandela de mayor volumen que se puede construir es la pirandela 8.

Actividad 4. Determina cuántas *pirandelas*, como mínimo, se pueden formar con 1130 arandelas.

Situación 4: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? (Alba y Angulo, 2018)

Ver el video: https://youtu.be/3nbjhpcZ9_g, solamente 15 primeros segundos

Figura 1. Captura de pantalla video de youtube.



Fuente: captura de pantalla de los autores.

Durante el desarrollo de la sesión se utilizó la rutina de pensamiento veo-pienso-me pregunto.

Después de ver el video se pregunta a los profesores-estudiantes **¿Qué ven?**

Algunas respuestas fueron (Intervenciones de participantes):

velocidad esfuerzo alegría un cronómetro tiempo
atletas números camisetas líneas sobre la pista
una cámara de color negro

No todas las palabras listadas anteriormente son respuestas "correctas", en el sentido de que no todas representan algo que se pueda "ver" en el video. En esta etapa de la sesión, se permite que los participantes expresen sus ideas con respecto a lo que otros "ven", y se crea una oportunidad para discutir si lo que unos dicen que "ven" realmente se ve o es su percepción solamente. Por ejemplo, fue común tener profesores que afirmaban que podían ver la velocidad, después de discutirlo en grupo llegaban a la conclusión de que la velocidad no se puede ver, pero sí se puede ver cómo cambian de posición los atletas.

Otra discusión interesante fue sobre "el cronómetro" que algunos vieron y se llegó a la conclusión de que lo que se puede ver es un espacio en la pantalla en el que hay números que cambian de valor y que algunos profesores interpretaron como un cronómetro.

En esta primera parte se puede generar discusión en torno a lo que los profesores ven o creen ver y lo que no es posible ver, como siempre la idea central es brindar una oportunidad para reflexionar cómo llevar esta experiencia y enriquecer el aprendizaje en el aula.

Una segunda pregunta, que está relacionada con la primera es: **¿En qué piensa?**

Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- Un docente que vio en la pantalla "números que cambian de valor", dijo que piensa en el tiempo...
- El docente que vio "atletas corriendo", dijo que eso le hace pensar en la velocidad.
- El docente que vio "líneas en la pista", dijo que pensó en "paralelismo".

La tercera pregunta en la rutina es: **¿Qué se pregunta?**, en relación con lo que vio y pensó.

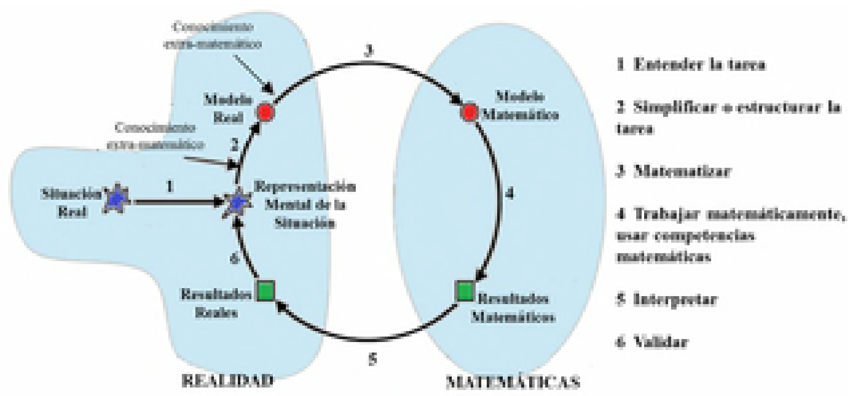
Por ejemplo (Intervenciones de participantes):

- Veo: atletas corriendo, Pienso: en velocidad, Me pregunto: ¿Cuál es la máxima velocidad lograda en la carrera?

- Veo: números que cambian, Pienso: tiempo, Me pregunto: ¿Qué tiempo duró la carrera?

El ciclo de la modelación fue utilizado para solicitar a los profesores ubicar las tareas que realizaban durante la sesión.

Figura 2. Ciclo de modelación matemática para el aula.



Fuente: Blum y Borromeo-Ferri (2009).

Después de observar esta tabla, se hace la pregunta: ¿Qué tan rápido es Usain Bolt? Se presenta una función que describe la rapidez de Usain Bolt.

$$u(t) = \frac{1331(1 - e^{-0,9t})}{110 + 12,1e^{-0,9t}}$$

y se solicita a los profesores que respondan a las siguientes situaciones problemáticas:

a. ¿En qué unidades está expresada la rapidez $u(t)$?
b. Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.
c. Confeccione una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9.$
d. Confeccione una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt, en cada intervalo de un segundo durante la carrera comenzando desde $t = 0.$
e. Confeccione una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9$ durante la carrera.
f. ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de 9 m/s?
g. ¿En qué instante la aceleración instantánea es de 0,5 m/s^2?

Resolución de las preguntas:

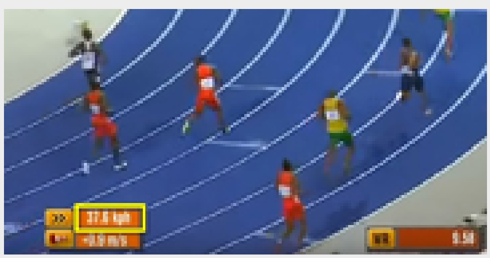
a. La rapidez está expresada en m/s. La pregunta no es trivial y durante las sesiones algunos profesores justificaron su elección de la siguiente manera:

- La rapidez está metros por segundo porque la carrera es de 100 metros.
- Kilómetros por hora, la velocidad generalmente se expresa en kilómetros por hora.
- Metros por segundo, porque la carrera dura casi 10 segundos, entonces el tiempo debe estar en segundos.

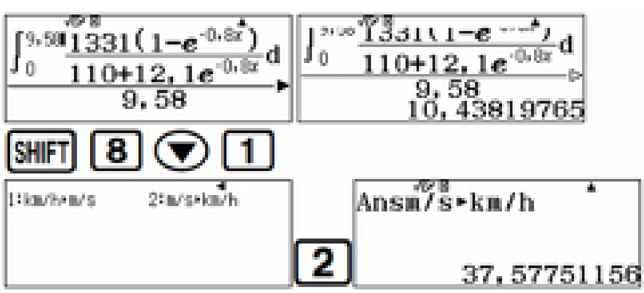
Cabe resaltar que en las anteriores justificaciones el modelo funcional no fue utilizado y, tampoco, la información que brinda el video.

Una manera de justificar o averiguar las unidades de la velocidad usadas en el modelo podría ser determinar la velocidad media y comparar este valor con un valor que se encuentra en el video.

Figura 3. Pantallazo del video de youtube.



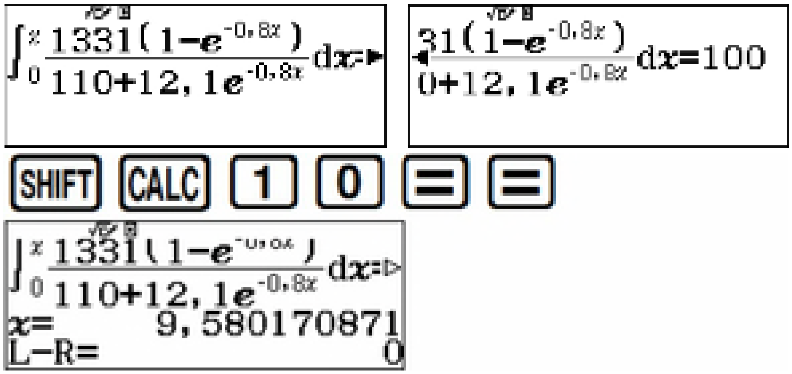
Fuente: captura de pantalla por los autores.



Con lo que podemos verificar que las unidades son m/s.

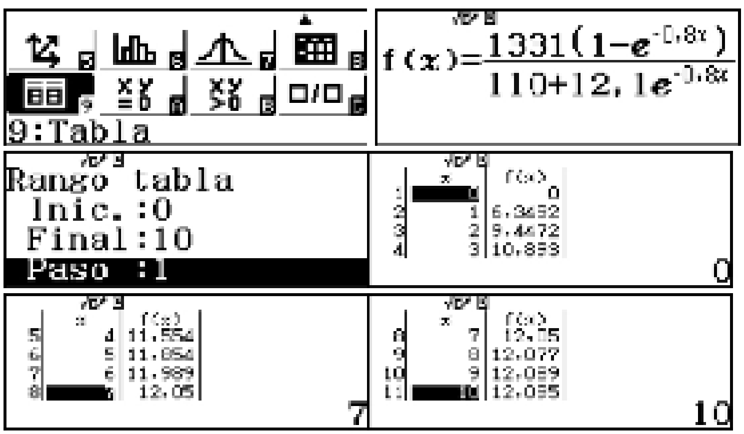
b. Calcule, con el modelo, la duración de la carrera.

Para determinar cuánto dura la carrera con el uso del modelo, se debe determinar en qué tiempo Usain Bolt recorre los 100 m. Para ello, se usa la función Solve.

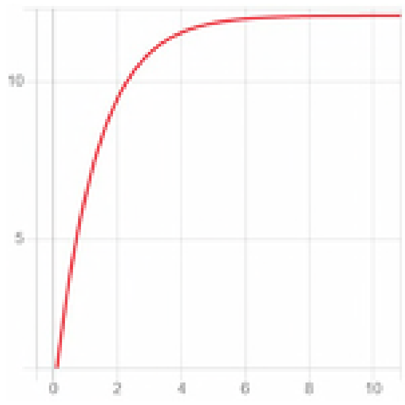


Según el modelo, el tiempo para recorrer los 100 m es 9,58 s.

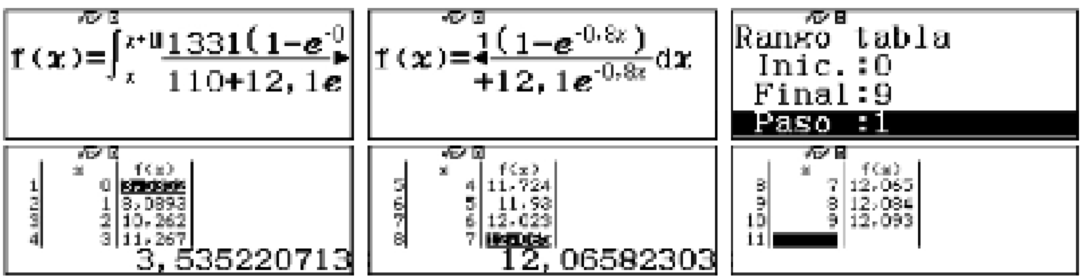
c. Confeccione una tabla con los valores de la rapidez de Usain Bolt para $t = 0,1,2,3,...,9$ s.



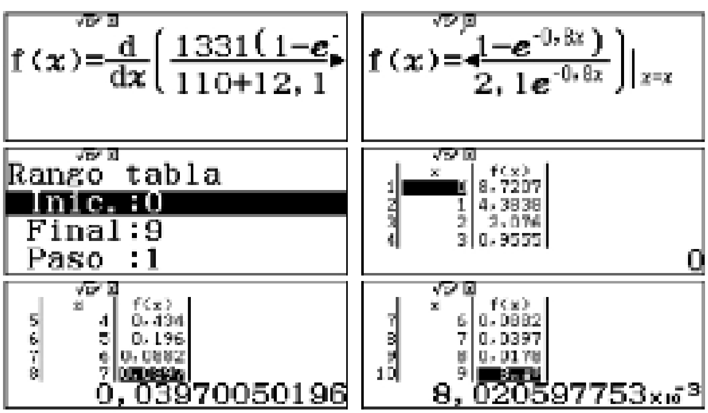
La representación gráfica de la rapidez:



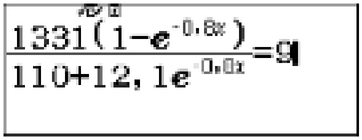
d. Confeccione una tabla del espacio recorrido por Usain Bolt, en cada intervalo de un segundo durante la carrera comenzando desde *t = 0.*

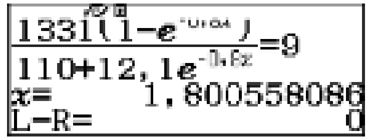


e. Confeccione una tabla con los valores de la aceleración de Usain Bolt para *t = 0,1,2,3,...,9* durante la carrera.

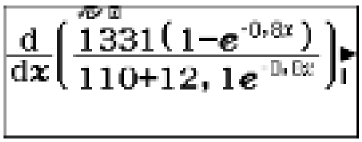


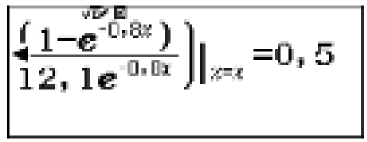
f. ¿En qué instante la rapidez de Usain Bolt fue de 9 m/s?





g. ¿En qué instante la aceleración instantánea es de 0,5 m/s^2?





Reflexiones en torno a la experiencia de formación

Esta experiencia de formación permitió que, a través de situaciones para el desarrollo del pensamiento matemático, con el uso de las calculadoras, los maestros y maestras pudieran realizar trabajo colaborativo por medio de la aplicación con la que cuenta la herramienta e incluir dinámicas tecnológicas que propician un espacio más amigable para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La participación en esta experiencia aportó elementos para reconocer el uso de las tecnologías para el desarrollo del pensamiento matemático, teniendo presente que su éxito depende del tipo de actividades que diseñe el docente y la manera cómo las implemente en la clase. En esta medida, los maestros reflexionaron en torno al desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes a partir de la toma consciente y fundamentada de decisiones sobre actividades, métodos, recursos, técnicas y formas de trabajo que pondrá en juego en el aula.

Por último, los maestros y las maestras reconocieron que la mejora de su práctica requiere de un análisis sistemático, continuo y profundo de la manera de planeación de secuencias de aprendizaje, la implementación en el aula de las tareas diseñadas, la evaluación de la efectividad y pertinencia de las tareas diseñadas y la reflexión de las transformaciones y comprensiones logradas.

Bibliografía

Alba, J. y Angulo, A. (2018). *Diseño de actividades de modelación y análisis con el uso de calculadora de pantalla gráfica.* Universidad de la Sabana.

Albergaria, I. y Ponte, J. (2008). Cálculo mental e calculadora. En A. Canavarro, D. Moreira y M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). SEM-SPCE

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Campbell, P. y Stewart, E. (1993). Calculators and computers. En R. Jensen (Org.), *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). Macmillan.

Carmona-Mesa, J. Salazar, J. y Villa-Ochoa, J. (2018). Uso de calculadoras simples y videojuegos en un curso de formación de profesores. *Uni-pluriversidad, 18*(1), 13-24.

Conti, K., Vilela, M. y Pinto, N. (2017). ¿Qué piensan los futuros profesores sobre el uso de la calculadora en la educación primaria? *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 2*(1), pp. 4-14 .

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (W, Cockcroft, traducción). Ministerio de Educación y Ciencia (Original publicado en 1982).

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas.* Panamericana Formas E Impresos S.A.

Ortiz, J. (2006). Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Una discusión altual hacia la transformación de la práctica. *Sapiens, 7*(2), 139-157.

Selva, A. y Borba, R. (2010). *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental.* Autêntica.