 <p>DOI: 10.24275/uama.2001.9175 PUBLICACIÓN COLECTIVA</p> <p>La interdisciplina en el estudio de la forma urbana</p> <p>COORDINACIÓN DE LA PUBLICACIÓN Elizabeth Espinosa Dorantes   Christof Göbel   Salomón González Arellano</p>	<p><b>Tonatiuh Suárez Meaney</b> ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0003-2534-7126">0000-0003-2534-7126</a></p> <p><b>Héctor Rezendiz López</b> ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0003-3748-0274">0000-0003-3748-0274</a></p> <p><b>Jair Arriaga Carbajal</b> ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0001-6514-5153">0000-0001-6514-5153</a></p> <p><b>Luis Chías Becerril</b> ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0003-0686-0936">0000-0003-0686-0936</a></p> <p><b>La medición de la dimensión fractal en las ciudades, una aproximación para conocer su eficiencia en movilidad</b></p> <p>Páginas 59-75</p> <p>En:</p> <p>La interdisciplina en el estudio de la forma urbana. Análisis y diagnósticos de la forma urbana / Elizabeth Espinosa Dorantes, Christof Göbel y Salomón González Arellano, coordinación de la publicación. Ciudad de México: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias y Artes para el Diseño, 2022. 223 páginas.</p> <p>ISBN: 978-607-28-2622-9</p> <p>Es parte de: <a href="https://doi.org/10.24275/uama.2001.9175">https://doi.org/10.24275/uama.2001.9175</a></p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

 <p>Universidad Autónoma Metropolitana Casa abierta al tiempo <b>Azacapozalco</b></p> <p>Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco</p> <p><a href="https://www.azc.uam.mx/">https://www.azc.uam.mx/</a></p>	 <p>Ciencias y Artes para el Diseño</p> <p>División de Ciencias y Artes para el Diseño</p> <p><a href="https://www.cyad.online/">https://www.cyad.online/</a></p>	 <p>Departamento de Evaluación del Diseño en el Tiempo</p> <p><a href="https://evaluacion.azc.uam.mx/">https://evaluacion.azc.uam.mx/</a></p>
 <p>Área de Arquitectura y Urbanismo Internacional</p> <p><a href="http://aau.azc.uam.mx/aau/">http://aau.azc.uam.mx/aau/</a></p>		

	<p>Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como Atribución-NoComercial-SinDerivadas <a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/</a></p>
-------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## La medición de la dimensión fractal en las ciudades, una aproximación para conocer su eficiencia en movilidad

**PALABRAS CLAVE:**  
dimensión fractal, ciudades,  
movilidad

**KEYWORDS:**  
fractal dimation, cities,  
mobillity

### RESUMEN

La complejidad de la forma de las ciudades obliga al uso de geometrías más complejas que las tradicionales para su descripción y análisis en la investigación. La forma de las ciudades puede referirse a la forma externa (contorno) o interna (estructura vial). El interés de este trabajo es medir el contorno, pues se parte de señalar que su complejidad se relaciona con los procesos de construcción urbana que, a su vez, tienen que ver con la movilidad en la ciudad. Una de las geometrías útiles para este fin es la fractal. En este trabajo se ha calculado la dimensión fractal de las ciudades mexicanas de más de 200 mil habitantes, porque de éstas existe información ordenada de distintas fuentes; para, posteriormente, analizar la correlación de esta variable con las variables de movilidad, en particular, las estimadas por el Instituto Mexicano de la Competencia (IMCO). La correlación ha sido alta y negativa entre la dimensión fractal del contorno urbano y las variables relacionadas con alta movilidad, deduciéndose que sí puede relacionarse la complejidad de los contornos con la dificultad que tienen las personas para moverse de un lugar a otro en su ciudad, perspectiva desde la cual se pueden realizar nuevos estudios. Para las estimaciones se desarrolló una aplicación de cálculo de dimensión fractal que se liberó en la plataforma de QGIS y está disponible para todo público.

### ABSTRACT

The description of the shape of cities requires the analysis of complex geometries in two ways, 1) the shape of city contour, and 2) the inner shape of street network. Quantify contour characteristics it is important because its intrinsic relation with urban construction process, which is related to urban mobility.

Fractal geometry can be applied for this purpose: in this paper the fractal dimension of Mexican cities with more than 200 thousand inhabitants has been calculated and then the relationship of this result with the mobility variables of the Mexican Institute of Competition (IMCO) has been analyzed. The connection has been high and negative between the fractal dimension of the urban contour and the variables related to high mobility, so it can be deduce that the complexity of the city contours is related to the difficulty for the people to move, therefore is relevant to measure this in more specific ways.

Also for application purposes an for the investigation of the fractal dimension has been developed a plugin for the open software QGIS.

## Antecedentes

La forma de las ciudades puede verse desde distintas perspectivas, desde el contorno o desde la forma interna de sus redes viales y movilidad, entre otras. La forma urbana no se refiere a la demografía, historia u otros elementos de la ciudad que no sean perceptibles por la vista, más bien, se refiere a todo aquello, diciéndolo de una forma cotidiana, que se puede apreciar con los ojos. Lo anterior no implica que la forma urbana sea únicamente parte de la información cualitativa de una ciudad, también puede cuantificarse a partir de distintas geometrías, no sólo la euclidiana. Los planos por manzanas pueden analizarse en sus áreas, longitudes y densidades con ayuda de la geometría euclidiana, pero en las estructuras viales son útiles los análisis de redes, mientras que el contorno urbano puede analizarse con geometría fractal. Por ello, el objetivo de la presente investigación es comparar la dimensión fractal de ciudades mexicanas con indicadores de movilidad para determinar si la forma se relaciona con ésta. También se mencionarán algunas de las características de las ciudades de formas complejas, porque estas formas se relacionan con efectos adversos para la población como la falta de movilidad.

### La importancia de las nuevas geometrías

La geometría fractal es un concepto importante en las matemáticas porque permite representar o investigar objetos que no es posible escudriñarlos con geometrías

de tipo euclidiana. Cuando en la ciencia surge una nueva geometría, tiene gran influencia en distintos campos; se dice que Descartes descubrió la geometría analítica, acostado en su cama enfermo y con fiebre, observando en el techo cuadrulado de su recámara como una mosca se desplazaba. Las formulaciones de la geometría analítica de Descartes permitieron a Newton y Leibniz, cada uno por su cuenta, desarrollar el cálculo. Más de un siglo después, Lobachevsky y otros matemáticos, prescindiendo del quinto axioma de Euclides (dos líneas paralelas nunca se tocan), desarrollaron geometrías no euclidianas que permitieron a Einstein desarrollar su teoría de la relatividad.

Así también, la geometría fractal que en un inicio era considerada de “meras ‘mounstruosidades’ geométricas e inaplicables divertimentos matemáticos”, permitieron después describir la distribución de las estrellas, la ramificación alveolar en los pulmones, las nubes o los precios en la bolsa (Talanquer, 2011; Mandelbrot y Hudson, 2006), así como comportamientos del mercado (Mandelbrot y Hudson, 2007; Fernández-Martínez, 2019), el estudio de la música (Hsü y Hsü, 1990), la salud de un corazón (Rodríguez *et al.*, 2012; Caycedo, 2012), el comportamiento de terrenos (Pueras, 2016) y muchas otras aplicaciones que no caen en un positivismo posmoderno de simples analogías tomadas prestadas de la ciencia básica, como ha pasado en múltiples ocasiones cuando se aplica la física de forma artificial al psicoanálisis o a la sociología (Sokal y Bricmont, 1999; Hernández, 2000; Boneel, 2008). Esto

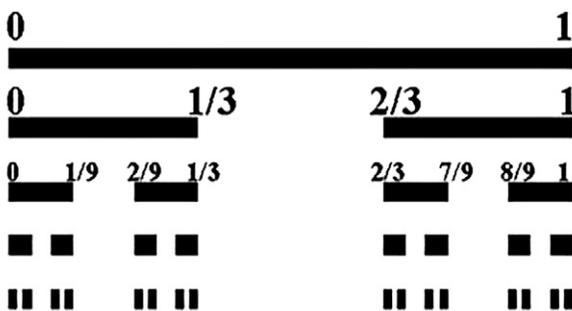


Figura 1. Conjunto de Cantor. En <https://matemelga.files.wordpress.com/2018/09/ccantor.jpg>

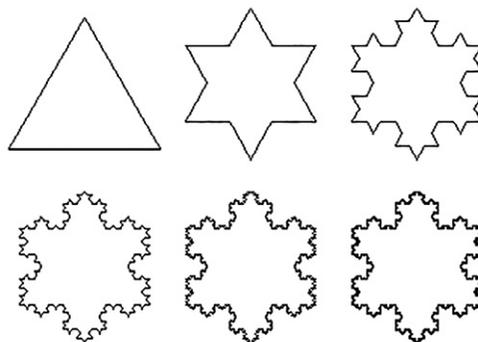


Figura 2. Estrella de Koch. En <http://4.bp.blogspot.com/-HlqVcvDfjMU/TocygJJmbJI/AAAAAAAAAAo/KOOP2Mlio8K/s1600/Koch.gif>

es porque la geometría fractal no es una analogía, sino un modelo del proceso autorrecurrente natural en que se generan muchos fenómenos físicos o sociales, permitiendo aplicaciones fértiles (Alcantud, 2018), que no siempre ocurre con la aplicación de la geometría tradicional cuando describe objetos naturales (Naumis, 2008).

### Ideas básicas de la geometría fractal

#### *Fractales en distintas dimensiones*

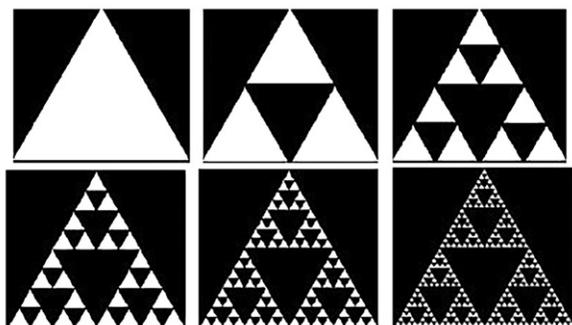
Las primeras ideas de la geometría fractal surgen con procesos recursivos en una dimensión, en particular, con el conjunto de Cantor, que puede ser visto como una sucesión de líneas que se obtienen al dividir una línea en tres partes iguales, borrar la de en medio; repitiendo el proceso para cada una de las dos líneas “sobrevivientes” de forma infinita, produciendo una sucesión de líneas que no cubre todo el espacio disponible de una dimensión, como se representa en la Figura 1.

Helge von Koch en 1904 (Talanquer) dio un paso más al definir el proceso no sobre una línea sino sobre una curva, a la que se llama copo. De forma análoga al conjunto de Cantor, pero partiendo de un triángulo en el que cada línea del mismo se divide en tres partes iguales, y la de en medio se sustituye por un ángulo equilátero que conecta con las líneas sobrantes, se repite el proceso de forma similar, así el resultado, como en el conjunto de Cantor, es un sistema que mediante un algoritmo muy simple, deriva en una forma muy

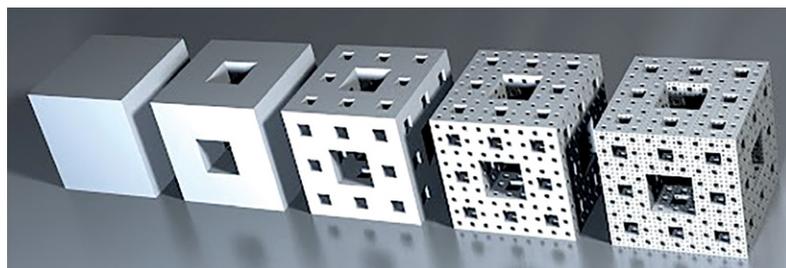
compleja; una regla sencilla, repetida muchas veces a diferente escala, como se ve en la Figura 2. Esto ya es un continuo que podría representar el contorno de una ciudad, una hoja, u otros objetos de configuraciones orgánicas.

Este tipo de procesos son generalizables al espacio interior de un contorno, como el llamado “empaquetado de Sierpinsky”, mostrado en la Figura 3. En los ejemplos anteriores vemos como un espacio lineal que puede describir un espacio bidimensional llamado  $R^2$ , donde un objeto ocupa distintas proporciones del espacio disponible por sus límites, puede ocupar menos espacio si el algoritmo se repite pocas veces o más si ocurre lo contrario. Por supuesto, que también se puede generalizar un proceso similar al espacio  $R^3$ , también llamado tridimensional, obteniendo hermosos objetos geométricos como la esponja de Menger mostrada en la Figura 4. Hay un límite del espacio que puede ocupar de su espacio disponible que viene dado por la dimensión fractal.

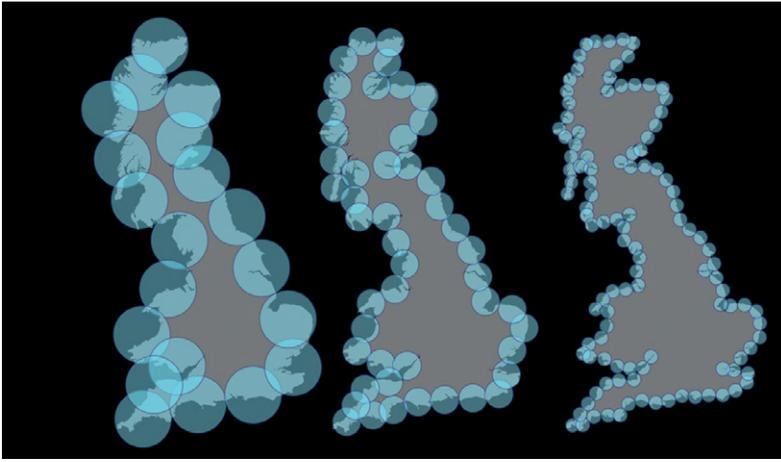
Incluso se pueden generalizar estos procesos a cualquier dimensión espacial, hay ejercicios para imaginarlos en cuatro dimensiones ( $R^4$ ), pero, por si fuera poco, no sólo es válido en espacios de dimensión entera, llamados  $R_n$ , sino en espacios de dimensiones fraccionales. Uno de los grandes poderes de la geometría fractal, como herramienta de comprensión espacial, es su capacidad de describir objetos de dimensiones intermedias entre las enteras. En nuestros ejemplos, el conjunto de Cantor que examinamos, tiene una dimensión fractal



**Figura 3.** Empaquetado de Sierpinsky. En <https://sferrerobravo.wordpress.com/2009/08/19/sierpinski-hanoi-pascal/triangulo-de-sierpinski/>



**Figura 4.** Esponja de Menger. En <http://www.epsilon.es/material/curvas/035-esponja-menger-sec-g.jpg>



**Figura 5.** Cuánto mide la costa de Inglaterra. En <https://vonneumannmachine.wordpress.com/2012/11/28/la-costa-de-gran-bretana/>

de 0.6, es decir, no ocupa completamente las posibilidades que le da el  $R^1$ , o espacio unidimensional; la curva de Koch de 1.26 y la esponja de Menger, 2.72, son objetos que tal como están definidos no ocupan la totalidad del espacio del que disponen con sus límites en su propia dimensión en la que a simple vista parecieran estar.

Así vemos que aquí no se cumpliría el propósito de la geometría tradicional de asignar una, dos o tres dimensiones a todo objeto. La geometría fractal admite infinitas dimensiones intermedias, podría, por ejemplo, definirse una dimensión  $P_i$  o bien estimar la dimensión fractal para los dígitos de  $P_i$  que es muy cercana a 1.5, valor que se registra en las series aleatorias (Vannouplines, 1995). Así como las paralelas euclidianas no funcionan en las geometrías hiperbóreas, las dimensiones fractales no pueden caer en sólo tres dimensiones.

Vemos que en todos estos objetos, el común denominador es, por un lado, que una parte del objeto se parece al total del objeto con estructuras similares y, por otro lado, que no ocupan todo el espacio que tienen disponible dentro de sus límites. Es a lo que se le suele llamar *autosimilitud*, que aquí ha sido lograda mediante un proceso de *recursividad*. Ambos conceptos son propios de la geometría fractal. Los algoritmos de los que se ha hablado hasta aquí se refieren a procesos determinísticos, que permiten predecir el estado del objeto en cualquier momento del algoritmo. Por ejemplo, en la segunda estrella de Koch de la Figura 2, se cuentan 6 picos en el estado dos del algoritmo, los objetos que vemos en el mundo real pueden parecerse a esas estructuras pero no son predecibles de forma exacta.

#### *Fractales geométricos y estadísticos*

De esta manera se reconoce que existen formas *fractales geométricas* como las expuestas anteriormente, y las formas *fractales estadísticas*, que no obedecen a un

algoritmo riguroso sino que el resultado de los procesos que llevan a ellos se parecen a los objetos fractales. Los procesos naturales, mezcla de una carga determinística y una aleatoria, generan formas similares, por lo que la geometría fractal permite analizarlos en una mezcla de geometría y estadística, que pueden describir formas más orgánicas y naturales, afectadas por procesos azarosos.

En una conceptualización de los fractales no determinísticos, Benoit Mandelbrot (1967) se preguntó cuánto medía la costa de Gran Bretaña respondiéndose el mismo, que lo que cada quien quisiera, dependiendo del tamaño del instrumento de medición usado, como se aprecia en la Figura 5, pues siempre puede hacerse una medición por medio de tramos rectos, con rectas más cortas, y la longitud total crecerá, tanto como lo desee quien mide. Lo anterior emula un proceso fractal porque el largo de la costa en realidad es una convención sobre la escala usada, así, reglas más pequeñas irán aproximando longitudes más grandes, las figuras serán diferentes en el detalle, pues con cada medición la longitud cambia. Aquí no hay una aproximación determinística basada en un algoritmo, sino que la medida de la costa es orgánica, es la naturaleza “dibujando” con gran carga de azar, más o menos como los seres humanos en grupo van “dibujando” sus ciudades.

El éxito de “los fractales” como herramientas de análisis, es porque permiten representar el comportamiento aparentemente caótico a través de algunas expresiones ordenadas, pero que son auto recurrentes (Mandelbrot, 2007). También han servido en áreas de innovación para conocer mejor muchos fenómenos aparentemente irregulares que tras un análisis fractal muestran patrones, como en la cardiología (Caycedo, 2012; Rodríguez et al., 2012); en finanzas, como el mismo Mandelbrot demostró, contra la determinística de los modelos tipo Black-Sholes (Mandelbrot y Hudson, 2006); en el arte, en la arquitectura rebelde que no admite formas fijas, como la de Wright o Eisenman (Alzogaray, 2007); o hasta en la música, profana o bachística (Hsü y Hsü, 1990). En algunas áreas los modelos fractales han tenido mejores posibilidades que en otras. En el estudio de las ciudades el análisis de la forma fractal puede ser útil debido a que los contornos crecen de forma que parece caótica, pero que en realidad obedece a algunas

reglas, que al no ser algorítmicas se verán reflejadas sólo estadísticamente.

### Fractalidad en el estudio de las ciudades y el urbanismo

La fractalidad de las ciudades es un fenómeno que ha sido estudiado de muchas formas, con imágenes de satélite (Weng, 2003); con autómatas (White y Engelen, 1993); a partir del crecimiento (Batty, *et al.*, 1989; Shen, 2002); con métodos de simulación (Batty y Longley, 1986); u orientándose a la distribución espacial y poblacional (Frankhauser, 1998). Pero, aunque es muy variada la temática, no existen demasiadas herramientas informáticas para su análisis. A diferencia de otros conceptos que el urbanismo ha tomado prestados de la física como el de gravitación o la permeabilidad, el de fractalidad parece ser más natural, pues en realidad las ciudades tienen una forma fractal y como hemos dicho antes, no se trata sólo de una analogía didáctica. La fractalidad describe bien el desarrollo de las ciudades, el efecto de cómo en éstas van quedando espacios vacíos y, posteriormente, se van llenando de urbanización, gracias a los fenómenos inmobiliarios por la misma naturaleza del capitalismo.

El efecto, por esta forma de utilizar el suelo, es de un uso ineficaz del espacio que afecta socialmente, incidiendo en la isla de calor y el calentamiento global. Los contornos urbanos en un mundo ideal serían compactos; una ciudad hecha para la gente tendría numerosos espacios interiores para la comunicación y espacios al aire libre, por fuera sería un continuo eficiente. Pero la competencia por el suelo genera desocupación, subocupación o sobreocupación irracional. Las ciudades se han vuelto dispersas porque los precios del suelo han dejado de ser accesibles para toda la población, entonces, la población tiene que ir a donde aún no hay ciudad, que son áreas con suelos de precios más baratos pero más inaccesibles. Esa no-ciudad se vuelve “ciudad”, contradiciendo la conectividad que debería tener toda ciudad. Ese aparente caos puede ser analizado con observaciones estadísticas que describen las geometrías fractales (Shen, 2002). En una estructura simple los caminos pueden recorrerse fácilmente, pues el transporte es más eficiente, la gente dedica más tiempo a

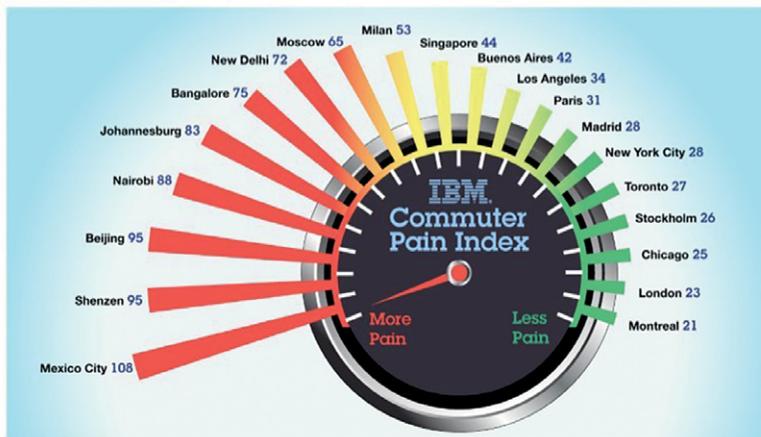


Figura 6. Sufrimiento del viajero en distintas ciudades (Gyimesi *et al.*, 2011).

cuestiones sustanciales como el trabajo, la convivencia, pero el crecimiento de las ciudades se puede relacionar con baja capacidad de movilidad.

En 2011, IBM realizó una encuesta sobre el sufrimiento del viajero (Figura 6), presentando el problema de las grandes ciudades y como su tamaño incide en el sufrimiento de los viajeros debido al estrés por tráfico, gasto en movilidad y otros factores. La Ciudad de México resultó ser la ciudad con mayor sufrimiento de los viajeros.

*Mexico Showed up as the 'most painful' city for commuting, while Montreal, London and Chicago came out the 'best' though as this survey shows, 'best' is highly reactive to the cities we studied. Furthermore, a phenomenon we will investigate in a follow-up paper, while the commute has in fact become more significantly more bearable in the past year, perceptions of pain have rather increased (Gyimesi *et al.*, 2011).*

### Formas de crecimiento urbano

Aunque el crecimiento de la ciudad puede estar relacionado con la falta de movilidad, no todas las ciudades crecen de igual forma.

### Patrones de crecimiento

Distintos estudiosos de las ciudades, a lo largo de los años, han definido varios modelos bajo los cuales se supone que las ciudades crecen. Burgess y otros teóricos aseguraban que las ciudades en los años 50 crecían formando círculos concéntricos, lo cual ocurría así, en cierto sentido, pero sólo en términos generales. Gran parte de las ciudades mexicanas crecen a partir de un núcleo histórico donde viven las familias más antiguas, que llegaron primero, y más tarde la ciudad se va poblado hacia la periferia, hacia donde va llegando gente más joven con hijos pequeños (Álvarez, 2011). Aunque

aún existe el debate respecto a los modelos de crecimiento urbano, se puede comprender que en casi todas las ciudades existe al menos un centro muy importante, con mayor precio de suelo.

Muchas veces por la voracidad de la industria habitacional, la ineficiencia gubernamental, la complejidad geográfica o por otros motivos, las ciudades se transforman en sitios que en lugar de facilitar la vida mediante la concentración de actividades y mercancías, acercando a las personas, como era su objetivo inicial, la complican. En las ciudades se crean guetos, zonas de pobreza o cinturones de miseria. También obligan a personas originarias de colonias o barrios a irse de sus lugares natales debido al incremento del precio del suelo ya sea propio o rentado, mediante un proceso que ahora tiende a ser llamado gentrificación.

Así, un espacio gentrificable es aquel que está formado por zonas residenciales que pueden ser rehabilitadas o sustituidas produciendo en ambos procesos una serie de plusvalías con lo cual una población con unas determinadas características socio demográficas, en la mayoría de los casos con ingresos bajos o moderados, puede ser desplazada y sustituida, más si esas características se imbrican con una determinada condición respecto a la tenencia de la propiedad, por ejemplo, ser alquilados en vez de propietarios (Checa-Artasu, 2011).

De este modo, llegamos a la paradoja moderna de que la ciudad, en un momento dado, puede dejar de cumplir su función básica de eficientizar y acercar actividades, así como en un momento las ciudades, en lugar de generar desarrollo cultural, comenzaron a generar desigualdad, pobreza y con ello criminalidad. Para examinar lo anterior es necesario revisar las formas como crecen las ciudades. Se analizan las más importantes (Figura 7):

*Desurbanización.* En algunos casos excepcionales, las ciudades pueden irse desocupando –aunque casi siempre crecen positivamente–, esta es la forma de crecimiento negativo, al menos territorialmente.

*Intraurbanización.* La ciudad puede crecer en ocupación sin ir más allá de sus límites exteriores. Con la ocupación de terrenos interiores, o sustitución de usos no utilizados o incremento de la densidad. Se considera una forma sana de crecimiento para las ciudades –siempre y cuando no aproveche las áreas verdes en

nuevas urbanizaciones–, pues las nuevas ocupaciones no requieren de nueva infraestructura ni servicios, lo cual contribuirá a las ventajas de las ciudades que son la seguridad, movilidad, eficiencia energética, abasto, etc. De aquí resultan ciudades compactas, que el urbanismo ve bien en contraposición a las dispersas (Oyón, 2011).

*Periurbano.* Surge casi siempre ante el elevado precio de la tierra interior, así que se genera una demanda de suelo más barato por fuera del contorno de la ciudad. El esquema de periurbanización implica una absorción paulatina de las zonas aledañas a la ciudad (Sánchez, 2009). De esta forma la periurbanización puede ser descrita como un proceso que integra las áreas rurales, o al menos, no urbanas, dentro de las denominadas regiones urbanas, en forma paulatina, con facilidad de conexión a las redes. Esas zonas, aunque no son céntricas, incrementan su valor y no tienen grandes problemas de conexión a servicios o vialidad. Aprovechan al menor costo la conexión a la ciudad.

*Suburbano.* Un modelo que requiere construcción de conexiones nuevas, pero se hace en suelo muy barato, en ocasiones de valor cero, por lo que puede resultar en una transferencia de valor de lo público a privado, ya que normalmente los municipios realizan la conexión a servicios y los desarrolladores de vivienda ven elevados los precios de su vivienda que son quienes cobran el precio a los consumidores habitacionales. Esto puede terminar en prácticas corruptas. Esta forma de crecimiento se da cuando la ciudad se desarrolla en lugares alejados, como suburbios. Para que ocurra debe haber una economía de transporte basada en el auto privado con viajes individuales. Un caso particular es la llamada “Edge City” que es una ciudad con todas las comodidades y especializada en alguna clase de servicios que se encuentra cerca de otra ciudad, que satisface sus demandas generales y que en ella confluyen no sólo zonas habitacionales sino también desarrollos corporativos donde trabajan muchos de sus habitantes. Pero también puede derivar en barrios pobres.

*Sprawl o suburbanización por derrame.* Es un proceso similar al suburbano, pero que se repite indefinidamente para cada nuevo desarrollo que vuelve a dar soporte para otros desarrollos que crecen a partir de éste. Es el modelo que nos interesa en este estudio, pues se trata

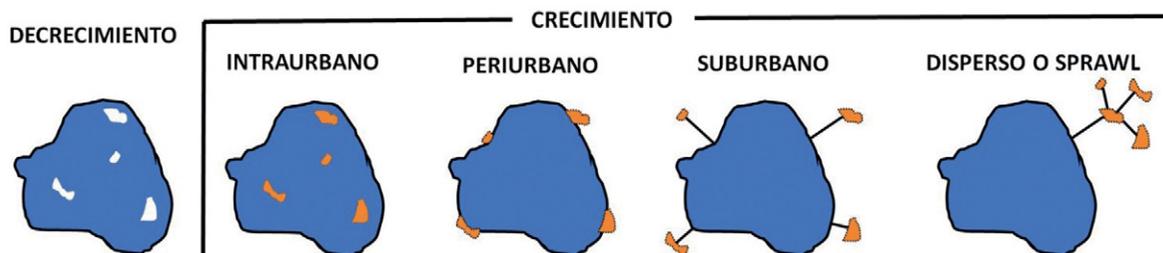


Figura 7. Formas de crecimiento urbano. Fuente: elaboración de los autores.

del proceso que más desordena la forma urbana y hace que las formas urbanas sean complejas, discontinuas y que no aprovechan el espacio, y sobre las que es difícil moverse para los ciudadanos, volviéndolas no sustentables, que ocupan espacio que debería ser recreativo, en terrenos para la especulación o en predios invadidos, subutilizados o sobreutilizados. En este patrón, la ciudad se expande, por lo general, de manera horizontal y discontinua fuera de sus límites, ya sea con viviendas precarias de mala calidad o con las construidas por consorcios vivienderos, muy pequeñas, hechas en serie, pegadas unas a otras, que desde el cielo parecen alfombras de casas. Estas urbanizaciones son de baja densidad aunque a la vista parezcan lo contrario, requieren de alta inversión en conexión a servicios, dificultan la vida de las familias, sacrifican grandes dotaciones de espacios públicos por limitados espacios privados, originan grandes desplazamientos a las zonas de trabajo haciendo que los padres convivan poco con sus hijos, alterando ciclos alimenticios, desplazando tiempo de entretenimiento y deporte. Es un fenómeno que se presenta desde 1950, suele medirse por el consumo de

suelo urbano, pero no existe una metodología específica ni una base de datos global para realizar comparaciones en espacio.

### El sprawl y su relación con fenómenos

En la Figura 8 se aprecian dos ciudades con distinto nivel de fractalidad. Una ciudad compacta como la de la izquierda reporta trayectos más cortos en proporción al tamaño de la ciudad que una ciudad fractalizada. La ciudad de la derecha que es más fractalizada permite observar que cualquier sistema de transporte será más difícil de operar. Al mismo tiempo, no permite generar ahorros de conexión sobre los servicios públicos. En una ciudad de forma muy compleja, podemos imaginar que la gente dedica más tiempo al transporte, que al deporte, que se estresa en los viajes diarios en lugar de encontrar espacios de relajamiento; no ve a su familia el tiempo necesario, produciendo daños a la salud física y mental. También se puede pensar que las zonas alejadas en estas ciudades, pueden ser más inseguras, pues los recursos policiales son más fáciles de optimizar en las zonas compactas.

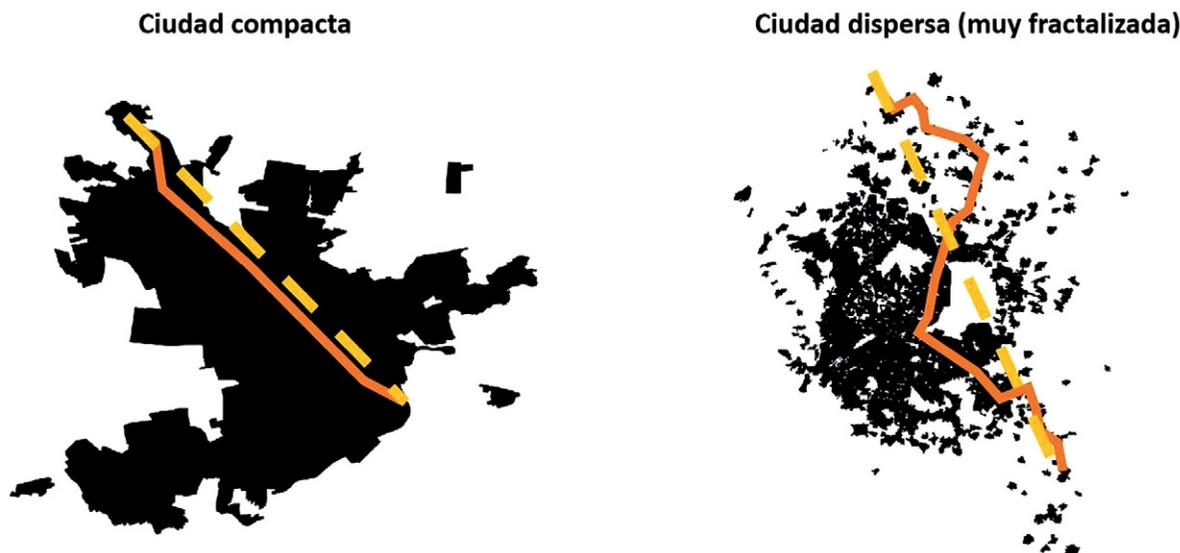


Figura 8. Comparación entre una ciudad compacta y una dispersa. Fuente: elaboración de los autores.

### Clasificación y medición del crecimiento *sprawl*

Muñiz (*et al.*, 2006), puntualizan que la definición de crecimiento *sprawl* no ha sido clara siempre, y clasifica tres tipos de “seudo definiciones”;

- 1) las que hacen analogías,
- 2) las estéticas, y
- 3) las que juzgan por las causas del fenómeno.

Dichos autores consideran que la morfología de las ciudades tiene cinco dimensiones: baja densidad, baja centralidad, baja proximidad, baja concentración y discontinuidad. Todas estas dimensiones se relacionan, en cierta forma, con la fractalidad. La baja densidad ocurre cuando buscando un precio de tierra económico para poder construir viviendas unifamiliares, los desarrolladores salen de la ciudad y urbanizan lejos del centro en sitios sin conectividad. Al plantarse distintos desarrollos fuera de la ciudad la centralidad baja. Evidentemente esto se relaciona con una proximidad baja también e implica baja concentración espacial generando asentamientos discontinuos. Los autores destacan que esto implica un consumo excesivo de suelo, considerándose así cuando el crecimiento de la incorporación de suelo es mayor que el crecimiento poblacional. Una característica de este crecimiento es que separa los usos habitacionales de los productivos, pues no resultan interesantes las áreas incorporadas a la ciudad para quienes desarrollan actividades económicas, así que permanecen en las áreas centrales. Algunas de las causas que mencionan los autores del *sprawl* son: los deseos familiares de poseer una casa con terreno, la conectividad existente que permite trasladarse desde sitios periféricos, la tecnología de internet que permitiría trabajar desde casa o al menos conectarse electrónicamente. Sin embargo, no mencionan los precios de suelo que puede ser una importante causa.

Existen muchas formas de medir el *sprawl*. Un estudio de *sprawl* en Tenerife, indica que puede medirse a nivel regional o a nivel catastral (Vera, 2013). Se han llegado incluso a utilizar fotografías de luces nocturnas que permiten ubicar los centros urbanos y su dispersión mediante una regresión logística (Arellano y Roca, 2015). Se puede medir en términos de la proporción del contorno con el área, el tamaño del perímetro, por

la lacunaridad o por la fractalidad. Aquí examinamos sólo la dimensión fractal como instrumento de medida.

### Dimensión fractal

Existe gran variedad de formas en que se mide la dimensión fractal: la Hausdorff-Besicovitch, la Minkowski-Boulingand, la dimensión de capacidad y la de similaridad, que se pueden calcular de distintas formas, ya sea por el método Calliper, basado en medidas lineales, el método de conteo de cajas, que utiliza distintas mallas de diferentes escalas para determinar la proporción de ocupación de cada cuadro por la forma analizada, el método de dilación de pixel para la Minkowski-Boulingand, basado en una infinitud de pequeños círculos, y el método de radio de masa que se establece en la porción de imagen encontrada dentro de un conjunto de aros concéntricos cubriendo la imagen (Shen, 2002).

En el presente estudio se utilizará el cálculo por la técnica *box counting*, que es amplia y bien descrita en muchos textos (Montoy, 2002; So *et al.*, 2017; Aguirre, 1997). Aguirre (1997) presenta un interesante ejercicio para explicar el algoritmo mediante el cálculo de la dimensión fractal (DF) del contorno de la república mexicana. También existe *software* que permite estimar la dimensión fractal de una figura, como el *software Frog* desarrollado por Parrot (2010) del Instituto de Geografía de la UNAM, quien también ha incursionado en el estudio de la caracterización urbana mediante esta técnica (Parrot y Ramírez, 2015). *Frog* tienen grandes posibilidades, pero no se ha utilizado para este trabajo por la interoperatividad que se requiere con sistemas de información geográfica y la posibilidad de tratar archivos con múltiples objetos (contornos de varias ciudades).

### Box counting

El método consiste en encuadrar la figura de la que se desea estimar la dimensión fractal, que nos dirá, en cierta forma, que tan fragmentada está. Es decir, ubicar el menor cuadrado que inscribe la figura. Ese cuadrado que tiene una longitud  $L$ , se divide en cuatro cuadrados iguales de longitud  $L/2$ . A su vez cada cuadro nuevo se vuelve a dividir en cuatro cuadrados de longitud  $L/2/2$ , resultando  $4 \times 4 = 16$  nuevos cuadrados,

Apariencia gráfica del BoxCounting. Se trata de saber que porción del espacio va ocupando una figura con el aumento de unidades de medición.

Cajas		
Totales	No usadas	Usadas
1	0	1
4	0	4
16	1	15
64	15	49
256	98	158

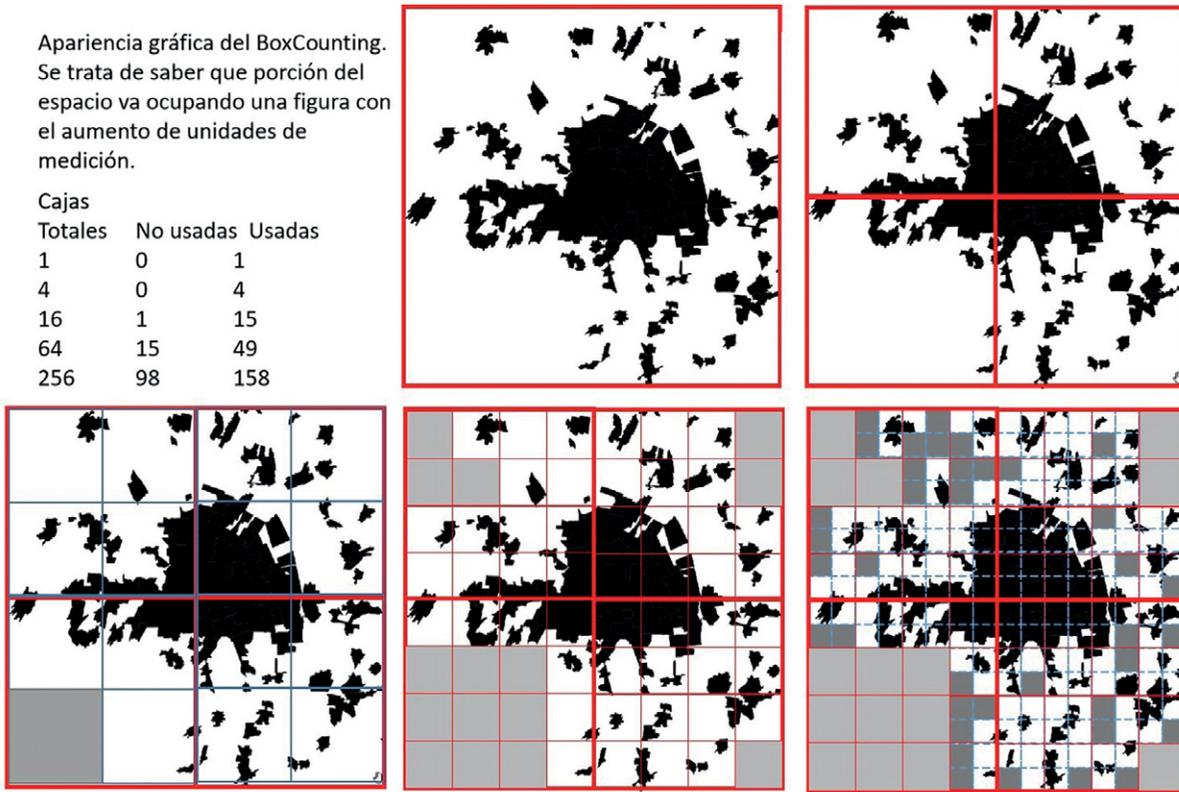


Figura 9. Box counting. Fuente: elaboración de los autores.

y así sucesivamente. A cada paso donde se genera una nueva serie de cuadrados de menor dimensión, le llamamos nivel. El nivel 0, corresponde a donde hay un solo cuadrado, el nivel 1 para 4 cuadrados, el 2 para 14 y así sucesivamente. En la Figura 9 se aprecia el proceso. En cada nivel habrá distinto número de cuadros que son ocupados por la figura.

Por ejemplo, si la figura que analizáramos en vez de la ciudad mostrada fuera una extraña ciudad que cubriera un perfecto contorno cuadrado, para el nivel 0 habríamos ocupado 1 cuadro de longitud 1, en el nivel 1, 4 cuadros de longitud 1/2, todos los que hay, así en el nivel 2 tendremos ocupados 16 de 16 cuadros de dimensión 1/4, así sucesivamente. Lo cual lo podemos observar, en la Tabla 1, en su renglón etiquetado como mosaico completo.

Pero si queremos saber la relación que existe entre el número de cuadros ocupados (eje y) respecto al tamaño de los cuadros (eje x), entonces, para poder establecer relaciones y cálculos de cantidades muy grandes o muy pequeñas es que Napier inventó los logaritmos, es decir, graficando como en la Gráfica 1b, el logaritmo de y, obtenemos ya una recta, sin embargo,

de pendiente negativa, pues los tamaños son todos menores de 1. Para eliminar ese problema, pues no es práctico, obtenemos el logaritmo de su inverso, es decir, de 1 entre el tamaño, y así resulta la Gráfica 1c. La pendiente de esa gráfica que en este caso es 2, queda definida como la dimensión fractal. En este caso, como estamos estimando la dimensión fractal de una figura que ocupa todo el espacio disponible que tiene, es la máxima dimensión fractal en R2 posible. Así tenemos que la dimensión fractal (DF) está determinada de modo que:  $DF = \ln(\text{número de cuadros}) / \ln(1/\text{tamaño relativo de los cuadros})$ .

Como se trata de series en las que para cada nivel puede haber distinta proporción de cuadros ocupados y no como en este caso ideal que es constante, se utiliza una regresión que estime la pendiente. Entonces en realidad, la DF resulta ser la pendiente de la regresión de X y Y.

La discusión sobre los modelos de crecimiento urbano, podemos resumirla en la Figura 10. Ahora, si a cada figura se aplica el proceso antes descrito de conteo de cuadros, obtenemos las dimensiones fractales de la Tabla 1, en su última columna.

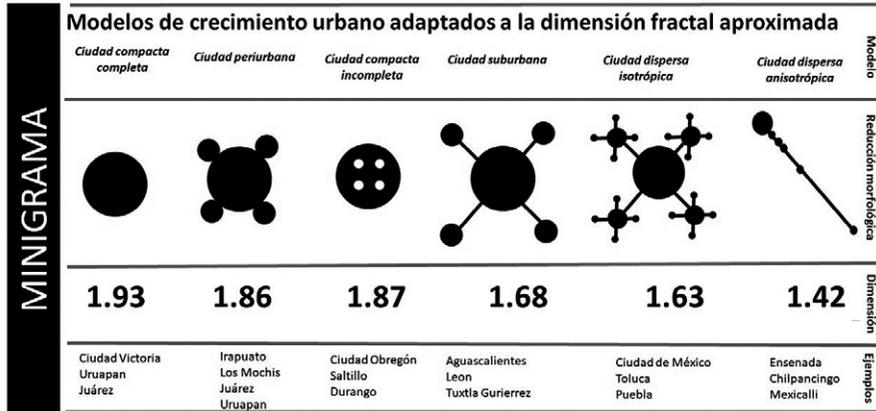


Figura 10. Modelos de crecimiento urbano adaptados a la dimensión fractal aproximada.  
Fuente: elaboración de los autores.

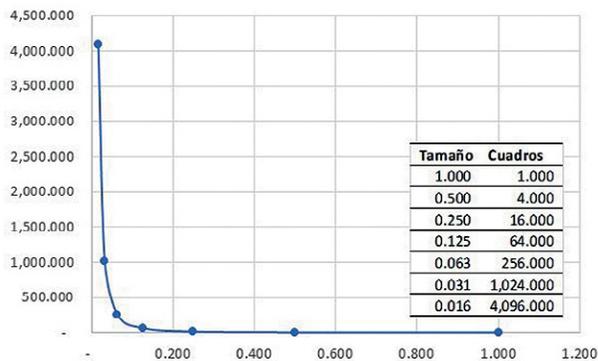
Tabla 1. Cálculo de dimensiones fractales de figuras características.

Id	Figura	Nivel							DF=Pendiente de y=LN(cuadros ocupados) y x=LN(inverso del tamaño relativo)		
		N0	N1	N2	N3	N4	N5	N6			
	Mosaico completo	Cuadros ocupados									
		1	4	16	64	256	1024	4096			
		Logaritmo de cuadros ocupados									
		0	1.39	2.77	4.16	5.55	6.93	8.32			
		tamaño de los cuadros ocupados									
		1.00	0.50	0.25	0.13	0.06	0.03	0.02			
		Logaritmo del inverso del tamaño relativo							2.000		
		-	0.69	1.39	2.08	2.77	3.47	4.16			
		1	4	16	60	224	856	3,332			
		Ln(Nn)	-	1.39	2.77	4.09	5.41	6.75		8.11	1.93
		2	4	16	56	197	715	2,650			
		Ln(1/Nn)	-	1.39	2.77	4.03	5.28	6.57		7.88	1.86
3	4	16	61	198	722	2,738					
Ln(1/Nn)	-	1.39	2.77	4.11	5.29	6.58	7.91	1.87			
4	4	16	42	128	426	1,521					
Ln(1/Nn)	-	1.39	2.77	3.74	4.85	6.05	7.33	1.68			
5	4	12	36	111	349	1,139					
Ln(1/Nn)	-	1.39	2.48	3.58	4.71	5.86	7.04	1.63			
6	4	9	22	59	172	559					
Ln(1/Nn)	-	1.39	2.20	3.09	4.08	5.15	6.33	1.42			

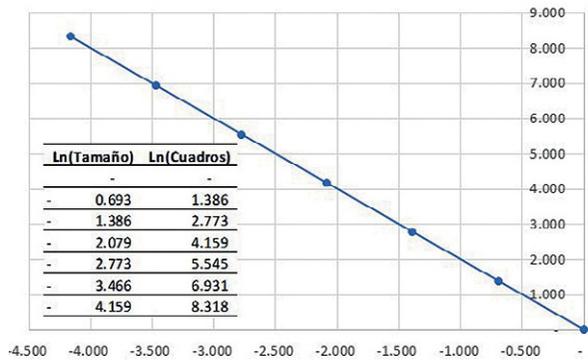
Fuente: Elaboración de los autores.

**Gráficas 1a, 1b, 1c.** Representación de tamaño de cuadrados vs. número de cuadrados de forma simple y logarítmica.

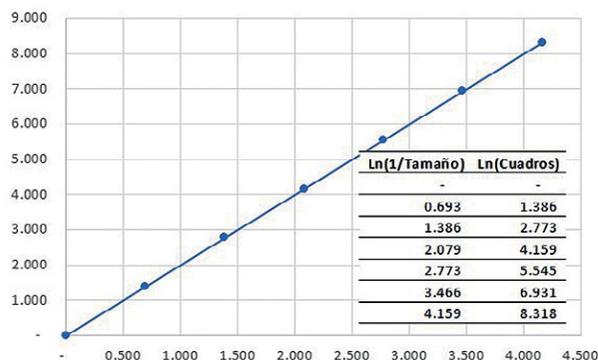
**Gráfica a.  $Y=\text{Tamaño de cuadrados vs } X=\text{Cuadros}$**



**Gráfica b.  $Y=\text{Ln(Tamaño de cuadrados) vs } X=\text{Ln(Cuadros)}$**



**Gráfica c.  $Y=\text{Ln}(1/\text{Tamaño de cuadrados}) \text{ vs } X=\text{Ln(Cuadros)}$**



**Proceso informático**

Debido a que este es un proceso tardado, debe ser procesado en computadora. Para ello se desarrolló un programa en Python sobre la plataforma QGIS, que hemos llamado Morfofrac y que está disponible y se puede obtener de tres formas: 1) desde el administrador de complementos de QGIS, 2) desde el plugin de QGIS, <https://plugins.qgis.org/plugins/fractaladj/> o bien, 3) desde el hub <https://github.com/jarriaga-c/MorfoFrac>.

El algoritmo está representado en el diagrama de la Figura 11. Con ayuda de este programa, se estimaron las dimensiones fractales de las ciudades del sistema urbano nacional de ciudades, que se puede descargar del portal GITS, <https://www.gits.igg.unam.mx/idea/descarga>, o bien del mismo portal del INEGI. Se seleccionaron las ciudades de más de 200 mil habitantes, que son para las que existe información de distintas fuentes, por ejemplo, del Instituto Mexicano de la Competitividad (IMCO). El algoritmo selecciona un contorno, dibuja un cuadro mínimo que incluye la figura. Para este cuadro genera 4 cuadrados, luego 16, etc., así como se ha descrito el procedimiento anteriormente. Por último, el algoritmo entrega el conteo de cuadrados para cada nivel, y este se procesa en una hoja de cálculo, o cualquier lenguaje como R, o que permita organización de vectores. La hoja de cálculo utilizada también se encuentra disponible en el hub citado antes, en la liga: <https://github.com/jarriaga-c/MorfoFrac/blob/main/Calculo.xlsx>

Fuente: Elaboración de los autores.

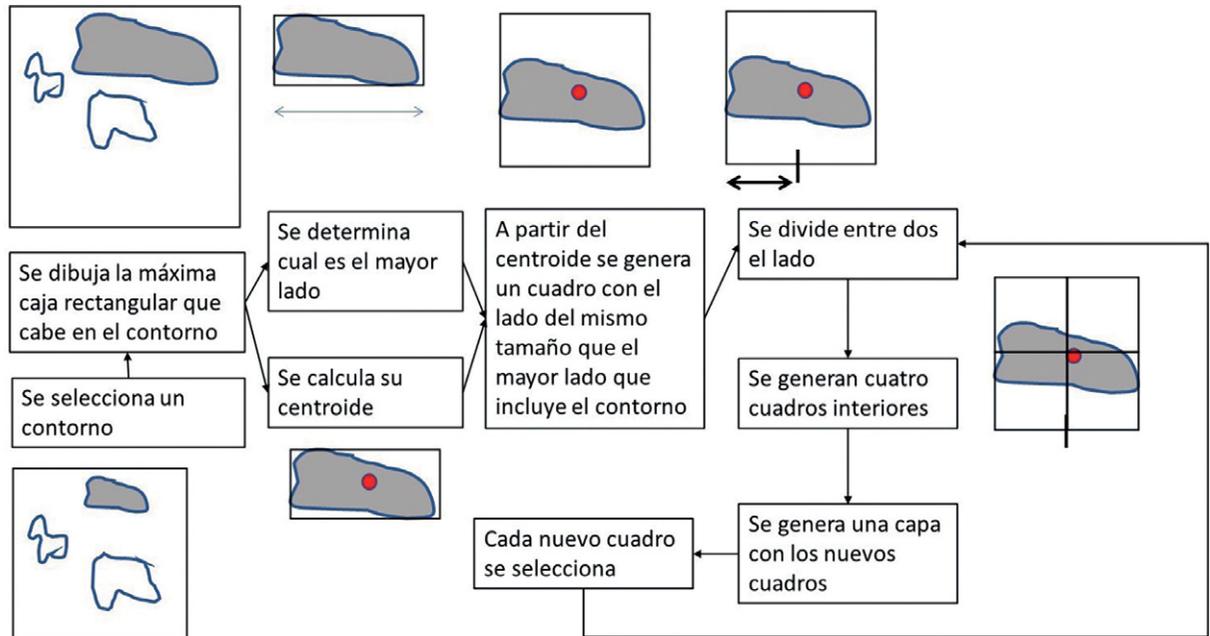


Figura 11. Proceso para el programa Morfofrac. Fuente: Elaboración de los autores.

## Metodología

Se extrajeron de la cartografía del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) contornos de las ciudades de más de 200 mil habitantes.

Se corrió Morfofrac sobre las ciudades, obteniendo una tabla con la DF de cada ciudad.

Se generó una tabla con las DF y distintos índices de competitividad del IMCO, destinados a medir movilidad. Sin embargo, sólo tiene información para 19 ciudades, que son las marcadas en negritas en la Tabla 2. Por tal motivo únicamente se usaron éstas en el análisis siguiente.

Se calcularon los índices de correlación, entre las variables de competitividad y las de fractalidad. Es decir, se calculó el índice de correlación entre la dimensión fractal de las ciudades y distintos indicadores de competitividad.

## Resultado

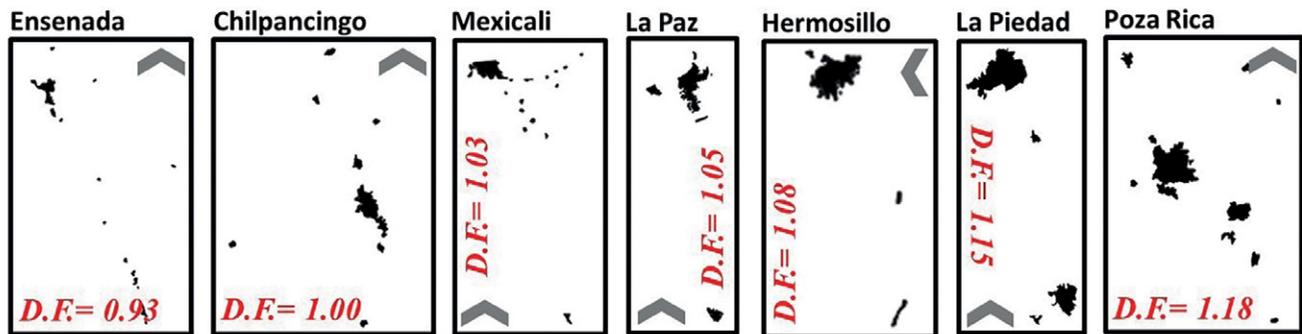
Como producto del proceso anterior, se obtiene la Tabla 2, donde aparecen las ciudades organizadas de forma ascendente, del menor a la mayor dimensión fractal. Como ilustración se presenta la Figura 12 con las ciudades más fractalizadas y la Figura 13 con las ciudades más compactas. La forma de interpretar es considerando las figuras de mayor dimensión fractal, como las más compactas, y las de menor dimensión como las más dispersas, o de mayor *sprawl*. Es fácil notar como las ciudades más dispersas presentan menores DF.

Se tiene como parte del objetivo del presente trabajo, saber si la dimensión fractal tiene algo que ver con variables de movilidad. La información del IMCO (Instituto Mexicano de la Competitividad) nos permite obtener el resultado de la tabla. Los rangos que establece el IMCO fueron numerados, de tal modo que muy alto se convierte en 1. Se seleccionaron algunas variables del IMCO: movilidad, transporte seguro, funcionamiento de la infraestructura urbana, contexto urbano y, por otro lado, competitividad. Todo se extrajo de la página <https://imco.org.mx/la-competitividad-en-las-ciudades-mexicanas/>

**Tabla 2.** Dimensiones fractales (DF) de ciudades mexicanas.

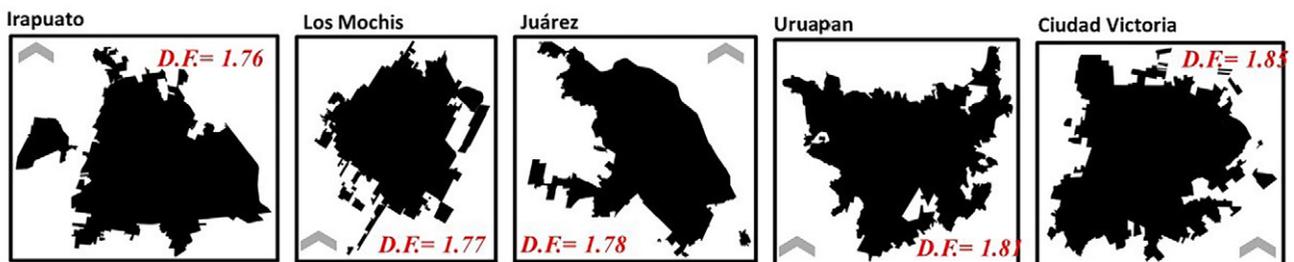
Ciudad	DF	Ciudad	DF	Ciudad	DF	Ciudad	DF
Ensenada	0.93	Matamoros	1.38	Mérida	1.51	Toluca	1.65
Chilpancingo	1.00	Celaya	1.42	Zamora	1.51	Cancún	1.65
Mexicali	1.03	Reynosa	1.43	San Luis Potosí	1.52	Puebla-Tlaxcala	1.66
La Paz	1.05	Monclova-Frontera	1.44	Pachuca	1.53	Chihuahua	1.69
Hermosillo	1.08	Querétaro	1.44	Cuernavaca	1.53	Valle de México	1.70
La Piedad-Pénjamo	1.15	Mazatlán	1.45	Oaxaca	1.53	Nuevo Laredo	1.70
Poza Rica	1.19	Orizaba	1.46	León	1.53	Tlaxcala-Apizaco	1.70
Culiacán	1.22	Córdoba	1.46	Aguascalientes	1.55	Saltillo	1.71
Veracruz	1.24	Zacatecas-Guadalupe	1.46	Tuxtla Gutiérrez	1.58	Ciudad Obregón	1.74
Tampico	1.24	Cuatla	1.47	Tehuacán	1.59	Durango	1.75
Tapachula	1.30	Puerto Vallarta	1.47	Tepic	1.61	Irapuato	1.76
Tijuana	1.34	Villahermosa	1.47	Campeche	1.62	Los Mochis	1.77
Colima-Villa de Álvarez	1.34	Minatitlán	1.48	Coatzacoalcos	1.62	Juárez	1.78
Xalapa	1.36	La Laguna	1.49	Guadalajara	1.64	Uruapan	1.81
Acapulco	1.38	Morelia	1.50	Monterrey	1.64	Ciudad Victoria	1.85

Fuente: Elaboración de los autores.



**Figura 12.** Ciudades con DF menor a 1.2. Muy dispersas.

Fuente: Elaboración de los autores.



**Figura 13.** Ciudades con DF mayor a 1.76. Muy compactas.

Fuente: Elaboración de los autores.

**Tabla 3.** Mayores correlaciones entre variables de movilidad medidas por el IMCO contra dimensión fractal calculada.

Variable	C.D.F.	Variable	C.D.F.	Variable	C.D.F.
Apertura a empresas de transporte a través de plataformas	0.70	Ley específica de sobre movilidad	0.47	Registro de transporte público	0.38
Crecimiento de la flota vehicular	0.65	Coordinación metropolitana	0.47	Registro Público disponible	0.38
Ayuntamiento y OSC en comité de movilidad	0.64	Existencia de una jerarquía de movilidad	0.46	Población que vive en zonas urbanas consolidadas	<b>-0.38</b>
Estudios de impacto de movilidad	0.56	Percepción de respeto a los señalamientos y paradas establecidas por parte de los operadores de transporte público	0.45	Percepción de unidades de transporte público en buen estado	0.37
Asignación del espacio público	0.54	Percepción de disponibilidad de información con horarios, paradas y recorridos de las unidades de transporte público	0.45	Suficiencia vial	<b>-0.37</b>
Comité Estatal de Movilidad	0.51	Siniestros viales con transporte público	<b>-0.42</b>	Actividad económica per cápita	0.37
Prioridad de transporte público y no motorizado	0.51	Tiempo de operación de nuevas plataformas de transporte privado	0.42	Siniestros viales donde la mala condición del camino fue la causa del choque	0.37
Nivel de competitividad	0.50	Viajes intramunicipales o a municipios vecinos	<b>-0.41</b>	Presupuesto de movilidad destinado a pavimentación	<b>-0.36</b>
Principios de movilidad	0.50	Satisfacción con el alumbrado público	<b>-0.40</b>	Viviendas verticales nuevas	<b>-0.36</b>
Programa de Movilidad en Plan de Desarrollo	0.49	Obras sujetas a estudio de impacto de movilidad	0.40	Percepción de un trato respetuoso de los operadores de transporte público hacia los usuarios	0.32

## Discusión

El crecimiento desordenado de las ciudades provoca deterioro en la calidad de vida de los habitantes, sobre todo por la alteración de la movilidad. Los tiempos de desplazamiento se disparan y las personas tienen menores posibilidades de convivencia, deporte o estudio. La complejidad de los espacios urbanos que resultan de estos procesos, se ven reflejados en los contornos de las ciudades, que pueden ser medidos con ayuda de la dimensión fractal, condiciones que se han correlacionado con características de movilidad de las ciudades. En la Tabla 3 se presentan distintas características que

han sido medidas por el IMCO, observándose que las características deseadas tienen una correlación alta con la dimensión fractal. Ya que a mayor dimensión fractal mayor compacidad de las ciudades. Es decir, se presenta la tendencia de que a mayor compacidad, mejores resultados en variables de movilidad.

La dimensión fractal puede ser, entonces, utilizada para obtener información de la eficiencia en movilidad de las ciudades, ya que es conocido que la correlación no implica causalidad. Este primer análisis sólo muestra que la dimensión fractal puede ser útil para predecir o explicar variables de movilidad.

## Conclusiones

La correlación entre variables de movilidad y dimensión fractal de los contornos de las ciudades es alta, por lo que se concluye que hay una tendencia a que la complejidad de la forma urbana, resultado de las urbanizaciones inadecuadas, altera la eficiencia de la movilidad y, por lo tanto, empeora la calidad de vida de los habitantes del conjunto de ciudades que se han analizado; posteriores análisis pueden profundizar en estos hallazgos.

La fragmentación de las ciudades es resultado de distintos problemas urbanos, gran parte de éstos tienen que ver con la movilidad, pues transitar por espacios más complejos es más caro, engorroso y lento para las personas que viajan en la ciudad. Este efecto se muestra en los indicadores que resumen la complejidad de la forma como la dimensión fractal, y cuando se correlacionan con los indicadores que resumen la movilidad se aprecia un efecto de correlación positiva. Esto puede contribuir para los análisis de clasificación de las ciudades.

## Bibliografía

- Aguirre, J. (1997), "Curvas fractales", en *Sigma: Revista de matemáticas*, No. 20, pp. 82-83.
- Alzogaray, I. (2007), "Geometría fractal y arquitectura: ¿un vínculo consistente?", en *Forma y Simetría: Arte y Ciencia*, Congreso de Buenos Aires.
- Alvarez, De La Torre, G. (2011), "Estructura y temporalidad urbana de las ciudades intermedias en México", en *Frontera norte*, No. 23(46), pp. 91-124.
- Arenas, G. (2013), "Fractales y estructura del delirio", en *Virtualla*, 27.
- Arellano, Ramos B., y Roca Caldera, J. (2015), "Global urban sprawl", en XLI Reunión de Estudios Regionales AEER: International conference on regional science: innovation and geographical spillovers: new approaches and evidence (pp. 1-25). Universitat Rovira i Virgili.
- Alcantar, J. A. G. (2018), "Ciencias inexactas y literaturas exactas. Lo que va del affaire Sokal a la poética de la materia de Bachelard", en *Arbor*, No. 194(790), 483.
- Batty, M., y Longley, P. A. (1986), "The fractal simulation of urban structure", en *Environment and Planning A*, No. 18(9), 1143-1179.
- Batty, M., y Longley, P. A. (1987), "Fractal-based description of urban form", en *Environment and planning B: Planning and Design*, No. 14(2), 123-134.
- Batty, M., Longley, P., y Fotheringham, S. (1989), "Urban growth and form: scaling, fractal geometry, and diffusion-limited aggregation", en *Environment and planning A*, No. 21(11), 1447-1472.
- Batty, M., y Longley, P. A. (1994), *Fractal cities: a geometry of form and function*, Academic press.
- Boneel, D. S. (2008), "El asunto Sokal: un problema de actitud científica", en *Revista Educación y Desarrollo Social*, No. 2(2), 109-115.
- Braun, E. (2011), *Caos, fractales y cosas raras*, Fondo de cultura económica.
- Caycedo, R. (2012), "Fractal Diagnosis Applied to Cardiology", en *Revista Colombiana de Cardiología*, No. 19(5), 233-234.
- Checa-Artasus, M. (2011), "Gentrificación y cultura: algunas reflexiones. Biblio 3W", en *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales*, No. 16(914), 1-37.
- Falconer, K. (2004), *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, U.K.
- Fernández-Martínez, M., Guirao, J. L. G., Sánchez-Granero, M. Á., y Segovia, J. E. T. (2019), *Fractal Dimension for Fractal Structures: With Applications to Finance* (Vol. 19). Springer.
- Frankhauser, P. (1998), *The fractal approach. A new tool for the spatial analysis of urban agglomerations. Population: an english selection*, 205-240.
- Frumkin, H., Frank, L., & Jackson, R. J. (2004), *Urban sprawl and public health: Designing, planning, and building for healthy communities*, Island Press.
- Gyimesi, K., Vincent, C., y Lamba, N. (2011). *Frustration rising: IBM 2011 commuter pain survey*, IBM: Armonk, NY, USA.
- Hernández, A. (2000), "La guerra entre ciencias exactas y humanidades en el fin de siglo: el escándalo Sokal y una propuesta pacificadora", en *Ciencia ergo-sum*, No. 7(1), 56-66.
- Hsü, K., y Hsü, A. (1990), *Fractal geometry of music*. Proceedings of the National Academy of Sciences, N 87(3), 938-941.
- Lindop, G. (1998), "How Long is the Coast of Britain?", en *PN Review*, 24(6), 36.
- Mandelbrot, B. (1967), "How long is the coast of Britain", en *Science*, 156, 636-638.
- Mandelbrot, B., y Hudson, R. (2006), *Fractales y finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*, Barcelona, Tusquets Editores.
- Mandelbrot, B., y Hudson, R. L. (2007), *The Misbehavior of Markets: A fractal view of financial turbulence*, Basic books.
- Martín, J. I. (1998), "El declive de los grandes números: Benoît Mandelbrot y la estadística social", en *Empiria. Revista de metodología de ciencias sociales*, (1), 51-84.
- Muñiz, I., García López, M. Á., & Galindo, A. (2006). Descentralización, integración y policentrismo en Barcelona, Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Muñiz, I., García López, M. Á., & Calatayud, D. (2006), *Sprawl: definición, causas y efectos*. *Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales*, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Monroy, C. (2002), *Curvas fractales*, España, AlfaOmega.
- Naumis, G. (2008), "Los fractales: una nueva geometría para describir el espacio geográfico", en Delgado, J (coordinador), *La urbanización difusa de la ciudad de México. Otras miradas sobre un espacio antiguo*, IG-UNAM, 194-206.
- Oyón, J. L. (2011), "Dispersión frente a compacidad: la paradoja del urbanismo protoecológico", en *Ciudad y Territorio Estudios Territoriales (CyTET)*, 43(169-0), 515-532.
- Parrot, J. F. (2010), *FROG (Fractal Reserches On Geosciences)*, México, Instituto de Geografía, UNAM.
- Parrot, J. F., y Ramírez, C. (2015), "Urban Characterization by Means of Dynamic Fractal", en Bizzarri, Cürebal, I., y Nyusupova, G. N., *Environment and Ecology at the Beginning of 21st Century*, R. Efe (Ed.), St. Kliment Ohridski University Press.
- Pintos, P. (1993), "Aproximaciones teóricas acerca de los procesos de periurbanización y suburbanización", en I Jornadas de Geografía de la UNLP 12 al 15 de octubre de 1993 La Plata, Argentina. Primeras Jornadas Platenses de Geografía. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Geografía.
- Rodríguez, J. O., Prieto, S. E., Correa, S. C., Bernal, P. A., Tapia, D., Álvarez, L. F., y Salamanca, D. G. (2012), "Fractal diagnosis of severe cardiac dysfunction: Fractal dynamic of the left coronary branching", en *Revista Colombiana de Cardiología*, No. 19(5), 225-232.
- Sánchez, H. Á. (2009), Periurbanización y espacios rurales en la periferia de las ciudades, en *Estudios agrarios*, No. 41, 93-123.
- Sokal, A., & Bricmont, J. (1999), *Imposturas intelectuales*, Barcelona, Paidós.
- Talanquer, V. A. (2011), *Fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos*, Fondo de Cultura Económica, México.
- Vanouplines, P. (1995), *Rescaled range analysis and the fractal dimension of pi*, University Library, Free University Brussels, Pleinlaan, No. 2, 1050.

Vera, M. Á. M. (2013), "¿Cómo medir el fenómeno 'Urban sprawl' a través de indicadores paisajísticos? Aplicación a la isla de Tenerife", en *BAGE: Boletín de la Asociación de Geógrafos Españoles*, (62), 49-73.

Weng, Q. (2003), "Fractal analysis of satellite-detected urban heat island effect", en *Photogrammetric engineering & remote sensing*, No. 69(5), 555-566.

#### Referencias electrónicas

IMCO. <https://imco.org.mx/indices/califica-a-tu-alcalde/capitulos/resultados-del-indice-de-competitividad-urbana-2018/resultados>

M Batty, P Longley (1989); Urban growth and form: scaling, fractal geometry, and diffusion-limited aggregation; *Environment and Planning A*, volume 21, pages 1447-1472; NY, USA.

<https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1068/a211447?id=a211447>

Martínez, J. E. S. (2001), "El surgimiento de las teorías no euclidianas y su influencia en la filosofía de la ciencia del siglo XX", en *Revista colombiana de filosofía de la ciencia*, 2(5), 45-63. <https://www.redalyc.org/pdf/414/41400505.pdf>

Puertas, Poveda, R. (2016), Estudio del comportamiento fractal espacial de la superficie del terreno, considerando factores del relieve climáticos, estructurales y litológicos.

[https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56072/1/\\_Estudio\\_del\\_comportamiento\\_fractal\\_espacial\\_de\\_la\\_sup\\_PUERTAS\\_POVEDA\\_RUBEN.pdf](https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56072/1/_Estudio_del_comportamiento_fractal_espacial_de_la_sup_PUERTAS_POVEDA_RUBEN.pdf)

Shen, G. (2002), Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas. *International Journal of Geographical Information Science*, No. 16(5), 419-437. <http://www.johnboccio.com/courses/CFSC2016/FractalUrbanAreas.pdf>

So, G. B., So, H. R., & Jin, G. G. (2017), Enhancement of the box-counting algorithm for fractal dimension estimation. *Pattern Recognition Letters*, No. 98, 53-58. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2017.08.022>

White, R., y Engelen, G. (1993), "Cellular automata and fractal urban form: a cellular modelling approach to the evolution of urban land-use patterns", en *Environment and planning A*, No. 25(8), 1175-1199. <https://pdfs.semanticscholar.org/a522/5a5633d0ce89c913a65c2e6cde72f808e95f.pdf>