MODIFIKASI METODE HANSEN-PATRICK DENGAN ORDE KONVERGENSI OPTIMAL UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINIER

Wartono[1]
[1]Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Indonesia
E-mail: wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRACT

The Hansen-Patrick method is a third-order iterative method used to solve nonlinear equation. The method requires three evaluation of functions and has an efficiency index $3^{1/3} \approx 1,4224$. This study discusses a modification of the Hansen-Patrick method using the second order Taylor series. The second derivative is reduced using hyperbolic function with one parameter η. The aim of modification is to improve the convergence order of the Hansen-Patrick's method. Based on the convergence analysis, the method has a fourth-order of convergence and envolve three evaluation of functions. So, its efficiency index is $4^{1/3} \approx 1,5874$. Numerical simulation is given to illustrate performance of the iterative method using six real functions. The performance of the iterative method include : a computational order of convergence, the number of iteration, evaluation of function, absolute error, and value of function, will be compared with Newton's method, Halley's method, Newton-Steffensen's method, and Hansen-Patrick method. The numerical simulation show that the performance of the method better than others.

Keyword : Evaluation of function, efficiency index, modification of Hansen-Patrick's method, order of convergence, numerical simulation.

PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear merupakan representasi matematis dari persoalan-persoalan nyata pada bidang sains dan teknologi [1, 2]. Bentuk-bentuk persamaan matematis yang sering muncul dalam bentuk nonlinier yang rumit sehingga penyelesaian ekssaknya sulit ditemukan. Penyelesaian persamaan nonlinear pada dasarnya adalah menentukan akar-akar persamaan dalam bentuk

$$f(x) = 0 . \qquad (1)$$

dengan $f : D \subseteq \Re \rightarrow \Re$ adalah fungsi scalar yang terdefinisi pada interval *D*.

Oleh karena penyelesaian eksaknya sulit ditemukan, maka penyelesaian alternative yang dilakukan dengan menggunakan perhitungan komputasi berulang Teknik seperti ini lebih dikenal dengan nama metode iterasi (*iterative method*).

Salah satu cara yang paling umum untuk mengkonstruksi suatu motede iterasi adalah menggunakan ekspansi deret Taylor yang ditulis dalam bentuk

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2!} + \cdots . \qquad (2)$$

Ekspansi deret Taylor orde satu menghasilkan metode iterasi yang cukup populer dan banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Metode iterasi tersebut lebih dikenal dengan nama metode Newton,

---

[1] Dosen Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0. \tag{3}$$

Metode Newton mempunyai orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}4142$. Sedangkan pemotongan deret Taylor orde dua menghasilkan metode iterasi klasik berode konvergensi tiga yaitu: metode Halley [3], metode Euler atau metode Halley Irasional [4], dan metode Chebyshev [5].

Selanjutnya Hansen-Patrick mengkonstruksi metode iterasi berode konvergensi tiga dengan melibatkan satu parameter θ yang ditulis dalam bentuk [6],

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{\theta+1}{\theta \pm (1-(\theta+1)L_f(x_n))^{1/2}}\right]\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{4}$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{5}$$

Metode iterasi klasik (4) mempunyai orde konvergensi tiga dan melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ dengan indeks efisiensi sebesar $3^{1/3} \approx 1{,}4422$. Selain itu, metode iterasi ini juga mencakupi beberapa metode iterasi klasiknya lainnya, seperti: metode akar kuadrat Ostrowski ($\theta = 0$), metode Euler ($\theta = 1$), dan metode Halley ($\theta = -1$).

Berdasarkan Traub [7], efisiensi suatu metode iterasi dipengaruhi ole horde konvergensi dan penggunaan evaluasi fungsi pada setiap iterasinya yang dihitung menggunakan rumus

$$I = p^{1/d}, \tag{6}$$

dengan p adalah orde konvergensi metode iterasi dan d adalah banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan.

Menurut Kung dan Traub [8], jika sebuah metode iterasi menggunakan n buah titik dengan orde konvergensi p dan melibatkan d evaluasi fungsi, maka metode iterasi akan optimal jika memenuhi hubungan $p = 2^n$ dan $d = n + 1$, sehingga indeks dengan orde konvergensi optimal dari suatu metode iterasi dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$I = \left(2^n\right)^{1/(n+1)}. \tag{7}$$

Oleh karena orde konvergensi dan evaluasi fungsi mempunyai peranan yang sangat penting dalam menentukan tingkat efisiensi suatu metode dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinear, maka usaha-usaha untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi menjadi perhatian yang serius.

Beberapa modifikasi telah dilakukan oleh peneliti dengan mengkontruksi kembali suatu metode iterasi dengan orde konvergensi lebih tinggi dibandingkan dengan metode iterasi asalnya. Selain itu, keterlibatan derivatif atau turunan orde tinggi dan kompleksitas fungsi yang dievaluasi juga menjadi pertimbangan di dalam melakukan modifikasi metode iterasi.

Beberapa peneliti yang telah memodifikasi metode Hansen-Patrick dengan mereduksi turunan kedua menggunakan berbagai pendekatan, diantaranya: deret Taylor [9], tafsiran fungsi [10], dan tafsiran jumlah dua metode iterasi [11,12].

Selanjutnya, pada artikel ini dilakukan modifikasi metode iterasi Hansen-Patrick yang diberikan pada Persamaan (4). Selanjutnya turunan kedua pada metode iterasi tersebut direduksi dengan menggunakan tafsiran fungsi hiperbolik [13, 14].

.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur atau kepustakaan (*library research*) yang dilakukan melalui tiga tahapan sebagai berikut. Pada tahap pertama, sebuah metode iterasi dikonstruksi dari modifikasi metode iterasi Hansen-Patrick dengan menambahkan dua parameter real θ dan η. Selanjutnya, turunan kedua yang muncul direduksi menggunakan pendekatan dari fungsi hiperbolik dengan menambahkan parameter η. Tahap kedua menentukan orde konvergensi dari metode iterasi menggunakan ekspansi deret Taylor, dan sekaligus menentukan nilai parameter untuk menghasilkan orde konvergensi yang optimal. Tahap terakhir mengimplementasikan metode iterasi pada enam fungsi real dengan tujuan untuk menguji performasi metode iterasi menggunakan perangkat lunak MAPLE 13. Ukuran-ukuran peformasi metode iteasi yang diuji yaitu: jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi, baik yang melibatkan galat mutlak (*computational order of convergence* (COC)) maupun galat relatif (*approximated computational order of convergence* (ACOC)), galat mutlak dan nilai fungsi. Kemudian, ukuran-ukuran performasi metode Hansen-Patrick yang dimodifikasi tersebut dibandingkan dengan metode Newton, metode Halley, metode Newton-Steffensen, dan metode Hansen-Patrick.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Modifikasi Metode Hansen-Patrick

Kontruksi metode iterasi dimulai dengan mempertimbangkan kembali metode Hansen-Patrick [6] dalam bentuk sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\theta+1)}{\theta \pm \left(1-(\theta+1)\dfrac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^{1/2}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ \theta \in \Re, \tag{8}$$

Metode Hansen-Patrick mempunyai orde konvergensi tiga untuk $\theta \in \Re$ dan melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $3^{1/3} \approx 1{,}4224$.

Untuk menghindari bentuk akar kuadrat, maka bentuk akar kuadratik pada Persamaan (8) diekspansi menggunakan deret Taylor,

$$\left(1-(\theta+1)\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(\theta+1)\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} - \frac{1}{8}(\theta+1)^2\left(\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^2 - \cdots. \tag{9}$$

Selanjutnya pemotongan ekspansi deret Taylor sampai orde dua dan mengabaikan suku-suku berikut, maka dengan mensubtitusikan kembali ekspansi deret taylor orde ke Persamaan (8) menghasilkan Persamaan (8) dalam bentuk berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{8(\theta+1)}{8\theta \pm \left(8 - 4(\theta+1)\dfrac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} - (\theta+1)^2 \dfrac{f''(x_n)^2 f(x_n)^2}{f'(x_n)^4}\right)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (10)$$

Penyederhanaa Persamaan (10) dan dengan mengambil tanda plus, maka persamaan (10) ditulis kembali menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{8f(x_n)^3 f'(x_n)}{(\theta+1)f(x_n)^2 f''(x_n)^2 + 4f(x_n)f'(x_n)^2 f''(x_n) - 8f'(x_n)^4}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (11)$$

Metode iterasi (11) masih memuat turunan kedua $f(x_n)$. Untuk menghindari penggunaan turunan kedua, $f''(x_n)$ pada Persamaan (11) direduksi menggunakan tafsiran fungsi hiperbolik. Selanjutnya untuk mengkonstruksi bentuk turunan kedua, pertimbangkan kembali fungsi hiperbolik yang diberikan oleh

$$ay(x) + bxy(x) + cx + d = 0. \quad (12)$$

Turunan pertama dan kedua implisit (12) diberikan masing-masing oleh

$$ay'(x) + by(x) + bxy'(x) + c = 0, \quad (13)$$

$$ay''(x)(a+bx) + by(x) + 2by'(x) = 0, \quad (14)$$

Misalkan $y(x_n) = f(x_n)$, $y'(x_n) = f'(x_n)$, dan $y(w_n) = f(w_n)$, dengan

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (15)$$

maka Persamaan (12) – (14) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$af(x_n) + bx_n f(x_n) + cx_n + d = 0, \quad (16.a)$$

$$af'(x_n) + bf(x_n) + bx_n f'(x_n) + c = 0, \quad (16.b)$$

$$af(w_n) + bw_n f(w_n) + cw_n + d = 0. \quad (16.c)$$

Berdasarkan Persamaan (14), diperoleh

$$f''(x_n) = -\frac{2bf'(x_n)}{a + bx_n}. \quad (17)$$

Untuk menentukan bentuk eksplisit turunan kedua yng diberikan pada Penyelesaian (14) dilakukan dengan mensubstitusi nilai konstanta *a* dan *b* yang diperoleh dengan menyelesaikan (16.a) – (16.c). Kemudian dengan mensubstitusikan kembali nilai-nilai *a* dan *b* ke (17), diperoleh bentuk taksiran $f''(x_n)$ dalam bentuk

$$f''(x_n) = -\frac{2f'(x_n)^2 f(w_n)}{f(x_n)(f(x_n) - f(w_n))}. \quad (18)$$

Untuk memberikan peluang meningkatnya orde konvergensi, bentuk eksplisit turunan kedua pada Persamaan (18) ditambahkan parameter real η sehingga Persamaan (18) dapat ditulis kembali menjadi

$$f''(x_n) = -\frac{2f'(x_n)^2 f(w_n)}{f(x_n)(f(x_n) - \eta f(w_n))}. \quad (19)$$

Substitusi Persamaan (19) ke Persamaan (11), maka

$$x_{n+1}=x_n-\left(\frac{2\big(f(x_n)-\eta f(w_n)\big)^2}{2f(x_n)^2-2(2\eta+1)f(x_n)f(w_n)+(2\eta^2+2\eta-\theta-1)f(w_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (20)$$

Persamaan (20) merupakan modifikasi metode Hansen-Patrick dua parameter yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n), f'(x_n)$. dan $f(w_n)$ dengan w_n diberikan pada Persamaan (15).

B. Orde Konvergensi

Berikut ini akan ditentukan orde konvergensi dari Persamaan (20) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.

Teorema 1. Asumsikan bahwa fungsi f memiliki turunan dan f memiliki akar penyelesaian $\alpha \in D$. Jika nilai awal x_n cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada pada Persamaan (20) memiliki orde konvergensi empat untuk $\eta = 1/2(\theta-1)$ dan memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1}=\frac{1}{4}\left(-4c_2c_3+\left(\theta^2+2\theta+5\right)c_2^3\right)e_n^4+O(e_n^5). \quad (21)$$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)=0$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(\alpha)\neq 0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengekspansi fungsi f di sekitar α :

$$f(x_n)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x_n-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3+\cdots. \quad (22)$$

Oleh karena $f(\alpha)=0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, maka

$$\begin{aligned} f(x_n)&=f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)e_n^4+\cdots,\\ &=f'(\alpha)\left(e_n+\frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2+\frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3+\frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!f'(\alpha)}+\cdots\right),\end{aligned}$$

atau

$$f(x_n)=f'(\alpha)(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+c_4e_n^4+O(e_n^5)), \quad (23)$$

dengan

$$c_j=\frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, j=2,3,\ldots,k.$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, diperoleh $f'(x_n)$ sebagai berikut:

$$f'(x_n)=f'(\alpha)(1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+O(e_n^4)). \quad (24)$$

Berdasarkan Persamaan (21) dan Persamaan (22) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=e_n-c_2e_n^2+(2c_2^2-2c_3)e_n^3+O(e_n^4). \quad (25)$$

sehingga dengan menggunakan $x_n=e_n+\alpha$, maka Persamaan (17.a) menjadi:

$$w_n=\alpha+c_2e_n^2-2(c_2^2-c_3)e_n^3+O(e_n^4). \quad (26)$$

Kemudian, berdasarkan ekspansi deret Taylor disekitar α, maka $f(w_n)$ dapat ditulis menjadi:

$$f(w_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(w_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(w_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(w_n - \alpha)^3 + \cdots,$$

dan dengan menggunakan Persamaan (26), maka

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{27}$$

Dengan menggunakan Persamaan (23) dan (24), maka diperoleh masing-masing

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2(e_n^2 + 2c_2e_n^3 + (2c_3 + c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)) \tag{28}$$

$$f(w_n)^2 = f'(\alpha)^2(c_2^2 e_n^4 + O(e_n^5)) \tag{29}$$

$$f(x_n)f(w_n) = f'(\alpha)^2(c_2e_n^3 + (2c_3 - c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)) \tag{30}$$

dan

$$\eta f(w_n) - f(x_n) = f'(\alpha)\Big(-e_n + (\eta - 1)c_2e_n^2 + (-2\eta c_2^2 + (2\eta - 1)c_3)e_n^3$$
$$+ (5\eta c_2^3 - 7\eta c_2c_3 + (3\eta - 1)c_4)e_n^4 + O(e_n^5)\Big) \tag{31}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (23), (24), dan (31) diperoleh

$$\left(\eta f(w_n) - f(x_n)\right)^2 = f'(\alpha)^2(e_n^2 + 2(1-\eta)c_2e_n^3 + (2(1-2\eta)c_3 + (1+\eta)^2c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)) \tag{32}$$

dan

$$2f(x_n)^2 - 2(1+2\eta)f(x_n)f(w_n) + \left(2\eta^2 + 2\eta - (\theta+1)\right)f(w_n)^2 = f'(\alpha)^2\Big(2e_n^2 + +2(1-2\eta)e_n^3$$
$$+ \left((2\eta^2 + 6\eta - \theta + 3)c_2^2 - 8\eta c_3\right)e_n^4 + +O(e_n^5)\Big) \tag{33}$$

sehingga

$$\frac{2\left(f(x_n) - \eta\, f(w_n)\right)^2}{2f(x_n)^2 - 2(1+2\eta)f(x_n)f(w_n) + \left(2\eta^2 + 2\eta - (\theta+1)\right)f(w_n)^2} = 1 + c_2e_n$$
$$+\left(\frac{1}{2}(2\eta + \theta - 3)c_2^2 + 2c_3\right)e_n^3$$
$$+\left((\eta^2 + (\theta - 3)\eta + 1)c_2^3 + 2(2\eta - 2 + \theta)c_2c_3 + 3c_4\right)e_n^4$$
$$+O(e_n^5)). \tag{34}$$

Berdasarkan Persamaan (21), (22), (27) dan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$, dan $x_n = \alpha + e_n$, maka persamaan galat dari metode iterasi (20) diberikan oleh

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\eta - \theta\right)c_2^2e_n^3$$
$$+\left(\frac{1}{2}\left(-2\eta^2 + \eta(8 - 2\theta) + 5\theta - 1\right)c_2^3 + \left(1 - 2\theta - 4\eta\right)c_2c_3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{35}$$

Persamaan galat yang diberikan pada Persamaan (35), memberikan informasi bahwa metode iterasi (20) dapat ditingkatkan orde konvergensinya dengan mengambil

$$\frac{1}{2}(1 - 2\eta + \theta) = 0,$$

sehingga dengan mengambil hubungan η = ½(θ − 1) dan kemudian disusbtitusikan kembali η ke Persamaan (35), maka diperoleh

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}\left(-4c_2c_3 + \left(\theta^2 + 2\theta + 5\right)c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \qquad \blacksquare(36)$$

Berdasarkan Persamaan (36), dapat dilihat bahwa orde konvergensi metode iterasi (20) adalah empat untuk $\eta = ½(\theta - 1)$, $\theta \in \Re$. Selain itu, metode iterasi (20) melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f(w_n)$, maka indeks efisiensinya sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$.

Oleh karena indeks efisiensi merupakan salah satu ukuran performasi suatu metode iterasi, pada Tabel 1 berikut ini diberikan perbandingan indeks efisiensi beberapa metode iterasi.

Tabel 1 Perbandingan Indeks Efisiensi

No	Metode Iterasi	Orde Konvergensi	Evaluasi Fungsi	Indeks Efisiensi
1.	Newton	2	2	$2^{1/2} \approx 1{,}4142$
2.	Halley	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4224$
3.	Newton-Steffensen	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4224$
4.	Metode Hansen-Patrick	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4224$
5.	Modifikasi Hansen-Patrick	4	3	$4^{1/3} \approx 1{,}5874$

C. Simulasi Numerik

Untuk menguji performasi metode iterasi Hansen-Patrick yang dimodifikasi (MHP), dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan enam fungsi bernilai real. Ukuran-ukuran performasi yang dihitung adalah jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi, baik COC maupun ACOC, galat mutlak, dan nilai fungsi pada interasi ke-n. Selanjutnya, performasi MHP dibandingkan dengan metode Newton (N) [7], metode Halley (H) [3], metode Newton-Steffensen (NS) [15], dan metode Hansen-Patrick (HP) [6]. Perhitungan komputasi untuk menentukan performasi metode-metode yang dibandingkan dilakukan dengan menggunakan perangakat Maple 13 dengan 850 digit dan iterasi akan berhenti pada saat memenuhi rumusan

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon, \qquad (37)$$

dengan ε adalah ketelitian galat relatif dan pada simulasi numerik ini digunakan ε sebesar 10^{-20}. Sedangkan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (*COC* dan *ACOC*) masing-masing menggunakan rumusan [16]

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+2} - \alpha)/(x_{n+1} - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}, \qquad (38)$$

dan

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+3} - x_{n+2})/(x_{n+2} - x_{n+1})\right|}{\ln\left|(x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+2} - x_n)\right|}, \; n = 0, 1, 2, \dots\ k. \qquad (39)$$

Selanjutnya, perhitungan komputasi terhadap fungsi-fungsi bernilai real dilakukan dengan mengambil nilai awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan yang mana akar-akar eksaknya ditampilkan sebanyak 20 digit desimal. Adapun fungsi yang digunakan pada simulasi numerik ini adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$, $\alpha \approx 0{,}11183255915896296483$,

$$f_2(x) = e^x - 4x^2,\ \alpha \approx 4,30658472822069929833,$$

$$f_3(x) = \cos(x) - x,\ \alpha \approx 0,73908513321516064165,$$

$$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10,\ \alpha \approx 1,36523003414096845760,$$

$$f_5(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1,\ \alpha = -1,000000000000000.$$

Ukuran-ukuran performasi metode iterasi (20) yang meliputi jumlah iterasi, evaluasi fungsi, nilai fungsi, order konvergensi komputasi (COC dan ACOC) dihitung menggunakan $\varepsilon = 10^{-20}$ sebagaimana ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Ukuran Performasi Metode Iterasi (20) dengan $\varepsilon = 10^{-20}$

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi	Evaluasi Fungsi	Nilai Fungsi	COC	ACOC
$f_1(x)$	−0,2	3	9	3,9129(e−34)	3,9983	3,7881
	0,3	3	9	3,7212(e−36)	3,9988	4,1991
$f_2(x)$	4,0	3	9	8,7293(e−25)	3,9933	4,3721
	4,5	3	9	2,6783(e−49)	3,9999	3,9122
$f_3(x)$	0,1	3	9	3,3112(e−33)	3,9964	4,4128
	1,5	3	9	2,3715(e−49)	3,9998	3,7259
$f_4(x)$	1,0	3	9	2,2915(e−35)	3,9987	4,2351
	2,0	3	9	2,5647(e−34)	3,9985	3,7478
$f_5(x)$	−1,5	3	9	6,4687(e−43)	4,0007	4,0482
	0,0	3	9	3,1980(e−38)	4,0014	3,6088

Selain menggunakan pendekatan deret Taylor, orde konvergensi metode iterasi dapat juga dihitung secara komputasi yang melibatkan nilai-nilai galat, baik galat mutlak (*computational order of convergence* (COC)) maupun galat realatif (*approximated computational order of convergence* (ACOC)). Nilai-nilai COC dan ACOC dari setiap metode iterasi yang dihitung masing-masing menggunakan Persamaan (38) dan (39) diberikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3 Perbandingan COC dan ACOC untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

$f(x)$	x_0	*COC*					*ACOC*				
		N	H	NS	HP	MHP	N	H	NS	HP	MHP
$f_1(x)$	−0,2	1,9999	3,0000	2,9999	3,0000	3,9983	2,0000	2,9984	2,9957	2,9960	3,7881
	0,3	1,9999	3,0000	3,0000	3,0000	3,9988	2,0004	3,0005	3,0019	3,0003	4,1991
$f_2(x)$	4,0	1,9999	3,0000	3,0000	3,0005	3,9933	2,0000	3,0018	3,0060	3,0005	4,3721
	4,5	1,9999	2,9998	2,9995	2,9998	3,9999	2,0001	2,9998	2,9995	2,9998	3,9122
$f_3(x)$	0,1	1,9999	3,0000	3,0000	2,9996	3,9964	1,9995	3,0031	3,0049	2,9996	4,4128
	1,5	1,9999	3,0000	2,9994	3,0000	3,9998	2,0000	2,9977	2,9994	3,0031	3,7259
$f_4(x)$	1,0	1,9999	3,0012	3,0020	3,0000	3,9987	2,0001	3,0012	3,0021	3,0000	4,2351
	2,0	1,9999	3,0000	3,0000	3,0000	3,9985	2,0000	2,9972	2,9958	3,0000	3,7478
$f_5(x)$	−1,5	2,0000	3,0000	2,9990	3,0000	4,0007	2,0002	2,9886	2,9990	2,9865	4,0482
	0,0	2,0000	3,0003	3,0059	3,0004	4,0014	2,0002	2,6341	3,0060	2,8721	3,6088

Berdasarkan Tabel 3, orde konvergensi modifikasi metode iterasi Hansen-Patrick, baik yang dihitung menggunakan formulasi COC maupun ACOC secara umum konvergen secara kuartik, COC $\rightarrow$ 4, dan ACOC$\rightarrow$ 4 untuk n = 1, 2, 3, 4. Hal ini semakin mempertegas dan menguatkan hasil orde konvergensi yang diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor.

Salah satu ukuran performasi suatu metode iterasi pada proses menghampiri akar persamaan nonlinear adalah banyaknya iterasi yang digunakan. Metode iterasi dikatakan lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, jika banyaknya iterasi yang digunakan lebih sedikit. Jumlah iterasi ini berkaitan secara langsung dengan penggunaan evaluasi fungsi. Suatu metode iterasi yang menggunakan iterasi sedikit, maka evaluasi fungsi yang digunakan juga sedikit.

Untuk mengetahui keunggulan metode iterasi (20), maka ukuran-ukuran performasi metode iterasi, yaitu berupa jumlah iterasi yang digunakan dan banyaknya evaluasi fungsi dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Perbandingan jumlah iterasi dan evaluasi fungsi dari lima metode iterasi diberikan pada Tabel 4 berkut.

Tabel 4 Perbandingan jumlah iterasi dan evaluasi fungsi untuk ε = 10^{-20}

$f(x)$	x_0	Iterasi					Evaluasi Fungsi				
		N	H	NS	HP	MHP	N	H	NS	HP	MHP
$f_1(x)$	−0,2	6	4	4	4	3	12	12	12	12	9
	0,3	5	3	4	4	3	10	9	12	12	9
$f_2(x)$	4,0	6	4	4	3	3	12	12	12	9	9
	4,5	5	3	3	3	3	10	9	9	9	9
$f_3(x)$	0,1	5	4	4	3	3	10	12	12	9	9
	1,5	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9
$f_4(x)$	1,0	5	3	4	3	3	10	9	12	9	9
	2,0	6	4	4	3	3	12	12	12	9	9
$f_5(x)$	−1,5	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9
	0,0	5	4	3	4	3	10	12	9	12	9

Tabel 4 memperlihatkan bahwa metode iterasi (20) secara umum menggunakan 3 iterasi untuk menghasilkan akar hampiran dengan ε = 10^{-20}, yang mana lebih sedikit dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Penggunaan iterasi yang sedikit memberikan dampak pada sedikitnya penggunaan evaluasi fungsi. Berdasarkan informasi ini, menunjukkan bahwa metode iterasi modifikasi Hansen-Patrick lebih efisien dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Selain menggunakan orde konvergensi dan jumlah iterasi sebagai ukuran performasi metode iterasi, ukuran lainnya yang digunakan untuk menguji performasi metode iterasi adalah akurasi yang diwakili oleh nilai fungsi pada iterasi ke-n ($|f(x_n)|$) dan galat mutlak ($|\alpha - x_n|$). Tabel 5 menampilkan nilai fungsi dari setiap metode iterasi yang dihitung pada iterasi ke-4, sedangkan Tabel 6 menampilkan nilai galat mutlak yang dihitung berdasarkan total penggunaan evaluasi fungsi (*total number of functional evalution* (TNFE)).

Pada simulasi ini, total evaluasi fungsi yang digunakan sebesar duabelas evaluasi fungsi. Hal ini berarti, jika suatu metode iterasi pada proses menghampiri akar-akar eksaknya melibatkan dua evaluasi fungsi setiap iterasinya, maka nilai galat mutlaknya dihitung pada iterasi ke-6.

Tabel 5 Perbandingan |$f(x_n)$| pada iterasi ke-4

$f(x)$	x_0	N	H	NS	HP	MHP
$f_1(x)$	–0,2	1,0651(e–09)	2,7758(e–55)	1,2725(e–45)	2,4550(e–45)	8,5446(e–134)
	0,3	2,5868(e–11)	3,5153(e–66)	9,0539(e–54)	6,8425(e–72)	6,9891(e–142)
$f_2(x)$	4,0	1,5284(e–07)	2,1103(e–53)	5,5770(e–42)	7,8297(e–63)	8,2964(e–102)
	4,5	2,4263(e–12)	5,2464(e–76)	2,4262(e–66)	5,4550(e–75)	3,0000(e–198)
$f_3(x)$	0,1	1,7252(e–11)	3,9684(e–49)	4,7468(e–58)	5,0636(e–75)	9,3199(e–133)
	1,5	6,3614(e–16)	1,1496(e–51)	3,5077(e–80)	1,3460(e–54)	2,4520(e–197)
$f_4(x)$	1,0	3,5124(e–10)	2,2350(e–60)	9,1053(e–55)	2,2108(e–83)	1,2613(e–143)
	2,0	8,2905(e–09)	4,6600(e–52)	7,8139(e–48)	3,4522(e–63)	1,9791(e–139)
$f_5(x)$	– 1,5	7,1934(e–16)	1,5262(e–3)	5,1900(e–92)	5,7145(e–35)	4,8786(e–173
	0,0	9,7364(e–16)	6,3918(e–26)	9,3636(e–73)	4,9230(e–22)	2,9145(e–154)

Tabel 6 Perbandingan galat mutlak untuk TNFE = 12

$f(x)$	x_0	N	H	NS	HP	MHP
$f_1(x)$	–0,2	1,9116(e–18)	3,4951(e–55)	1,1234(e–15)	3,0911(e–45)	1,0759(e–133)
	0,3	1,1277(e–21)	4,4263(e–66)	2,1608(e–18)	8,6157(e–72)	8,8002(e–142)
$f_2(x)$	4,0	1,2322(e–17)	5,3111(e–55)	5,8707(e–15)	1,9705(e–64)	2,0880(e–103)
	4,5	3,1056(e–27)	1,3204(e–77)	4,4483(e–23)	1,3729(e–76)	1,0000(e–159)
$f_3(x)$	0,1	2,3464(e–23)	2,3711(e–49)	1,7984(e–19)	3,0256(e–75)	5,5687(e–133)
	1,5	3,1900(e–32)	6,8693(e–52)	7,5471e–27)	8,0423(e–55)	1,4660(e–197)
$f_4(x)$	1,0	2,2179(e–22)	1,3534(e–61)	6,1217(e–19)	1,3388(e–84)	7,6378(e–145)
	2,0	1,2356(e–19)	2,8220(e–53)	1,2533(e–16)	2,0905(e–64)	1,1985(e–140)
$f_5(x)$	– 1,5	2,3956(e–33)	2,5437(e–44)	6,7780(e–31)	9,5242(e–36)	8,1309(e–174)
	0,0	4,3887(e–33)	1,0653(e–26)	1,7777(e–24)	8,2051(e–23)	4,8575(e–155)

Pada Tabel 5 dan 6, baik nilai fungsi maupun galat mutlak dari metode iterasi (20) secara umum lebih kecil dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi (20) mempunyai akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya dalam menghampiri akar-akar eksaknya.

KESIMPULAN

Metode Hansen-Patrick dimodifikasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua. Sedangkan turunan kedua yang muncul pada metode iterasi direduksi menggunakan tafsiran fungsi hiperbolik. Untuk memberikan peluang peningkatan orde konvergensi dan sekaligus tetap mempertahankan jumlah evaluasi fungsi, maka pada saat memodifikasi, bentuk eksplisit turunan kedua ditambahkan satu parameter real η. Berdasarkan analisis orde konvergensi, modifikasi metode Hansen-Patrick memiliki orde onvergensi empat untuk $\eta = ½(\theta - 1)$, $\theta \in \Re$ dan melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f(w_n)$ dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1,5874$.

Pada simulasi numerik, orde konvergensi metode yang dihitung menggunakan rumusan (38) dan (39) mempertegas bahwa metode iterasi (20) memiliki orde konvergensi empat sebagaimana diberikan pada Tabel 3. Selain itu, pada Tabel 4 menunjukkan bahwa jumlah iterasi yang dibutuhkan oleh metode iterasi (20) dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinier lebih sedikit dibandingan dengan metode iterasi Newton, metode Halley, metode Newton-Steffensen, dan metode Hansen-Patrick.

Sedangkan Tabel 5 dan 6 memberikan informasi bahwa modifikasi metode Hansen-Patrick mempunyai akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden, R. L. & Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis*, 9th ed. Boston: BROOKE/COLE Cengage Learning.

[2] Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers, 7th Ed*, 7th ed. Mc GrawHill.

[3] Gander, W. (1985). On Halley ' s Iteration Method Walter Gander. *American Mathematical Monthly.* 92(2), 131–134.

[4] Melman, A. (1997). Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods. *SIAM Review,* 39(4), 728–735.

[5] Amat, S., Busquier, S., Gutierrez, J. M. & Hernandez, M. A. (2008). On the global convergence of Chebyshev's iterative method. *Journal of Computational and Appllied Mathematics*, 220, 17–21.

[6] Hansen, E. & Patrick, M. (1976). A family of root finding methods. *Numerische. Mathematik,* 27(3), 257–269. doi: 10.1007/BF01396176.

[7] Traub, J. F. (1964). *Iterative methods for the solution of equations*. New York: Prentice-Hall, Inc.

[8] Kung, H. T. & Traub, J. F. (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. *Journal of the Association for Computing Mechinary*, 21 (4), 643–651,

[9] Sharma, J. R. & Guha, R. K. (2011). Second-derivative free methods of third and fourth order for solving nonlinear equations. *International Journal Computer Mathematics.* 88(1), 163–170. doi: 10.1080/00207160903365875.

[10] Fatmawati, L. & Wartono. (2019). Orde konvergensi varian metode Hansen-Patrick dua parameter untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. *Prosiding Seminaaar MIPAKes UMRI.*

[11] Kansal, M., Kanwar, V., & Bhatia, S. (2015). New modifications of Hansen-Patrick's family with optimal fourth and eighth orders of convergence. *Appllied. Mathematics and Computation*, 269, 507–519. doi: 10.1016/j.amc.2015.07.101.

[12] Kansal, M., Kanwar, V., & Bhatia, S. (2016). Efficient derivative-free variants of Hansen-Patrick's family with memory for solving nonlinear equations. *Numerics Algorithms*, 73(4), 1017–1036. doi: 10.1007/s11075-016-0127-6.

[13] Sholeh, B., & Wartono. (2019). Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan Orde Konvergensi Empat. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 5(1), 133–140.

[14] Xiaojian, Z. (2008). Modified Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Appllied Mathematics Computation,* 203, 824–827. doi: 10.1016/j.amc.2008.05.092.

[15] Sharma, J. R. (2005). A composite third order Newton-Steffensen method for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation,* 169(1), 242–246. doi: 10.1016/j.amc.2004.10.040.

[16] Grau-sánchez, M., Noguera, M., Grau, À., & Herrero, J. R. (2012). On new computational local orders of convergence. *Appllied. Mathematics. Letter,* 25, 2023–2030. doi: 10.1016/j.aml.2012.04.012.