Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen VI

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa

Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes

Volumen VI

Compiladoras

Gabriela Buendía | Verónica Molfino | Cristina Ochoviet

Consejo de Formación en Educación

Departamento de Matemática

Uruguay

1ª edición: Diciembre de 2019

Diseño de cubierta: Estudio Macarrón

Imagen de cubierta: Fragmento de *Morro da Favela* de Tarsila do Amaral

Edición: Verónica Molfino y Cristina Ochoviet

ISBN 978–9974–8760–1–9

Departamento de Matemática

Montevideo, Uruguay

Por sugerencias o comentarios acerca del contenido de esta obra dirigirse a: depdematematica@gmail.com

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Solo quienes intentan lo absurdo alcanzan lo imposible. Creo que lo que necesito está en el sótano… déjame subir a comprobarlo.

M. C. Escher

Este sexto volumen aporta evidencia, una vez más, de que es posible establecer vínculos entre formación e investigación, mediante un proceso de retroalimentación en ambos sentidos. Lo producido por la investigación en matemática educativa informa a la práctica de aula, pero también la práctica sitúa en contexto a la producción académica, la contrasta con lo que sucede en el aula y aporta diversidad de lugares desde los que mirar críticamente esa producción.

En particular, este volumen confirma cómo la investigación, desarrollada en el contexto de la formación y en vínculo con la práctica, aporta experiencias ricas para el futuro educador. Al decir de Aldous Huxley, "la experiencia no es lo que te sucede, sino lo que haces con lo que te sucede". Así, en el proceso de formación, se van adquiriendo herramientas y modos de pensar, que acompañarán a los educadores en su desarrollo profesional.

Este volumen contiene seis artículos que dividimos en tres secciones: Diseños de enseñanza, Análisis del discurso matemático escolar y Enseñanza de la matemática desde las artes. No son excluyentes, dado que la tercera sección incluye el diseño de tareas; pero las hemos organizado de esta manera porque queremos profundizar en este modo de pensar la enseñanza de la matemática junto a las artes, aportar ideas y hacerlas visibles en la comunidad a través de un espacio especial para tal fin, que esperamos se nutra de nuevos aportes en futuros volúmenes.

La sección Diseños de enseñanza contiene dos artículos. El primero, *Análisis de la estructura de las tareas como insumo para abrirlas*, presenta la perspectiva de Regina Bruder para el diseño de tareas y cómo esta facilita el diseño de tareas de final abierto. El siguiente artículo se titula *Historias para enseñar matemática: una tipología posible*. Presenta un enfoque de la enseñanza de la matemática a través de la narración de historias y los distintos tipos de historias que, según Rina Zazkis y Peter Liljedhal, pueden ser de utilidad para planificar la enseñanza.

En la segunda sección, en *¿Grados o radianes? Aportes para el discurso matemático escolar* reflexionamos acerca de por qué se hace necesario el trabajo con el radián, en un contexto que seguramente resultará significativo para los estudiantes de enseñanza media.

En la sección Enseñanza de la matemática desde las artes exploramos el ambiente de la formación y la investigación en el campo de la matemática educativa para que matemática y arte puedan convivir y potenciarse.

Matemática y arte: ¿Tan distantes? ¿Tan entrelazadas? Una vez más, el binomio fantástico de Gianni Rodari nos ofrece una poderosa herramienta para la creación de una nueva historia. Como señala este autor, para que dos ideas que en apariencia son antagónicas, encuentren una sutil e insólita unión, es necesaria una situación fantástica en la que puedan desarrollar relaciones.

Así, la matemática puede encontrarse en el cine, y el cine resignificarse a partir de la matemática, mediante actividades desafiantes que invitan a los estudiantes a explorar ese binomio en la película *Hidden Figures*. Esta reflexión es presentada en el artículo *Una actividad para el trabajo con la matemática a través del cine*. En *Aportes para el trabajo con matemática y teatro en el aula* se presentan dos textos para abordar el teorema de Pitágoras en la enseñanza media básica. Uno de ellos a través del teatro de títeres. Luego, el artículo *Cruces entre matemática* *y literatura: ¿un paraíso posible?* formula una propuesta para enseñar matemática desde un texto literario: el cuento *Un pequeño paraíso* de Julio Cortázar, también para la enseñanza media básica.

En este volumen VI aún queda un capítulo por escribir. Es el que invitamos a que cada lector redacte, explicando cómo lo inspiró el *Morro da Favela* de Tarsila do Amaral, imagen de cubierta, para encontrar matemática en la obra, o diseñar actividades de enseñanza a partir de ella, o incluso proponerla a los estudiantes y desafiarlos (y desafiarse) a comprender mejor la matemática a partir de un contacto más cercano con la obra.

En cada uno de los capítulos de este libro se viven las palabras de Escher, intentar lo absurdo para alcanzar algo que podría parecer imposible: diseñar la enseñanza de la matemática en Uruguay a partir del estudio de documentos provenientes del campo de la matemática educativa o mediante recursos provenientes del arte y colaborar en una mayor comprensión y apreciación del arte empleando recursos matemáticos. Es que, en ocasiones, para encontrar lo que está en el sótano debemos subir a buscarlo.

GABRIELA BUENDÍA, VERÓNICA MOLFINO, CRISTINA OCHOVIET

Diciembre de 2019

Sección 1

Diseños de enseñanza

ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LAS TAREAS COMO INSUMO PARA ABRIRLAS

AGUSTINA GARCÍA, CAROLINA GORDANO, VERÓNICA MOLFINO, TANIA SUÁREZ

Resumen

Desde hace algunos años en la formación docente en Uruguay se ha abordado el potencial del uso de tareas de final abierto para la enseñanza de la matemática por distintos medios: cursos curriculares de Didáctica, talleres, cursos de formación continua e incluso publicaciones de esta misma colección. En este escrito brindamos herramientas concretas para diseñar este tipo de tareas, a partir del análisis de su estructura interna.

Palabras claves: estructura de las tareas, tareas de final abierto, diseño de tareas.

Abstract

Since some years ago the potential of the use of open–ended tasks for mathematics teaching has been a topic of discussion in teacher training in Uruguay. This has been carried out through different means: curricular courses of Didactics in initial teacher training, workshops, continuous professional development courses and even publications from this collection. In this paper we provide concrete tools to design this type of tasks, using the analysis of its internal structure.

Keywords: task structure, open–ended tasks, task design.

INTRODUCCIÓN

En la investigación en matemática educativa, las tareas y su implementación se han convertido en un tema de estudio. En el *ICMI Study 22*, Kieran, Doorman y Ohtani (2015) señalan que, a nivel internacional, es desde la década del setenta que el diseño de tareas cobra especial importancia en la comunidad de investigadores en educación matemática. El propio estudio da cuenta de la consistencia que ha ido alcanzando el diseño de tareas como línea de investigación (Watson y Ohtani, 2015).

En el curso de Didáctica III estudiamos el punto de vista de Regina Bruder (2008) referido a la estructura de las tareas y luego el de Orit Zaslavsky (1995) referido a tareas de final abierto. En el proceso de intervenir tareas cerradas para convertirlas en abiertas, o de diseñar tareas abiertas, encontramos que conocer la estructura de las tareas según Bruder (2008) resultaba fructífero.

En este ensayo presentamos la perspectiva de Bruder referida a la estructura de las tareas y el desarrollo realizado por Büchter y Leuders (2005) sobre cómo modificar actividades para que sean de final abierto, con base en la estructura y clasificación de Bruder. A continuación, desarrollamos el potencial que identificamos para diseñar tareas de final abierto durante el curso. Por último, presentamos una reflexión grupal a raíz del proceso experimentado.

ESTRUCTURA DE LAS TAREAS

Bruder (2008) plantea que la estructura de toda tarea puede ser descripta mediante tres componentes que denomina: situación inicial (datos o condiciones dadas), situación final (conclusiones, resultados) y transformaciones, que conducen de la situación inicial a la final (cadenas de deducción, métodos de resolución, modelos matemáticos). Estas tres componentes que presentan todas las tareas pueden o no ser explicitadas en el enunciado de la tarea y según figuren o no en dicho enunciado, se puede establecer una clasificación de los tipos de tarea con estructuras diferentes.

Determinar si una componente es dada o no, se reduce a responder a las siguientes preguntas: referida a la situación inicial, ¿todos los factores o condiciones requeridos son conocidos?; referida a las transformaciones, ¿es conocido, mencionado o explicitado algún posible abordaje?; y referida a la situación final, ¿los valores a calcular o la suposición a concluir son dados? Las tres preguntas se responden con un sí o un no y a partir de las ocho posibles combinaciones de respuesta, Bruder realiza una clasificación de las tareas. Esta clasificación se muestra en la tabla siguiente, en la cual se emplea la notación (X, –, –) donde X supone que la componente es dada y – que no lo es. Adoptamos la presentación de Ochoviet y Skutella (2014), donde cada columna describe un tipo de tarea, pero las proponemos en diferente orden por razones de presentación en nuestro escrito.

	Ejercicio Ejemplo	Tarea básica	Tarea problema	Ejercicio de justifi–cación	Tarea básica invertida	Tarea problema invertida	Búsqueda de una aplicación	Situación abierta
Situación inicial	X	X	X	X	–	–	–	–
Transfor–maciones	X	X	–	–	X	–	X	–
Situación final	X	–	–	X	X	X	–	–

Tabla 1: Ocho tipos de tareas. Adaptada de (Bruder, 2008, pp. 28–29)

El primer tipo de tarea es el *ejercicio utilizado como ejemplo* (X, X, X), en este caso las tres componentes son dadas. Bruder (2008) incluye también en esta categoría a los ejercicios en los que se pregunta ¿es esto cierto? o ¿dónde está el error? y señala que contribuyen a una comprensión más profunda del tema.

En las *tareas básicas* (X, X, –), se da la situación inicial y las transformaciones pero no la situación final. En este tipo de tarea el alumno ya conoce el enfoque necesario para resolverlo, en el proceso de aprendizaje son útiles para identificar o aplicar.

Un tercer tipo son las *tareas problema* (X, –, –) que solo brindan la situación inicial. A diferencia de las tareas básicas, los alumnos pueden no haber adquirido aún el método de resolución.

Las *tareas de justificación* (X, –, X) son aquellas en las que se cuenta con la situación inicial y final pero no con las transformaciones. Su importancia radica en el aprendizaje y la detección de estrategias para la resolución de problemas o el establecimiento de cadenas de deducción.

Si consideramos la reversión del segundo y tercer tipo, obtenemos las *tareas básicas invertidas* (–, X, X) y las *tareas problema invertidas* (–, –, X). Büchter y Leuders (2005) sostienen que estos dos tipos de tareas promueven una mayor comprensión por parte de los estudiantes debido a que cambia el sentido de la pregunta y, en consecuencia, también lo hace el método de resolución.

Un séptimo tipo de tarea es aquel en el que solo se dan las transformaciones, denominado *búsqueda de una aplicación* (–, X, –). Büchter y Leuders (2005) sostienen que, al igual que las dos anteriores, no son problemas auténticos de la actividad matemática, sino "inversiones didácticas", diseñadas para la enseñanza. Aun así, son especialmente relevantes porque permiten que los estudiantes reflexionen sobre un método conocido de resolución de un problema, indagando sobre sus alcances y posibles contextos de aplicación.

Por último, en la *situación abierta* (–, –, –), ninguna de las tres componentes es dada, pueden ser tareas de modelado o de descubrir un método para resolver un tipo de tareas.

Bruder (2008) asegura que considerar los ocho tipos de tareas para el diseño de actividades de enseñanza brinda a los docentes una herramienta para considerar una mayor variedad de métodos relativos a una temática. Además, permite reflexionar sobre el grado de variabilidad y de dificultad de una secuencia de enseñanza. También ha sido empleado para categorizar tareas en otros contextos: en Ochoviet y Skutella (2014), por ejemplo, se presentan ejemplos de algunas de estas categorías, detectados a partir de un análisis de las tareas sobre redondeo propuestas en una plataforma adaptativa de enseñanza de matemática en línea, *bettermarks* (PAM, en Uruguay).

Desde el punto de vista de los estudiantes, Bruder (2008) recomienda la consideración en la enseñanza de los ocho tipos de tareas porque promueven aprendizajes duraderos y posibilitan una comprensión más profunda del conocimiento matemático, especialmente en comparación al tipo de comprensión que ofrece la reproducción formal de contenidos y su aplicación a tareas rutinarias.

ESTRUCTURAS DE LAS TAREAS Y LA POSIBILIDAD DE ABRIRLAS

Büchter y Leuders (2005) realizan observaciones similares a las que descubrimos a partir de las reflexiones en el curso y otras que permiten apreciar la importancia de tener en cuenta la estructura de las tareas (Bruder, 2008) para enriquecer actividades, en particular para abrirlas (Zaslavsky, 1995). Estos autores brindan algunas estrategias para modificar tareas de final cerrado en tareas de final abierto. Para esto consideran la estructura y la clasificación de tareas propuesta por Bruder (2008). Entienden que son seis los tipos de actividades que se pueden adaptar a tareas de final abierto: tarea problema, ejercicio de justificación, tarea básica invertida, tarea problema invertida, situación abierta y búsqueda de una aplicación.

Büchter y Leuders (2005) sugieren que se pueden crear tareas abiertas, o convertir tareas cerradas en abiertas, invirtiendo las tareas básicas o las tareas ejemplo, variando u omitiendo la situación inicial o el método por el que se alcanza la situación final, o pidiendo una justificación o método de resolución. Además, sostienen que estos métodos permiten abrir casi todas las tareas que se encuentran en los libros de texto y muestran cómo crear cada uno de los seis tipos de tareas antes explicitados.

Para generar las *tareas problema*, Büchter y Leuders (2005) proponen variar la pregunta de forma que ninguna solución obvia sea posible, por ejemplo, omitiendo determinados datos. Otro camino supone considerar un contexto y una situación problemática y proponer a los alumnos que discutan acerca de la toma de decisiones sobre esta. Además, los autores sostienen que incluso una tarea básica típica puede ser considerada una tarea problema si los alumnos no conocen el procedimiento de resolución. Los autores plantean el siguiente ejemplo (p. 97):

> Un lunes, el dueño de un cine decide mejorar el número de clientes que tiene. Comienza una promoción en la que todos los tickets cuestan €3 en vez de €8. En lugar de las 30 personas que suelen asistir, fueron 50. ¿La promoción fue beneficiosa para el vendedor?

Y la abren de la siguiente forma:

> Un lunes, el dueño de un cine decide mejorar el número de clientes que tiene. Normalmente recibe aproximadamente 30 clientes. Su competidor atrae gente a su cine los lunes mediante una oferta de precios bajos y él decide hacer lo mismo. ¿En qué situación este tipo de promociones tiene sentido para el dueño del cine?

Para los *ejercicios de justificación* proponen simplemente dar la situación inicial y la final y pedir a los alumnos un método o una justificación para el método de resolución. Esto permite a los estudiantes, según Büchter y Leuders (2005), descubrir un método de resolución propio y, por tanto, generar conocimiento. Para este tipo de actividad es importante que la resolución no sea mediante la aplicación de un algoritmo. Los autores proponen el siguiente ejemplo (pp. 95–96):

> La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono de n lados se puede expresar de la siguiente forma: $(n - 2).180°$. Por ejemplo, la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°. Calcule dicha suma en: a) un pentágono, b) un endecágono, y c) un polígono de 37 lados.

Para abrir este ejercicio, los autores proponen lo siguiente:

> Encuentra una justificación para el hecho de que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un pentágono es siempre 540°.

Las *situaciones abiertas* pueden crearse quitando información. Esto suele generar actividades con soluciones poco claras y sin un método obvio de resolución. Su objetivo puede ser, por ejemplo, descubrir un método. El siguiente ejemplo, presentado por los autores, puede sustituir a los tradicionales ejercicios de resolución de ecuaciones de segundo grado y ser propuesto antes de dar un método general de resolución (p. 98):

> Encuentra un método para determinar uno o más valores de x que verifiquen la ecuación $x^2 - 2x - 2 = 0$. Comprueba si tu método también funciona para una ecuación similar como $x^2 + 8x - 1 = 4$.

Acerca de las *tareas básicas invertidas*, *tareas problema invertidas* y *búsqueda de una aplicación*, Büchter y Leuders (2005) plantean, como ya dijimos, que no son auténticos ejercicios propios del quehacer matemático sino inversiones didácticas y que posibilitan un mejor entendimiento por parte de los estudiantes. La técnica que proponen en este caso es invertir el objetivo, de forma que los alumnos no deban simplemente aplicar una fórmula sino encontrar diversas formas de utilizarla. Al respecto, dan diversas variaciones para un ejercicio en el que se pide calcular el área de un triángulo. Presentamos algunas *tareas básicas invertidas* (p. 100):

- Indica posibles medidas de la base y la altura de un triángulo que tiene un área de 72 cm^2.
- Construye diferentes triángulos con igual base y cuya área sea de 72 cm^2.
- Piensa en las medidas de la base y la altura de un triángulo, y dile a tu compañero el área para que adivine los valores que pensaste.

En referencia a las *tareas problema invertidas*, los autores recomiendan una técnica similar a la empleada para las tareas básicas invertidas partiendo de *tareas problema*. La diferencia es que en estas la solución no debería encontrarse de manera obvia, ni explícita ni implícitamente.

Por último, las *tareas de búsqueda de una aplicación* pueden también diseñarse a partir de la transformación de tareas cerradas. Los autores ilustran esta categoría mediante un ejercicio tradicional de proporcionalidad y proponen la siguiente modificación (p. 102):

> Presenta tantos problemas como te sea posible que puedan ser resueltos usando la regla de tres, y resuélvelos. ¿Hay problemas que no puedan ser resueltos mediante la regla de tres?

Büchter y Leuders (2005) resumen sus técnicas en los siguientes puntos (p. 102):

– Requerir justificación o la creación de una estrategia.
– Variar el resultado o la especificación de diferentes tipos de imagen.
– Quitar instrucciones o información.
– Solicitar un método de resolución antes de haber sido enseñado.
– Invertir el objetivo o la perspectiva.
– Buscar aplicaciones para modelos o procedimientos.

EJEMPLOS DISEÑADOS

Bruder (2008) señala que la categorización propuesta es especialmente fructífera cuando se intentan diseñar los ocho tipos diferentes de ejercicios para una misma temática. Ello permite visualizar que cada tipo de tarea se corresponde con diferentes aspectos del aprendizaje, como comprender o aplicar.

Es por ello que, en vías de concretar esta clasificación de tareas, nos propusimos diseñar diferentes consignas sobre el mismo tema, en donde cada una perteneciera a una de las categorías propuestas por la autora. De esta forma, surgieron los siguientes ejemplos de tareas en torno a la transformación *adición de fracciones*:

Ejercicio utilizado como ejemplo (X, X, X)

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{6+35}{15}=\frac{41}{15}$$

Este podría ser un ejemplo típico presentado en el aula o en un texto después de la explicación de un procedimiento para sumar fracciones de diferente denominador. En él se explicita la situación inicial ($^{2}/_{5}$ y $^{7}/_{3}$), la transformación solicitada (adición de fracciones) y finalmente el resultado ($^{41}/_{15}$). Una variante podría ser preguntar a los estudiantes ¿es correcto el procedimiento y/o el resultado?

Tarea básica (X, X, –)

Calcula:

a. $\frac{5}{3}+\frac{2}{5}=$

b. $\frac{8}{9}+\frac{1}{4}=$

Esta tarea es caracterizada como *básica* porque la situación inicial está dada (las dos fracciones a sumar) y también la transformación solicitada (adición de fracciones). El estudiante debe, en cada caso, proceder a buscar el resultado o situación final.

Tarea problema (X, –, –)

> Gonzalo invitó a tres amigos a su casa a merendar y cocinó una torta para convidarlos. En un principio dividió la torta en ocho porciones iguales y todos comieron una porción (incluido Gonzalo). Quedaron satisfechos pero como la torta estaba muy rica, todos comieron media porción más. ¿Qué fracción de torta comió cada uno?

En esta tarea la situación inicial está dada (cada niño comió un octavo y la mitad de un octavo) y el estudiante debe buscar la transformación necesaria para dar con la respuesta pedida, por lo que puede clasificarse como *tarea problema*.

Tarea de justificación (X, –, X)

> Queremos repartir 3 chocolates iguales entre 4 niños, de manera que cada uno reciba la misma cantidad. Lucas y Lucía plantean los siguientes repartos:

¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

En este caso la imagen muestra la situación inicial (3 chocolates y 4 niños) y dos posibles situaciones finales (½ y ¼ o ¾). Los estudiantes deben elaborar estrategias para discernir cuál de los dos niños tiene razón, por lo que se trata de una *tarea de justificación*. Una de las estrategias puede involucrar la adición de ½ y ¼ para concluir que ambos tienen razón. Cabe destacar que la estrategia no es única, pueden ser procedimientos gráficos o verbales que también conduzcan a una respuesta. Además, la pregunta es personal, estar de acuerdo con uno u otro no solo tiene que ver con la suma de las fracciones, puede ser que el estudiante responda que está de acuerdo con el procedimiento que planteó un niño y no con el otro, independientemente de que ambos conducen a un mismo resultado.

Tarea básica invertida (–, X, X)

Escribe dos fracciones cuya suma sea $\frac{31}{24}$.

En este ejemplo se dan la transformación (adición de fracciones) y la situación final ($^{31}/_{24}$), por lo que consiste en una *tarea básica invertida*. Se trata de una tarea con múltiples respuestas correctas, que son los pares de fracciones cuya suma es la pedida.

Tarea problema invertida (–, –, X)

> Julieta fue a la fiambrería a comprar jamón y queso. Al pesar los dos productos, la bolsa pesó ¾ kg. ¿Cuánto compró de jamón? ¿Y de queso?

Consideramos que este es un ejemplo de una *tarea problema invertida* porque se conoce el resultado (¾ kg de jamón y queso) pero no se conoce ni la situación inicial ni la transformación que se requiere para concluir el resultado dado.

Búsqueda de una aplicación (–, X, –)

> Escribe el enunciado de un problema cuya solución se calcule mediante la siguiente operación y resuélvelo:

$$2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

En este caso la transformación a realizar es explícita, y lo que interesa que el estudiante desarrolle, además del cálculo de la situación final, es una posible situación inicial, por lo que entendemos que ilustra una posible tarea de *búsqueda de una aplicación*.

Situación abierta (–, –, –)

Crea un procedimiento para sumar dos fracciones.

En esta tarea no están dadas las condiciones inicial ni final, y se pregunta explícitamente por el procedimiento para llevar a cabo la transformación *adición de fracciones,* por lo que la consideramos como una *situación abierta*. Pueden surgir diversas estrategias: los estudiantes pueden plantear ejemplos concretos que ellos mismos formulen, de igual o diferente denominador, e idear, para sumarlas, estrategias gráficas o numéricas mediante fracciones equivalentes con diferentes denominadores posibles o con porcentajes. También pueden abordar el problema como una situación general, con fracciones expresadas algebraicamente.

Tal y como está enunciada, tendría sentido si aún no se abordó en clase ningún procedimiento explícito para sumar fracciones. De haberse abordado, podría modificarse, agregando que el procedimiento a crear debe ser diferente al ya visto.

VÍNCULOS ENTRE LA ESTRUCTURA DE LAS TAREAS Y LAS TAREAS DE FINAL ABIERTO

Analizando los ejemplos descritos anteriormente junto a otros diseñados o considerados en el curso, observamos que los correspondientes a los últimos cuatro tipos de tareas, es decir, todos aquellos que carecen de la situación inicial, en general presentan más de una solución posible. Este tipo de propuestas en donde se admite más de una respuesta correcta, son denominadas por Zaslavsky (1995) como tareas de final abierto.

Durante el transcurso del curso observamos que estas actividades despiertan en los estudiantes mayor interés por abordarlas en comparación con otro tipo de tareas; permiten que cada uno encuentre su propia solución de menor o mayor complejidad, fortaleciendo su autoestima y promoviendo la construcción de conocimiento. Fue entonces que la clasificación de tareas que propone Bruder (2008) nos resultó sumamente útil a la hora de diseñar nuevas consignas y también de rediseñar aquellas que ya conocíamos, con el fin de obtener tareas de final abierto. Basta con identificar los componentes de una actividad y elaborar la propuesta de forma tal que la situación inicial no esté dada. Esta estrategia para el diseño de una tarea de final abierto se vincula con la que propone Zaslavsky (1995) de omitir un dato, ya que se están omitiendo algunos o todos los datos de la situación inicial, y también con la de incorporar la respuesta a la formulación de un problema (Sullivan y Lilburn, 2002) en los casos en los que se invierte la tarea básica o la tarea problema.

Un ejemplo de lo expuesto anteriormente podría ser la siguiente tarea:

Resuelve en R:

$$3x - 5 = 7 + 2x$$

Este tipo de tarea es habitual en libros de texto y propuestas de clase, es una tarea básica de final cerrado. A continuación presentaremos algunos ejemplos de cómo es posible transformar esta tarea para que admita más de una posible solución.

Si pensamos en la estructura de las tareas donde la situación inicial no está dada, podemos modificar esta tarea de las siguientes formas:

Tarea básica invertida

Escribe una ecuación que admita a 12 como solución.

Tarea problema invertida

Crea un problema que admita a 12 como respuesta.

Búsqueda de una aplicación

Diseña una situación que se modele mediante la ecuación $3x - 5 = 7 + 2x$.

Situación abierta

Explica por escrito a un compañero cómo resolver una ecuación.

También puede abrirse considerando dada la situación inicial pero sin explicitar las transformaciones ni la situación final, mediante un tipo de tareas sobre las que la propia Zaslavsky (2008) pone atención: tareas de clasificación. En nuestro ejemplo podría ser:

Tarea problema

Clasifica las tarjetas y explicita el criterio empleado y las clases a las que da lugar.

Se entregan a equipos de estudiantes 20 o 30 tarjetas con ecuaciones, entre las que puede estar $3x - 5 = 7 + 2x$, y se solicita clasificarlas y explicitar los criterios.

En el diseño de las tarjetas es importante cuidar la selección de ecuaciones para que habilite a diferentes criterios de clasificación no triviales, esto es, que no queden clases vacías o todas las clases unitarias, y además que favorezcan la discusión en clase del desarrollo del conocimiento matemático que se pretende abordar: solución de una ecuación (vacía, unitaria, con más de un elemento), números admitidos como solución, estrategias de resolución, incógnita a emplear, formato de la ecuación, entre otros.

Incluso podría abrirse la tarea inicial de manera que quede una tarea básica, con situación inicial y transformaciones dadas. Por ejemplo:

Tarea básica

> A partir de la ecuación $3x - 5 = 7 + 2x$, modifica alguno de sus miembros para que admita a 7 como solución.

En suma, las variaciones propuestas consisten en invertir la situación (dar la respuesta y pedir la situación inicial), requerir la creación de una estrategia o una justificación en lugar de la solución a la ecuación, requerir un contexto para la situación, indagar sobre el alcance de un procedimiento de resolución o variar un resultado.

Otro ejemplo de cómo partiendo de una actividad y realizando algunos cambios podemos obtener una actividad de final abierto es el que desarrollamos a continuación, a partir de esta tarea básica de final cerrado:

> Construye con regla y compás un triángulo cuyos lados midan 6, 9 y 5.

Esta tarea presenta una única respuesta correcta: el triángulo está bien construido y respeta las medidas dadas, o no. Si bien el procedimiento no es único, lo que se pide al estudiante es la construcción de un triángulo y dos soluciones correctas presentadas por diferentes estudiantes son congruentes, por eso afirmamos que es de solución única. Veamos sus componentes: la situación inicial son las medidas de los lados, las transformaciones son todos los pasos que deben realizarse para construirlo y la situación final el triángulo construido. De esta forma, este tipo de actividad es una *tarea básica* si asumimos que anteriormente los estudiantes han construido triángulos con regla y compás, dadas las medidas de sus lados. Veamos que, al quitar la situación inicial podemos generar una actividad de final abierto. Si solo hacemos esto obtendríamos la siguiente actividad:

Construye con regla y compás un triángulo.

Esta actividad es, de hecho, de final abierto, sin embargo, no presenta un gran potencial en sí misma. Por tanto, en lugar de simplemente quitar las medidas de los lados del triángulo, sustituiremos esta información por otra, por ejemplo, su perímetro. El enunciado de la actividad sería entonces el siguiente:

Construye con regla y compás un triángulo de perímetro 20.

Consideramos que esta actividad tiene gran potencial, ya que permite revisar el concepto de perímetro de un triángulo, además de trabajar con otros conceptos, como la desigualdad triangular. Esta actividad fue propuesta en nuestros grupos de práctica de primer año y permitió que dicha propiedad surgiera como una observación de los alumnos. Cuando la resolvieron se enfrentaron a la situación de que algunos triángulos podían construirlos mientras que otros no, luego de algunas preguntas pudieron determinar cuál era la condición.

Cabe destacar que no todas las consignas en las que la situación inicial no esté dada constituyen tareas de final abierto, resulta necesario, además, elaborar la consigna de forma que la propuesta no se cierre; por ejemplo, analicemos los siguientes enunciados:

a. Escribe dos números naturales cuyo mínimo común múltiplo sea 18.

b. Escribe todas las parejas de números naturales cuyo mínimo común múltiplo sea 18.

La propuesta a es una tarea de final abierto mientras que la b no lo es.

REFLEXIONES FINALES

Consideramos que la posibilidad de haber trabajado con estos aportes de la investigación en matemática educativa a lo largo del curso, resultó favorable para nuestra formación, pues nos otorgó una herramienta de análisis acerca de la estructura de las tareas que nos facilitó el diseño de actividades de acuerdo al objetivo que se quiera lograr. Ese conocimiento fue aplicado en el curso de práctica, y lo conservaremos para el desarrollo de nuestra labor docente de aquí en más.

Queremos destacar que el hecho de que este aporte nos pareciera tan relevante nos impulsó hacia la realización de un taller para profesores y alumnos de profesorado de matemática en la X Escuela de Primavera en Didáctica de la Matemática organizada por el Departamento de Matemática. Esto significó una experiencia diferente para nosotras, que si bien estamos habituadas a trabajar intercambiando conocimientos en las clases que dictamos en enseñanza media, hacerlo frente a otros estudiantes de profesorado y profesores formadores implicó un nuevo desafío.

De igual forma, la decisión de publicar este artículo constituye una nueva instancia de aprendizaje, pues debimos realizar un estudio más profundo acerca del tema, de lo establecido por Bruder (2008, 2012) y motivó la lectura de nuevos documentos como Büchter y Leuders (2005), que resulta muy valioso para nuestro desempeño como docentes de matemática. Además, este estudio nos permitió comprobar y enriquecer algunas de las observaciones realizadas en el curso con el planteo realizado por otros autores, en particular por Büchter y Leuders (2005).

En definitiva, ambas experiencias constituyeron nuevos y valiosos desafíos, no solo para nuestra práctica docente sino también por la reflexión didáctica que estuvo implicada. Representó una extensión del curso, con la intención de transmitir las ideas que discutimos y analizamos durante todo el año, primero en forma de taller y luego en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. En R. Bruder, T. Leuders y A. Büchter (Eds). *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten* (pp. 18–52). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, R. (2012). *Eight target structure types of tasks as background for learning Sourroundings.* Recuperado de: <http://www.math-learning.com/files/120711_ICME12_TSG31_bruder.pdf>.

Büchter, A. y Leuders, T. (2005). Aufgabenmerkmale. En A. Büchter y T. Leuders (Eds.), *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen* (pp. 73–113). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Kieran, C., Doorman, M. y Ohtani, M. (2015). Chapter 2 Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education. New ICMI Study Series* (pp. 19–81). Suiza: Springer.

Ochoviet, C. y Skutella, K. (2014). Tipos de ejercicios para el aprendizaje de la matemática en línea: el caso de actividades referidas a 'redondeo'. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (pp. 2247–2254). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sullivan, P. y Lilburn, P. (2002). *Good Questions for Math Teaching*. California: Math Solutions Publications.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series*. Suiza: Springer.

Zaslavsky, O. (1995). Open–ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15–20.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education.

Invited presentation at the *Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis*, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME–11), Monterrey, México. Recuperado de: <http://tsg.icme11.org/document/get/290>.

HISTORIAS PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA: UNA TIPOLOGÍA POSIBLE

JOAQUÍN BATISTA, MARTÍN BIANCHI, ANA CAREN DA SILVA, CRISTINA OCHOVIET

Resumen

En este artículo presentamos distintos tipos de historias para enseñar matemática, cada una con sus características y propósitos didácticos. También ejemplificamos y diseñamos, para cada una, una actividad matemática. Finalmente, expresamos qué aprendizajes nos dejó la elaboración de este trabajo.

Palabras clave: formación de profesores, cuenta historias, diseño de tareas.

Abstract

In this article we present different types of stories to teach mathematics, each one with its features and didactic purposes. We also exemplify and design, for each one, a mathematical activity. Finally, we state what we learnt doing this work.

Keywords: teacher training, storytelling, task design.

INTRODUCCIÓN

Este artículo es fruto de un trabajo realizado en la asignatura Didáctica III de la especialidad Matemática. La propuesta consistió en el estudio del libro *Teaching Mathematics as Storytelling* de Rina Zazkis y Peter Liljedhal (2009) para luego ejemplificar cada uno de los tipos de historias que estos autores proponen con el diseño de actividades matemáticas. Para la búsqueda de historias decidimos hacer foco, en principio, en textos literarios como cuentos y novelas, aunque luego tuvimos que recurrir también a libros de divulgación o de historia de la matemática.

Zazkis y Liljedahl (2009) afirman que ellos cuentan historias en la clase de matemática para lograr un entorno de imaginación, emoción y pensamiento. También para hacer que la matemática sea más disfrutable y que merezca ser recordada: "Contamos historias en la clase de matemática para comprometer a los estudiantes en una actividad matemática, para hacerlos pensar y explorar, y para ayudarlos a comprender conceptos e ideas" (p. ix). Estos autores sostienen que las historias, tanto en enseñanza primaria como en el nivel secundario, pueden aportar el elemento humano a conceptos o ideas que son considerados áridos; aportan una perspectiva novedosa y un cambio a la forma usual en que se presenta el trabajo en la clase de matemática que suele ser a través de breves explicaciones del profesor, seguidas de ejemplos y a continuación resolución de ejercicios similares a cargo de los alumnos. Las historias renuevan las propuestas de clase y fomentan una atmósfera creativa.

En este marco, estos autores proponen los siguientes tipos de historias para enseñar matemática: historias que establecen un marco o ambiente; historias que acompañan e historias que se entrelazan con el contenido; historias que presentan; historias que explican; historias que formulan una pregunta; historias que cuentan una broma. Estos tipos de historias son útiles para planificar lecciones para la enseñanza de la matemática.

Historias que establecen un marco o ambiente

Este tipo de historias se utilizan como excusa para presentar un concepto o proponer un problema a resolver. Dicho concepto o problema no necesariamente debe estar relacionado con la historia que se elige. Hay tres tipos principales de historias que establecen un marco: (1) aquellas en las que un héroe debe enfrentar desafíos para alcanzar una meta; (2) aquellas que implican develar un código secreto que puede salvar vidas, que permite encontrar un tesoro, o conquistar un amor; (3) aquellas en las que se ofrece un trato.

Para ejemplificar este tipo de historias los autores proponen el acertijo de la esfinge dentro del mito de Edipo que trata de cómo Edipo, al derrotar a la esfinge, se convierte en el rey de Tebas. El acertijo es: "¿Cuál es la criatura que en la mañana camina en cuatro patas, al medio día en dos y en la noche en tres?" (Zazkis y Liljedhal, 2009, p. 31). Los autores explican que este acertijo no tiene relación con la historia de Edipo ya que la pregunta podría ser cualquiera. Por eso, los autores caracterizan a esta historia como una que establece un marco o ambiente.

Para ilustrar este tipo de historias seleccionamos un fragmento del libro *La pirámide roja* de Rick Riordan (2010) e hicimos una adaptación. Elegimos esta historia porque plantea un desafío a una heroína: Nut debe crear días para tener a sus hijos. Zazkis y Liljedhal proponen que existan personajes antagónicos que en este caso son Ra y Nut. Esta historia permite un abordaje intuitivo de la probabilidad y constituye un posible punto de partida para el estudio del tema. Puede ser utilizada en cualquier curso de la enseñanza media básica.

En la formulación de las preguntas 1 y 3 se presentan tareas de final abierto (Zaslavsky, 1995) pues admiten múltiples respuestas correctas.

LA PIRÁMIDE ROJA

(Adaptación de un fragmento)

Rick Riordan

> Cuenta la historia que Geb y Nut querían tener niños, pero el rey de los dioses, Ra (que era el dios del sol), había oído una profecía según la cual un hijo de Nut y Geb terminaría por quitarle el trono a Ra. Así que, cuando Ra se enteró de que Nut estaba embarazada, empezó a subirse por las

paredes, y prohibió que Nut diera a luz a sus hijos en cualquier día o noche del año. Pero a Nut se le ocurrió una salida. Le propuso al dios lunar Jonsu un juego de azar. Cada vez que Jonsu perdía, tenía que dar a Nut un poco de luz de luna. Al final, perdió tantas veces que Nut acaparó bastante luz de luna para crear cinco días nuevos, y los colocó al final del año. El calendario egipcio tenía trescientos sesenta días, igual que los trescientos sesenta grados del círculo. Nut creó cinco días más y los añadió al final del año; eran días que no formaban parte del año normal.

–Los días demoníacos –dijo Sadie–. Y así el mito explica por qué el año tiene trescientos sesenta y cinco días. Supongo que teniendo sus niños…

–Durante esos cinco días –confirmó Carter–. Un hijo por día.

1. Si fueras Nut, ¿qué tipo de juego le propondrías a Jonsu? Ejemplifica con uno a tu elección e indica una posible apuesta que podría haber realizado Nut.

2. Nut le propuso al dios Jonsu tirar tres monedas de oro.

–Gano la partida si al tirar las tres monedas no salen las tres iguales –dijo Nut.

–Me parece justo. Acepto el juego –respondió Jonsu.

a. Si tú fueras Jonsu, ¿habrías aceptado el juego que propuso Nut?

3. Inventa un juego en el que Nut y Jonsu tengan las mismas posibilidades de ganar en cada partida.

Historias que acompañan e historias que se entrelazan con el contenido

Las historias que *acompañan* el contenido son aquellas en las que el contenido se presenta y la historia le brinda una razón de ser. Una fuente es la historia de la matemática o la vida de los matemáticos.

Las historias que se *entrelazan* con el contenido son aquellas en las que la matemática emerge a través de la historia.

Para ejemplificar este tipo de historias, Zazkis y Liljedahl proponen dos historias que giran en torno a la vida de Arquímedes. En una, Arquímedes trata de determinar si la corona del rey de Siracusa era completamente de oro puro; esta historia nos sirve para acompañar el concepto de la relación entre el volumen y la densidad de un cuerpo. La otra historia habla de la muerte de Arquímedes, que fue asesinado por un soldado por no obedecer su pedido de parar de dibujar círculos en el piso. Ambas historias pueden ser modificadas para crear una historia que se entrelaza o una historia que acompaña al contenido.

Para ilustrar las historias que *acompañan* seleccionamos la leyenda de Lilavati, hija del matemático Bhaskara, incluida en *El hombre que calculaba* de Malba Tahan (1995). Esta historia está pensada para trabajar aritmética en primer año de enseñanza media, a partir de los problemas de Lilavati, obra escrita por este prestigioso matemático en el siglo XII. Los dos problemas seleccionados permiten transitar del lenguaje verbal al lenguaje matemático.

LA HERMOSA LEYENDA SOBRE "LA PERLA DE LILAVATI"

Malba Tahan

> Se cuenta que el más famoso matemático y astrólogo de la India, llamado Bhaskara, tuvo una hija llamada Lilavati.
>
> Cuando ella nació, su padre consultó a las estrellas y, por la disposición de los astros, comprobó que estaba condenada a permanecer soltera toda la vida. Su padre no se conformó con esta determinación del destino y siguió consultando a los más famosos astrólogos de su época. ¿Cómo hacer para que la graciosa Lilavati pudiera lograr marido y ser feliz en su matrimonio?
>
> Uno de los astrólogos consultados por Bhaskara, le aconsejó que llevara a su hija a una ciudad cercana al mar. Le aseguró que en ese lugar Lilavati podría encontrar novio pero el matrimonio solo sería feliz si el casamiento quedaba marcado en cierto día en el cilindro del tiempo.

Lilavati fue al fin, con gran sorpresa, pedida en matrimonio por un joven rico, trabajador y honesto. Fijado el día y marcada la hora, se reunieron los amigos y familiares para presenciar la boda.

Los hindúes medían, calculaban y determinaban las horas del día con auxilio de un cilindro que se colocaba en un vaso lleno de agua. Este cilindro, abierto en la parte superior, tenía un pequeño agujerito en el centro de la superficie de la base. A medida que el agua ingresaba lentamente por ese pequeño orificio, el cilindro se iba llenando de agua y su peso lo hacía hundirse poco a poco en el vaso, hasta que desparecía por completo, a una hora determinada.

Bhaskara colocó el cilindro de las horas en posición adecuada con el mayor cuidado. Ahora solamente faltaba esperar a que el cilindro se hundiera en el vaso. Lilavati, llevada por su incontenible curiosidad, quiso observar la subida del agua en el cilindro del tiempo y se acercó para mirar el nivel del agua. Una de las perlas de su vestido se desprendió y se cayó en el interior del vaso. La perla, llevada por el agua, obstruyó el pequeño orificio del cilindro impidiendo que entrara más agua en él. El novio y los invitados esperaron con paciencia, con la esperanza de que el agua siguiera entrando al cilindro y este se sumergiera en el agua, para poder llevar adelante la boda. Pero ese momento nunca llegó. El novio y los invitados se retiraron, para que después de consultados los astros nuevamente, se fijara otro día para la ceremonia. Pero el novio desapareció unos días después y Lilavati quedó soltera para siempre.

El sabio matemático reconoció que es inútil luchar contra el destino, y dijo a su hija:

–Escribiré un libro de matemática que llevará tu nombre: Lilavati, y así perdurarás en el recuerdo de los hombres durante un tiempo mucho mayor del que habrían vivido los hijos que podrían haber nacido de tu malogrado matrimonio.

Este libro de Bhaskara se hizo muy famoso y el nombre de Lilavati, la novia abandonada, sigue inmortal en la Historia de la Matemática.

Te proponemos ahora resolver los siguientes problemas tomados de Lilavati.

a. LILAVATI 13

Oh, tú, pequeña niña Lilavati, si eres experta en la suma y en la resta, dime cuál es el resultado cuando la suma de 2, 5, 32, 193, 18, 10, y 100, se resta de 10 000.

b. LILAVATI 17

Oh, tú, propicia niña de amables ojos de cervatillo, si has comprendido bien los métodos de la multiplicación, ¿cuál es el resultado de multiplicar 135 por 12? Dime también qué número obtendrás si el producto lo divides entre 12.

Para las historias que *se entrelazan* con el contenido seleccionamos un fragmento del cuento *Los fabricantes de Carbón* de Horacio Quiroga (s/f), escritor uruguayo considerado un maestro del cuento, pues en el texto se hace referencia a las diferencias de temperatura en el ambiente como un problema y esto permite trabajar con diferentes conceptos de los números enteros. Para diseñar la tabla se utilizó la perspectiva de Bruder (2008), jugando con la información que se presenta en cada una de las filas. En la primera, se trata de una tarea utilizada como ejemplo. En la segunda se conocen las dos temperaturas y hay que completar la estación del año. Luego, para completar las restantes filas, se va variando el lugar en el que se proporciona información. En unos casos aparecen dos datos, debe inferirse el tercero. En otros, aparece un solo dato. En la última fila, no se proporcionan datos, se trata de una situación abierta. El estudiante deberá completar a su consideración toda la información.

LOS FABRICANTES DE CARBÓN

(Fragmento)

Horacio Quiroga

Ese invierno fue en extremo riguroso, y no solo en Misiones. Pero desde fines de junio las cosas tomaron un cariz extraordinario, que el país sufrió hasta las raíces de su vida subtropical.

En efecto, tras cuatro días de pesadez y amenaza de gruesa tormenta, resuelta en llovizna de hielo y cielo claro al sur, el tiempo se serenó. Comenzó el frío, calmo y agudo, apenas sensible a mediodía, pero que a las cuatro mordía ya las orejas. El país pasaba sin transición de las madrugadas blancas al esplendor casi mareante de un mediodía invernal en Misiones, para helarse en la oscuridad a las primeras horas de la noche.

La primera mañana de esas, Rienzi, helado de frío, salió a caminar de madrugada y volvió al rato tan helado como antes. Miró el termómetro y habló a Dréver que se levantaba.

–¿Sabe qué temperatura tenemos? Seis grados bajo cero.

–Es la primera vez que pasa esto –repuso Dréver.

–Así es –asintió Rienzi–. Todas las cosas que noto aquí pasan por primera vez.

Se refería al encuentro en pleno invierno con una yarará, y donde menos lo esperaba.

La mañana siguiente hubo siete grados bajo cero. Dréver llegó a dudar de su termómetro, y montó a caballo, a verificar la temperatura en casa de dos amigos, uno de los cuales atendía una pequeña estación meteorológica oficial.

No había duda: eran efectivamente nueve grados bajo cero; y la diferencia con la temperatura registrada en su casa provenía de que estando la meseta de Dréver muy alta sobre el río y abierta al viento, tenía siempre dos grados menos en invierno, y dos más en verano, claro está.

–No se ha visto jamás cosa igual –dijo Drevér, de vuelta, desensillando el caballo.

–Así es –confirmó Rienzi.

Mientras aclaraba al día siguiente, llegó al bungalow un muchacho con una carta del amigo que atendía la estación meteorológica. Decía así:

"Hágame el favor de registrar hoy la temperatura de su termómetro al salir el sol. Anteayer comuniqué la observada aquí, y anoche he recibido un pedido de Buenos Aires de que rectifique en forma la temperatura comunicada. Allá se ríen de los nueve grados bajo cero. ¿Cuánto tiene usted ahora?"

Dréver esperó la salida del sol y anotó en la respuesta: "27 de junio: 9 grados bajo 0".

El amigo telegrafió entonces a la oficina central de Buenos Aires el registro de su estación: "27 de junio: 11 grados bajo 0".

Rienzi vio algo del efecto que puede tener tal temperatura sobre una vegetación casi de trópico; pero le estaba reservado para más adelante constatarlo de pleno.

Entretanto, su atención y la de Dréver se vieron duramente solicitadas por la enfermedad de la hija de este.

1. ¿Se registran en Uruguay temperaturas como las mencionadas en el texto?

2. ¿Por qué Rienzi no se esperaba encontrar con una yarará en el invierno?

3. El texto dice que en la casa de Dréver había siete grados bajo cero y en la estación meteorológica 9 grados bajo cero. El narrador expresa que: «No había duda: eran efectivamente nueve grados bajo cero; y la diferencia con la temperatura registrada en su casa provenía de que estando la meseta de Dréver muy alta sobre el río y abierta al viento, tenía siempre dos grados menos en invierno, y dos más en verano, claro está». ¿Es correcto que −7 exprese dos grados menos que −9? Reescribe el párrafo interpretando correctamente los términos matemáticos, es decir, reescríbelo para que el relato se adecue a las temperaturas reportadas.

3. Completa la tabla teniendo en cuenta la diferencia de temperaturas expresada en el texto:

Temperatura en casa de Dréver (°C)	Temperatura en estación oficial (°C)	Estación del año
−7	−9	Invierno
−9	−11	

−5		Invierno
	31	Verano
		Verano
1		
	2	

4. ¿A qué conjunto pertenecen los números utilizados en la tabla para indicar las temperaturas?

Historias que presentan

Son aquellas historias que se usan con la finalidad de introducir conceptos o ideas, o desarrollar una actividad matemática. Zazkis y Liljedhal (2009) sugieren trabajar este tipo de historias intentando sorprender al estudiante, ya sea usando números grandes o generando intriga, y así suscitar su interés y potenciar su imaginación. Son útiles para crear la necesidad de un concepto.

Un ejemplo que proponen los autores es el cuento *El misterioso jarrón multiplicador* de Masaichiro y Mitsumasa Anno, en el que se introduce la idea de factorial utilizando números grandes para captar la atención del estudiante. En esta historia se utilizan representaciones simbólicas de los números mediante imágenes. Esto es recomendado por los autores para que los estudiantes adquieran conocimientos más significativos.

Para ilustrar este tipo de historias elegimos un fragmento de *La isla misteriosa* de Julio Verne (s/f), célebre escritor francés, porque en el propio texto se plantea el cálculo de una altura utilizando triángulos semejantes. Ese cálculo fue omitido en el fragmento seleccionado y se pide a los estudiantes que lo completen. Concretamente, el texto de Verne que se omitió plantea los siguientes cálculos para deducir la altura de una muralla de granito:

$$\frac{15}{500}=\frac{10}{x}$$

$$500\times 10=5000$$

$$\frac{5000}{15}=333{,}33$$

Es una actividad para trabajar en tercer año de ciclo básico y que permite reflexionar acerca de los procedimientos para calcular una distancia inaccesible.

LA ISLA MISTERIOSA

(Fragmento)

Julio Verne

El sol, levantándose sobre un horizonte puro, anunciaba un día magnífico, uno de esos hermosos días de otoño, que son como la última despedida de la estación calurosa. Había que completar los elementos de las observaciones hechas la víspera midiendo la altura de la meseta de la Gran Vista sobre el nivel del mar.

–¿No necesitará usted un instrumento análogo al que le sirvió ayer? –preguntó Harbert al ingeniero.

–No, hijo mío, no –contestó este–. Vamos a proceder de otro modo y de una manera casi tan exacta.

Harbert, que gustaba de instruirse en todo, siguió al ingeniero, el cual se apartó del pie de la muralla de granito bajando hasta el extremo de la playa, mientras Pencroff, Nab y el corresponsal se ocupaban en diversos trabajos. Ciro Smith se había provisto de una especie de pértiga de unos doce pies de longitud, que había medido con la exactitud posible, comparándola con su propia estatura, cuya altura conocía poco más o menos. Harbert llevaba una plomada que le había dado el ingeniero, es decir, una simple piedra atada al extremo de una hebra flexible. Al llegar a veinte pies del extremo de la playa, a unos quinientos pies de la muralla de granito, que se levantaba perpendicularmente, Ciro Smith clavó la pértiga uno o dos pies en la arena, calzándola con cuidado, y por medio de la plomada consiguió ponerla perpendicularmente al plano de horizonte.

Hecho esto, retrocedió la distancia necesaria para que, echado sobre la arena, el rayo visual, partiendo de su ojo derecho, rozase a la vez el extremo de la pértiga y la cresta de la muralla. Después marcó cuidadosamente aquel punto con un jalón pequeño.

–¿Conoces los primeros principios de la geometría? –dijo luego, dirigiéndose a Harbert.

–Un poco, señor Ciro –contestó el joven, que no quería comprometerse demasiado.

–¿Recuerdas bien las propiedades de dos triángulos semejantes? –Sí – contestó Harbert–. Sus lados homólogos son proporcionales.

–Pues bien, hijo mío, acabo de construir dos triángulos semejantes, ambos rectángulos: el primero, el más pequeño, tiene por lados la pértiga perpendicular, la distancia que separa el jalón del extremo inferior de la pértiga y el rayo visual por hipotenusa; el segundo tiene por lados la muralla perpendicular, cuya altura se trata de medir, la distancia que separa el jalón del extremo inferior de esta muralla y mi rayo visual, que forma igualmente su hipotenusa, la cual viene a ser la prolongación de la del primer triángulo.

–¡Ah!, señor Ciro, ya comprendo –exclamó Harbert–. Así, como la distancia del jalón a la base de la pértiga es proporcional a la distancia del jalón a la base de la muralla, del mismo modo la altura de la pértiga es proporcional a la altura de esa muralla.

–Eso es, Harbert –contestó el ingeniero–, y, cuando hayamos medido las dos primeras distancias, conociendo la altura de la pértiga, no tendremos que hacer más que un cálculo de proporción, el cual nos dará la altura de la muralla y nos evitará el trabajo de medirla directamente.

Tomaron las dos distancias horizontales por medio de la pértiga, cuya longitud sobre la arena era exactamente de diez pies. La primera distancia era de quince pies, que mediaban entre el jalón y el punto en que la pértiga estaba metida en la arena. La segunda distancia entre el jalón y la base de la muralla era de quinientos pies. Terminadas estas medidas, Ciro y el joven volvieron a las Chimeneas. Allí el ingeniero tomó una piedra plana que se había llevado en sus precedentes excursiones, especie de pizarra sobre la cual era fácil trazar números con una almeja, y estableció la proporción siguiente:

Quedó, pues, averiguado que la muralla de granito medía 333 pies de altura.

1. El texto dice: "Al llegar a veinte pies del extremo de la playa, a unos quinientos pies de la muralla de granito, que se levantaba perpendicularmente, Ciro Smith clavó la pértiga uno o dos pies en la arena, calzándola con cuidado, y por medio de la plomada consiguió ponerla perpendicularmente al plano de horizonte. Hecho esto, retrocedió la distancia necesaria para que, echado sobre la arena, el rayo visual, partiendo de su ojo derecho, rozase a la vez el extremo de la pértiga y la cresta de la muralla. Después marcó cuidadosamente aquel punto con un jalón pequeño".

a. ¿Por qué piensas que el hombre se echó sobre la arena?

b. Realiza un dibujo de la situación mencionada en el texto.

2. ¿Por qué la pértiga debe ser perpendicular al piso?

3. Completa en el cuadro en blanco la proporción que permitió calcular la altura de la muralla.

Historias que explican

Este tipo de historias son empleadas para explicar o introducir conceptos que generalmente son enseñados como una receta a seguir, sin sentido alguno para los estudiantes. La división entre cero, la división entre fracciones y el trabajo con números enteros negativos, son algunos de los ejemplos.

Zazkis y Liljedhal (2009) ilustran este tipo de historias bajo el título *División por una fracción y el Sastre confundido*, en la que se narra la historia de un sastre que tiene cierta cantidad de tela y con ella debe confeccionar disfraces. Dependiendo de cuánta tela requiera un disfraz, es la cantidad de disfraces que podrá confeccionar. De esta manera, se trabaja sobre la percepción errónea e intuitiva de los estudiantes con respecto a que dividir siempre achica.

Los autores proponen la variación numérica como estrategia para enriquecer los aprendizajes. Esta estrategia consiste en ir variando las cantidades en un mismo problema.

Para ejemplificar este tipo de historias seleccionamos un fragmento del libro *Matemáticas. Una historia de amor y odio* de Reuben Hersh y Vera John–Steiner (2012) porque allí se presenta una explicación física de la multiplicación de fracciones que resulta tan gráfica, que consideramos ayudará a los estudiantes a comprender la definición de esta operación entre racionales. Asimismo la situación planteada abona a la distinción entre división y multiplicación de fracciones.

MATEMÁTICAS. UNA HISTORIA DE AMOR Y ODIO

(Fragmento)

Reuben Hersh y Vera John–Steiner

> La antropóloga Jean Lave cree que el conocimiento sobre cómo los humanos resolvemos problemas se alcanza mejor en "el mundo en que vivimos y del que tenemos experiencia como el lugar y la fuente de otras investigaciones de actividad cognitiva". Jean Lave estudió el uso de la aritmética en adultos que se centraban en las estrategias de encontrar la mejor oferta cuando iban de compras. Los compradores comparaban

> precios y utilizaban a veces una calculadora. También tenían en cuenta cosas tales como el espacio de almacenamiento o las ganas de probar nuevas recetas. Los informadores, en ocasiones, utilizaron la manipulación directa. Una de ellas, que estaba a régimen, necesitaba preparar una porción de queso fresco con las tres cuartas partes de los dos tercios de taza que le permitía la dieta. Resolvió el problema en forma física. "Llenó una taza de medir hasta los dos tercios con el queso fresco, lo volcó sobre una tabla de madera, le dio forma de círculo, marcó una cruz, retiró un cuadrante y se sirvió el resto."
>
> 1. ¿Qué operación matemática resuelve el problema?
> 2. ¿Cómo expresas mediante una fracción la cantidad de queso fresco que comió finalmente la informante?

Historias que formulan una pregunta

Son historias que pueden plantearse para introducir o extender conceptos, mediante un problema. Se caracterizan por tener una pregunta al final de la historia, esto permite al estudiante involucrarse y buscar estrategias para resolver el problema.

Para este tipo de historias Zazkis y Liljedahl recomiendan estrategias didácticas. Algunas de ellas son que el docente cuente situaciones propias o hacer que los estudiantes tomen el lugar de héroes. En los diferentes ejemplos que se proponen es común que se pregunte a los estudiantes: "Si tú fueras tal personaje, ¿que dirías de lo que se pregunta?".

Para ejemplificar estas historias seleccionamos un fragmento del cuento *El famoso cohete* de Oscar Wilde (s/f), destacado escritor irlandés, al que le agregamos una pregunta al final para adecuarlo a esta categoría. Este cuento permite comprender por qué la multiplicación por cero es cero. Se trata de un paje que no percibe salario y el rey ordena duplicarle la paga dos veces sucesivas, cuestión que lo deja, irónicamente, en la misma posición económica.

EL FAMOSO COHETE

(Fragmento)

Oscar Wilde

El hijo del rey estaba en vísperas de casarse. Con este motivo el regocijo era general.

Estuvo esperando un año entero a su prometida, y al fin llegó esta.

Era una princesa rusa que había hecho el viaje desde Finlandia en un trineo tirado por seis renos, que tenía la forma de un gran cisne de oro; la princesa iba acostada entre las alas del cisne.

Su largo manto de armiño caía recto sobre sus pies. Llevaba en la cabeza un gorrito de tisú de plata y era pálida como el palacio de nieve en que había vivido siempre.

Era tan pálida, que al pasar por las calles, se quedaban admiradas las gentes.

–Parece una rosa blanca –decían.

Y le echaban flores desde los balcones.

A la puerta del castillo estaba el príncipe para recibirla. Tenía los ojos violetas y soñadores, y sus cabellos eran como oro fino.

Al verla, hincó una rodilla en tierra y besó su mano.

–Tu retrato era bello –murmuró–, pero eres más bella que el retrato.

Y la princesita se ruborizó.

–Hace un momento parecía una rosa blanca –dijo un pajecillo a su vecino–, pero ahora parece una rosa roja.

Y toda la corte se quedó extasiada.

Durante los tres días siguientes todo el mundo no cesó de repetir:

–¡Rosa blanca, rosa roja! ¡Rosa roja, rosa blanca!

Y el rey ordenó que diesen doble paga al paje.

Como él no percibía paga alguna, su posición no mejoró mucho por eso; pero todos lo consideraron como un gran honor y el real decreto fue publicado con todo requisito en la Gaceta de la Corte.

Transcurridos aquellos tres días, se celebraron las bodas.

Fue una ceremonia magnífica.

Los recién casados pasaron cogidos de la mano, bajo un dosel de terciopelo granate, bordado de perlitas.

Luego se celebró un banquete oficial que duró cinco horas.

El príncipe y la princesa, sentados al extremo del gran salón, bebieron en una copa de cristal purísimo. Únicamente los verdaderos enamorados podían beber en esa copa, porque si la tocaban unos labios falsos, el cristal se empañaba, quedaba gris y manchoso.

–Es evidente que se aman –dijo el pajecillo–. Resultan tan claros como el cristal.

Y el rey volvió a doblarle la paga.

–¡Qué honor! –exclamaron todos los cortesanos.

¿Habrá mejorado ahora la posición económica del paje?

Historias que cuentan una broma

Son historias que refieren a un tipo especial de broma vinculada a la matemática, a su aprendizaje, a la comprensión, y al lenguaje matemático.
Se caracterizan por tener a un matemático como protagonista o una relación entre el lenguaje común y el lenguaje matemático específico, como puede ser la relación entre *primos* y *números primos*.

Las bromas en el aula generan una atmósfera saludable y deben ser entendidas por los interlocutores para que tenga sentido. Para proponer bromas, Zazkis y Liljedahl sugieren la relación entre el lenguaje común y el matemático. Ejemplifican con la palabra *odd*, invitando a un juego de palabras con *odd number*, ¿es número extraño o número impar?

En este caso seleccionamos un texto llamado Números y edades que está incluido en *El club de la hipotenusa* de Claudi Alsina (2008). Elegimos este texto porque contiene referencias cotidianas al tema de la edad, realizadas con el humor que caracteriza a Alsina. Además, tiene al matemático Augustus De Morgan como protagonista. Se trata de una actividad con expresiones algebraicas que puede ser trabajada tanto en segundo como en tercer año de ciclo básico.

Para la formulación de la pregunta 2 se utilizó una tarea de final abierto (Zaslavsky, 1995). Ofrece la posibilidad de que cada estudiante presente un problema.

NÚMEROS Y EDADES

Claudi Alsina

Hay personas especialmente sensibles con el tema de la edad y tienden a no confesarla nunca. Como no pueden dar cifras sinceras ("tengo 50 años") recurren a la ambigüedad de las letras ("uno tiene la edad que aparenta"). Tras su boda con una joven estrella televisiva, el presidente de Argentina Carlos Menem, lanzó una nueva teoría sobre la edad: "uno tiene la edad de la persona a quien ama".

Detrás del tema hay una decisión a tomar. Si una persona A tiene a años y otra mayor B tiene b años, la diferencia $d = b - a$ se mantendrá siempre por muchos años que pasen. Pero si lo que mira es la relación b/a esta es igual a $(a+d)/a$ o sea $1 + d/a$, número que disminuye al aumentar a. Si A tenía 20 años y B tenía 40 años su relación b/a era $40/20 = 2$, B dobla a A en este momento. Pero 20 años después (¡como los mosqueteros!) B tendrá 60 y A tendrá 40, luego $60/40 = 1{,}5$ ¡lejos del doble! Confiemos en las diferencias y vigilemos las proporciones.

El caso más espectacular de edad se lo debemos a Augustus De Morgan (1806–1871) quien en una ocasión respondió a la impertinente cuestión con un problema de álgebra:

Yo tenía x años en el año x^2

1. ¿A qué edad recurrió De Morgan a la ambigüedad de las letras?
2. ¿Eres sensible al tema de la edad? ¿Cómo responderías a la incómoda pregunta con un problema de álgebra?

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

En la elaboración de este trabajo aprendimos cómo buscar y cómo encontrar textos, por ejemplo, a través del uso de palabras clave; el texto de Quiroga fue encontrado usando "temperaturas negativas" como palabras clave. Al principio leíamos el texto buscando encontrar la matemática ahí, y después nosotros proponíamos el tema y buscábamos qué texto lo podía contener, poniendo atención a que la trama fuera interesante para luego adaptarlos a la matemática a enseñar.

Como una orientación metodológica, puede considerarse que hay dos etapas a cumplir: la elección del texto y el diseño de la actividad, son dos instancias diferenciadas en esta búsqueda. Al ir a buscar los textos conviene salir de lo tradicional. Nosotros primero recurrimos a Lewis Carroll o a Guillermo Martínez por tratarse de escritores que son matemáticos, bajo la hipótesis de que su conocimiento se desliza, de alguna manera, en sus textos literarios, pero después pudimos constatar que es posible encontrar historias que se adapten a los tipos propuestos por Zazkis y Liljedhal y a los propósitos de enseñanza, a partir de autores que no son matemáticos. Esto, sin duda, amplía los límites del universo literario que podemos utilizar para formular tareas para enseñar matemática.

En el tipo de diseño que realizamos, también estuvo en juego la creatividad para formular las tareas, para ello nos apoyamos en recursos didácticos como las tareas de final abierto (Zaslavsky, 1995) y la variación del tipo de tareas (Bruder, 2008).

Con relación a las dificultades que un docente puede enfrentar al realizar este trabajo, puede suceder que encuentre un cuento que se adapta al tipo de historia, pero el texto finalmente no se adecua a los contenidos a enseñar; aprendimos a abandonarlo. Fue el caso de un fragmento de Harry Potter y la piedra filosofal de J. K. Rowling en el que el personaje Hagrid utiliza un sistema coordenado que parece similar al cartesiano, pero lo hace sobre una pared de ladrillos. Observamos que las paredes de ladrillos habituales no son construidas en filas y columnas, y por eso lo descartamos. Quizás, más adelante, podamos adaptarlo respetando a la autora. Otra dificultad fue comprender la potencialidad de una historia y esto también constituyó un proceso de aprendizaje; por ejemplo, al elaborar las preguntas para el texto de Horacio Quiroga y lograr que no resultaran elementales.

CONCLUSIONES

Este trabajo significó, para nosotros, una experiencia nueva en la enseñanza de la matemática pues nos llevó a pensar y crear problemas matemáticos a partir de un texto literario, de manera que los estudiantes vinculen el texto con el problema de una manera que tenga sentido. Esto nos permitió potenciar el desarrollo de la imaginación y la creatividad al proponer problemas. Consideramos que el proceso imaginativo para buscar vínculos entre las historias y la matemática no solo se da en el docente que piensa la actividad, sino que también se dará en los estudiantes.

Cuando leemos un cuento o una novela, lo hacemos poniendo atención a la historia que se desarrolla, pero cuando lo leemos buscando cruces con la matemática, lo leemos de otra manera, le buscamos otros sentidos, hacemos una mirada más analítica para encontrar la matemática o posibles vínculos con esta disciplina. En este sentido, la elaboración de este trabajo nos permitió agudizar la mirada para buscar la matemática escondida en los textos. "No creo que ahora vuelva a leer un texto de la misma forma en que lo hacía antes" expresó uno de nosotros, y esta frase es compartida por todos.

Este trabajo nos despertó curiosidad para continuar buscando otros textos literarios que se adapten a la tipología de Zazkis y Liljedhal (2009) y sean una herramienta útil para enseñar matemática. Nos generó entusiasmo; un entusiasmo que nos proponemos transmitir a los alumnos de enseñanza media. Promover el gusto por la lectura en la asignatura matemática es algo nuevo para nosotros y nada común en el sistema educativo. Además, la lectura en el aula de matemática puede motivar a aquellos que tienen una visión negativa hacia la asignatura.

Finalmente, la lectura de Zazkis y Liljedhal (2009) nos brindó herramientas para crear diferentes propuestas para presentar en el aula; cambiar la idea de que no es necesario enseñar a la matemática a través de reglas pues enseñar conceptos o propiedades cuya explicación es compleja a nivel de ciclo básico se transformó en la búsqueda de una historia apropiada que permita explicarlos. Este trabajo también nos entusiasmó para crear historias nosotros mismos en lugar de tomarlas de textos literarios, actividad que no llevamos a cabo en esta oportunidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2008). *El club de la hipotenusa*. Barcelona: Ariel.

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. En R. Bruder, T. Leuders y A. Büchter (Eds.), *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für* *kompetenzorientiertes Unterrichten* (pp. 18–52). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Hersh, R. y John–Steiner, V. (2012). *Matemáticas. Una historia de amor y odio.* Buenos Aires: Paidós.

Quiroga, H. (s/f). *Los fabricantes de carbón*. Fundación El Libro total. Recuperado de: <https://www.ellibrototal.com/ltotal/?t=1&d=2262>.

Riordan, R. (2010). *La pirámide roja*. Buenos Aires: Montena.

Tahan, M. (1995). *El hombre que calculaba*. Barcelona: Verón/Editor.

Verne, J. (s/f). *La isla misteriosa*. Biblioteca Virtual Universal. Recuperado de: <https://www.biblioteca.org.ar/libros/133575.pdf>.

Wilde, O. (s/f). *El famoso cohete.* Recuperado de: <https://ciudadseva.com/texto/el-famoso-cohete/>.

Zaslavsky, O. (1995). Open–ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15–20.

Zazkis, R. y Liljedhal, P. (2009). *Teaching mathematics as storytelling*. The Netherlands: Sense Publishers.

Sección 2

Análisis del discurso matemático escolar

¿GRADOS O RADIANES? APORTES PARA EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

ARIANNA FERNÁNDEZ, CAROLINA GORDANO, AGUSTÍN GOYETCHE, VERÓNICA MOLFINO, MACARENA PERDOMO, MARIELA REY, SANTIAGO SUÁREZ

Resumen

En el aula de matemática a veces ocurren sorpresas, y son de las cosas más enriquecedoras que nos pueden pasar como docentes. En este trabajo reportamos una experiencia en la que estudiantes de profesorado, formadora e investigadores se vieron sorprendidos por concepciones ocultas bajo un contenido que supuestamente era bien dominado: las funciones trigonométricas. Relatamos la resolución de la tarea original, los cuestionamientos que acarreó y las formas que encontramos de capitalizar una situación desestabilizante.

Palabras clave: recorridos de estudio e investigación, diseño de tareas, radián.

Abstract

Surprises sometimes happen in maths classroom, and they are one of the most enriching things that can happen to us as teachers. In this paper we report an experience in which teacher training, professor and researchers were surprised by hidden conceptions under a content that was supposedly well mastered: trigonometric functions. We report the resolution of the original task, the questions it entailed and the ways we found to capitalize a destabilizing situation.

Keywords: study and research paths, task design, radian.

INTRODUCCIÓN

Presentamos un estudio llevado a cabo en el marco del curso Análisis del Discurso Matemático Escolar (ADME), en el Instituto de Profesores 'Artigas' en 2019, fruto de un trabajo colaborativo entre estudiantes de profesorado y un equipo de investigación formado por la profesora del curso y otros formadores del Departamento de Matemática del CFE, una de las cuales es estudiante de doctorado. Ella conformó el grupo de investigación, con otros cuatro formadores, profesores de asignaturas de la dimensión disciplinar y de la dimensión didáctica–práctica docente, como proyecto de su investigación doctoral, con el fin de diseñar un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para ser implementado en cursos de la carrera de profesorado de Matemática. El equipo decidió que fuera implementado en nuestro curso de ADME, de cuarto año de la carrera.

Durante la implementación sucedió algo que llamó particularmente la atención de los siete estudiantes del curso y del equipo de investigación: emergió una concepción relativa a la trigonometría inesperada por todos. Eso despertó nuestro interés por ahondar en el uso del radián y su vínculo con otras medidas angulares, así como la necesidad de explorar maneras de abordar el tema en primer año de Bachillerato, alternativas a las que actualmente se dan en el discurso matemático escolar (dme) y de manera que contemplaran lo acontecido en la experiencia.

En este escrito presentamos, en primer lugar, una breve descripción de lo que es un REI y el marco conceptual que sustenta su abordaje, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En un segundo apartado relatamos la experiencia que origina nuestros cuestionamientos y detallamos los objetivos del proyecto. A continuación exponemos algunas conclusiones del estudio socio–histórico–epistemológico que conducimos en la búsqueda por encontrar sentido al concepto de radián y su lugar en el dme. En el cuarto apartado exponemos nuestro diseño, fundamentación y análisis a priori de una secuencia para la enseñanza del radián, teniendo en cuenta la experiencia vivida en el REI y las investigaciones consideradas en apartados anteriores.

Finalmente, el quinto y último apartado es dedicado a las reflexiones finales, en las que recogemos los principales aspectos que aporta este trabajo a la comunidad de profesores de Matemática para la reflexión sobre el dme y a la formación de sus propios autores, futuros profesores de Matemática.

UN MODELO PARA EL ABORDAJE DE LA MODELIZACIÓN EN FORMACIÓN DE PROFESORES: RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

¿Cómo entiende la TAD a la modelización?

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), según Rey (2016) plantea un modelo para analizar la actividad humana en su dimensión institucional. Propone que cualquier actividad humana puede ser modelada mediante la consideración de praxeologías, unidad mínima de análisis. Estas tienen dos bloques: práctico (praxis) y teórico (logos). La praxis es el *saber hacer* y está compuesta por los tipos de tareas y las formas de resolverlas (técnicas). El logos es el *saber,* se compone por la tecnología, discurso que explica y justifica las técnicas, y la teoría, discurso que explica y justifica las tecnologías, este último más general.

El enfoque de la TAD sobre el proceso de modelización incluye problematizar no solo la transparencia del proceso de modelización, los problemas a modelizar y los procesos cognitivos involucrados en este proceso sino también los propios conocimientos matemáticos. Se considera a toda la matemática como una actividad de modelización. De esta forma no tiene sentido considerar un ciclo de modelización, sino que debe explicarse desde la concepción de praxeologías. Los problemas de modelización, en la TAD, son el centro de cualquier problema matemático.

¿Qué es un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores?

Los REIs son propuestos desde la TAD por Chevallard (2004) como un dispositivo didáctico para analizar las actividades de modelización.

Una mirada formalista de la educación plantea que la construcción del conocimiento se basa en replicar los procesos ya desarrollados. De esta forma los saberes se muestran como atemporales, dejando de lado las preguntas que llevaron a la humanidad a generar respuestas. En el paradigma *cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013), en cambio, priman estas preguntas como motor del proceso de estudio. Dentro de esta visión los REI son la articulación de estas preguntas y respuestas, que a su vez, generarán nuevas preguntas y respuestas.

Según Álvarez, Martínez y Rey (2016) un Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de Profesores (REI–FP) es un dispositivo didáctico que tiene como objetivo abordar una secuencia de actividades y ver cómo adaptarla para su implementación en educación media. Se pueden diferenciar cinco etapas en el desarrollo de un REI–FP:

<u>Etapa 1</u>: Revisión de respuestas, desde el currículo, textos, investigaciones y propuestas didácticas, en relación a una pregunta relativa a aspectos epistemológicos o didácticos en torno a un contenido.

<u>Etapa 2</u>: Experimentación por parte de los estudiantes de formación docente con actividades previamente diseñadas, que buscan obtener insumos para responder la pregunta planteada.

<u>Etapa 3</u>: Análisis de las actividades utilizadas en la etapa 2 tomando en consideración:

(i) Análisis matemático en el proceso de modelado.

(ii) Análisis didáctico con comparación entre supuestos del contrato didáctico y la clase usual centrada en la transmisión de conocimientos.

(iii) Análisis de viabilidad de experimentar una adaptación de la actividad inicial en el centro educativo en el que los estudiantes tienen grupos a cargo, tomando en consideración las condiciones y restricciones institucionales.

Etapa 4: Diseño de actividades por parte de los estudiantes de profesorado adaptadas a partir de la original, propuesta en la etapa 2. Debe incluir las cuestiones matemáticas a plantear, los dispositivos que utilizará y una propuesta de distribución de responsabilidades entre profesor y estudiantes de enseñanza media.

Etapa 5: Implementación y análisis a posteriori de las actividades elaboradas.

En nuestro caso, el equipo de investigación, con la intención de generar un REI–FP, propuso a los estudiantes del curso de ADME una actividad. En el proceso de resolución, los estudiantes y la formadora encargada del curso se plantearon nuevos cuestionamientos, diferentes de los originales, que dieron lugar a un nuevo REI–FP, que podría pensarse anidado en el anterior. El cuestionamiento que surgió en la etapa 1 de este nuevo REI–FP fue: ¿qué rol juega la noción de radián en la construcción de conocimiento matemático?

Desarrollamos más adelante la actividad inicial, *problema de Dido*, por la que el equipo de investigación optó para proponer a los estudiantes de profesorado en esta experiencia. La etapa 2 de este REI–FP consistió en la resolución de ese problema por parte de los estudiantes de profesorado. La etapa 3, análisis matemático y didáctico de la clase en la que se llevó a cabo la resolución de la actividad, permitió concluir que una adaptación para la enseñanza media era no solo posible, sino también necesaria.

Finalmente, se diseñaron adaptaciones de la actividad original para la enseñanza media en relación a la enseñanza del radián (etapa 4). La quinta y última etapa no fue desarrollada debido a que no estaban dadas las condiciones institucionales (no teníamos grupos a cargo en el nivel para el que está propuesta la secuencia, y además quedaba poco tiempo del año lectivo) pero puede ser objeto de estudios posteriores, tanto su implementación como el análisis de la misma y posibles readaptaciones.

Cabe destacar que las etapas no son lineales, en este caso se puede apreciar cómo se van solapando: la etapa 1 surgió en la 2, al resolver la tarea, y a la vez resignificó la tarea y su resolución. La misma etapa 1 de delimitación del cuestionamiento fue reavivada al transitar la etapa 3, que permitió expresar dicho cuestionamiento con mayor precisión.

EXPERIENCIA DISPARADORA: ETAPAS 2 Y 3 DEL REI–FP

La actividad diseñada por el equipo de investigación está inspirada en Dalcín (2003) y fue propuesta en clase con el siguiente enunciado:

Princesa en problemas

> Dido es un personaje mitológico que aparece en la Eneida, obra del poeta Virgilio.
> Dido era una princesa fenicia de la ciudad de Tiro (hoy parte del Líbano). El rey Pigmalión, implacable hermano suyo, asesinó al marido de Dido para despojarla de sus posesiones y esta huyó por mar. Cuando Dido arribó a las costas de África, hacia 900 a. C., en el lugar que más tarde sería Cartago, quiso comprar al cacique local, el rey Jarbas de Numidia, tierra donde asentarse ella y su gente y donde establecer su nueva patria. Es posible

> que Dido fuera cicatera, o que el rey Jarbas no quisiera colonias en su país: cerraron el trato con la condición de que la reina no tendría más tierra que la que pudiera encerrar un cuero de buey.

Se pidió a los estudiantes que pensaran de forma individual y luego en parejas o ternas cómo procedió Dido. Después de trabajar por unos minutos se realizó la puesta en común en la que los estudiantes propusieron que Dido debía cortar tiras, lo más finas posibles y luego formar con ellas una circunferencia. A continuación, la formadora a cargo de la clase leyó lo siguiente:

> Dido sacó el máximo partido de la situación. En primer lugar, interpretó la palabra *encerrar* en el sentido más amplio posible. Se dice que hizo cortar a su gente la piel en finas tirillas, las cuales, empalmadas, formaron una cuerda cerrada de gran longitud. Suponiendo que las tirillas tuvieran tan solo un par de milímetros de ancho, tal longitud debió estar entre los 1000 y 2000 metros.
>
> Luego, Dido extendió el cordel sobre el terreno de modo que encerrase la máxima área posible.

Se pidió entonces intentar justificar que, tomando figuras de igual perímetro, la circunferencia es la que encierra la mayor área.

Dos de los grupos plantearon comparar las áreas de dos polígonos regulares con igual perímetro y distinta cantidad de lados, por ejemplo, un cuadrado y un hexágono, llegando a la conclusión de que el de mayor área es el de mayor cantidad de lados. Sin embargo, no alcanzaron una generalización que probara la proposición planteada.

Un tercer grupo propuso escribir el área de un polígono regular de n lados como un medio del perímetro por la apotema, fijar un perímetro (400) y estudiar el límite de dicha expresión con n tendiendo a más infinito. Para esto, la apotema debía expresarse en función de n, lo que supuso utilizar la tangente del ángulo al centro del polígono. Al estudiar el límite, los estudiantes obtuvieron un resultado que no era coherente con lo que les decía su intuición geométrica: el área de los polígonos de perímetro constante tiende, a medida que la cantidad de lados aumenta, al área de un círculo de radio la apotema.

Es decir, mientras el resultado esperado era $A = \frac{P^2}{4\pi}$, el resultado al que arribó el grupo, trabajando con un perímetro específico de 400, se podría expresar como $A = \frac{P^2}{4 \times 180}$. El problema entonces pasó a ser encontrar el error en el planteo.

Luego de analizar todo el proceso, formadora y estudiantes concluimos que el error estaba en que, al calcular la apotema, el ángulo se consideró expresado en grados sexagesimales, pero luego al estudiar el límite se utilizó un equivalente que supone estar trabajando en radianes. Toda esta situación desencadenó el interés por el estudio del significado del concepto de radián, su rol en la matemática escolar, qué implicancia tiene en la matemática y en su enseñanza.

Ello nos condujo a plantearnos dos objetivos: 1) desentrañar el rol del radián en el contexto de la génesis de la función trigonométrica y 2) proponer una secuencia de actividades que promueva que los estudiantes de primer año de enseñanza media superior visualicen algunos aspectos de la necesidad de trabajar con radianes en lugar de grados.

Si bien la problemática para nosotros había surgido en el contexto del Análisis, como estudiantes de profesorado que nos desempeñamos actualmente en enseñanza media básica, centramos nuestro interés, especialmente, en el momento escolar en que el radián es presentado: primer año de Bachillerato. El desafío consistió en hacer notar la importancia del uso del radián como unidad de medida incluso en instancias previas al contexto de las funciones trigonométricas, que es donde usualmente se reconoce su necesidad.

Para desentrañar los significados del concepto de radián y la necesidad de su uso en Análisis, prioritario por sobre el uso del grado como unidad de medida angular, realizamos una revisión de investigaciones de corte socioepistemológico relativas a las razones y funciones trigonométricas (Montiel y Buendía, 2013; Jácome y Montiel, 2007; Montiel, 2005; Montiel, 2006; Montiel, 2013; Santacruz, 2016) y nos apoyamos en ideas vertidas por Castagna y Franco (2018).

Según Montiel (2006), el discurso matemático escolar asociado a la noción de función trigonométrica contempla tanto su definición a partir de razones trigonométricas, ilustradas invariablemente con un triángulo rectángulo, como mediante el uso del círculo trigonométrico unitario para definir la función y la graficación.

> A juzgar por libros de textos de otros países, consideramos que este abordaje es el que tradicionalmente se presenta en otros contextos: comenzar con el estudio de relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en una segunda instancia, ampliar el dominio de las funciones angulares. (Correa, Molfino y Schaffel, 2008, p. 237)

Otra de las dificultades que favorece el discurso matemático escolar relacionado a las funciones trigonométricas, tiene que ver, según Montiel y Buendía (2013), con que el alumno no hace diferencia entre el seno como una razón trigonométrica y el seno como función trigonométrica. Se han reportado dificultades del estudiante "en la coexistencia de ambos métodos, el del triángulo rectángulo para introducir a la Trigonometría y el del círculo unitario para transitar de la razón a la función trigonométrica" (p. 178).

En la misma línea, para Montiel y Buendía (2013) "en la trigonometría escolar es donde se da lugar el paso de medir ángulos en grados a medirlos en radianes; el hablar de ángulos negativos y mayores a 360°; el graficar las funciones en el plano cartesiano" (p. 170). Esto surge como acompañamiento del tránsito de la trigonometría clásica (vinculada al estudio de los triángulos rectángulos) a la analítica vinculada al estudio de las funciones trigonométricas. Las autoras manejan el concepto de radián como articulador entre dichos momentos en la trigonometría.

Este concepto articulador es uno de los disparadores de la investigación de Montiel (2013), que se centra en las distintas representaciones acerca de la trigonometría que coexisten en el estudiante de manera desconectada, rotas conceptualmente. Montiel (2013) comenta que

> Maldonado (2005) identificó en la relación (de equivalencia) del radián y el real, el punto neural para construir y entender la noción funcional de las relaciones trigonométricas y concluye que, al no hacerse explícita en el discurso matemático escolar, al estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función. (p. 21)

Montiel (2005) identifica que el ángulo, visto como forma, proviene del estudio de la sombra que producen las posiciones del sol durante el día, y que la unidad de medida angular por excelencia fue la de grado, puesto que la práctica social tuvo origen en Babilonia, civilización con un sistema numérico sexagesimal. El paso al radián llevaría años en darse, "la medida de los ángulos a partir de los arcos que cortan en una circunferencia para llegar a ser rigurosa requiere de la noción de longitud de curva" (Montiel, 2005, p. 92). Actualmente el radián o unidad de medida circular, se ha adoptado universalmente como la *unidad natural de medida angular*. El uso de arcos y radianes surge a partir de los problemas que trae consigo la matemática de la variación y el cambio. La primera persona en introducir el concepto de medida de un ángulo fue Roger Cotes en 1714. Él observó que:

> El arco circular, interceptado por las rectas que forman un ángulo con centro en el punto de dicho ángulo era la medida natural; pero variaría con el tamaño del círculo, por lo tanto se necesitaba de un módulo. El módulo podría ser un círculo estándar o alguna línea estándar que variará con el círculo (...) El radio era la opción más apropiada, siempre que la medida de una razón se cambiara en la medida de un ángulo, el módulo podría cambiarse con el radio. (Montiel, 2005, p. 93)

Tiempo después, Smith llega a la idea de que el ángulo modular ideal es el ángulo cuya medida es siempre igual al radio, demostrando además que sería de, aproximadamente, 57,295°.

Montiel y Buendía (2013), citan a Weber (2008), quien, de manera similar a como Cotes concibió el radián, parte de considerar que las funciones trigonométricas son operaciones aplicadas a los ángulos, lo que trae como consecuencia que el círculo unitario sea el contexto natural para pasar de los elementos geométricos al plano cartesiano.

Pero, ¿realmente propiciaría algo esta nueva unidad, que el grado no permitiese?

Siguiendo a Montiel (2005), una de las posturas más frecuentes sobre la utilización del radián por sobre la del ángulo en grados sexagesimales, tiene que ver con que el radián es más conveniente por ser más grande, permitiendo expresar ángulos con números menores.

Otra de estas posturas está vinculada con la simplificación de muchas fórmulas al utilizar radianes, como por ejemplo, las fórmulas del área para sectores circulares de medida angular ($\frac{r^2\theta}{2}$ en lugar de $\frac{\pi r^2\theta}{360}$) y las longitudes de arcos ($r\theta$ en lugar de $\frac{\pi r\theta}{180}$). Incluso las equivalencias utilizadas en el cálculo diferencial e integral, como $sen\theta \sim \theta$ cuando $\theta \to 0$, dejarían de ser ciertas. "El uso de radianes libera estas fórmulas del factor π /180" (Montiel, 2005, p. 94).

Montiel afirma que es el estudio del movimiento, donde lo que interesa es conocer la relación entre la medida de la trayectoria del móvil y el radio de la circunferencia que recorre, el origen de la unidad radián. De ahí que el radián sea la unidad más conveniente a considerar en ese contexto. Sin embargo, el discurso matemático escolar ha despojado al saber de las circunstancias que le dieron origen, y con este trabajo pretendemos rescatarlo.

Esta génesis del radián, claramente, no significa que no sea posible construir las funciones trigonométricas en grados. De hecho, en Castagna y Franco (2018) se propone su desarrollo basado en el grado como unidad de medida. Pero esto sí obstaculizaría su uso para el cálculo y la resolución de problemas analíticos, como las ecuaciones diferenciales o precisamente el problema que dio origen a este trabajo, vinculado con el uso de equivalentes para el cálculo de límites.

Es esa teoría sobre la ventaja del radián por sobre el grado en los cálculos relativos a longitud de arco y sector angular que tomamos para el diseño de la secuencia, por permitirnos abordar el problema en un curso básico de precálculo, en el que las técnicas del Análisis como el límite o derivadas no se abordan.

DISEÑO Y FUNDAMENTACIÓN DE LA SECUENCIA

Para abordar nuestros objetivos, en primer lugar, llevamos a cabo una revisión de textos, artículos de investigación y tesis doctorales relativos al tema trigonometría y al radián en particular, con aportes socio–histórico–epistemológicos. Buscamos aspectos de contextos intra y extra–matemáticos en los que figurara de forma implícita o explícita, la necesidad de utilizar al radián. Con todos estos insumos, sintetizados en la sección anterior, planteamos la siguiente secuencia didáctica para estudiantes de primer año de Bachillerato que permite analizar y exponer la necesidad del uso del radián en situaciones donde esté implicada la medición de amplitud de grados.

La secuencia consiste en dos actividades. La primera, donde intentamos que los estudiantes encuentren una regularidad que aporte significados al concepto de radián. La segunda actividad, servirá para plantear una situación en la que los estudiantes deben realizar cálculos sobre sectores circulares; luego se les propondrá que evalúen otra situación y tengan que tomar una decisión. En ese proceso esperamos que los estudiantes aprecien al radián como una unidad de medida para la cual las fórmulas de cálculo son más simples, en este caso las de la longitud de arco y el área de sector angular.

Diseño

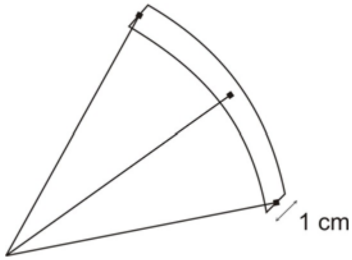
La actividad 1 fue motivada por las siguientes consideraciones. A partir de nuestra propia experiencia y los documentos consultados, consideramos que es importante hacer énfasis en el concepto de radián. Planteamos esta actividad con el uso de material concreto, manipulable por los estudiantes, para que la equivalencia entre grados sexagesimales y radianes no sea una imposición del docente, sino una deducción propia de los estudiantes.

Tiene por objetivo introducir el concepto de radián. Buscamos que a partir del análisis de la situación planteada los alumnos busquen regularidades sobre medidas y comparación entre ellas que permitan establecer una definición.

Actividad 1

Japón es una de las naciones donde está más presente el uso de los abanicos. Están presentes en actividades artísticas, rituales, y su uso es cotidiano, mayoritariamente entre las mujeres japonesas.

Para generar un modelo concreto se puede crear una estructura base donde se utilicen tres varillas de igual medida unidas por uno de sus extremos, fijo, con posibilidad de variar la amplitud del ángulo formado por ellas, y una tira de goma eva del mismo largo y 1 cm de ancho colocada de perfil, con sus extremos pegados a los extremos libres de las varillas exteriores. En la extensión máxima de la goma eva, el "abanico" se vería así:



Actividad 1

1. Recrea la situación con las varillas y goma eva entregadas por el docente, y mide el ángulo formado entre las dos varillas exteriores.
2. Compara tu resultado con otros grupos. ¿A qué crees que se debe este resultado?
3. ¿Qué relación encuentran entre la amplitud del ángulo hallado en la parte anterior y la amplitud del ángulo de la circunferencia completa? ¿Cuántas veces entra la tira de goma eva en la circunferencia completa?
4. Compara tu respuesta con la de otros grupos. ¿Pueden concluir alguna relación especial?

Luego del estudio realizado sobre la utilidad de los radianes como unidad de medida, concluimos que, como plantea Montiel (2005), el uso de esta unidad simplifica muchos cálculos y fórmulas utilizadas por los estudiantes, por ejemplo, la del área del sector angular. Teniendo esto en cuenta, diseñamos la actividad 2 que enfrenta a los alumnos a utilizar dicha fórmula y la de la longitud de arco en ambas unidades de medida: grados sexagesimales y radianes. Apuntamos a que los alumnos puedan concluir en base a la resolución de esta actividad que la utilización de radianes efectivamente simplifica.

Esta actividad tiene como objetivo visualizar la simplificación que genera el uso del radián. Para la resolución de la actividad consideraremos que las canchas consideradas son sectores circulares, y se despreciará la porción del círculo central que no pertenece a la superficie.

Actividad 2

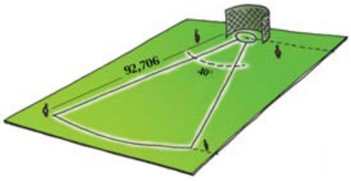
En el marco de la preparación para los Juegos Olímpicos que se van a realizar en Tokio en el año 2020, se quiere hacer una cancha que le permita a los atletas de la disciplina atletismo practicar los deportes de lanzamiento en los que van a competir.

Dentro de esta disciplina existen cuatro pruebas distintas que son: lanzamiento de disco, lanzamiento de martillo, lanzamiento de bala y lanzamiento de jabalina.

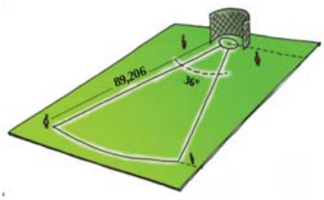
Para seguir con el reglamento establecido por la Asociación Internacional de Federaciones de Atletismo, las canchas en las que se desarrollan estas disciplinas deben tener forma de una sección de círculo con las siguientes dimensiones:

Lanzamiento de Bala

Lanzamiento de Disco



Lanzamiento de Martillo



Lanzamiento de Jabalina

1. Se va a hacer un pedido para comprar pasto suficiente para construir estas canchas, ¿puedes determinar cuántos metros cuadrados de pasto hay que comprar en cada caso?

Disciplina	Bala	Disco	Martillo	Jabalina	En general
Radio (m)					r
Ángulo (°)					θ
Área (m^2)					

2. El encargado de comprar el pasto, cansado de hacer tantas operaciones, buscó en internet la fórmula para el área de un sector circular y encontró lo siguiente:

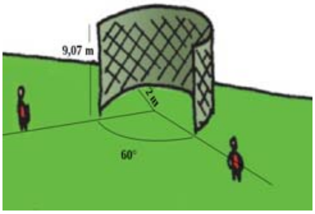
$$A = \frac{\theta r^2}{2}$$

Utilizando la fórmula encontrada, el encargado obtiene las siguientes áreas:

Disciplina	Bala	Disco	Martillo	Jabalina
Área (m^2)	300	3000	2500	2600

¿Obtuviste los mismos resultados que el encargado? ¿A qué crees que se debe?

3. Para la seguridad del público que va a ver a los atletas, se construye una jaula alrededor de la zona de lanzamiento hecha con el fin de frenar el disco o el martillo en caso de que el tiro no vaya dirigido a la cancha. Para construirla, se compra una red de alambre de acero que se vende por metro cuadrado y después se enrolla para darle la forma circular. A partir de los datos de la imagen, determina cuántos metros cuadrados de tejido de alambre de acero hay que comprar para hacer la jaula.



Análisis a priori

Con la actividad 1 pretendemos generar un primer acercamiento a la noción del radián. Este es definido como la amplitud del ángulo al centro de una circunferencia, formado por dos radios ubicados de forma que el arco de circunferencia tenga igual extensión que estos; por esto, decidimos ambientarlo en esta situación real (a pesar de que no sea tan cercana a ellos) en la que se ve representada dicha situación.

Como la medición que van a realizar no será exacta, pretendemos que den una aproximación que ellos consideren prudente de la amplitud del ángulo que se les pide. Cuando realicen la comparación con otros grupos, esperamos que observen que seguramente hayan obtenido valores diferentes, pero que es poca la diferencia. A su vez, como cada grupo tendrá varillas y tira de goma eva iguales entre sí, pero de distinta medida respecto a los otros grupos, esperamos que conjeturen que la medida es constante y no depende de la medida de las varillas. De esta forma, se pretende institucionalizar la idea de que en algún lado hay presente una regularidad.

Para la tercera parte, no pretendemos que como primera respuesta a la pregunta se diga que la cinta entra 2π veces en una circunferencia. Lo esperable es que hagan sucesivas aproximaciones: que si lo ponemos 6 veces sobra un pedazo de circunferencia, pero si lo ponemos 7 veces nos va a sobrar un pedazo de la cinta. En caso de no surgir el valor esperado, iríamos pidiendo que afinen el resultado hasta que surja.

En caso de ser necesario, podría recurrirse a representar la situación en GeoGebra. La construcción del arco de medida un radio requiere precisamente del uso del radián como unidad de medida, lo que es complejo que visualicen los estudiantes en esta etapa. Es por eso que proponemos la construcción de un *applet* con una circunferencia de radio variable, en la que esté marcado un arco de medida igual al radio. Los estudiantes podrían hacer variar el radio de la circunferencia y apreciar que el ángulo del sector angular se mantiene constante. En el siguiente link se puede observar la situación planteada: <https://www.geogebra.org/graphing/yfwt45u9>.

La actividad 2 se realizaría por partes, primero se entregará la parte 1 y se hará su correspondiente puesta en común; seguido a esto se entregará la parte 2 y su puesta en común; por último, la parte 3 y una puesta en común final.

Para completar la tabla, en la parte 1, creemos que los estudiantes pueden reconocer que la medida del ángulo y el área del sector angular se relacionan proporcionalmente y calcular el área buscada empleando dicha relación, hallando previamente el área total del círculo de radio dado para cada cancha.

Por ejemplo, para la cancha de bala el área total del círculo sería de 3000 m^2, por lo que:

$$\frac{360}{3000}=\frac{36}{x}$$
$$x=\frac{36\times 3000}{360}$$
$$x=300$$

También pueden proceder razonando que 36° es un décimo de 360° y entonces el área debe ser un décimo del área total del círculo.

Análogamente, obtendrán los resultados de las restantes canchas.

Luego, para el caso general deberán interpretar lo realizado en los casos anteriores, si lo deducen mediante el mismo razonamiento de proporcionalidad obtendrán que:

$$\frac{360}{r^2\pi}=\frac{\theta}{x}$$
$$x=\frac{\theta r^2\pi}{360}$$

También podrían pensar que la razón entre la amplitud angular del sector y el ángulo completo es $\frac{\theta}{360}$, por lo que tienen que multiplicar esa razón por el área, $r^2\pi$. Se obtiene así la fórmula del área del sector angular y la tabla sería la siguiente:

Disciplina	Bala	Disco	Martillo	Jabalina	En general
Radio (m)	30,901	92,706	89,206	99,665	r
Ángulo (°)	36	40	36	30	θ

Área (m^2)	300	3000	2500	2600	$\frac{\theta r^2 \pi}{360}$

También puede ocurrir que los estudiantes no reconozcan la proporcionalidad y propongan caminos diferentes, o directamente no sepan cómo proceder. En ese caso el profesor puede intervenir preguntando cómo procederían en casos particulares más sencillos, por ejemplo, para un cuarto de circunferencia (90°).

Los cálculos que ellos deben realizar para la primera parte, al estar mediados por el valor de π, serán números decimales no enteros; pero los valores asignados a las longitudes de las canchas fueron puestos con el objetivo de que el respectivo valor del área esté muy cercano a un número natural. Por lo tanto, si bien es posible que utilicen el número decimal, pretendemos que vean a grandes rasgos a qué número natural está cercano, e ingresen ese dato.

Para la parte 2 de la actividad los alumnos observarán que la fórmula no se corresponde con la que ellos obtuvieron, sin embargo, los resultados de las áreas son los mismos. En este punto deberán analizar qué está ocurriendo, puede que en un primer momento consideren que su fórmula es incorrecta, pero al verificar con los datos verán que su fórmula funciona.

Si emplearan, con sus datos medidos en grados, la fórmula que presentó el encargado, la correspondiente tabla que van a obtener sería la siguiente:

Disciplina	Bala	Disco	Martillo	Jabalina
Área (m^2)	17187,69242	143238,7878	143238,7878	148996,6834

Como bien podrán observar, los datos obtenidos no se corresponden en ambas tablas. Además, no tendría sentido que el área del sector angular fuera más grande que el del círculo. La suposición a la que pretendemos que lleguen es que la medida de los ángulos está expresada con diferentes unidades; aunque quizás no sea sencillo que arriben a esta conjetura. Igualmente, sí pretendemos que noten que las fórmulas utilizadas son distintas, y allí debe radicar algún problema que genera esta variación de los datos.

Llegado ese punto, se les puede recordar a los estudiantes la actividad anterior y preguntarles si encuentran algún vínculo, o recurrir a la búsqueda en internet para conocer la fórmula del sector angular. En este último caso, es altamente probable que las primeras referencias sean a la fórmula del vendedor, en la que se indica que el ángulo está medido en radianes.

Después de identificada la diferencia, se puede reflexionar con los estudiantes sobre la importancia del uso del radián para simplificar la fórmula del área del sector angular, preguntándonos por qué será que en las imágenes de internet aparece esa como primera referencia.

Para la parte 3 contamos con que los alumnos ya tendrán en cuenta que pueden trabajar con radianes, debido a que ya se habrán realizado las puestas en común de las dos partes anteriores.

Los alumnos deben identificar que lo que deben calcular es la medida del arco de circunferencia que abarca la red que se quiere construir. Para esto, con el dato de que el ángulo de apertura es de 60° pueden identificar que el ángulo al centro a considerar es de 300° (360 – 60).

En este punto los alumnos pueden tomar dos caminos diferentes, dependiendo de si continúan trabajando con grados sexagesimales o radianes. Para el primer caso, pueden volver a identificar una relación de proporcionalidad entre la amplitud del ángulo al centro y la medida del arco de la circunferencia que este determina. Como 300 son $^5/_6$ de 360, el perímetro de la circunferencia deben multiplicarlo por $^5/_6$ para obtener la medida del arco. De esta forma, la medida del arco es, en metros, de 10,47 aproximadamente.

Por otra parte, los alumnos que decidan trabajar con radianes llegarán a que 300° equivalen a $^{5\pi}/_3$ radianes, este valor lo deberán multiplicar por 2 que es el radio de la circunferencia, obteniendo que el arco mide $^{10\pi}/_3$ que es aproximadamente 10,47 m. Para esto los alumnos podrán, utilizando la definición de radián, identificar que un radián equivale a la medida del radio, es decir 2 m; y por tanto considerando que nos enfrentamos a una relación de proporcionalidad, deben multiplicar la amplitud del ángulo en radianes por 2.

Nuevamente podremos ver aquí que utilizando grados sexagesimales o radianes obtenemos el mismo resultado, sin embargo la utilización de radianes simplifica el procedimiento.

Los alumnos también pueden calcular la medida del arco correspondiente al ángulo al centro de 60° (en grados sexagesimales o radianes) y luego calcular la diferencia entre el perímetro de la circunferencia y dicha medida.

Una vez calculada la medida del arco correspondiente deben calcular el área de un rectángulo cuyos lados miden 10,47 y 9,07, lo que suponemos no presentará grandes dificultades en nuestros alumnos. Llegarán entonces a que se deben comprar, como mínimo, 95 m^2 de tejido de alambre.

Entendemos que estas actividades permiten visualizar al radián como *articulador* entre las razones trigonométricas y su generalización a nuevos contextos, en particular la función trigonométrica, en el sentido en que lo plantean Montiel y Buendía (2013). Para profundizar en ese camino, podrían abordarse a continuación actividades como las propuestas en Correa, Molfino y Schaffel (2018) que podrían funcionar como nexo entre el uso del radián y la función trigonométrica seno, cuya variable independiente son los reales (longitud de arco), y no los ángulos.

REFLEXIONES FINALES

Con base en la experiencia que nos brindó haber trabajado en esta investigación como futuros docentes de matemática, consideramos que realizar un análisis crítico de los temas impartidos durante nuestra formación, nos lleva a una mejor comprensión de los contenidos, lo que posiblemente derive en una mejor enseñanza de estos a nuestros estudiantes. Rescatamos, principalmente, la importancia de cuestionar no solo los contenidos enseñados en educación media, sino también la forma en la que se enseñan y con qué propósito. Es en este último punto que encontramos las herramientas para mejorar la comprensión de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes de secundaria.

El análisis histórico–socioepistemológico, nos permitió concluir que uno de los usos principales del radián es la simplificación de cálculos y expresiones. Esto fue considerado para el diseño de la secuencia de actividades presentada, cuyo objetivo fue que los estudiantes observen y hagan uso de dicha simplificación.

A su vez, consideramos que la implementación de un REI–FP es un interesante método para situar a los estudiantes de formación docente en el rol de investigadores. Conduce a analizar, discutir, conjeturar, y posteriormente indagar sobre las conjeturas; enriquece nuestra formación al promover discusiones e intercambios tanto en el ámbito matemático como en el didáctico.

Esta experiencia, que comenzó con la resolución de una actividad en el marco de un REI–FP, nos hizo reflexionar sobre nuestros propios conocimientos matemáticos y cuestionarnos sobre las formas en que esos conocimientos son construidos a la interna de la matemática y en el discurso matemático escolar.

Vivenciamos así la necesidad de rescatar los móviles originales que promueven la construcción del radián y estudiar la utilidad del concepto, lo que nos condujo a analizar las prácticas que le dan origen y a plasmar dicho conocimiento en la secuencia didáctica elaborada, para mejorar el discurso matemático escolar actual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, J., Martínez, R. y Rey, M. (2016). Diseño de una montaña rusa: una experiencia con los recorridos de estudio e investigación en la formación de profesores de matemática. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.) *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III* (pp. 67–83). CFE: Montevideo.

Castagna, H. y Franco, G. (2018, febrero). *Profe, ¿trabajamos en grados o en radianes?* Curso presentado en los Cursos de Verano, IPA, Montevideo, Uruguay.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45>.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contra paradigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2(2)*, 161–182.

Correa, M. C., Molfino, V. y Schaffel, V. (2018). Matemática educativa: una visión –ilustrada– de su evolución. *Educación Matemática*, *30*, 232–255.

Dalcín, M. (2003). El problema isoperimétrico: Abordaje geométrico de algunos resultados históricos. *Memorias del V Simposio de Educación Matemática* (pp. 130–142). Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina.

Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Estudio sociepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. *Memorias de la escuela de invierno de matemática educativa, XI edición* (pp. 419–432). México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica* (Tesis doctoral no publicada). Instituto Politécnico Nacional, México DF.

Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19* (pp. 819–823).

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México DF: Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez Sierra (Coord.) *Resignificación de funciones para profesores de Matemáticas* (pp. 169–205). Ciudad de México: Ediciones Díaz de Santos.

Rey, M. (2016). La camiseta de Luis Suárez: un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza en el nivel medio. *Reloj de Agua*, *13,* 5–20.

Santacruz, O. A. (2016). *Una propuesta de aula para la enseñanza de las funciones periódicas seno y coseno desde un enfoque variacional* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Sección 3

Enseñanza de la matemática desde las artes

UNA ACTIVIDAD PARA EL TRABAJO CON LA MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL CINE

JIMENA FERNÁNDEZ, ANA MARTÍNEZ

Resumen

En este artículo presentamos una actividad en la que se utiliza el cine como herramienta didáctica para enseñar matemática. A través del cine como expresión artística podemos aportar tanto al aprendizaje de contenidos matemáticos, como a sensibilizar a los estudiantes sobre diferentes problemáticas sociales. De la misma manera, es posible utilizar los conocimientos matemáticos que se trabajan en el aula para reflexionar críticamente sobre las problemáticas sociales.

Palabras clave: matemática, cine, justicia social.

Abstract

In this article we present an activity in which film is used as a resource to support mathematics teaching. Using film as an artistic expression can contribute both to the learning of mathematical contents, and to sensitize students towards different social problems. In the same way, it is possible to use the mathematical knowledge that is learned in the classroom to make critical reflections on these social problems.

Keywords: mathematics, film, social justice.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge en el marco del curso de actualización docente *Enseñanza de la matemática desde las artes* propuesto por el Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación. El curso constó de siete módulos, uno de de ellos fue Matemática y Cine. En este módulo se trabajó con tres películas: *Proof* (Estados Unidos, 2005), *Hidden Figures* (Estados Unidos, 2016) y *Stand and deliver* (Estados Unidos, 1988). A partir del visionado de cada una de ellas se planteó la realización del diseño de diferentes actividades para proponer en cursos de enseñanza media básica.

Presentamos una de las actividades realizadas a partir de la película *Hidden Figures*. Esta película narra la historia de tres brillantes mujeres científicas afroamericanas que trabajaron en la NASA a comienzos de los años sesenta en plena carrera espacial y en mitad de la lucha por los derechos civiles de los afrodescendientes en EEUU; participaron en el proyecto de poner en órbita al astronauta John Glenn.

Considerando los temas de discriminación presentados en la película, se solicitó a los docentes participantes del curso que eligieran uno para diseñar una actividad matemática que promoviera una reflexión sobre este.

FUNDAMENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Sabemos que la matemática es, en general, considerada por gran parte de la sociedad y por gran parte también del colectivo docente de matemática, como una materia fría, dura, en la que los sentimientos no entran en juego. Difícilmente se asocia a la matemática con la sensibilidad, con la belleza, con el arte. Por ese motivo nos parece fundamental sensibilizar a los docentes en este sentido y, a través de ellos, a los estudiantes. Creemos que ayudar a formar individuos sensibles y que sepan mirar el mundo con diferentes perspectivas es una labor que debe acompañar siempre la tarea educativa.

En *Introducción a la belleza de las matemáticas* (Ogawa y Fujiwara, 2017) se establece un diálogo entres los autores (una escritora y un matemático) en el que discuten sobre la importancia que tiene para un matemático la belleza y la sensibilidad estética. Comentan que la matemática no es un terreno académico árido y carente de emociones al que solo pueden acceder personas frías. Expresan que lo bello, la sensibilidad estética, sea tal vez lo más importante para un matemático. Y plantean que por ese motivo es de suma importancia para un matemático haber contado con una educación estética.

Bush, Karp y Nadler (2015) señalan que el arte ha sido diseñado como una entrada a la matemática y a otras materias STEM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Matemática) para aquellos estudiantes que no experimentaron previamente el éxito en las ciencias o que no han disfrutado de ellas. Conectar el arte con la matemática proporciona "creatividad a través de las disciplinas, que puede ser usada para atraer a los estudiantes de todas las aptitudes y a educadores de los campos de la resolución de problemas en la búsqueda de innovación" (Gin y Harris, 2012, citado en Bush, Karp y Nadler, 2015, p. 61).

En el diseño de la actividad se utiliza a la matemática como una herramienta para interpretar y analizar el mundo que nos rodea, para leer el mundo: "Leer el mundo con matemática significa usarla para entender las relaciones de poder, las desigualdades de recursos y oportunidades y la discriminación explícita entre diferentes grupos sociales basada en raza, clase, género, lenguaje y otras diferencias" (Gutstein, 2003, citado por Stinson, Bidwell y Powell, 2012, p. 79).

En este marco es que nos parece valioso que existan cursos como el que da lugar a la actividad que se presenta, en la que la matemática es trabajada desde las artes.

DISEÑO DE LA ACTIVIDAD Y SU ANÁLISIS A PRIORI

Diseño

Para el diseño de la actividad se solicitó tener en cuenta que en el trabajo con matemática y cine es importante que los estudiantes puedan ver el vínculo existente entre ambas, que puedan observar no solamente la matemática que hay en la película sino también cómo la matemática puede ser una herramienta para comprender diferentes realidades sociales.

La actividad fue diseñada para un curso de primer año de ciclo básico. Está enmarcada dentro del trabajo con los conjuntos numéricos y las operaciones. Consta de cuatro partes.

Parte I. Ficha técnica de la película Hidden Figures

a. Investiga y completa la siguiente información de la película:

Título original:

Director:

Género:

País:

Año:

Duración:

Actores principales:

Sinopsis:

b. Busca información sobre la situación de la población afrodescendiente en EEUU en la década de los 60 y sobre los trabajos que realizó la NASA antes de que el hombre llegara a la luna.

Parte II. Visionado de la película Hidden figures

Parte III. Cuestionario de clase

En esta instancia nos concentraremos en la parte de la película que va desde el minuto 1:00:04 al minuto 1:04:32.

1. En la escena vemos que Katherine dice que tiene que caminar media milla para ir al baño. Calcula cuántos kilómetros debe caminar Katherine para ir y volver del baño, sabiendo que una milla son aproximadamente 1,609 km.

2. Una cuadra en Montevideo son aproximadamente 100 metros, ¿cuántas de estas cuadras camina Katherine para ir al baño y volver a su escritorio?

3. Harrison le dice a Katherine que ella se va 40 minutos todos los días. Suponiendo que ella demora 5 minutos en el baño y el resto del tiempo está corriendo para ir y volver, ¿cuánto tiempo en promedio demora en correr una cuadra?

Parte IV. Reflexiones en torno a la película

1. En la actividad anterior trabajamos con la distancia que debía caminar Katherine para ir al baño, ¿qué reflexión te merece esa situación?
2. Si el baño del instituto de enseñanza a la que concurres quedara a ocho cuadras, ¿podrías hacer uso del mismo en los cinco minutos de recreo?
3. A lo largo de la película se ven diferentes situaciones en las que las personas se ven discriminadas por su color de piel. Menciona tres situaciones diferentes, ¿qué sentimientos te provocan esas situaciones?
4. Las protagonistas, además de ser afrodescendientes, son mujeres, ¿piensas que esto las pone en una posición de mayor desventaja aún? Indica escenas de la película que sirvan de argumento a tu respuesta.

Análisis a priori

La parte I se propone para que los estudiantes la realicen en forma individual y domiciliaria. En ella se solicita la búsqueda de información sobre la película y su contexto histórico y se les entrega un esquema para completar.

El objetivo es centrar al estudiante en el trabajo que se va a realizar para utilizar la película como herramienta didáctica tanto para el trabajo con matemática como para la reflexión sobre la discriminación racial. Por ello es importante que los estudiantes concurran a clase con información sobre la película y sobre el contexto histórico en el que la historia transcurre. Por otro lado, creemos necesario mostrarles a los estudiantes cómo el hecho de informarse sobre la película que verán ayuda a comprenderla.

Luego de haber realizado la puesta en común de la información que buscaron los estudiantes se procederá al visionado de la película (parte II).

Si bien el trabajo está pensado a partir de una de las escenas de la película es imprescindible que la vean en su totalidad para tener una visión clara de los diferentes tipos de discriminación que en ella aparecen.

Para abordar la parte III, se centrará la atención en un fragmento de la película: desde el minuto 1:00:04 al minuto 1:04:32.

Katherine es una de las protagonistas de la película y trabaja en una oficina inserta en un edificio donde no hay baños para afrodescendientes. Por este motivo ella tiene que salir del edificio e ir a otro para poder ir al baño. En la parte que se trabajará, su jefe, Harrison, le pregunta a dónde va durante tanto tiempo todos los días. Ella le responde que va al baño ya que en ese edificio no hay baños para ella y le plantea las dificultades tanto para ir al baño como para tomar café en su oficina (sus propios compañeros pusieron otra jarra con un cartel que dice *colored*). Se ve también cómo, luego de darse cuenta de esto, Harrison va al baño reservado para mujeres afrodescendientes del otro edificio y rompe el cartel que indica eso.

Las preguntas del cuestionario tienen un doble objetivo. Por un lado, el trabajo matemático vinculado a la operatoria, la proporcionalidad y las unidades de medida. Por otro lado, para echar luz sobre la situación a la que se enfrentaba la protagonista diariamente para ir al baño. Los estudiantes deberán recurrir a sus conocimientos matemáticos para calcular cuántas cuadras recorre Katherine cada día. Pero unido a este cálculo, y una vez que vean el resultado, podrán tomar conciencia, en una primera instancia, de la injusticia que se comete. Para poder ejemplificar, durante la puesta en común, se los hará pensar en lugares que disten ocho cuadras (que es aproximadamente lo que recorre Katherine cada día) de su casa o de su lugar de estudio de modo que puedan, de alguna manera, ponerse en el lugar de la protagonista.

En la parte IV se plantearán preguntas para reflexionar en torno a los resultados obtenidos en la parte anterior y a los temas abordados en la película en general. Se pedirá a los estudiantes una discusión en equipos y luego se compartirán las reflexiones con toda la clase.

Las preguntas invitan a que el estudiante ponga en palabras, e intercambie con sus compañeros, las observaciones y reflexiones a las que, a través del ejercicio matemático propuesto y del visionado de la película, pudo arribar. Las situaciones injustas a las que son enfrentadas las protagonistas de esta película se vuelven más cercanas a los estudiantes al ser repensadas por ellos en el intercambio de ideas. De esta forma, es esperable, que los estudiantes se sientan interpelados por estas cuestiones que pueden resultar lejanas para algunos y no tanto para otros. De esta manera, contribuimos con el aprovechamiento del trabajo matemático para aportar a la construcción de una sociedad más justa.

REFLEXIONES FINALES

Proponer una actividad como la ejemplificada, en la que se invita al estudiante a reflexionar sobre diferentes temas de justicia social, es una manera de desarrollar el espíritu crítico de los alumnos para que puedan observar el mundo que los rodea desde un lugar reflexivo. Únicamente siendo reflexivos acerca del mundo que nos rodea y lo que en este sucede es que podremos ser realmente libres.

Por otro lado, creemos que enseñar matemática desde las artes ayuda a cambiar el concepto que generalmente tienen los estudiantes sobre esta disciplina. Es una forma de que dejen de verla como una asignatura fría, aislada de los sentimientos y poder percibir la belleza que en ella existe.

Tal como lo plantea Gutstein (2006) es importante cambiar la concepción sobre la matemática tanto de estudiantes como de profesores de manera que deje de ser concebida como un conjunto de reglas desconectadas que deben ser memorizadas a concebirla como una herramienta poderosa de análisis para entender problemas complejos del mundo real.

El cine es un recurso potente en la clase de matemática, no solo por la parte artística que subyace a este medio audiovisual, sino porque es, sin lugar a dudas, un gran medio de difusión de ideas. Como plantea Pardo (2001) desde fechas muy tempranas varios sociólogos y psicólogos vuelcan su atención en el estudio de la experiencia cinematográfica buscando dar razón empírica de la influencia que las películas ejercían en la configuración de actitudes tanto individuales como colectivas.

Cursos para formadores como el que dio lugar a este trabajo (*Enseñanza de la matemática desde las artes*) motivan y ayudan a los docentes y, a través de ellos, a los estudiantes, a que la matemática sea experimentada de otra forma y a que aprecien los vínculos que esta maravillosa disciplina tiene tanto con el arte como con el mundo en el que vivimos.

Enfatizamos, finalmente, la postura de Colombo (2017) quien afirma que:

> Tenemos como docentes la responsabilidad de vincular la matemática tanto a los objetos abstractos como a la realidad en la que viven los estudiantes. Lejos estoy de combatir los problemas abstractos dentro del aula, pero como profesores de matemática no podemos relegar la sociedad en que vivimos por este motivo, ni mucho menos dejar de lado que en realidad la matemática nos sirve para explicitar las desigualdades e injusticias que existen en el mundo. (pp. 57–58)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bush, S., Karp, K. y Nadler, J. (2015). Artist? Mathematician? Developing both enhances learning! *Teaching children mathematics*, *22*(2), 61–63.

Colombo, A. (2017). Un mundo feliz. El lugar de la realidad en el álgebra lineal. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Experiencias conjuntas de docentes y futuros docentes. Vol. IV* (pp. 53–69). Montevideo: Consejo de Formación en Educación.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward pedagogy for social justice*. New York: Routledge.

Ogawa, Y. y Fujiwara, M. (2017). *Introducción a la belleza de las matemáticas*. Madrid: Editorial Funambulista.

Pardo, A. (2001). El cine como medio de comunicación social y la responsabilidad social del cineasta. En M. Codina (Ed.), *La ética desprotegida: ensayos sobre deontología de la comunicación* (pp. 117–141). Pamplona: Eunsa.

Stinson, D., Bidwell, C. y Powell, G. (2012). Critical pedagogy and teaching mathematics for social justice. *The International Journal of Critical Pedagogy, 4*(*1*), 76–94. Recuperado de: <http://libjournal.uncg.edu/ojs/index.php/ijcp/article/view/302/263>.

APORTES PARA EL TRABAJO CON MATEMÁTICA Y TEATRO EN EL AULA

VERÓNICA LLANES, VERÓNICA MOLFINO, ANA CELINA YACQUES

Resumen

¿Hacer teatro en clase de matemática? ¿Es eso posible? Enseñar matemática de una manera especial, alternativa a la tradicional, es una inquietud de los docentes que cada vez se hace sentir más y se manifiesta de diversas maneras. En este artículo pretendemos aportar en ese sentido, presentando dos propuestas de trabajo con matemática y teatro en el aula para abordar el teorema de Pitágoras a través de la creatividad, la cooperación, el diálogo, la curiosidad, la actuación y las emociones.

Palabras clave: matemática y teatro, formación de profesores, diseño de tareas.

Abstract

Performing drama in math class? Is that possible? Teaching mathematics in a special way, alternative to the traditional one, is a teacher's concern that is increasingly felt and manifested in various ways. In this article we intend to contribute in this regard, presenting two proposals that incorporate drama as a resource for teaching mathematics, specifically the Pythagorean Theorem, through creativity, cooperation, dialogue, curiosity, acting and emotions.

Keywords: mathematics and drama, teacher training, task design.

INTRODUCCIÓN

En este artículo presentamos algunos aportes para el trabajo con matemática y teatro (MT) en el aula. Las ideas surgieron en el marco del curso *Enseñanza de la Matemática desde las Artes*, organizado por el Departamento de Matemática; específicamente, en el módulo Matemática y Teatro. Los alumnos eran profesores de Matemática egresados del Consejo de Formación en Educación, con diversas trayectorias profesionales.

El trabajo de las cuatro semanas correspondientes al módulo se estructuró en tres partes y bajo diversas modalidades. En cada parte se organizó y presentó un acercamiento al trabajo con MT desde el aula, aportando sugerencias y materiales para la creación de uno o varios productos que fueran realmente útiles a la hora de decidir usar el teatro como recurso para enseñar matemática en cursos de enseñanza media.

En este artículo presentamos los trabajos realizados por dos participantes del curso, durante la primera etapa del módulo.

DICCIONARIO Y TEATRO

Al emplear el teatro como recurso para enseñar y aprender matemática, ampliamos nuestros modos de pensar, se enriquece la comunicación (el manejo de la voz y su entonación, la mirada, el manejo del espacio, la coherencia del discurso, el valor del contenido, la escucha, la espera) y crecen nuestras habilidades para el trabajo grupal, también se favorece la participación y la apropiación de los contenidos a trabajar, a través de la palabra y la acción. Es una forma de construir y comunicar conceptos matemáticos aprovechando el encuentro en las aulas como una oportunidad para conocernos, vincularnos y aprender juntos a través del arte y de la emoción.

Todo lo que el teatro ofrece es valioso. Konstantin Stanislavsky, adoptando palabras de Shchepkin en su libro *Preparación del actor*, sostiene que "interpretar fielmente, significa ser correcto, lógico, coherente, pensar, esforzarse, sentir y actuar a unísono con el papel" (2014, p. 14). Todas estas son cualidades necesarias para cualquier persona y en especial para adolescentes y estudiantes, siendo un desafío y un orgullo el tratar de favorecer situaciones y experiencias de aula que propicien el desarrollo de estas cualidades.

No siempre nuestros estudiantes se animan a actuar en público o no siempre tenemos el tiempo necesario para preparar una presentación teatral de actores (ni los docentes ni los estudiantes necesariamente son actores, no todos conocemos los fundamentos del teatro ni de la actuación y aunque nuestro objetivo no es lucir la parte actoral tampoco queremos opacar el arte de actuar por desconocimiento). Tenemos otras opciones de trabajo también, que son igualmente enriquecedoras: el teatro leído y el teatro de títeres.

Un aspecto fundamental a considerar cuando abordamos MT es el cuidado del contenido matemático a presentar. No debemos caer en hacer una obra de teatro matemático por el mero hecho de entretener a nuestros estudiantes y mostrarnos como profesores creativos. Nuestra misión será escenificar personajes o conceptos matemáticos de forma atractiva y artística pero siempre con contenido de calidad y concreto. Los estudiantes deben tener conocimientos firmes sobre el contenido de la obra pero no todo aparecerá de forma explícita en el guion (en las clases se abordará el tema en cuestión con la profundidad que requiera el curso pero no es necesario ni aconsejable que todo el análisis del tema aparezca en el guion). Si logramos atraer la atención, simplificar un hecho o concepto sin desvirtuarlo y generar interés por él, consideramos que parte de la misión está cumplida.

Otro aspecto central es el análisis y la decisión acerca de qué historias contar con MT. En general, el teatro funciona como un medio de expresión fascinante, un medio de comunicación indiscutible, sea cual sea la historia a contar. En sus orígenes milenarios, el teatro ha sido diverso y en él, sus autores recrean y reconstruyen historias que pueden ser apasionantes. Compartimos esta reflexión de Mario Carretero por demás inspiradora y alentadora:

> A lo mejor exagero, a lo mejor estoy diciendo cosas insensatas, pero a mí me parece cada vez más que la educación se resume en dos cosas: diccionario y teatro.
> Cada disciplina tiene un diccionario. Las disciplinas se diferencian unas de otras porque sus diccionarios son distintos. Pero, al mismo tiempo, tenemos que hacer que las disciplinas sean comprensibles, interesantes y atrayentes para el alumno, y eso se hace contando historias, eso se hace con teatro. (1997, p. 79)

Debemos conocer entonces ese diccionario de la matemática y generar reflexiones e ideas para trabajar en clase y de forma activa, colectiva y cooperativa, desarrollando la imaginación y la creatividad, pero sin perder de vista, y priorizando, el trabajo matemático que dará forma y contenido a nuestra obra.

PROPUESTAS PARA TRABAJAR MATEMÁTICA Y TEATRO EN EL AULA

Se propuso a los profesores cursillistas la siguiente consigna:

> Elabora un texto dramático para una obra de teatro (puede ser para teatro de actores, o de títeres o una función de teatro leído), que sirva de recurso para enseñar el teorema de Pitágoras en un curso de enseñanza media a través de la canción que aparece en el corto *La Idea Central*. Este texto quedaría abierto a las ideas y aportes de los estudiantes, para la posterior elaboración final de un guion de teatro.

El corto *La idea central* es protagonizado por estudiantes del Liceo N° 21 de Montevideo en el año 2016. Muestra a un profesor de Matemática preocupado por los resultados que obtienen sus estudiantes de tercer año en un escrito y que reflexiona sobre los vínculos entre esa situación, la falta de motivación que sienten los estudiantes y sus emociones frente a la matemática y la institución escolar en general. Decide proponerles una tarea diferente: les da una canción en inglés que versa sobre el teorema de Pitágoras, les pide que la traduzcan y que la canten para la clase siguiente. La letra de la canción, traducida por esos estudiantes, es la siguiente:

Teorema de Pitágoras

Un teorema importante
yo quiero a usted enseñar,
teorema de Pitágoras
podremos demostrar.
Para usar este teorema
no sirve cualquier triángulo,
yo solo aplico Pitágoras
en un triángulo rectángulo.
Ioioioio
Al lado que siempre es mayor
la hipotenusa llamo,
los dos que sobran
catetos podré así llamar.
En la cabeza nuestra
tenemos que perder el miedo.
El cuadrado de la hipotenusa es igual
a la suma de los cuadrados de los catetos.

Presentamos dos de las producciones que, aun respetando la consigna, difieren en su formato: la primera relata lo que va sucediendo en la escena, con algunas explicaciones sobre las decisiones tomadas y pensada para ser interpretada por estudiantes de enseñanza media, y la segunda a modo de texto dramático y pensada para una puesta en escena con teatro de títeres.

Propuesta 1. Cuestionamientos egipcios

> La historia que imagino está ambientada en la Antigua Grecia. Podría elaborarse un trabajo coordinado con la asignatura Historia, aunque el

contenido *Antigua Grecia* no forma parte del programa de tercero. Pero sería interesante para ahondar en el pensamiento de los antiguos griegos, sus costumbres, creencias, vestimenta, alimentación, todos detalles que enriquecerían la obra. También podría ser coordinado con Educación Social y Cívica, en relación al estudio de las formas de gobierno y la participación ciudadana, analizando la sociedad griega.

Pitágoras se encuentra trabajando con sus discípulos en la búsqueda de regularidades en el conjunto de los números enteros positivos, por ejemplo, podría ser una escena que muestre algo relativo a los números triangulares. En ese momento interrumpen la escena dos foráneos, vestidos con ropa diferente (serían navegantes egipcios) que dicen arribar a la isla de Samos después de un largo viaje en barco rodeados de aguas azules. Traen en sus manos unas extrañas cuerdas con nudos (cuerdas que empleaban los harpedonaptai). Cuentan que sus colegas, los harpedonaptai, se las habrían dado para que pudieran resolver un gran enigma.

Dichas cuerdas tenían 12 nudos dispuestos a una distancia uniforme, y los navegantes explican que en sus lejanas tierras, para saber si una columna está *derecha* disponen la cuerda de manera que en el piso haya 4 nudos, en la columna otros 3 y finalmente, si los extremos de la cuerda tirante coinciden al formar el triángulo, es porque la columna está bien construida. De lo contrario, hay que modificar su dirección respecto al piso.

Han hecho este largo viaje porque, conocedores de la reputación de la escuela pitagórica, quieren saber si es correcto el procedimiento, pero, sobre todo, ¿por qué?

Pitágoras, atónito por el procedimiento empleado, pregunta a sus discípulos si alguna vez habían oído algo así. Algunos de ellos comentan de familiares que les habían contado algo de eso, algunos que habían viajado a China y otros lugares, pero que ellos no lo habían creído, “eso es magia negra” decían algunos, asustados.

Entonces Pitágoras y sus discípulos se abocan a analizar la situación, se preguntan si habrá otras maneras de disponer los nudos, o con más o menos nudos, van haciendo descubrimientos de lo que hoy en día podríamos llamar *ternas pitagóricas*.

Los navegantes observan la escena con gran curiosidad.

Los discípulos poco a poco se van convenciendo de la certeza del procedimiento empleado y comienzan a buscar explicaciones. Para eso emplean diferentes figuras recortadas, triángulos, cuadrados, para poder explicar lo que sus ojos ven. Finalmente dos de ellos encuentran argumentos convincentes para afirmar que si el triángulo es rectángulo de catetos 3 y 4, su hipotenusa debe medir 5. Mientras uno lo va mostrando (mediante alguna demostración gráfica de compensación de áreas), el otro canta la canción (del teorema de Pitágoras), con el objetivo de quitarle el miedo a la *magia negra* de sus coterráneos. Otros se animan a probar el procedimiento y descubren, con sorpresa, que es también válido para otras ternas que habían encontrado, como la (5, 12, 13).

Los navegantes preguntan, ¿y todo esto qué tiene que ver con nuestras cuerdas?

Allí otro de los discípulos se para y agrega una estrofa a la canción: "Esto no termina acá, el recíproco también podemos demostrar, si la relación entre los lados es cierta, el triángulo rectángulo despierta".

La tarea para los estudiantes consistiría en la creación del guion y puesta en escena de la obra. Creemos valioso que sean ellos mismos, con sus cuerpos, los que representen la escena ya que los involucra explícitamente en la comprensión del contenido matemático de una manera inusual.

Respecto al desarrollo del pensamiento matemático, los estudiantes deberán, en primer lugar, interiorizarse con el procedimiento egipcio para construir ángulos rectos, conocer que si un triángulo tiene lados cuyas medidas son 3, 4 y 5 entonces es rectángulo. También deberán buscar otras ternas pitagóricas para ampliar esa parte del guion. En el texto figura una pero también dicen que los discípulos encuentran otras, así que los estudiantes deberán encontrarlas, ya sea probando (por ejemplo, en un ambiente de geometría dinámica) o buscando información en textos o internet. Después deberán comprender por qué se cumple, de qué manera interviene el teorema de Pitágoras y cuál es la diferencia entre el recíproco y el directo. En los propios textos de enseñanza media figuran representaciones gráficas que sugieren demostraciones del teorema e incluso demostraciones propiamente dichas, por lo que pueden verlas ahí o en otras fuentes, o pueden intentar elaborar sus propias demostraciones. Asimismo, deberán interiorizarse con la realidad de griegos y egipcios de la antigüedad. Finalmente, deberán conjugar todo este conocimiento para crear una obra propia, con diálogos y puesta en escena inventada por ellos.

Propuesta 2. Lucía y Pitágoras

> *Día soleado en Mathematics world, Lucía (la potencia) y María (la raíz) caminaban rumbo al liceo. Lucía y María, a pesar de ser en esencia inversas, se llevaban excelente, eran muy amigas. De repente, Triángulo Rectángulo, que se encontraba repartiendo volantes en la vereda, las intercepta.*
>
> Triángulo Rectángulo: ¡Buenos días señoritas! ¡Un volante para ustedes! (*Triángulo Rectángulo habla con marcado entusiasmo. Lucía toma el volante y comienza a leerlo mientras continúa caminando. En el volante está impresa la letra de la canción, Lucía la lee en voz alta. Al finalizar la lectura se detiene bruscamente.*)
>
> Lucía: ¡¿Qué?! Volvamos, María, hacia donde se encuentra Triángulo Rectángulo que nos dio esto (*Señala el volante.*) Quiero que me explique todo, ahora me generó la duda y no me voy a quedar con ella.
>
> (*María, bastante desganada, da la vuelta para acompañar a Lucía hacia el lugar. Al llegar, Lucía, desesperada, interroga a Triángulo Rectángulo.*)

Lucía: Oye, Triángulo, ¿qué es esto? (*Muestra el volante en su mano.*) ¿Teorema? ¿Pitágoras? ¿Triángulos rectángulos? ¿Catetos? ¡Por Dioooss! ¿Hipotenusas? (*Se agarra la cabeza confundida mientras que Triángulo Rectángulo sonríe.)*

Triángulo Rectángulo: ¡Un triángulo rectángulo soy yo! Tengo un ángulo recto, lo que me hace ¡muy correcto! Ahora llamaré a mi amigo Teorema de Pitágoras para que te explique tus otras dudas. (*Triángulo Rectángulo silba y llama a Teorema de Pitágoras.*)

Teorema de Pitágoras: Buenos días, ¿en qué los puedo ayudar?

Lucía: Hola, disculpa que vaya directo al grano, pero estoy muy confundida. ¿Qué es el teorema de Pitágoras?

Teorema de Pitágoras: ¡Soy yo! (*Sonríe orgulloso. Lucía, un poco inquieta y cansada de que ambos amigos hicieran el mismo chiste y no le ayudaran con sus dudas, insiste.*)

Lucía: ¿Qué es un teorema?

Teorema de Pitágoras: Un teorema es un enunciado que puede ser demostrado como verdadero mediante argumentos lógicos. En mi caso, como soy Teorema de Pitágoras mi enunciado dice que… (*Lucía interrumpe.*)

Lucía: ¿Pitágoras?

Teorema de Pitágoras: Sí. Pitágoras fue un filósofo y matemático griego… (*Hace una pausa.*) y como te decía, mi enunciado dice que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

Lucía: ¿Qué es un cateto? ¿Y qué es la hipotenusa? Suena como a la intrusa aquí. (*Teorema de Pitágoras y Triángulo Rectángulo sonríen. María interrumpe.*)

María: Lucía, ¿cuánto tiempo más estaremos con esto? ¡Llegaremos tarde al liceo! Y ya sabes cómo es la profe.

Teorema de Pitágoras: Los catetos son los lados del triángulo rectángulo que forman al ángulo recto y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y como dice la canción "siempre es el lado mayor". (*Lucía mira con desconcierto y pensativa. María la observa*.)

María: ¡Teorema de Pitágoras, por favor, le repites de nuevo tu enunciado para ver si ya nos podemos ir! (*Exclama un poco cansada y confundida también pero no tan preocupada como Lucía*.)

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Por ejemplo, en el caso de mi amigo Triángulo Rectángulo (*señala al triángulo*) su hipotenusa es de 5 y sus catetos de 3 y 4 centímetros. Si aplicamos el enunciado, quedaría que 5 al cuadrado es igual a 4 al cuadrado más 3 al cuadrado, lo que efectivamente se cumple, pues 25 es igual a 16 más 9.

(*Lucía mira a María, mira a Triángulo Rectángulo, mira a Teorema de Pitágoras y luego habla con tristeza*.)

Lucía: ¡Ay! ¡No entendí nada!

(*María, Triángulo Rectángulo y Teorema de Pitágoras sonríen, mientras de fondo se escucha la canción del volante: Teorema de Pitágoras*.)

FIN

En este caso la obra sería de teatro de títeres, y estos serían diseñados por los alumnos. La propuesta posterior consistiría en que los estudiantes piensen cómo continuar el guion para seguir explicándole a Lucía el enunciado y las implicancias del teorema de Pitágoras.

El guion muestra que la sola repetición del enunciado no es suficiente para que Lucía comprenda, por lo que los estudiantes deberán recurrir a otros recursos. Entre otros, pueden proponer ejemplos de triángulos en los que se cumple y otros en los que no o evidenciar una transición entre diferentes registros: gráfico, numérico, algebraico, tabular (si se van listando las ternas que son posibles medidas de lados del triángulo). Ante todo, para lograr eso deberán primeramente reflexionar sobre lo que dice la canción, comprenderlo y después sí pensar en estrategias para explicarlo.

REFLEXIONES FINALES

Presentamos dos ejemplos de los muchos, variados y valiosos trabajos que fueron realizados por los participantes del módulo Matemática y Teatro. Participar en este módulo fue un desafío tanto para la docente a cargo como para los cursillistas, ya que estos manifestaron no haber trabajado en esta línea y muchos dudaban de sus capacidades creativas para inventar historias matemáticas para contar a través del teatro. Sin embargo, sortearon cada instancia con éxito y nos enriquecimos mutuamente.

Cerramos este artículo con reflexiones de las creadoras de las propuestas presentadas:

Cursillista 1: «*Creo que mediante esta tarea se estarían teniendo en cuenta al menos estos dos estándares (NCTM, 2000): herramientas para mejorar el discurso y mejorar el ambiente de aprendizaje. Respecto al primero, la tarea constituye una herramienta para que el discurso pase de ser un conjunto de reglas impuestas por el docente para ser aplicadas en la comprensión de la obra, a convertirse en un mundo a descubrir por el estudiante. El discurso (texto dramático) trae implícitas muchas preguntas que deberán ser investigadas y respondidas por los propios estudiantes para poder llevar a cabo la tarea. Por otro lado, esta tarea contribuiría a mejorar el ambiente de aprendizaje, los estudiantes pueden verse involucrados intelectual y físicamente, pueden aflorar sus intereses, sus miedos. Ahora comprender se vuelve necesario para la tarea grupal, en lugar de ser algo a lograr meramente en el plano individual. En tal sentido, acuerdo con Skliar (2018) en que planificar las formas del estar también es un modo ético y político de hacer educación*».

Cursillista 2: «*A veces me quedo pensando, autoevaluándome si logro motivar a mis alumnos, si logro que entiendan la importancia de la matemática, que la pueden ver y percibir en sus vidas cotidianas y no solo adentro del aula, que consigan apropiarse de ella y disfrutarla tanto como lo hago yo. Trato de estar siempre pensando cómo salirme de la metodología tradicional, innovando, creando, aprendiendo junto con mis alumnos. En cuanto a las evaluaciones (que aparecen mencionadas en el cortometraje) trato de hacer muy pocas evaluaciones individuales y presenciales con un tiempo estipulado, ya que varias veces me ha pasado que alumnos que son muy buenos académicamente dentro del aula, dispuestos al trabajo, creativos, les va mal en este tipo de evaluaciones lo que lleva, a veces, a provocar una desmotivación en el alumno. Para evitar esto he implementado como evaluación la creación de: letras de poemas referidos a un tema dado en clase, canciones y videos musicales donde elegían su canción favorita y sustituían la letra por una inventada por ellos con contenido matemático, cuentos, historias y relatos con personajes matemáticos. Los trabajos y resultados que he obtenido son realmente brillantes. El nivel de creatividad e imaginación es sorprendente. Por esto, me sentí identificada con el profesor Mauro, que se preocupó por sus estudiantes, e intentó, como dijo la alumna 'hacerlos sentir un poco mejor', ya que a veces desconocemos la enorme carga que tienen nuestros alumnos sobre sus hombros. Con referencia a esto, estoy de acuerdo con lo que expone Carlos Skliar en la entrevista: "De lo que se trata es de liberar a las escuelas de la responsabilidad del mundo adulto", y es por esto que aparte de enseñarles y guiarlos en su proceso de aprendizaje debemos promover y propiciar dentro del aula espacios donde nuestros alumnos logren relajarse, compartir, divertirse, 'liberarlos' al menos unos minutos de los problemas de su barrio, su casa, su familia*».

Deseamos que estos aportes sean un impulso para aquellos docentes que no han vivido estas experiencias en el aula. El trabajo del profesor se enriquece a través del intercambio con colegas y alumnos, y del aprovechamiento de las clases como oportunidades para estudiar y aprender, a través de la emoción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carretero, M. (1997). Piaget, Vygotsky y la psicología cognitiva. *Revista Novedades Educativas*, *74*, 75–79.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM. Recuperado de: <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>.

Skliar, C. (24 setiembre 2018). La rebeldía de lo bello, lo lento, lo humano. Entrevista de Verónica Engler en *Página 12, Diálogos.* Recuperado de: <https://www.pagina12.com.ar/144153-la-rebeldia-de-lo-bello-lo-lento-lo-humano>.

Stanislavsky, K. (2014). *Preparación del actor*. Montevideo: Ediciones I Libri.

CRUCES ENTRE MATEMÁTICA Y LITERATURA: ¿UN PARAÍSO POSIBLE?

TERESITA CARRIÓN, VERÓNICA MOLFINO, CRISTINA OCHOVIET

Resumen

En este trabajo presentamos el diseño de una secuencia didáctica a partir de un cuento de Julio Cortázar. Se propone abordar el tema *funciones* en segundo año de enseñanza media. El cuento es empleado para motivar la actividad matemática, a la vez que la actividad matemática favorece una comprensión más profunda del texto, enriqueciendo los posibles significados que los estudiantes pueden construir de la obra literaria.

Palabras clave: enseñanza de la matemática, literatura, diseño de tareas.

Abstract

In this work we present the design of a learning sequence based on a story by Julio Cortázar. It is proposed to address the subject *functions* in the second year of the secondary education. The story is used to motivate the mathematical activity, while the mathematical activity favors a deeper understanding of the text, enriching the possible meanings that students can build from the literary work.

Keywords: mathematics teaching, literature, task design.

INTRODUCCIÓN

En el módulo Matemática y Literatura del curso *Enseñanza de la matemática desde las artes*, organizado por el Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, se propuso explorar posibles cruces entre literatura y matemática. Una de las propuestas giró en torno al cuento *Un pequeño paraíso* de Julio Cortázar (1979).

En el cuento Cortázar describe aspectos de la sociedad de un país gobernado por un general llamado Orangu. Sus habitantes consideran que la felicidad consiste en tener en su flujo sanguíneo una cierta cantidad de minúsculos pescaditos dorados, que son inyectados a los 18 años. Esos pescaditos se van reproduciendo al pasar los años, pero también algunos de ellos mueren, pudiendo acarrear complicaciones que pueden, a su vez, ser resueltas con ampollas que vende el gobierno. Cortázar nos acerca en este breve cuento a las emociones de los habitantes de este país y a las situaciones que deben resolver para mantener a estos pescaditos en su flujo sanguíneo en la cantidad necesaria.

En este escrito presentamos una secuencia didáctica para la enseñanza de propiedades de las funciones en segundo año de enseñanza media. El cuento es empleado como recurso para motivar la actividad matemática, a la vez que la actividad matemática desarrollada favorece una comprensión más profunda del texto, enriqueciendo los posibles significados que los estudiantes pueden construir de la obra literaria.

LECTURA LITERARIA Y CRUCES ENTRE DISCIPLINAS

En el cuento *Un pequeño paraíso* de Julio Cortázar (1979) podemos encontrar cruces entre literatura y matemática, entendidos como profundos vínculos que permiten una mejor comprensión y disfrute de ambas disciplinas. Es posible contar cuentos en clase solo para motivar una actividad matemática; nosotros buscamos algo más, aportar desde la matemática para comprender mejor la historia que presenta el texto literario y, a la vez, comprender mejor el contenido matemático al estar situado en un contexto concreto (Ochoviet, 2015).

Compartimos la concepción de lectura de Michèle Petit (2011), esto es, como un proceso que permite comprender mejor el mundo, reflexionar sobre él y crear nuevas realidades. Este concepto está en consonancia con las razones que expone Ochoviet (2015) sobre la lectura de textos literarios como recurso para enseñar matemática, en consonancia con la propuesta de Gaspar (2005). Por un lado porque, según la autora, enseñar a comprender un texto es competencia de todos los docentes, de todas las asignaturas y niveles. Además, la enseñanza de un contenido matemático implica enseñar a comprender los diversos textos en los que este es abordado como podría ser el caso de un texto literario en el que aparece ese contenido. Por ejemplo, comprender una metáfora que emplea matemática puede contribuir a una lectura más profunda del texto.

Por otro lado, Ochoviet (2019) pone foco en las prácticas humanas que favorecen la construcción de conocimiento matemático y que pueden ampliar nuestra visión sobre los cruces entre matemática y literatura: "observar, clasificar, medir, contar, pesar, ordenar, secuenciar, comparar…" (Cantoral y Farfán, 2012, citado en Ochoviet, 2019, p. 234). Tomamos esta idea para diseñar una actividad para la enseñanza de *funciones* en segundo año de enseñanza media, en la que proponemos emplear la matemática para modelar la cantidad de pescaditos en el flujo sanguíneo de una persona, estudiar su variación y predecir la necesidad del uso de ampollas en el futuro. Ello abona a una reflexión posterior entre los estudiantes y el docente sobre la felicidad de los habitantes del país imaginado por Cortázar y, por qué no, sobre sus propias felicidades.

LAS TAREAS DESAFIANTES

La NCTM (2000) plantea la necesidad de proponer a los estudiantes tareas matemáticas que desafíen intelectualmente a los estudiantes, que despierten su curiosidad y que los atraigan a la matemática. Para Guberman y Leikin (2013) desafiante significa que posee una dificultad interesante que el estudiante deberá superar y a la que se aproximará con motivación.

Las autoras sostienen que la resolución de problemas es una herramienta didáctica efectiva que permite movilizar el conocimiento existente, construir nuevas conexiones matemáticas entre conceptos y propiedades ya conocidos, y construir nuevo conocimiento en el proceso de superar los desafíos presentes en los problemas. Estas ideas son tenidas en cuenta para el diseño de la secuencia de actividades: no solo enfrentamos a los estudiantes al desafío que implica vincular dos disciplinas que aparentemente no tienen conexiones, sino que además lo hacemos mediante una tarea desafiante. Aspiramos con ello favorecer una comprensión más profunda del tema y una motivación para el acercamiento a la matemática como un lugar en el que es posible crear.

DISEÑO DE LA SECUENCIA E IMPLEMENTACIÓN

Propuesta de aula

Esta actividad está diseñada para abordar el contenido *funciones* en segundo año de Ciclo Básico de enseñanza media, basándonos en que, en el programa actual de matemática de ese nivel, se recomienda "trabajar con situaciones donde el estudiante perciba que las funciones permiten modelizar, describir y analizar fenómenos y eventualmente cuantificarlos" (CES, 2010, p. 4). Específicamente queremos trabajar los conceptos de crecimiento y concavidad de una función desde una perspectiva cualitativa, por lo que es conveniente que los estudiantes hayan trabajado previamente con funciones, tanto en contextos extramatemáticos como intramatemáticos.

Un pequeño paraíso es un cuento corto, por lo que su lectura y posterior actividad pueden ser abordados en una clase de 80 minutos, aunque podría extenderse a alguna más, en caso de que el profesor considere que el contexto es propicio para continuar con actividades relativas al cuento y especialmente la reflexión posterior, a partir de una mayor comprensión del texto.

Propondríamos a los estudiantes escuchar el cuento narrado por Cortázar, al que puede accederse desde <https://www.youtube.com/watch?v=drB6YmjprdQ>. Para esto, basta con llevar un parlante, ya que el video no aporta elementos que justifiquen su visualización.

Además, daríamos a los estudiantes el cuento impreso junto a la actividad que describimos a continuación, para trabajar en duplas.

Actividad

1. ¿Qué opinan sobre lo que hace felices a los habitantes del país que gobierna el general Orangu? ¿Ustedes se sentirían igual de felices que ellos en ese país?

2. Según explica el cuento, los pescaditos se reproducen muy rápidamente en el cuerpo humano después de insertados los primeros 20; a los 18 años y más adelante, algunos de ellos comienzan a morir.

a. Completen la tabla de acuerdo a cómo se imaginan que se da la variación de la población de los pescaditos dorados:

Edad (años)	18	18,5	19	19,5	20	25	30	35	40
Cantidad de peces	20								

b. En GeoGebra (GG), en vista *hoja de cálculo* reproduce la tabla anterior (también en horizontal) y selecciona los datos. Elige la opción *análisis de dos variables* y luego *analizar*. (Al hacer esto y activando la casilla *Modelo de regresión,* en la opción *polinómica*, GG grafica la función polinómica que mejor se ajusta a los datos y muestra la expresión analítica). Con el botón derecho se puede copiar a la vista gráfica.

c. ¿En algún momento la población de pescaditos crece? Según tu cuadro de valores, ¿cuándo crece más rápido? ¿Cuándo crece más lento?

d. ¿Creen que en algún momento la población de pescaditos decrece? Si es así, ¿cuándo decrece más rápido?

e. En la vista algebraica obtendrán la expresión analítica que representa la cantidad de pescaditos en función de la edad de los habitantes. Según esa expresión, ¿cuántos pescaditos tendrá a los 60 años ese habitante del país que gobierna el general Orangu?

3. ¿Cuándo creen que debería empezar a emplear ampollas el habitante? ¿Cuántas ampollas deberá usar en ese primer año? Puedes dar un estimado por defecto y uno por exceso.

4. Comparen sus respuestas con la de otra dupla. ¿Qué observan?

5. Para reflexionar en este nuevo grupo: ¿Creen que en nuestra sociedad existe algo parecido a estos *pescaditos de oro*? ¿Son accesibles a todos por igual?

6. ¿Creen que son necesarios para alcanzar la felicidad? ¿Podría alcanzarse por otros medios?

ANÁLISIS A PRIORI

En la actividad que presentamos, podemos distinguir tres instancias distintas de reflexión.

La primera pregunta apunta a que los estudiantes aborden el texto desde sus emociones, desde lo que opinan respecto a la forma de obtener la felicidad en el país que describe Cortázar. En esta primera instancia la idea es que reflexionen desde la experiencia de los otros, opinando como observadores externos.

La segunda instancia, conformada por las partes 2, 3 y 4, es la actividad matemática propiamente dicha. Consiste en una serie de tareas de final abierto: la situación inicial está dada por la lectura del cuento, pero en él no se dan todos los datos para que las respuestas sean únicas. Los alumnos pueden deducir que la función cantidad de peces – tiempo es siempre creciente, porque aún siendo que los peces van muriendo, lo que dice es que mueren solo dos o tres al mes. Suponiendo que se reproducen *rápidamente* es de esperar que la función no llegue a decrecer, porque habría más de tres nacimientos al mes. Aunque claro está que podría ser una respuesta posible que en algún momento la población decreciera, si, por ejemplo, imaginan que a partir de los 30 años del habitante, los pescaditos que mueren son más que los que nacen y ello provoque un decrecimiento a futuro.

Otro dato que pueden imaginar a partir de la lectura es que, si bien la población crece, no lo hace siempre al mismo ritmo, al principio parecería que crece más rápido y más tarde, cuando empiezan a morir, la población podría detener la velocidad de crecimiento. Eso abriría puertas para hablar de crecimiento y de concavidad de una función y, quizás, de funciones definidas por partes.

Los estudiantes decidirán sobre estos aspectos, de forma consciente o inconsciente y libremente completarán la tabla que se les proporciona. Para que la variación de la función que están determinando se visualice explícitamente, les pedimos que la representen gráficamente. Es un primer abordaje al concepto de función, y dado que los estudiantes todavía no transitan con fluidez de una tabla al gráfico, consideramos que GeoGebra es una valiosa herramienta, que no solo traza la curva que mejor se ajusta a los datos considerados, sino que también devuelve la expresión analítica de la función que corresponde a la curva. Logramos así que el estudiante comience a familiarizarse con diferentes registros de un mismo concepto matemático: tabla de valores, gráfico, expresión analítica. Cada uno de estos registros tiene su potencial particular, la gráfica apunta a lo visual, la expresión analítica al reconocimiento de expresiones algebraicas para realizar cálculos y predicciones.

Con la pregunta "¿cuándo crece más rápido?" esperamos que los estudiantes comparen intervalos de tiempo iguales, puede ser año a año al principio o cada cinco años luego, y concluyan relaciones entre la rapidez del crecimiento y la forma que toma la curva, acercándolos a la idea de concavidad de la función.

Cuando comparen los resultados con otra dupla, pueden encontrar similitudes en el crecimiento de la función y quizás encuentren diferencias en la concavidad, por ejemplo.

La parte 3 también es una actividad de final abierto, ya que se apela a la imaginación de los estudiantes quienes, a partir de datos que estimen pertinentes respecto a cantidad de peces muertos por año, deberán estimar la cantidad de ampollas, que depende de esos datos iniciales. La parte 4 invita a percatarse de que la actividad no tiene una respuesta única, a discutir en grupos pequeños la pertinencia o no de las respuestas elaboradas por ellos, y abre las puertas a una discusión grupal.

En la tercera instancia, después de la actividad matemática, se espera que los estudiantes hayan logrado una mayor profundidad en la comprensión del texto, por eso en las preguntas 5 y 6 indagamos sobre una opinión más personal, que los involucra directamente en la reflexión sobre la situación y en una manera de afrontarla.

EXPECTATIVAS MATEMÁTICAS Y DE LECTURA

Creemos que la actividad propuesta puede lograr que los alumnos comprendan mejor el concepto de función, interpreten su representación gráfica, visualicen una expresión algebraica conocida por ellos que relaciona dos variables y al mismo tiempo los inicie en el estudio del crecimiento y la concavidad de una función. Todo esto mediante la modelización de una situación narrada en una historia fantástica.

También esperamos que afloren sentimientos de injusticia ya que a las familias sin recursos les cobrarían más, de rechazo a la corrupción y a la búsqueda de la felicidad de forma artificial.

La lectura de este cuento permite trabajar otros temas con otros referentes de la institución, como ser adscriptos y psicólogos, ya que los estudiantes pueden asociar la historia de los pescaditos con el consumo de drogas, las vicisitudes de la vida como accidentes u otro tipo de situaciones.

La promoción de una lectura que favorezca el crecimiento personal es algo deseable a desarrollar desde todas las asignaturas, pero también constituye un gran desafío. Aun así, la reflexión a partir de las lecturas propuestas en el curso y el diseño de esta tarea nos hicieron ver que encontrar cruces entre literatura y matemática es un paraíso posible. Esperamos con la divulgación de este trabajo contribuir para que otros docentes puedan también encontrar y construir sus propios paraísos, que inviten a los alumnos a emocionarse con los textos literarios y, por qué no, con la actividad matemática que puede favorecerse a través de su lectura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CES (2010). Programa de Matemática, 2do. año de Ciclo Básico. Reformulación 2006. Ajustes 2010. Consejo de Educación Secundaria. Recuperado de: <https://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/2do/matematica.pdf>.

Cortázar, J. (1979). Un pequeño paraíso. En *Un tal Lucas* (pp. 74–78). Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Gaspar, M. (2005). La lectura y la escritura en el proyecto escolar (o de cómo la lectura y la escritura no son patrimonio de un área. En *Diploma Superior en Lectura, escritura y educación.* Buenos Aires: FLACSO Virtual.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Mathematics Teacher Education*, *16*, 33–56.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM. Recuperado de: <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>.

Ochoviet, C. (2015). La lectura literaria en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario: vínculos entre campos, canon de lecturas posibles. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41,* 9–19.

Ochoviet, C. (2019). Literatura y matemática en el aula escolar. En P. Arán y M. Casarin (Coord.), *Ciencias sociales: balance y perspectivas desde América Latina. Colección Posdoc, Nº5* (pp. 229–245). Córdoba: Editorial CEA de la Universidad Nacional de Córdoba.

Petit, M. (2011). Leer y hacer uso de una biblioteca escolar: y eso, ¿para qué sirve hoy en día? Congreso Bibliotecas escolares en tránsito, Conferencia 4, Santiago de Compostela, Noviembre 2011. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=Ous7hcocQBs>.

MATEMÁTICA Y PINTURA A PARTIR DE *MORRO DA FAVELA* DE TARSILA DO AMARAL

AUTORES

Resumen

Palabras clave: ______________________________________

Abstract

Keywords: ____

AUTORES

JOAQUÍN BATISTA es egresado del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Didáctica III de la especialidad Matemática (2019).

MARTÍN BIANCHI es egresado del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Didáctica III de la especialidad Matemática (2019).

GABRIELA BUENDÍA es doctora en Matemática Educativa (CINVESTAV, IPN, México). Se ha desempeñado como profesora e investigadora en CICATA–IPN (México). Actualmente es investigadora del Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

TERESITA CARRIÓN es profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas y Diplomada en Matemática mención Aplicaciones (ANEP–UDELAR). El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en el módulo Matemática y Literatura del curso *Enseñanza de la Matemática desde las artes*.

ANA CAREN DA SILVA es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Didáctica III de la especialidad Matemática (2019).

ARIANNA FERNÁNDEZ se encuentra culminando la carrera en el Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2019).

JIMENA FERNÁNDEZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con orientación en Matemática (UNCOMA, Argentina). El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en el módulo Matemática y Cine del curso *Enseñanza de la Matemática desde las artes*.

AGUSTÍN GOYETCHE es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2019).

AGUSTINA GARCÍA es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Didáctica III (2019).

CAROLINA GORDANO es egresada del Instituto de Profesores Artigas. Los escritos de su autoría que se incluyen en esta obra son de creación colectiva, fruto de trabajos elaborados en el marco de las asignaturas Análisis del Discurso Matemático Escolar y Didáctica III de la especialidad Matemática.

VERÓNICA LLANES es profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas. Fue la docente a cargo del módulo Matemática y Teatro del curso *Enseñanza de la Matemática desde las Artes*.

ANA MARTÍNEZ es egresada del Instituto de Profesores Artigas. Se ha desempeñado como docente de Didáctica de la Matemática en ese instituto y como profesora de los módulos Matemática y Cine, y Matemática y Pintura en el curso *Enseñanza de la Matemática desde las Artes*.

VERÓNICA MOLFINO es doctora en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).

CRISTINA OCHOVIET es doctora en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, como docente de posgrado e investigadora en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay) y como profesora del módulo Matemática y Literatura del curso *Enseñanza de la Matemática desde las Artes*.

MACARENA PERDOMO es egresada del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2019).

MARIELA REY es magíster en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA–IPN, México). Se desempeña como profesora de Didáctica de la Matemática en el CERP del Este y de Análisis I en el Profesorado Semipresencial.

SANTIAGO SUÁREZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar (2019).

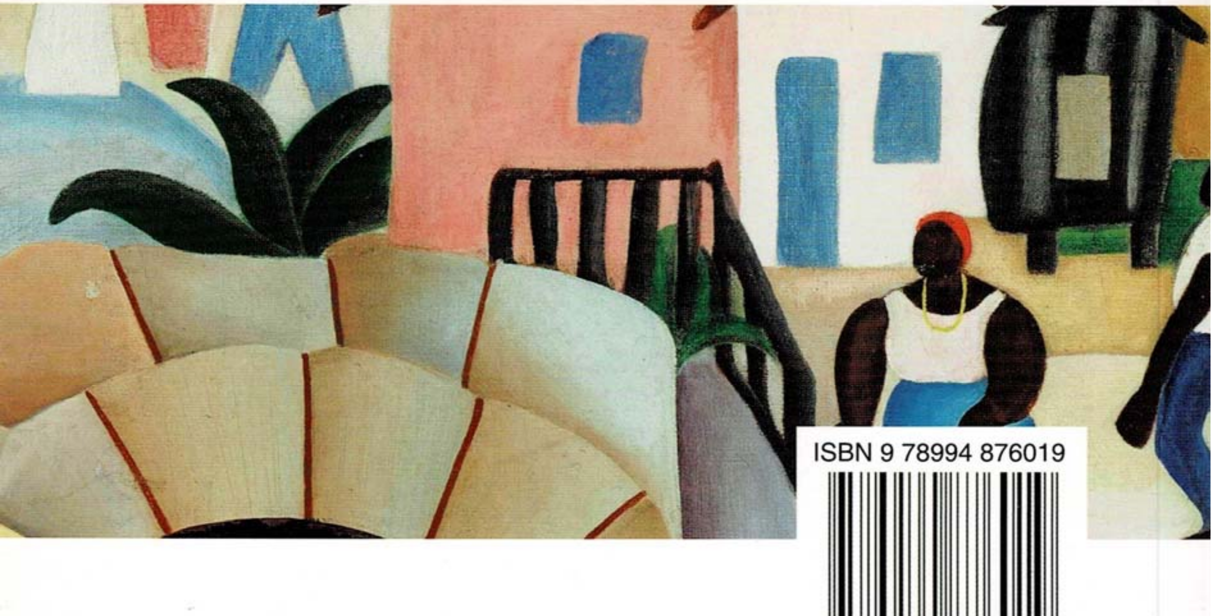
TANIA SUÁREZ es estudiante de cuarto año del Instituto de Profesores Artigas. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborados en la asignatura Didáctica III (2019).

ANA CELINA YACQUES es egresada del Centro Regional de Profesores del Litoral. El escrito de su autoría que se incluye en esta obra es creación colectiva, fruto de uno de los trabajos elaborado en el módulo Matemática y Teatro del curso *Enseñanza de la Matemática desde las Artes*.

En un edificio de la Universidad Autónoma de Baja California, México, Roberto Rossellini grita mediante enormes letras rojas: *Un espíritu libre no debe aprender como esclavo*. Es la Facultad de Artes Campus Mexicali. A unos pasos, en la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa se imparte la Licenciatura en Docencia de las Matemáticas. ¿Así o más evidente la posibilidad de *Estrechar Lazos*? ¿Será que desde las matemáticas podemos apropiarnos de lo nacido en las artes? ¿Cómo la práctica en el aula de matemáticas forma una mirada crítica sobre el cine o el teatro? La posibilidad de enriquecer la enseñanza de las matemáticas desde contextos como el arte existe y hay que discutir cómo, para qué y qué escenarios de significación se pueden proponer.

Sexto Volumen de la Serie Estrechando Lazos entre Investigación y Formación en Matemática Educativa: algunas miradas alrededor de esas y otras interrogantes. Qué bien que ya lo tengamos en nuestras manos.

Gabriela Buendía
Mexicali, BC. México
Diciembre, 2019



ISBN 9 78994 876019

9789974876019