INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Amir Hashemi et François Ollivier

Une généralisation du critère de Boulier–Buchberger pour le calcul des ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels

Volume 360 (2022), p. 255-264

<https://doi.org/10.5802/crmath.295>

Comptes Rendus
Mathématique
2022, 360, p. 255-264
https://doi.org/10.5802/crmath.295

Algèbre, Algorithmes et outils informatiques / *Algebra and computer tools*

Une généralisation du critère de Boulier–Buchberger pour le calcul des ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels

A generalization of the Boulier–Buchberger criterion for the computation of characteristic sets of differential ideals

Amir Hashemi[a] **et François Ollivier** [*, b]

[a] Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, 84156-83111, Iran

[b] CNRS, LIX École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

Courriels : Amir.Hashemi@iut.ac.ir (A. Hashemi), francois.ollivier@lix.polytechnque.fr (F. Ollivier)

Résumé. Nous généralisons l'analogue du premier critère de Buchberger, dû à Boulier *et al.*, pour détecter les réductions inutiles de S-polynômes, lors des calculs d'ensembles caractéristiques d'idéaux différentiels. La version primitive suppose des polynômes linéaires ; le résultat est ici étendu à un produit de polynômes différentiels linéaires, appliqués à un même polynôme différentiel, arbitraire.

Abstract. We generalize the analog of Buchberger's first criterion, stated by Boulier et al., for detecting useless S-polynomials reductions in the computation of characteristic sets of differential ideals. The original version assumes linear polynomials; this result is here extended to a product of linear differential polynomials depending on the same arbitrary differential polynomial.

Classification Mathématique (2020). 12H05.

Manuscrit reçu le 22 mars 2021, révisé le 1er juillet 2021 et le 26 octobre 2021, accepté le 27 octobre 2021.

* Auteur correspondant.

ISSN (electronic) : 1778-3569 https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mathematique/

Abridged English version

Boulier et al. [2, Proposition 4 p. 92] gave a differential analog of Buchberger's first criterion [3], stating that if leading monomials of two polynomials have no common factor, then their S-polynomial will be reduced to zero by these two polynomials. The original differential version requires linear polynomials, a result that was extended to products of linear factor in Hashemi and Touraji [8], without a complete proof. In this paper we prove a more general statement, where the linear factors are no more assumed to depend on the same variable, but only on the same differential polynomial z.

We consider the differential algebra $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{X\}$, where $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ and $\mathscr{F}$ is a differential field of characteristic 0, with a set of mutually commuting derivations $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. We denote by Θ the commutative monoïd generated by Δ and $\Upsilon := \Theta X$ is the set of derivatives. The leading derivative of a differential polynomial $P \in \mathscr{R}$ is written v_P and $[1, k] := \{1, \dots, k\} \subset \mathbf{N}$. Let $D \subset \Delta$, we denote by $\mathscr{F}_D$ the differential field restricted to derivations $\delta \in D$ and by $\mathscr{R}_D := \mathscr{F}_D\{x\}$ the corresponding differential ring. In the same way, Θ_D is the commutative monoïde generated by D and $\mathbf{K}_D \subset \mathscr{F}$ the field of constants for derivations in D.

We refer to Kolchin [9] and Boulier et al. [2] for basic definitions and notations of differential algebra. We denote by I_{P_i} or I_i and S_{P_i} or S_i the initial and separant of a polynomial P_i, by $I_{\mathscr{A}}$ (resp. $S_{\mathscr{A}}$) the product of initials (resp. separants) of polynomials in a set $\mathscr{A}$ and $H_{\mathscr{A}} := I_{\mathscr{A}} S_{\mathscr{A}}$. The notations $(\Sigma)_R$ or $[\Sigma]_R$ denote the algebraic or differential ideals generated by Σ in the ring R

We have then this first generalization of Boulier's theorem, using linear operators $\theta_i - L_i$, applied to a differential polynomial z, that is only required not to belong to the ground field.

Theorem 1. *Let $\Delta_i \subset \Delta$, $i = 1,2,3$, with $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ for $i \neq j$ and $P_i \in \mathscr{R}$, $i = 1,2$. Let $z \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{F}$ and let $\prec$ be an admissible order on derivatives, such that $v_{P_i} = \theta_i v_z$, with $1 \neq \theta_i \in \Theta_{\Delta_i}$. We further assume that $P_i = (\theta_i - L_i)z$, where $L_1 L_2 = L_2 L_1$ and $L_i \in \mathbf{K}_{\Delta_j}[\Delta_i \cup \Delta_3]$, where $\{i, j\} = \{1,2\}$. Under those hypotheses, using $\prec$ to define reduction, we have the following propositions.*

(i) *The polynomial* S-Pol$(P_1, P_2) = \theta_2 P_1 - \theta_1 P_2$ *is reduced to* 0 *by $\{P_1, P_2\}$, using differential standard bases reduction (cf. [4, 10]).*
(ii) *It is reduced to* 0 *using characteristic sets pseudo-reduction.*
(iii) *If z is linear, the set $\{P_1, P_2\}$ is a differential standard basis of the prime differential ideal $[P_1, P_2]$.*
(iv) *The set $\{P_1, P_2\}$ is a characteristic set of the prime differential ideal $[P_1, P_2] : S_z^\infty = [A_1, A_2] : S_A^\infty$, where A_i is the factor of P_i, the main derivative of which is $\theta_i v_z$.*

The next lemma extends the assertion (ii) and (iv) above to square-free products.

Lemma 2. *Let $P_{1,k}$, for $1 \le k \le r_1$, and $P_{2,k}$, for $1 \le k \le r_2$, be two finite families of irreducible polynomials, of degree* 1 *in their leading derivatives and such that the $P_{1,k}$ (resp. $P_{2,k}$) have the same leading derivative v_1 (resp. v_2) and do not depend on v_2 (resp. v_1). We assume that the prime differential ideals defined by those polynomials (according to Theorem 1* (iv) *are mutually different. Let $Q_i := \prod_{k=1}^{r_1} P_{1,k}$, for $i = 1,2$, and $Q := \{Q_1, Q_2\}$.*

(i) *Under those hypotheses, the following propositions are equivalent:*
   (a) *for all $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$,* S-Pol$(P_{1,j_0}, P_{2,k_0})$ *is peudo-reduced to* 0 *by $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$;*
   (b) S-Pol(Q_1, Q_2) *is pseudo-reduced to* 0 *by Q.*
(ii) *If* (ia) *or* (ib) *stands, then Q is a characteristic set and a characteristic representation of*

$$[Q] : H_Q^\infty = \bigcap_{j=1}^{r_1} \bigcap_{k=1}^{r_2} \left[P_{1,j}, P_{2,k}\right] : \left(I_{1,j} I_{2,k}\right)^\infty.$$

When powers may appear in the products, the following technical lemma is needed. For short, we use the notation $\partial_y := \partial / \partial y$.

Lemma 3. *Let $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$ be a prime ideal. We denote by $\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$ the module of Kähler differentials and by* d *the canonical derivation from $\mathscr{R}$ to $\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$.*

(i) *For all $r \in \mathbf{N}$ and $Q \in \mathscr{P}^r$, we have: $\mathrm{d}Q \in \mathscr{P}^{r-1}\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$.*

(ii) *Let $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_s\}$ be a characteristic set of a prime ideal $\mathscr{P}$, for an ordering $\prec$ and $d_i \in \mathbf{N}$, for $1 \le i \le s$, arbitrary integers.*

(a) *For all $A \in \mathscr{R}$, all $d \in \mathbf{N}$ and all $(\tau, \theta) \in \Theta^2$, we have $\partial_{\tau A}\theta A^d \in [A^{d-1}]$.*

(b) *If $Q \in \mathscr{Q} := [A_i^{d_i} | 1 \le i \le s] : H_{\mathscr{A}}^\infty$, we have:*

$$\mathrm{d}Q = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k \in \mathbf{N}} c_{i,k} \mathrm{d}A_i^{(k)}, \quad \textit{with} \quad c_{i,k} \in \left[A_\iota^{\bar{d}_\iota} \middle| 1 \le \iota \le s\right] : H_{\mathscr{A}}^\infty,$$

where $\bar{d}_\iota := d_i$ if $\iota \neq i$ and $\bar{d}_\iota := d_i - 1$ if $\iota = i$.

(c) *With the same notations as in b), we further denote by Ξ the set of derivatives appearing in all the differential polynomials A_i, for $1 \le i \le s$ and different from the leading derivatives v_{A_j}, for all $1 \le j \le s$. If the A_i are all linear in their leading derivatives v_{A_i} and if $I_i \in \mathscr{F}[\Xi]$, we have the equality*

$$\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}_0 = \left(A_i^{d_i} \middle| 1 \le i \le s\right) : I_{\mathscr{A}}^\infty, \quad \textit{where} \quad \mathscr{R}_0 := \mathscr{F}\left[\Xi, v_{A_1}, \ldots, v_{A_s}\right].$$

In this case, $\{A_i^{d_i} | 1 \le i \le s\}$ is a characteristic set of $[A_i^{d_i} | 1 \le i \le s] : H_{\mathscr{A}}^\infty$.

Using these two lemmas, we can prove the main theorem.

Theorem 4. *Let*

$$\bar{Q}_i = \prod_{k=0}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}} \quad \textit{and} \quad Q_i = \prod_{k=1}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}},$$

$i = 1, 2$, where for any couple $(P_{1,k}, P_{2,k'})$, $(k, k') \in [1, r_1] \times [1, r_2]$, the hypotheses of Theorem 1 are satisfied for the same $\theta_i z$, and $v_{P_{i,0}} \prec \theta_i v_z$, $i = 1, 2$. We further assume that the $P_{i,k}$ are mutually different. Under these hypotheses, we have the following assertions.

(i) *If $d_{i,k} = 1$, $i = 1, 2$ and $1 \le k \le r_i$, then $\bar{Q} := \{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\}$ is a characteristic set of*

$$[\bar{Q}] : S_{\bar{Q}}^\infty = [Q] : S_Q^\infty.$$

(ii) *For any $d_{i,k}$, $T := \mathrm{S\text{-}Pol}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = S_{\bar{Q}_2}\theta_2\bar{Q}_1 - S_{\bar{Q}_1}\theta_1\bar{Q}_2$ is pseudo-reduced to* 0 *by Q.*

1. Introduction

Boulier *et al.* [2, proposition 4 p. 92] ont donné un analogue différentiel du premier critère de Buchberger [3], qui affirme que si les monômes de tête de deux polynômes sont sans facteur commun, alors le S-polynôme correspondant sera réduit à zéro. Une généralisation de ce résultat au cas de produits de facteurs linéaires a été énoncée par Hashemi et Touraji [8]. Nous donnons ici une preuve complète dans le cas où ces facteurs ne dépendent pas uniquement d'une même variable, mais d'un même polynôme arbitraire z.

Dans la suite, on considère un anneau de polynômes différentiels $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{X\}$, où $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathscr{F}$ est un corps différentiel de caractéristique 0, muni d'un ensemble de dérivations $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ commutant entre elles. On note Θ le monoïde commutatif engendré par Δ et $\Upsilon := \Theta X$ l'ensemble des dérivées. La dérivée de tête d'un polynôme $P \in \mathscr{R}$ est notée v_P, tandis que S_{P_i} ou S_i et I_{P_i} ou I_i désignent respectivement le séparant et l'initial de P_i, avec $S_{\mathscr{A}} := \prod_{A \in \mathscr{A}} S_A$, $I_{\mathscr{A}} := \prod_{a \in \mathscr{A}} I_A$, $H_{\mathscr{A}} := S_{\mathscr{A}} I_{\mathscr{A}}$, et $[1, k] \subset \mathbf{N}$ est l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$. Les notations $(\Sigma)_R$ ou $[\Sigma]_R$ désignent les idéaux algébrique et différentiel engendrés par Σ dans l'anneau R.

Nous renvoyons à Kolchin [9] et Boulier *et al.* [2] pour les définitions de base en algèbre différentielle. Nous aurons aussi besoin de la définition suivante.

Définition 1. *Soit $D \subset \Delta$, on note $\mathscr{F}_D$ le corps différentiel resteint aux dérivations $\delta \in D$ et $\mathscr{R}_D = \mathscr{F}_D\{x\}$ l'anneau différentiel correspondant. On définit de même Θ_D, le monoïde commutatif engendré par D. On désigne par $\mathbf{K}_D \subset \mathscr{F}$ le corps de constantes pour les dérivations de D.*

2. Une première généralisation

On peut énoncer le théorème suivant, qui est une généralisation facile de l'analogue du premier critère de Buchberger de Boulier *et. al* [2, proposition 4 p. 92], en passant du cas où les P_i sont linéaires à celui où ils sont obtenus en appliquant un opérateur linéaire $\theta_i - L_i$ à un même polynôme différentiel z, que l'on suppose uniquement ne pas appartenir au corps de base, et qui peut donc être non linéaire. Par ailleurs, on n'a pas besoin de supposer que les opérateurs L_i sont à coefficients constants, mais seulement les hypothèses minimales pour obtenir le résultat, incluant la commutation de L_1 et L_2, toujours acquise si $\Delta_3 = \emptyset$.

Théorème 2. *Soient $\Delta_i \subset \Delta$, $i = 1,2,3$, tous deux à deux disjoints. On considère deux polynômes $P_i \in \mathscr{R}$, $i = 1,2$. Soit $z \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{F}$, et $\prec$ un ordre sur les dérivées tel que $v_{P_i} = \theta_i v_z$, avec $1 \neq \theta_i \in \Theta_{\Delta_i}$, $1 = 1,2$. On suppose en outre que $P_i = (\theta_i - L_i)z$, où $L_1L_2 = L_2L_1$ et $L_i \in \mathbf{K}_{\Delta_j}[\Delta_i \cup \Delta_3]$, pour $\{i,j\} = \{1,2\}$.*

(i) *Sous ces hypothèses, pour tout ordre sur les monômes de $\mathscr{R}$ compatible avec $\prec$, le S-polynôme*
$$\text{S-Pol}(P_1,P_2) = \theta_2 P_1 - \theta_1 P_2$$
est réduit à 0 par $\{P_1,P_2\}$ au sens des bases standards différentielles (cf. [4, 10]).

(ii) *Il est réduit à 0 au sens des ensembles caractéristiques.*

(iii) *Si z est linéaire, l'ensemble $\{P_1,P_2\}$ est une base standard de l'idéal différentiel premier $[P_1,P_2]$.*

(iv) *L'ensemble $\{P_1,P_2\}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel premier $[P_1,P_2] : S_z^\infty = [A_1,A_2] : S_A^\infty$, où A_i désigne le facteur irréductible de P_i dont la dérivée dominante est $\theta_i v_z$.*

Démonstration. (i) Ce polynôme est égal à $(\theta_2 L_1 - \theta_1 L_2)z = (L_1\theta_2 - L_2\theta_1)z$, car, avec nos hypothèses, θ_1 et L_2, θ_2 et L_1 commutent. La réduction du monôme de tête de $L_1\theta_2$ par P_2 remplace $\theta_2 z$ par $L_2 z$ et inversement, en permutant les indices. On n'a donc pas besoin de multiplier par S_z ; c'est une réduction au sens des bases standards. On obtient donc $(L_1L_2 - L_2L_1)z = 0$, puisque L_1 et L_2 commutent.

(ii) Est une conséquence directe de (i).

(iii) Aussi, puisque le seul S-polynôme possible dans le cas linéaire est réduit à 0 (*cf.* [10, théorème 5]). La linéarité entraîne la primalité de l'idéal.

(iv) Aussi, en utilisant le lemme de Rosenfeld [2, théorème 3] et en remarquant que $I_{P_1} = S_{P_1} = I_{P_2} = S_{P_2} = S_z$. On peut alors évidement remplacer P_i par A_i puisque les deux diffèrent par un facteur qui ne contient pas la dérivée dominante, et divise donc le séparant. Comme les P_i sont de degré 1 en leurs dérivées dominantes, les A_i sont absolument irréductibles, ce qui entraîne la primalité de $(A) : S_A^\infty$ et de l'idéal différentiel $[A] : S_A^\infty$. □

Exemple 3. On considère le corps $\mathscr{F} := \mathbf{Q}(y_1,y_2,y_3)$, muni des dérivations $\delta_i := \partial/\partial y_i$, pour $i = 1,2,3$. Soient $\Delta_1 := \{\delta_1\}$, $\Delta_2 := \{\delta_2\}$, $\Delta_3 := \{\delta_3\}$, $\theta_1 = \delta_1^3$, $\theta_2 = \delta_2^3$, $L_1 = (\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3)$ et $L_2 = (\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3)$. On se place sur $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{x\}$, muni de l'ordre sur les dérivées qui utilise d'abord l'ordre total de dérivation, puis l'ordre lexicographique avec $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$.

En posant $z = x$, on a $P_1 = \delta_1^3 x + \delta_1\delta_3 x - y_3\delta_1 x - y_1\delta_3 x + y_1 y_3 x$ et $P_2 = \delta_2^3 x + \delta_2\delta_3 x - y_3\delta_2 x - y_2\delta_3 x + y_2 y_3 x$. On a alors
$$\delta_2^3 P_1 - \delta_1^3 P_2 = (\delta_1 - y_1)(\delta_3 - y_3)\delta_2^3 x - (\delta_2 - y_2)(\delta_3 - y_3)\delta_1^3 x,$$

qui est réduit par $\{P_1, P_2\}$ à

$$\left(\delta_1 - y_1\right)\left(\delta_3 - y_3\right)\left(\delta_2 - y_2\right)\left(\delta_3 - y_3\right)x - \left(\delta_2 - y_2\right)\left(\delta_3 - y_3\right)\left(\delta_1 - y_1\right)\left(\delta_3 - y_3\right)x = 0.$$

Dans ce cas, $\{P_1, P_2\}$ est un ensemble caractéristique et aussi une base standard de l'idéal qu'il engendre.

Le calcul est semblable en prenant, *e.g.* $z = x^3$, mais il devient indispensable de multiplier par le séparant $3x^2$ de x^3, qui est aussi le séparant et l'initial de $\delta_i x^3$ et P_i, pour $i = 1,2$, afin d'effectuer la réduction.

3. Le cas des produits

On peut énoncer le lemme général suivant, qui est essentiellement suffisant pour établir notre théorème principal 8 dans le cas de produits sans carrés, c'est-à-dire le (i) de ce théorème.

Lemme 4. *Soient $P_{1,k}$, pour tout $1 \le k \le r_1$ et $P_{2,k}$, pour tout $1 \le k \le r_2$ deux familles finies de polynômes irréductibles et de degré 1 en leurs dérivées de tête. Les $P_{1,k}$ (resp. $P_{2,k}$) ont la même dérivée de tête v_1 (resp. v_2) et ne dépendent pas de v_2 (resp. v_1). On suppose que les idéaux différentiels premiers dont ces polynômes sont les ensembles caractéristiques (par le théorème 2* (iv) *sont tous différents, ce qui revient à dire que leurs facteurs irréductibles contenant la dérivée de tête sont différents. On note $Q_i := \prod_{k=1}^{r_1} P_{1,k}$, pour $i = 1,2$ et $Q := \{Q_1, Q_2\}$.*

- (i) *Sous ces hypothèses, les propositions suivantes sont équivalentes :*
  - (a) *pour tout $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$,* S-Pol$(P_{1,j_0}, P_{2,k_0})$ *est pseudo-réduit à* 0 *par* $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$ *;*
  - (b) S-Pol(Q_1, Q_2) *est pseudo-réduit à* 0 *par* $\{Q_1, Q_2\}$.
- (ii) *Si* (ia) *ou* (ib) *est vérifiée, alors Q est un ensemble caractéristique et une représentation caractéristique de*

$$[Q] : H_Q^2 = \bigcap_{j=1}^{r_1} \bigcap_{k=1}^{r_2} \left[P_{1,j}, P_{2,k}\right] : \left(I_{1,j} I_{2,k}\right)^{\infty}. \tag{1}$$

Démonstration. (ia)$\Longrightarrow$(ib) — Pour tout couple $(i_0, j_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$, d'après [2, théorème 3], $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal $[P_{1,j_0}, P_{2,k_0}] : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^{\infty}$, puisque les $P_{i,k}$ sont de degré 1 en v_i, ce qui implique leurs séparants sont égaux à leurs initiaux et que nos hypothèses impliquent aussi que $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal $(P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^{\infty}$. L'idéal $[P_{1,j_0}, P_{2,k_0}]$ contient $[Q]$.

Donc, si le reste R de la pseudo-réduction de S-Pol(Q_1, Q_2) par Q est non nul, il ne dépend d'aucune dérivée stricte de v_1 ou de v_2 et est alors partiellement réduit par rapport à $\{P_{1,j_0}, P_{2,k_0}\}$ pour tout $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$. Toujours d'après [2, théorème 3], il appartient donc à l'idéal algébrique $(P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : (I_{1,j_0} I_{2,k_0})^{\infty}$ pour tout $(j_0, k_0) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$.

Soit Ξ l'ensemble des dérivées présentes dans les polynômes $P_{i,k}$, pour $i = 1,2$ et $1 \le k \le r_i$ et différentes des dérivées de tête v_1 et v_2. Soit $\mathcal{K} := \mathscr{F}(\Xi)$. Les idéaux $(P_{1,j}, P_{2,k})$ pour tous les couples $(j,k) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$ définissent $r_1 \times r_2$ points distincts $(\eta_{1,j}, \eta_{2,k})$ dans l'anneau $\mathcal{K}[v_1, v_2]$. Le reste de la pseudo-réduction de S-Pol(Q_1, Q_2) par Q est de degré en v_1 strictement inférieur à r_1. S'il est non nul, on peut donc trouver j_0 tel que son évaluation à la valeur η_{1,j_0} de v_1 définie par P_{1,j_0} soit un polynôme non trivial de $\mathcal{K}[v_2]$ de degré strictement inférieur à r_2. Il existe donc k_0 tel qu'il ne s'annule pas à la valeur η_{2,k_0} de v_2 définie par P_{2,k_0}. Ceci implique que S-Pol(Q_1, Q_2) n'appartient pas à (P_{1,j_0}, P_{2,k_0}) : une contradiction. Ce S-polynôme est donc bien réduit à 0 par Q.

(ib)$\Longrightarrow$(ia) — Si $T :=$ S-Pol(P_{1,i_0}, P_{2,j_0}) n'est pas réduit à 0 par $\{P_{1,i_0}, P_{2,j_0}\}$, alors son reste R appartient à $\mathcal{K}[v_1, v_2]$ et donc également à $(Q) : S_Q^{\infty}$ par [2, théorème 3]. Il ne s'annule pas au point $(\eta_{1,i_0}, \eta_{2,j_0})$ défini par l'idéal $(P_{1,i_0}, P_{2,j_0})_{\mathcal{K}[v]}$. Par ailleurs, $[P_{1,i_0}, P_{2,j_0}] = (Q)$:

$(\prod_{i\neq i_0} P_{1,i}\prod_{j\neq j_0} P_{2,j})^{\infty}$, donc il existe $(r_1, r_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que $R(\prod_{i\neq i_0} P_{1,i}\prod_{j\neq j_0} P_{2,j})^{r_1} S_Q^{r_2} \in (Q)$. L'assertion (ib) implique que tous les polynômes de (Q) sont réduits à 0 par l'ensemble Q, donc il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que

$$H_Q^s R\left(\prod_{i\neq i_0} P_{1,i}\prod_{j\neq j_0} P_{2,j}\right)^{r_1} \in (Q)$$

et ainsi

$$\left[H_Q^s R\left(\prod_{i\neq i_0} P_{1,i}\prod_{j\neq j_0} P_{2,j}\right)^{r_1}\right]\left(\eta_{1,i_0},\eta_{2,j_0}\right)$$

est nul, ce qui est impossible, puisque les idéaux premiers définis par les $P_{i,k}$ sont tous différents, ce qui implique $H_Q \neq 0 \in \mathscr{K}$ et que par ailleurs

$$R\left(\eta_{1,i_0},\eta_{2,j_0}\right) \neq 0 \text{ et } \left(\prod_{i\neq i_0} P_{1,i}\prod_{j\neq j_0} P_{2,j}\right)\left(\eta_{1,i_0},\eta_{2,j_0}\right) \neq 0.$$

(ii) Comme Q est autoréduit, il suffit de s'assurer que tout polynôme appartient à $(Q) : H_Q^{\infty}$ ssi il est réduit à 0 par Q. Le lemme de Rosenfeld [2, théorème 3] permet de se ramener au cas où un tel polynôme est partiellement réduit. Comme les initiaux $I_{Q_i} = \prod_{k=1}^{r_i} I_{i,k}$ appartiennent à $K[\Xi]$, ceci revient à montrer que Q est une base standard de $(Q)_{\mathscr{K}[v]} : S_Q^{\infty}$. C'est bien une base standard de $[Q]_{\mathscr{K}[v_1,v_2]}$, en vertu du premier critère de Buchberger [3], puisque les monômes de tête sont étrangers. Par ailleurs, $Q_{\mathscr{K}[v]} = Q_{\mathscr{K}[v]} : S_Q^{\infty}$. En effet, puisque v_i n'intervient pas dans Q_j, pour $\{i,j\} = \{1,2\}$, l'ensemble des zéro de Q est de la forme $(\eta_{1,k_1},\eta_{2,k_2})$, pour $(k_1,k_2) \in [1,r_1]\times[1,r_2]$. Comme les facteurs des $P_{i,k}$ contenant v_i sont tous différents par hypothèse, Q_i et S_{Q_i} sont sans facteur commun, pour $i = 1,2$ et donc $(Q_i)_{\mathscr{K}[v]} : S_i^{\infty} = (Q_i)$. On a ainsi

$$(Q)_{\mathscr{K}[v]} : S_Q^{\infty} = (Q_1)_{\mathscr{K}[v]} : S_1^{\infty} + (Q_2)_{\mathscr{K}[v]} : S_2^{\infty} = (Q_1)_{\mathscr{K}[v]} + (Q_2)_{\mathscr{K}[v]} = (Q)_{\mathscr{K}[v]}.$$

Par le relèvement du lemme de Lazard [2, théorème 4], l'idéal différentiel $[Q] : H_Q^{\infty}$ est radical. Ses composantes premières sont les idéaux premiers $[P_{1,j},P_{2,k}] : (I_{1,j}I_{2,k})^{\infty}$, pour tous les $(j,k) \in [1,r_1]\times[1,r_2]$, puisque les facteurs des $P_{i,k}$ contenant leur dérivées de tête sont les seuls facteurs de Q_i qui ne divisent pas S_Q. Ceci prouve l'équation (1). □

Exemple 5. Soit $\mathscr{F} := \mathbf{Q}(\omega)$ avec $\omega^3 = 1$, muni de dérivations δ_i, $1 = 1,2,3$ qui commutent. Soit $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{x\}$, on définit $P_{i,k} := \delta_i x + \omega^k \delta_3 x$, pour $i = 1,2$ et $1 \leq k \leq 3$. Ainsi, si

$$Q_1 := \prod_{k=1}^{3} P_{1,k} = (\delta_1 x)^3 + (\delta_3 x)^3 \quad \text{et} \quad Q_2 := \prod_{k=1}^{3} P_{1,k} = (\delta_2 x)^3 + (\delta_3 x)^3,$$

alors le S-polynôme de Q_1 et Q_2 est

$$3(\delta_2 x)^2\delta_2 Q_1 - 3(\delta_1 x)^2\delta_1 Q_2 = 9(\delta_3 x)^2\left((\delta_2 x)^2\delta_2\delta_3 x - (\delta_1 x)^2\delta_1\delta_3 x\right),$$

qui est pseudo-réduit à 0 par Q, en utilisant le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 3.

Dans le cas où des puissances strictes interviennent dans les produits, nous auront besoin en complément du lemme technique qui suit.

Lemme 6. *Soit $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$ un idéal premier. On note $\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$ le module des différentielles de Kähler et* d *la dérivation canonique de $\mathscr{R}$ dans $\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$.*

(i) *Pour tout $r \in \mathbf{N}$ et $Q \in \mathscr{P}^r$, on a : $\mathrm{d}Q \in \mathscr{P}^{r-1}\Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}$.*

(ii) *Soient $\mathscr{A} = \{A_1,\ldots,A_s\}$ un ensemble caractéristique de $\mathscr{P}$ pour un ordre $\prec$ et $d_i \in \mathbf{N}$, pour $1 \leq i \leq s$, des entiers quelconques.*

(a) *Pour tout $A \in \mathscr{R}$, tout $d \in \mathbf{N}$ et tout $(\tau,\theta) \in \Theta^2$, on a $\partial_{\tau A}\theta A^d \in [A^{d-1}]$.*

(b) *Si* $Q \in \mathscr{Q} := [A_i^{d_i} | 1 \le i \le s] : H_{\mathscr{A}}^{\infty}$*, on a :*

$$\mathrm{d}Q = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k \in \mathbf{N}} c_{i,k} \mathrm{d}A_i^{(k)}, \quad \textit{avec} \quad c_{i,k} \in \left[A_\iota^{\bar{d}_\iota} \middle| 1 \le \iota \le s \right] : H_{\mathscr{A}}^{\infty},$$

où $\bar{d}_\iota := d_i$ *si* $\iota \neq i$ *et* $\bar{d}_\iota := d_i - 1$ *si* $\iota = i$*.*

(c) *Avec les même notations qu'en* (iib)*, soit* Ξ *est l'ensemble des dérivées apparaissant dans les* A_i *et différentes des dérivées de tête* v_{A_i}*. Si les* A_i *sont tous linéaires en leur dérivée de tête* v_i *et si* $I_i \in \mathscr{F}[\Xi]$*, on a l'égalité* $\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}_0 = (A_i^{d_i} | 1 \le i \le s) : I_{\mathscr{A}}^{\infty}$*, avec* $\mathscr{R}_0 := \mathscr{F}[\Xi, v_{A_1}, \ldots, v_{A_s}]$*. Dans ce cas,* $\{A_i^{d_i} | 1 \le i \le s\}$ *est un ensemble charactéristique de* $(A_i^{d_i} | 1 \le i \le s) : I_{\mathscr{A}}^{\infty}$*.*

Démonstration. (i) Par définition, tout élément Q de $\mathscr{P}^r$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire

$$Q = \sum_{j=1}^{p} L_j m_j \left(B_1, \ldots, B_q\right)$$

de p monômes de degré r dépendant d'une famille B_i de q éléments de $\mathscr{P}$. On a alors

$$\mathrm{d}Q = \sum_{j=1}^{p} \left(m_j \left(B_1, \ldots, B_q\right) \mathrm{d}L_j \left(\in \mathscr{P}^r \Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}\right) + L_j \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial m_i}{\partial B_i} \left(B_1, \ldots, B_q\right) \mathrm{d}B_i \left(\in \mathscr{P}^{r-1} \Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}\right) \right).$$

(iia) On procède par récurence sur l'ordre de θ. S'il et nul, c'est-à-dire si $\theta = 1$, le résultat est immédiat. Sinon, $\theta = \delta_{i_0} \widehat{\theta}$, avec $\operatorname{ord} \widehat{\theta} = \operatorname{ord} \theta - 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $\vartheta \in \Theta$ d'ordre strictement inférieur à $\operatorname{ord} \theta$.

Pour tout polynôme $R \in \mathbf{Q}_\Delta\{A\}$, on a :

$$\delta_{i_0} R = \sum_{\bar{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \bar{\theta} A \frac{\partial}{\partial \bar{\theta} A} R.$$

Donc, si δ_0 ne divise pas τ, on a

$$\frac{\partial \theta A^d}{\partial \tau A} = \frac{\partial}{\partial \tau A} \sum_{\bar{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \bar{\theta} A \frac{\partial}{\partial \bar{\theta} A} \widehat{\theta} A^d = \delta_{i_0} \frac{\partial \widehat{\theta} A^d}{\partial \tau A}.$$

Sinon, on a $\tau = \delta_{i_0} \widehat{\tau}$ et on peut écrire :

$$\frac{\partial \theta A^d}{\partial \tau A} = \frac{\partial}{\partial \tau A} \sum_{\bar{\theta} \in \Theta} \delta_{i_0} \bar{\theta} A \frac{\partial}{\partial \bar{\theta} A} \widehat{\theta} A^d = \delta_{i_0} \frac{\partial \widehat{\theta} A^d}{\partial \tau A} + \frac{\partial \widehat{\theta} A^d}{\partial \widehat{\tau} A},$$

où $\partial \widehat{\theta} A / \partial \tau A$ et $\partial \widehat{\theta} A / \partial \widehat{\tau} A$ appartiennent à $[A^{d-1}]$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, ce qui implique le résultat.

(iib) Si $Q \in \mathscr{Q}$, alors il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que

$$I_{\mathscr{A}}^h Q = \sum_{i=1}^{s} \sum_{\theta \in \Theta} L_{i,\theta} \theta A_i^{d_i},$$

donc

$$\mathrm{d}\left(I_{\mathscr{A}}^h\right) Q \left(\in \mathscr{Q} \Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}\right) + I_{\mathscr{A}}^h \mathrm{d}Q =$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{\theta \in \Theta} \theta A_\iota^{d_\iota} \mathrm{d}L_{\iota,\kappa} \left(\in \mathscr{Q} \Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}}\right) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\tau \in \Theta} L_{i,\theta} \frac{\partial \theta A_i^{d_i}}{\partial \tau A_i} \mathrm{d}\tau A_i \left(\in \left[A_i^{d_i - 1}\right] \Omega_{\mathscr{R}/\mathscr{F}} \ \text{par (iia)}\right),$$

d'où le résultat.

(iic) L'inclusion $\supset$ est immédiate. Pour $\subset$, on procède par récurrence sur $d \in (\mathbf{N}^*)^s$, en utilisant l'ordre sur $(\mathbf{N}^*)^s$ défini par $\widehat{d} \le \widetilde{d}$ si $\widehat{d}_i \le \widetilde{d}_i$ pour $1 \le i \le s$. Pour $(d_1, \ldots, d_s) = (1, \ldots, 1)$, le résultat est vrai, puisque $\mathscr{A}$ est un ensemble caractéristique de $\mathscr{A}$. Soit $Q \in \mathscr{Q} \cap \mathscr{R}_0$, nous allons prouver que $Q \in (A_i^{d_i} | 1 \le i \le s)_{\mathscr{R}_0}$, en supposant le résultat vrai pour tout $\widehat{d} < d$.

D'après le premier critère de Buchberger [3], l'ensemble $\{A_i^{d_1}, \ldots, A_s^{d_s}\}$ est une base standard algébrique de l'idéal qu'il engendre, dans l'algèbre $\mathscr{F}(\Xi)[v_{A_1}, \ldots, v_{A_s}]$. C'est donc aussi un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre dans $\mathscr{F}[\Xi, v_{A_1}, \ldots, v_{A_s}]$.

Si $Q \notin (A_i^{d_i} | 1 \le i \le s)_{\mathscr{R}_0}$, qu'il est non nul et irréductible pour la réduction par l'ensemble caractéristique algébrique $\{A_1^{d_1}, \ldots, A_s^{d_s}\}$, le degré de Q en v_{A_i} est strictement inférieur à d_i.

Comme $Q \in (\mathscr{A}) : H_{\mathscr{A}}^{\infty}$, Q est réductible par $\mathscr{A}$ et dépend donc d'une des dérivées de tête $v_{A_{i_0}}$; nécessairement, on a $d_{i_0} > 1$, sinon Q serait réductible par

$$A_{i_0}^{d_{i_0}}.$$

Par (iib), le coefficient de $\mathrm{d}A_{i_0}$ dans $\mathrm{d}Q$ appartient à

$$\left[A_i^{\hat{d}_i}\right] : H_{\mathscr{A}}^{\infty}, \quad \text{avec} \quad \widehat{d}_i = d_i \text{ si } i \neq i_0 \text{ et } \widehat{d}_{i_0} = d_{i_0} - 1.$$

Comme le degré de Q en v_i est au plus $d_i - 1$, ce coefficient qui est dans $\mathscr{R}_0$ est de degré en v_i au plus $\widehat{d}_{i_0} - 1$ et irréductible par $\{A_i^{\hat{d}_i} | 1 \le i \le s\}$ ce qui contredit, s'il est non nul, l'hypothèse de récurrence.

Tout élément de $\mathscr{Q}$ est donc réduit à 0 par $\{A_i^{\hat{d}_i} | 1 \le i \le s\}$, qui est autoréduit et constitue donc un ensemble charactéristique de $\mathscr{Q}$. □

Exemple 7. On prend $\mathscr{F} := \mathbf{Q}$, muni de 3 dérivations δ_i, $i = 1,2,3$ et $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{x\}$, avec le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 3. On prend $\mathscr{P} := [\delta_1 x, \delta_2 x, \delta_3 x]$. Alors, $\mathrm{d}(\delta_1 x \delta_2 x \delta_3 x (\in \mathscr{P}^3)) = \delta_2 x \delta_3 x \delta_1 \mathrm{d}x + \delta_1 x \delta_3 x \delta_2 \mathrm{d}x + \delta_1 x \delta_2 x \delta_3 \mathrm{d}x \in \mathscr{P}^2 \mathscr{M}$. De même, $\mathrm{d}[(\delta_1 x)^2 + (\delta_2 x)^3 + (\delta_3 x)^4] = 2\delta_1 x \delta_1 \mathrm{d}x (\in [\delta_1 x]\mathscr{M}) + 3(\delta_2 x)^2 \delta_2 \mathrm{d}x (\in [\delta_2 x]^2 \mathscr{M}) + 4(\delta_3 x)^3 \delta_3 \mathrm{d}x (\in [\delta_3 x]^3 \mathscr{M})$ et $\mathscr{B} := \{(\delta_1 x)^2, (\delta_2 x)^3, (\delta_3 x)^4\}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre, mais pas une représentation caractéristique, puisque $\delta_1^2 x$ est réduit à 0 par $\mathscr{B}$ sans appartenir à $\mathscr{B}$.

On peut maintenant énoncer cette nouvelle version du théorème de Hashemi et Touraji [8]. La différence essentielle par rapport à la version originale, outre l'utilisation d'une version un peu étendue du critère de Boulier, est que l'on concentre tous les facteurs de Q_i dont la dérivée dominante est strictement inférieure à la dérivée dominante commune aux facteurs linéaires homogènes en z, en un facteur unique $Q_{i,0}$, sur lequel il n'est pas fait d'autres hypothèses. On notera que c'est un facteur du séparant S_{Q_i}, qui est implicitement supposé non nul dans (i), ce qui exclut les zéros de ce terme.

Théorème 8. *On pose*

$$\bar{Q}_i = \prod_{k=0}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}} \quad et \quad Q_i := \prod_{k=1}^{r_i} P_{i,k}^{d_{i,k}}, i = 1,2,$$

où pour tout couple (P_{1,k_1}, P_{2,k_2}), $(k_1,k_2) \in [1,r_1] \times [1,r_2]$, *les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites pour un même* $\theta_i z$, *et* $v_{P_{i,0}} \prec \theta_i v_z$, $i = 1,2$. *On suppose en outre que les* $P_{i,k}$ *sont tous différents.*

(i) *Sous ces hypothèses, et si* $d_{i,k} = 1$, *pour* $i = 1,2$ *et* $1 \le k \le r_i$, *alors* $\bar{Q} := \{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\}$ *est un ensemble caractéristique et une représentation caractéristique de* $[\bar{Q}] : S_{\bar{Q}}^{\infty} = [Q] : S_Q^{\infty}$.

(ii) *Sous ces hypothèses, et pour des* $d_{i,k}$ *quelconques,* $T := \text{S-Pol}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = S_{\bar{Q}_2}\theta_2\bar{Q}_1 - S_{\bar{Q}_1}\theta_1\bar{Q}_2$, *est pseudo-réduit à* 0 *par* $\bar{Q}$.

Démonstration. (i) D'après le théorème 2, tous les S-polynômes pour tous les couples sont réduits à 0 et d'après le lem. 4, $\{Q_1, Q_2\}$ est un ensemble caractéristique de $[Q_1, Q_2] : S_Q^{\infty}$. Donc, les $\bar{Q}_i$ qui sont des multiples et ont les mêmes dérivées de têtes respectives que les Q_i, forment un ensemble caractéristique du même idéal (et réduisent donc à 0 leur S-polynôme). On a alors $S_{\bar{Q}} = P_{1,0}P_{2,0}S_Q$ et $I_{\bar{Q}} = P_{1,0}P_{2,0}I_Q$, donc $[\bar{Q}] : H_{\bar{Q}}^{\infty} = [Q] : H_Q^{\infty} = [Q] : S_Q^{\infty}$.

(ii) Si $T \in [Q_1, Q_2]$ contient une dérivée stricte de $\theta_i v_i$, pour $i = 1$ ou $i = 2$, alors T est réductible par $\{Q_1, Q_2\}$. Sinon, pour tout couple $(k_1, k_2) \in [1, r_1] \times [1, r_2]$, le lemme 6 (iic) implique

$$T \in \left(P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}}\right) : S_z^\infty,$$

puisque $I_{P_{i,k}}$ est égal à S_z. On a donc

$$T \in \bigcap_{(k_1,k_2)\in[1,r_1]\times[1,r_2]} \left(P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}}\right) : S_z^\infty.$$

Montrons que T est pseudo-réduit à 0 par $\{Q_1, Q_2\}$, ce qui revient à montrer qu'il est réduit à 0, au sens des bases standard, par les Q_i, considérés comme des polynômes de $\mathscr{F}(\Xi)[v_1, v_2]$, où Ξ est défini comme au lemme 6 (iic). Dans cet anneau, les éléments R de l'idéal primaire $(P_{1,k_1}^{d_{1,k_1}}, P_{2,k_2}^{d_{2,k_2}})$ sont tels que, pour tout couple d'entiers (α_1, α_2), tels que

$$0 \le \alpha_i < d_{i,k_i}, \partial_{v_1}^{\alpha_1}\partial_{v_2}^{\alpha_2} R$$

appartienne à l'idéal premier $(P_{1,k_1}, P_{2,k_2}) : S_z^\infty$, qui définit le point $(\eta_{1,k_1}, \eta_{2,k_2})$[1]. Si $R \in [Q_1, Q_2]$ est le reste de la réduction de T et s'il est non nul, c'est un polynôme de degré β_i en v_i strictement inférieur à $\sum_{i=1}^{r_i} d_{i,k_i}$, pour $i = 1$ et $i = 2$. On peut l'écrire comme un polynôme en v_1 avec des coefficients polynômes en v_2, c'est-à-dire : $R = \sum_{i=0}^{\beta_1} c_i(v_2) v_1^i$. Comme R est non nul, le coefficient c_{β_1} est un polynôme non nul de degré strictement inférieur à $\sum_{i=1}^{r_2} d_{2,k_2}$, qui ne peut donc s'annuler en les r_2 points η_{2,k_2}, pour $1 \le k_2 \le r_2$, avec mutiplicité d_{2,k_2}. Soit k_0 tel que la mutiplicité en η_{2,k_0} soit $\gamma < d_{2,k_0}$. Alors $\partial_{v_2}^\gamma c_\beta$ est un élément non nul du corps $\mathscr{F}(\Xi)$. On doit avoir $(\partial_{v_1}^{\alpha_1}\partial_{v_2}^\gamma R)(\eta_{1,k_1}, \eta_{2,k_0}) = 0$, pour tout $1 \le k_1 \le r_1$ et tout $0 \le \alpha_1 < d_{1,k_1}$, ce qui est impossible, puisque l'ordre de R en v_1 est strictement inférieur à $\sum_{i=1}^{r_1} d_{1,k_1}$. On en déduit que R est nul, ce qui achève la preuve, puisque réduire par $\bar{Q}$ ou par Q est équivalent, à une multiplication près par une puissance de $P_{1,0}P_{2,0}$. □

Exemple 9. On prend le corps $\mathscr{F} := \mathbf{Q}$, équipé de trois dérivations δ_1, δ_2, δ_3 et $\mathscr{R} := \mathscr{F}\{x\}$ avec le même ordre sur les dérivées qu'à l'exemple 3.

Soient $Q_i := \prod_{k=1}^{r_i} (\delta_1 x - a_{i,k}\delta_3 x)$, pour $i = 1, 2$, avec $a_{i,k} \in \mathbf{Q}$, $1 \le k \le r_i$. Alors, $\{Q_1, Q_2\}$ réduit à 0 le S-polynôme de Q_1 et Q_2 et est un ensemble caractéristique de l'idéal qu'il engendre. Ceci demeure vrai dans les cas où apparaissent des facteurs multiples, c'est-à-dire quand certains coefficients $a_{i,k}$ sont égaux entre eux.

On peut multiplier Q_i par n'importe quel facteur $P_{i,0}$, dont la dérivée de tête est inférieure à $\delta_1 x$ et $\delta_2 x$, par exemple $\delta_3 x$. Un tel facteur ne fait que contribuer aux initiaux et aux séparant lors des réductions.

4. Conclusion

Du point de vue de la complexité algorithmique, le nombre de monômes obtenus en développant les produits rend génériquement la taille de leur représentation dense supérieure à celle de tous les idéaux premiers obtenus en factorisant et la version avec carrés n'est pas utile pour l'algorithme Rosenfeld–Gröbner [2].

Ces constats ne doivent pas occulter l'intérêt théorique et pratique qu'il peut y avoir à considérer des produits et des puissances d'idéaux en algèbre différentielle et donc à renforcer l'outillage théorique disponible pour leur étude. On peut par exemple mettre en œuvre des formes de remontées de Newton–Hensel, ce qui a déjà été mis à profit pour calculer des solutions en séries [1]. La méthode pourrait s'étendre pour permettre le calcul d'un ensemble caractéristique

[1] C'est un cas particulier simple de la description d'un idéal algébrique primaire par un système d'opérateurs différentiels linéaires. Voir Cid-Ruiz *et al.* [5] pour plus de détails et de références.

pour un système dont une solution régulière est connue, ou aussi une représentation des solutions utilisant la représentation compacte des polynômes différentiels comme des programmes d'évaluation, dans l'esprit de l'algorithme de Kronecker [6, 7].

Références

[1] A. Bostan, F. Ollivier, F. Chyzak, B. Salvy, É. Schost, A. Sedoglavic, « Fast computation of power series solutions of systems of differential equations », in *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms, SODA 2007, New Orleans, LA, USA, January 7–9, 2007*, Association for Computing Machinery ; Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007, p. 1012-1021.

[2] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, M. Petitot, « Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals », *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* **20** (2009), nº 1, p. 73-121.

[3] B. Buchberger, « A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases », in *Symbolic and Algebraic Computation. EUROSAM 1979* (E. Ng, éd.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 72, Springer, 1979, p. 3-21.

[4] G. Carrà-Ferro, « Gröbner bases and differential algebra », in *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Menorca, 1987* (L. Huguet, A. Poli, éds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 356, Springer, 1987, p. 129-140.

[5] Y. Cid-Ruiz, R. Homs, B. Sturmfels, « Primary Ideals and Their Differential Equations », *Found. Comput. Math.* **21** (2021), nº 5, p. 1363-1399.

[6] L. D'Alfonso, G. Jeronimo, F. Ollivier, A. Sedoglavic, P. Solernó, « A geometric index reduction method for implicit systems of differential algebraic equations », *J. Symb. Comput.* **46** (2011), nº 10, p. 1114-1138.

[7] M. Giusti, G. Lecerf, B. Salvy, « A Gröbner free alternative for polynomial system solving », *J. Complexity* **17** (2001), nº 1, p. 154-211.

[8] A. Hashemi, Z. Touraji, « An Improvement of Rosenfeld–Gröbner Algorithm », in *Mathematical Software – ICMS 2014* (H. Yong, C. Yap, éds.), Lect. Notes in Comp. Sci., vol. 8592, Springer, 2014, p. 466-471.

[9] E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 54, Academic Press Inc., 1973.

[10] F. Ollivier, « Standard bases of differential ideals », in *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes* (S. Sakata, éd.), Lect. Notes in Comp. Sci., vol. 508, Springer, 1990, p. 304-321.