CADERNOS DO IME – Série Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
ISSN on-line 2317-4536 / ISSN impresso 1413-9022 - v.52, p.1-23, 2022
DOI: 10.12957/cadest.2021.71258

UM MÉTODO UNIVERSAL PARA SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Lizeth Jacquelin Rodriguez Huarsaya
IAG Escola de Negócios, Departamento de Administração, PUC-Rio
lizeth.rodriguez.h@gmail.com

Luiz Eduardo Teixeira Brandão
IAG Escola de Negócios, Departamento de Administração, PUC – Rio
brandao@iag.puc-rio.br

Edison Americo Huarsaya Tito
IAG Escola de Negócios, Departamento de Administração, PUC – Rio
edison.tito@gmail.com

Javier Gutiérrez Castro
Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC
javier.gutierrez@ufsc.br

Resumo

Harry Markowitz estabeleceu os fundamentos da teoria moderna de carteiras sugerindo que as decisões de investimento devem ser tomadas com base no binômio de risco-retorno. Esta teoria tem como premissa fundamental que a alocação ótima de ativos é uma função dos primeiros momentos (média-variância) da distribuição dos retornos, sendo a distribuição gaussiana o modelo probabilístico dos retornos mais utilizado. Entretanto, na literatura de finanças, pesquisas empíricas apontam que os retornos dos ativos geralmente possuem distribuições não-gaussianas. Este trabalho propõe uma generalização da teoria moderna de carteiras que considera todos os momentos da distribuição dos retornos dos ativos. Esta generalização permite obter um método universal para a seleção de ativos com retornos de qualquer natureza probabilística.

Palavras-chave: *Medida Ômega* (Ω)*, Índice de Sharpe, Ativos de Renda Variável, Alocação de Capital, Otimização de Portfólio.*

1. Introdução

1.1 Motivação

Empiricamente, é bem conhecido o fato de que os investidores desejam obter a maior rentabilidade dos seus investimentos correndo o mínimo de risco possível. Markowitz (1952), estabeleceu os fundamentos da teoria moderna de carteiras sugerindo que as decisões de investimento devem ser tomadas com base no binômio de risco-retorno. A teoria moderna de carteiras estabelece que a alocação ótima de ativos é uma função da média-variância da distribuição dos retornos. Cabe ressaltar que o artigo original de Markowitz (1952) não faz qualquer restrição quanto à forma da distribuição de probabilidade dos retornos, apenas, estabelece que a distribuição seja definida pela média-variância. Por esta razão, em muitos artigos acadêmicos, esta metodologia de análise de carteiras é conhecida como análise de média-variância. Na prática, a distribuição Gaussiana ou distribuição Normal, é por excelência a distribuição padrão da teoria moderna de carteiras.

Segundo Markowitz, infinitas carteiras de investimento podem ser geradas variando-se as frações de investimento de cada ativo. Entretanto, somente um subconjunto destas carteiras é eficiente em termos do binômio de risco-retorno e somente estas carteiras devem ser consideradas como alternativas de alocação de ativos. Finalmente, para selecionar uma carteira dentre as carteiras eficientes é necessário maximizar o índice de Sharpe (1966). Esta maximização depende dos parâmetros da média-variância das distribuições dos retornos dos ativos, que, por sua vez, dependem dos dados históricos do mercado, que, por premissa do modelo de Markowitz, devem ser séries temporais de natureza Gaussiana. Entretanto, estas séries temporais, geralmente, são não Gaussianas, gerando como resultado alocações deficientes e pouco intuitivas (JOBSON; KORKIE, 1981; MICHAUD, 1989).

Neste artigo, utilizamos o uso da medida de desempenho Ômega, inicialmente proposta por Keating e Shadwick (2002), que considera todos os momentos da distribuição dos retornos, permitindo a inclusão de ativos de qualquer natureza e características na carteira. A contribuição deste artigo é provar que a otimização de carteiras a partir da medida Ômega, quando as distribuições de retornos são gaussianas, resulta na mesma alocação de ativos utilizando o Índice de Sharpe. Assim, Ômega resulta em uma medida de desempenho universal e abrangente para seleção de ativos em carteiras, independente da distribuição de probabilidades dos seus retornos.

1.2 Revisão da Literatura

A teoria moderna de carteiras teve seu início com a publicação do seminal artigo de Markowitz (1952) que apresenta um modelo de alocação de ativos baseado nas seguintes hipóteses: (i) Hipótese do mercado eficiente, na qual toda informação disponível é rapidamente disseminada e refletida nos preços dos ativos, (ii) Hipótese do mercado em concorrência perfeita, na qual os preços dos ativos relacionam-se pela lei de oferta e demanda, (iii) Hipótese do mercado em equilíbrio, na qual a oferta é igual à demanda para todos os ativos, e na (iv) Hipótese do mercado sem fricções, na, não existem custos de transação nem impostos.

Markowitz, demonstrou, como principal resultado do modelo de alocação de ativos, que as decisões de investimento devem ser tomadas com base no binômio de risco-retorno. Cabe sublinhar que na publicação original, Markowitz não faz nenhuma suposição em relação à distribuição dos retornos, mas, apenas, limita seu estudo às distribuições que são definidas completamente pelos dois primeiros momentos, como é o caso da distribuição Gaussiana, que pode ser considerada como a distribuição padrão do modelo. Entretanto, a dinâmica atual dos mercados globalizados gera períodos aleatórios de alta e baixa volatilidade e/ou saltos nos retornos dos ativos, provocando mudanças de regime ou quebras estruturais na série temporal dos retornos, tornando-os não Gaussianos. Consequentemente, as aplicações reais da teoria moderna de carteiras podem gerar soluções deficientes e/ou pouco intuitivas, devido à limitação de considerar na análise somente os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos.

Existem alguns trabalhos na literatura que exploram a análise de carteiras levando em consideração outros momentos da distribuição dos retornos, além dos dois primeiros. Mhiri e Prigent (2010), analisaram o problema de otimização de carteiras aplicado a índices financeiros. Os autores acrescentaram, ao modelo clássico de otimização de média-variância, os momentos de assimetria e curtose. Os resultados obtidos indicam que ao incluir os momentos de assimetria e curtose, geram-se mudanças significativas nos pesos dos ativos das carteiras, concluindo que mais momentos são necessários para o caso dos índices financeiros.

Por sua vez Usta e Kantar (2011), abordaram o problema de alocação de ativos propondo um modelo híbrido baseado na média-variância-curtose e no conceito de entropia. Utilizando um conjunto de dados empíricos para teste, os resultados obtidos mostraram que o modelo híbrido tem um bom desempenho em relação ao modelo clássico, demonstrando que a curtose e a entropia são informações relevantes que melhoram os resultados do modelo padrão.

Ñíguez *et al.*(2013), examinam o papel dos momentos de ordem superior na estrutura teórica da seleção de carteiras e a utilidade esperada pelo investidor. Os autores derivaram as condições exatas sob as quais todos os investidores teriam comportamentos imprudentes em vez de um comportamento diversificador. Para isto, construíram diversos modelos de seleção de carteiras considerando dois, três, quatro e cinco momentos das distribuições dos retornos. Estimativas empíricas com o índice S&P500 fornecem evidências para a importância dos momentos superiores da distribuição dos retornos na avaliação do risco das carteiras minimizando as atitudes de imprudência do investidor.

Saranya e Prasanna (2014), fizeram testes empíricos de alocação de ativos na bolsa de ações da Índia e constataram que os retornos das ações possuem distribuições não Gaussianas, obtendo-se alocações sub ótimas se considerar só os dois primeiros momentos da distribuição. Para resolver este problema, propuseram a utilização do terceiro (assimetria) e quarto (curtose) momentos da distribuição dos retornos mostrando que o impacto da adição de mais momentos gera carteiras com maior retorno para o mesmo nível de risco.

Naqvi *et al.*(2017), demonstraram que, para avaliar corretamente o risco de carteiras com retornos assimétricos e/ou retornos com caudas pesadas, é necessário incluir os momentos de assimetria e curtose na análise padrão de média-variância.

Castro *et al.*(2020), analisaram diversas carteiras formadas por dois pares de ativos: um deles o Bitcoin e o segundo podendo ser o S&P500, NASDAQ, Ethereum ou Ripple. Os autores analisaram as carteiras utilizando um modelo de alocação de ativos baseado na medida Ômega, porque as criptomoedas possuem retornos não-Gaussianos o que não permite utilizar o modelo padrão de média-variância. Os resultados do modelo indicam que se deve investir uma maior proporção nos ativos S&P500 ou NASDAQ, mesmo que o Bitcoin apresente um retorno maior expressivo. No entanto, quando são avaliadas carteiras de pares de criptoativos, não se observa uma clara preferência por algum em especial.

Ahmed e Al Mafrachi (2021), utilizaram dados de preços intradiários do Bitcoin, Ethereum e Ripple para pesquisar a sensibilidade dos retornos das criptomoedas em relação aos momentos de ordem superior como a variância, a assimetria, a curtose, a hiper-assimetria (quinto momento) e a hiper-curtose (sexto momento). Os resultados mostram que os cinco primeiros momentos são relevantes para explicar os retornos das criptomoedas, sendo que o terceiro e o quinto momento foram os que mostraram maior capacidade preditiva, tanto dentro da amostra como fora da amostra, evidenciando, de forma prática, o bom desempenho na precificação de ativos, nas tomadas de decisão e na gestão de risco.

O presente artigo contribui com a literatura ao demostrar analiticamente que a otimização de carteiras usando a medida Ômega, em um contexto de retornos gaussianos, fornece os mesmos resultados de alocação de ativos que se utilizar o índice de Sharpe, sendo, portanto, mais genérico, já que Ômega, pela sua definição, não se restringe a um tipo específico de distribuição. Este resultado permite concluir que a metodologia de seleção de carteiras baseada na medida Ômega é uma metodologia universal de alocação de ativos de qualquer natureza probabilística.

2. Métodos

2.1 Modelo Clássico de Alocação de Ativos

O modelo clássico de alocação de ativos, assume como premissa a existência de um mercado financeiro formado por "$n + 1$" ativos de investimento, sendo um ativo de renda fixa – denotado por r_f – e "n" ativos de renda variável denotados por $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, sendo r_i, $i = \{1,2, \cdots, n\}$ uma variável aleatória que representa o retorno do i-ésimo ativo da carteira. O ativo de renda fixa tem como característica fundamental oferecer uma rentabilidade constante e livre de risco. Por outro lado, os ativos de renda variável têm como característica fundamental, oferecer rentabilidades potencialmente superiores ao ativo de renda fixa, mas que correm o risco de sofrer variações devido às incertezas do mercado, estas variações de rentabilidade são tipicamente modeladas por uma distribuição Gaussiana, ou seja, $r_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Neste contexto, os investidores deste mercado defrontam-se com a seguinte sequência de decisões: (i) A decisão do horizonte de investimento, (ii) A decisão da seleção dos ativos de investimento, e (iii) A decisão das frações de investimentos em cada ativo. Em relação à decisão do horizonte de investimento, esta decisão consiste em definir um período de investimento, denotado pelo intervalo $[t, T]$, sendo "t" o tempo em que é realizado o investimento de capital e "T" o tempo em que é realizado o desinvestimento de capital. O modelo de alocação de ativos assume que os momentos μ_i e σ_i da distribuição dos retornos são parâmetros constantes e invariantes no tempo, inclusive no intervalo futuro de tempo $[t, T]$. Em relação à decisão da seleção dos ativos de investimento, esta consiste na seleção de uma carteira com base nos $n + 1$ ativos disponíveis no mercado. Em relação à decisão das frações de investimento em cada ativo, esta decisão consiste em definir a fração ótima para cada ativo de forma que a carteira tenha o melhor desempenho em termos do binômio de risco-retorno, para isto, é utilizado um algoritmo de otimização que tem como função objetivo uma medida de risco-retorno. Para o modelo clássico de alocação de ativos, a função de risco-retorno padrão é o índice de Sharpe. No Apêndice é apresentado o desenvolvimento matemático do modelo clássico de alocação de ativos, usando notação vetorial.

Segundo Markowitz (1952), todas as carteiras localizadas na fronteira eficiente são eficientes em termos de risco-retorno e somente estas carteiras devem ser consideradas como alternativas para a alocação de capital. As demais carteiras, posicionadas no interior da fronteira eficiente, devem ser descartadas uma vez que para qualquer carteira no interior haverá pelo menos uma carteira na fronteira que terá risco menor e/ou retorno projetado maior. Finalmente, para selecionar uma carteira em particular posicionada na fronteira eficiente, é necessário mensurar seu desempenho em termos de risco-retorno. Apesar de existir na literatura diversas outras propostas, a medida de desempenho proposta por Sharpe (1966), conhecida como índice de Sharpe, tornou-se a medida de desempenho padrão da metodologia tradicional de análise de carteiras. Este índice pode ser descrito conforme a equação (1):

$$S_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \tag{1}$$

Logo, para selecionar uma carteira em particular pelo critério de Sharpe é necessário maximizar o índice de Sharpe, assim:

$$\max_{\mu_p}\{S_p\} = \max_{\mu_p}\left\{\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right\} \tag{2}$$

Este problema de maximização tem a vantagem de ser irrestrito (sem restrições) e a solução encontra-se derivando a função objetivo e igualando a zero, conforme a equação (3).

$$\max_{\mu_p}\{S_p\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{3}$$

A interpretação financeira do índice de Sharpe é que esta medida mede o excesso de retorno da carteira em relação ao retorno do ativo livre de risco $(\mu_p - r_f)$ por unidade de risco, representado pelo desvio padrão da carteira σ_p. Da mesma forma, a interpretação geométrica do índice de Sharpe é que este mede o coeficiente angular da linha formada pelos pontos $(r_f, 0)$ e (μ_p, σ_p), ambas localizadas no plano $(\mu \times \sigma)$, sendo que o primeiro ponto está posicionado no eixo das ordenadas e o segundo ponto está posicionada na fronteira eficiente.

2.1 Modelo Universal para Alocação de Ativos

Na seção anterior foi apresentada a metodologia clássica de alocação de ativos, cuja premissa fundamental é a normalidade na distribuição dos retornos. A seguir, apresenta-se uma metodologia universal que flexibiliza esta premissa, permitindo modelar retornos de qualquer natureza probabilística (gaussianos e não gaussianos). Para isso, propõe-se a substituição da utilização da medida de desempenho do índice de Sharpe, pela medida de desempenho Ômega.

A medida Ômega, proposta por Keating e Shadwick (2002), tem como característica levar em consideração todos os momentos da distribuição dos retornos e não somente a média e variância, como ocorre com o índice de Sharpe. Por esta razão a medida Ômega é uma medida de desempenho universal que pode ser aplicada a qualquer carteira, independentemente da premissa adotada na modelagem dos retornos dos ativos. A medida Ômega pode ser descrita pela equação (4):

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b \left[1 - F(r_p)\right] dx}{\int_a^L F(r_p) dx} \tag{4}$$

Onde:

$\Omega(L)$: é a medida Ômega de desempenho da carteira.

L: é o retorno mínimo requerido da carteira (parâmetro definido pelo investidor).

$F(r_p)$: é a função de distribuição acumulada dos retornos r_p da carteira.

(a, b): é o domínio dos retornos r_p da carteira, no caso mais geral, $a = -\infty$ e $b = \infty$.

Kazemi et al. (2004) desenvolveram uma fórmula alternativa da medida de desempenho Ômega, expressa pela equação (5):

$$\Omega(L) = \frac{E\left[max\left(r_p - L; 0\right)\right]}{E\left[max\left(L - r_p; 0\right)\right]} \tag{5}$$

Onde:

$E[\,\cdot\,]$: é o operador de valor esperado

$max(\,\cdot\,)$: é o operador máximo

Na equação (5), o numerador é o valor esperado do excesso de ganho ($r_p - L$) condicional a resultados positivos, ou seja, é o ganho esperado da carteira. E o denominador é o valor esperado da perda ($L - r_p$) condicional a resultados negativos, isto é, a perda esperada. Portanto, funciona como uma medida de desempenho, ao relacionar um retorno ou ganho esperado, com o seu respectivo risco ou perda esperada. As equações (4) e (5) são equivalentes.

A medida Ômega, por definição, considera todos os momentos da distribuição dos retornos, entretanto, ao aplicar a medida Ômega em carteiras com retornos gaussianos, demonstra-se analiticamente, que a medida Ômega converge ao índice de Sharpe, obtendo como resultado a mesma carteira tangente. Esta demonstração permite generalizar a teoria moderna de carteiras considerando ativos com retornos de qualquer natureza probabilística. A seguir detalha-se esta demonstração matemática.

Seja $z \sim N(0,1)$ uma variável aleatória com distribuição Normal padrão. Seja $\varphi(z)$ e $\Phi(z)$ a função de densidade e a função de distribuição de z, logo:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{6}$$

$$\Phi(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)dz \tag{7}$$

Suponha uma carteira com retorno gaussiano $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p)$. A medida Ômega, para um retorno mínimo L, é expresso conforme a equação (5). Utilizando uma nomenclatura alternativa, define-se Ômega segundo a equação (8):

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} \tag{8}$$

Normalizando a variável aleatória r_p, obtém-se a variável z:

$$z = \frac{r_p - \mu_p}{\sigma_p} \tag{9}$$

Desenvolvendo o numerador da equação (8).

$$I_1(L) = E\left[max\left(r_p - L; 0\right)\right]$$

$$I_1(L) = E\left[max\left(z\sigma_p + \mu_p - L; 0\right)\right]$$

$$I_1(L) = \int_{-\infty}^{\infty} max\left(z\sigma_p + \mu_p - L\right)\varphi(z)dz$$

$$I_1(L) = \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} \left(z\sigma_p + \mu_p - L\right)\varphi(z)dz$$

$$I_1(L) = \sigma_p \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} z\varphi(z)dz + (\mu_p - L) \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} \varphi(z)dz$$

Utilizando a propriedade $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$, temos.

$$I_1(L) = -\sigma_p \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} \varphi'(z)dz + (\mu_p - L) \int_{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}}^{\infty} \varphi(z)dz$$

$$I_1(L) = -\sigma_p \left[\varphi(\infty) - \varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right] + (\mu_p - L)\left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right]$$

$$I_1(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[1 - \Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)\right]$$

Utilizando a propriedade $\varphi(-z) = \varphi(z)$ e $\Phi(-\mathrm{z}) = 1 - \Phi(\mathrm{z})$, temos.

$$I_1(L) = \sigma_p\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \tag{10}$$

Desenvolvendo, de forma análoga, o denominador da equação (8).

$$I_2(L) = E\left[max\left(L - r_p; 0\right)\right]$$

$$I_2(L) = E\left[max\left(L - z\sigma_p - \mu_p; 0\right)\right]$$

$$I_2(L) = \int_{-\infty}^{\infty} max\left(L - z\sigma_p - \mu_p\right)\varphi(z)dz$$

$$I_2(L) = \int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} \left(L - z\sigma_p - \mu_p\right)\varphi(z)dz$$

$$I_2(L) = -\sigma_p \int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} z\varphi(z)dz + \left(L - \mu_p\right) \int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} \varphi(z)dz$$

Utilizando a propriedade $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$, temos.

$$I_2(L) = \sigma_p \int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} \varphi'(z)dz + (L-\mu_p)\int_{-\infty}^{\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}} \varphi(z)dz$$

$$I_2(L) = \sigma_p \left[\varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) - \varphi(-\infty)\right] + (L-\mu_p)\left[\Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) - \Phi(-\infty)\right]$$

$$I_2(L) = \sigma_p \varphi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right) + (L-\mu_p)\Phi\left(\frac{L-\mu_p}{\sigma_p}\right)$$

Utilizando a propriedade $\varphi(-z) = \varphi(z)$ e $\Phi(-\mathrm{z}) = 1 - \Phi(\mathrm{z})$, temos.

$$I_2(L) = \sigma_p \varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right] \tag{11}$$

Substituindo a equação (10) e (11) em (8), obtém-se:

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} = \frac{\sigma_p \varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\sigma_p \varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + (\mu_p - L)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \tag{12}$$

Dividindo numerador e denominador por σ_p, obtém-se:

$$\Omega(L) = \frac{I_1(L)}{I_2(L)} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]} \tag{13}$$

A equação (13), permite avaliar o desempenho de qualquer carteira localizada no plano $(\mu \times \sigma)$, entretanto, para encontrar a carteira ótima em termos de risco-retorno, é preciso maximizar $\Omega(L)$ em função de μ_p, conforme equação (14):

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left[\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - 1\right]}\right) = 0 \tag{14}$$

Seja a seguinte troca de variável:

$$x = \varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \tag{15}$$

Substituindo a equação (15) na equação (14), obtém-se:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{x}{x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)}\right) = 0 \tag{16}$$

A fim de simplificar a notação, a derivada parcial $\partial(\cdot)/\partial\mu_p$ será substituído pela notação com apostrofo $(\cdot)'$. Note-se que a equação anterior é a derivada de um cociente, ou seja $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Entretanto, como a equação (16) é uma igualdade a zero, o termo do denominador pode ser eliminado da derivada ficando apenas $(u/v)' = (u'v - uv')$. Logo:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] - x\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]' = 0$$

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'\left[x - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] - x\left[x' - \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\right] = 0$$

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = x'x - x'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) - xx' + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0$$

Simplificando termos na equação anterior, obtém-se:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = -x'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{17}$$

Derivando a equação (15).

$$x' = \left[\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

$$x' = \left[\varphi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]' + \left[\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

$$x' = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' + \left[\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right]'$$

Utilizando a regra da derivada de um produto $(uv)' = u'v + uv'$, tem-se:

$$x' = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'$$

Evidenciando o termo comum, tem-se:

$$x' = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)'\left[\varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\right] \tag{18}$$

Seja a seguinte troca de variável:

$$y = \varphi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)\Phi'\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) \tag{19}$$

Substituindo a equação (19) na equação (18), obtém-se:

$$x' = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' y \tag{20}$$

Substituindo a equação (20) na equação (17).

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = -\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' y \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) + x\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{21}$$

Evidenciando o termo comum, tem-se:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' [x - y] = 0 \tag{22}$$

A equação anterior está formando por dois termos iguais a zero, isso significa que um ou ambos termos são iguais a zero, logo:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right)' = 0 \tag{23}$$

Revertendo a notação.

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - L}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{24}$$

Por compatibilidade com a teoria moderna de carteiras, o parâmetro do retorno mínimo da carteira L da medida Ômega, deve ser igual ao retorno do ativo livre de risco r_f, ou seja, $L = r_f$, logo, a equação (24) pode ser reescrita como a equação (25):

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \frac{\partial}{\partial \mu_p}\left(\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\right) = 0 \tag{25}$$

A expressão da equação (25) é idêntica a expressão da equação (3), ou seja:

$$\max_{\mu_p}\{\Omega(L)\} = \max_{\mu_p}\{S_p\} \tag{26}$$

3. Resultados

Baseado no resultado da equação (26), conclui-se, portanto, que em ambientes com retornos gaussianos e com $L = r_f$, a carteira ótima (μ_p^*, σ_p^*) selecionada pela medida de desempenho Ômega resulta na mesma carteira selecionada pela medida de desempenho do índice de Sharpe. Portanto, ao substituir o índice de Sharpe pela medida Ômega, a teoria moderna de carteiras pode ser generalizada para otimizar carteiras com retornos de qualquer natureza probabilística, não restringindo sua análise aos dois primeiros momentos da distribuição de retornos (média e variância). E, mesmo assumindo retornos gaussianos, isso também é contemplado pela medida Ômega, fornecendo resultados iguais que se utilizar o índice de Sharpe.

4. Considerações Finais

A teoria moderna de carteiras conclui que as decisões de investimento devem ser tomadas com base no binômio de risco-retorno. Esta teoria parte da premissa que a alocação de ativos é uma função dos primeiros momentos (média-variância) da distribuição dos retornos, sendo a distribuição gaussiana, o modelo probabilístico de retornos mais utilizado. Entretanto, evidencias empíricas, apontam que os retornos dos ativos, como por exemplo as ações e principalmente as criptomoedas, possuem distribuições não-gaussianas e, para estes casos, o índice de Sharpe não identificaria de forma apropriada a carteira ótima de risco-retorno, e além disso, o risco da carteira poderia ser subestimado devido a que em uma distribuição não gaussiana de retornos da carteira de ativos, as caudas da distribuição seriam mais pesadas em relação a uma distribuição gaussiana, ou seja, o investidor estaria correndo um risco maior que o risco calculado pela metodologia de Markowitz. Neste artigo demonstrou-se analiticamente, que em condições de retornos gaussianos, a alocação ótima de ativos, calculada, tanto pelo índice de Sharpe, quanto pela medida Ômega são idênticas. Entretanto, a medida Ômega por considerar todos os momentos da distribuição dos retornos, captura de maneira mais apropriada a relação risco-retorno da carteira, independente do seu formato probabilístico de retornos, resolvendo assim a limitação do índice de Sharpe (restringido aos dois primeiros momentos da distribuição).

Por tanto, conclui-se que ao substituir o índice de Sharpe pela medida Ômega, permite-se estender a teoria moderna de carteiras para alocar ativos de qualquer natureza probabilística, tornando-o um método universal de seleção de carteiras.

Referências

AHMED, W. M. A; AL MAFRACHI, M. Do higher-order realized moments matter for cryptocurrency returns? **International Review of Economics and Finance**, 72(C), 483–499. 2021.

BERTSEKAS, D. P. Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. **Athena Scientific**, MIT (p. 410). 1996.

CASTRO, J. G.; TITO E. A. H.; BRANDÃO, L. E. T.; GOMES, L. L. Crypto-assets portfolio optimization under the Omega measure. **The Engineering Economist**, 65(2), 114–134. 2020.

CRUZ, E. A. T.; MEDINA, P. D. V.; SALAZAR, H. D. A. Optimización de portafolios de acciones utilizando los multiplicadores de Lagrange. **Scientia et Technica**, 18(1), 114–119. 2013.

JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Putting Markowitz theory to work. **The Journal of Portfolio Management**, 7(4), 70–74. 1981.

KAZEMI, H.; SCHNEEWEIS T.; GUPTA, B. Omega as a performance measure. **Journal of Performance Measurement**, 8(3), 16–25. 2004.

KEATING, C.; SHADWICK, W. F. (2002). A universal performance measure. **Journal of Performance Measurement**, 6(3), 59–84. 2022.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, 7(1), 77–91. 1952.

MERTON, R. C. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 7(4), 1851–1872. 1972.

MHIRI, M.; PRIGENT, J.-L. International Portfolio Optimization with Higher Moments. **International Journal of Economics and Finance**, 2(5), 157–169. 2010.

MICHAUD, R. O. The Markowitz Optimization Enigma: is Optimized Optimal? **Financial Analysts Journal**. Vol. 45, Issue 1, pp. 464–465. 1989.

NAQVI, B.; MIRZA, N.; NAQVI, W. A.; RIZVI, S. K. A. Portfolio optimisation with higher moments of risk at the Pakistan stock exchange. **Economic Research-Ekonomska Istrazivanja**, 30(1), 1594–1610. 2017.

ÑÍGUEZ, T.; PAYA, I.; PEEL, D.; PEROTE, J. Higher-order Moments in the Theory of Diversification and Portfolio Composition. **Working Papers** No. 18297128. Lancaster University Management School, Economics Department. 2013.

SARANYA, K.; PRASANNA, P. K. Portfolio Selection and Optimization with Higher Moments: Evidence from the Indian Stock Market. **Asia-Pacific Financial Markets**, 21(2), 133–149. 2014.

SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. **Journal of Business**, 39(1), 119–138. 1966

SOURY, H.; ALOUINI, M. S. New results on the sum of two generalized Gaussian random variables. **Global Conference on Signal and Information Processing**, 1017–1021. 2015.

SUÁREZ, F. Método de los multiplicadores de Lagrange. Interpretación general y económica de éstos. Facultad de Ciencias Económicas, 7(2), 30–33. 1999.

USTA, I.; KANTAR, Y. M. Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. **Journal Entropy**, 13(1), 117–133. 2011.

Apêndice

O desenvolvimento matemático do modelo clássico de alocação de ativos, usando notação vetorial, é apresentado a seguir:

Seja r_f o retorno de um ativo livre de risco, em outras palavras, um ativo com rentabilidade fixa e constante ao longo do tempo.

Seja $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ os retornos de "n" ativos com risco, onde r_i, $i = \{1,2, \cdots, n\}$, representa o i-ésimo retorno modelado por uma variável aleatória com distribuição gaussiana $N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Seja $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ as frações de investimentos dos "n" ativos com risco, onde w_i representa a fração de investimento no ativo r_i. Por restrição orçamentária do investidor, temos que:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1 \tag{27}$$

Logo, o retorno da carteira r_p, formado pelos "n" ativos de investimento, pode ser calculado como:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n \tag{28}$$

Pelo fato de que todos os ativos da carteira possuem uma distribuição Gaussiana $r_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, então, o retorno da carteira também terá uma distribuição Gaussiana, $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$. Isto porque a somatória de distribuições Gaussianas resulta em outra distribuição Gaussiana (Soury e Alouini, 2015). Os momentos μ_p e σ_p da distribuição dos retornos da carteira são calculados pelas equações (29) e (30):

$$\mu_p = E[r_p] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \tag{29}$$

$$\sigma_p^2 = Var[r_p] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_i Cov(r_i, r_j) \tag{30}$$

A fim de facilitar o desenvolvimento analítico, é conveniente utilizar a notação matricial. Desta forma, os vetores e matrizes serão escritos com fonte em negrito e os valores escalares com fonte normal. A equação (27), pode ser reescrita como um produto vetorial de dos vetores, ou seja:

$$[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \tag{31}$$

Utilizando a notação vetorial, a equação (31), pode ser rescrita como:

$$\mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{32}$$

Onde $\boldsymbol{w}^T = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$, representa o vetor transposto do vetor $\boldsymbol{w}$, e $\mathbf{1}$ representa o vetor coluna formado somente por números 1. Pela propriedade comutativa do produto interno, temos que $\boldsymbol{w}^T\mathbf{1} = \mathbf{1}^T\boldsymbol{w}$, logo:

$$\boldsymbol{w}^T\mathbf{1} = \mathbf{1}^T\boldsymbol{w} = 1 \tag{33}$$

Analogamente, a equação (29), pode ser reescrita como um produto escalar de dois vetores, ou seja:

$$\mu_p = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix} \tag{34}$$

Utilizando a notação vetorial, a equação (34), pode ser reescrita como:

$$\mu_p = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} \tag{35}$$

Onde $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n]^T$. Pela propriedade comutativa do produto interno, temos que $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w}$, logo:

$$\mu_p = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{w} \tag{36}$$

Finalmente, a equação (30) pode ser reescrita matricialmente como:

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w} \tag{37}$$

Onde:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{21}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix} \tag{38}$$

A determinação das frações ótimas dos ativos da carteira, dá-se através da minimização da equação (37), sujeito às restrições das equações (32) e (35), ou seja:

$$\min_{\boldsymbol{w}}\{\sigma_p^2\} = \min_{\boldsymbol{w}}\{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\} \tag{39}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases}\boldsymbol{w}^T\mathbf{1} & = & 1\\ \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} & = & \mu_p\end{cases} \tag{40}$$

Cabe sublinhar que o problema de alocação de ativos, também pode ser formulado como a maximização da equação (35) sujeito às restrições das equações (32) e (37). Em ambos os casos a solução será a mesma.

Merton (1972), obteve uma solução analítica fechada deste problema utilizando a metodologia dos multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, Bertsekas (1996) e Cruz, Medina e Salazar (2013), obtiveram a mesma solução seguindo outros desenvolvimentos analíticos.

A seguir expõe-se a solução do problema de alocação de ativos pela formulação de minimização e pela metodologia dos multiplicadores de Lagrange. Para isto, combina-se a função de minimização da equação (39) e as restrições da equação (40) em uma única função objetivo L, exposta na equação (41).

$$L = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} + \lambda_1 \left(\mu_p - \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} \right) + \lambda_2 (1 - \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{1}) \qquad 41)$$

onde λ_1 e λ_2 representam valores escalares conhecidos como os multiplicadores de Lagrange.

Suárez (1999) e Cruz et al. (2013), brindam maiores detalhes desta metodologia. Calculando as condições de primeira ordem da função objetivo L obtém-se as equações (42), (43) e (44).

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = 2\boldsymbol{\Sigma w} - \lambda_1 \boldsymbol{\mu} + \lambda_2 \boldsymbol{1} = 0 \qquad (42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} - \mu_p = 0 \qquad (43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{1} - 1 = 0 \qquad (44)$$

Note-se que na derivação matemática da equação (42), foi utilizada a regra do gradiente de um vetor $\boldsymbol{x}$ e uma matriz constante $\boldsymbol{A}$, exposta na equação (45).

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A x}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A})^T \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} \qquad (45)$$

Manipulando-se a equação (42), pode ser colocada a variável $\boldsymbol{w}$ em evidência, obtendo-se:

$$\boldsymbol{w} = \frac{\lambda_1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{\lambda_2}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1} \qquad (46)$$

Calculando-se $\boldsymbol{w}^T$ a partir da equação (46), obtém-se:

$$\boldsymbol{w}^T = \frac{\lambda_1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^T + \frac{\lambda_2}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1})^T \tag{47}$$

Substituindo-se a equação (47) na equação (43) e (44), obtém-se que:

$$\left(\frac{\lambda_1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^T + \frac{\lambda_2}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1})^T\right)\boldsymbol{\mu} = \mu_p \tag{48}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^T + \frac{\lambda_2}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1})^T\right)\boldsymbol{1} = 1 \tag{49}$$

Rescrevendo-se matricialmente as equações (48) e (49) obtém-se:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

No desenvolvimento da Equação anterior, a partir das equações (48) e (49), foram utilizadas as seguintes propriedades matriciais.

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \tag{51}$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T \tag{52}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T \tag{53}$$

Como a matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz simétrica positiva e definida, então o termo $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ da equação (50), é equivalente ao termo $\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1}$, logo, a equação (50) pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Fazendo-se uma troca de variáveis, a equação (54), pode ser expressa como a equação (55).

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} b & a \\ a & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Onde a, b, e c são constantes numéricas. Resolvendo-se a equação (55), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{d}\begin{bmatrix} c & -a \\ -a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

Onde d é o determinante, assim:

$$d = det\begin{pmatrix} b & a \\ a & c \end{pmatrix} = bc - a^2 \tag{57}$$

Manipulando-se a equação (56) obtém-se as soluções de λ_1 e λ_2.

$$\lambda_1 = \frac{2}{d}(c\mu_p - a) \quad (58)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{d}(b - a\mu_p) \quad (59)$$

Substituindo-se as soluções de λ_1 e λ_2 da equação (58) e (59) na equação (46), obtém-se:

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{d}(c\mu_p - a)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{d}(b - a\mu_p)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \quad (60)$$

Reagrupando-se o termo μ_p.

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{d}(b\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{d}(c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})\mu_p \quad (61)$$

A equação (61), pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\mu_p \quad (62)$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{d}(b\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \quad (63)$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{d}(c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}) \quad (64)$$

Substituindo-se a equação (62) na equação (37) da variância $\sigma_p^2 = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$, obtém-se:

$$\sigma_p^2 = (\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\mu_p)^T\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\mu_p) \quad (65)$$

$$\sigma_p^2 = (\boldsymbol{g}^T + \boldsymbol{h}^T\mu_p)\,\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\mu_p) \quad (66)$$

$$\sigma_p^2 = \boldsymbol{h}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{h}\mu_p^2 + 2\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{h}\mu_p + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{g} \quad (67)$$

Pode ser mostrado facilmente que os termos da equação (67) se simplificam para:

$$\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{h} = \frac{c}{d} \quad (68)$$

$$\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{h} = -\frac{a}{d} \quad (69)$$

$$\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{g} = \frac{b}{d} \quad (70)$$

Substituindo-se todos os resultados anteriores na equação (67) obtém-se que:

$$\sigma_p^2 = \frac{c}{d}\mu_p^2 + -\frac{2a}{d}\mu_p + \frac{b}{d} \quad (71)$$

No plano $(\mu_p \times \sigma_p^2)$, a equação (72), representa o lugar geométrico de uma parábola, entretanto, no plano $(\mu \times \sigma)$ a equação (72), representa o lugar geométrico de uma hipérbole. Para demonstrar isto, a equação (72), pode-se reescrever como:

$$\frac{\sigma_p^2}{\frac{1}{c}} - \frac{\left(\mu_p - \frac{a}{c}\right)^2}{\frac{d}{c^2}} = 1 \tag{72}$$

Para facilitar a visualização dos parâmetros da hipérbole, mostra-se, a seguir, a equação da hipérbole canônica, utilizando a notação padrão da geometria analítica.

$$\frac{(x-h)^2}{p^2} - \frac{(x-k)^2}{q^2} = 1 \tag{73}$$

Onde os parâmetros p e q representam os semieixos da hipérbole, tendo como centro o ponto (h, k).

Fazendo-se um contraste de parâmetros entre a equação (72) e (73), obtém-se que:

$$p = \frac{1}{\sqrt{c}} \tag{74}$$

$$q = \frac{\sqrt{d}}{c} \tag{75}$$

$$h = 0 \tag{76}$$

$$k = -\frac{a}{c} \tag{77}$$

Na teoria de finanças, somente o ramo direito da hipérbole tem sentido, e, em particular, o sub-ramo superior que começa no vértice (h^*, k^*). Este sub-ramo é conhecido como fronteira eficiente, devido ao fato de que nesta curva encontram-se localizadas as carteiras eficientes ou carteiras ótimas em termos do binômio de risco-retorno. Somente as carteiras localizadas na fronteira eficiente devem ser consideradas como solução do problema de alocação de ativos. As demais carteiras localizadas no interior da fronteira eficiente, devem ser descartadas.

O vértice (h^*, k^*) do ramo direito da hipérbole tem um significado especial, pois, representa, além do início da fronteira eficiente, a carteira de variância mínima. Utilizando os conhecimentos de geometria analítica, verifica-se que este ponto é definido pela equação (78).

$$(h^*, k^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{a}{c}\right) \tag{78}$$

Isto significa que a carteira de variância mínima tem uma distribuição Gaussiana $N(\mu_p^*, \sigma_p^{*2})$, definida pelos seguintes momentos:

$$\mu_p^* = \frac{a}{c} \tag{79}$$

$$\sigma_p^* = \frac{1}{\sqrt{c}} \tag{80}$$

Analiticamente, estes momentos são calculados minimizando a equação (71). Ou seja:

$$\min_{\mu_p}\{\sigma_p^2\} = \min_{\mu_p}\left\{\frac{c}{d}\mu_p^2 + -\frac{2a}{d}\mu_p + \frac{b}{d}\right\} \tag{81}$$

Esta minimização tem a vantagem de não possuir restrições, e a solução encontra-se derivando a função objetivo e igualando a zero.

$$\frac{2c}{d}\mu_p - \frac{2a}{d} = 0 \tag{82}$$

Resolvendo-se μ_p^* da equação (82) e, na sequência calculando-se σ_p^* através da equação (71), obtém-se as equações (83) e (84).

$$\mu_p^* = \frac{a}{c} \tag{83}$$

$$\sigma_p^* = \frac{1}{\sqrt{c}} \tag{84}$$

Contrastando-se a solução obtida pela metodologia de minimização com a solução obtida pela metodologia de geometria analítica das equações (79) e (80), obtém-se os mesmos resultados como já era esperado, entretanto, recomenda-se utilizar a metodologia de minimização, pois, trata-se de uma metodologia geral que funciona inclusive quando se acrescentam novas condições de contorno (restrições) ao problema de alocação de ativos.

Adicionalmente, resolvendo a equação (3), que maximiza o índice de Sharpe, determina-se o parâmetro μ_p^*, e na sequencia se calcula σ_p^* através da equação (71). Assim, obtêm-se as equações (85) e (86).

$$\mu_p^* = \frac{ar_f - b}{cr_f - a} \tag{85}$$

$$\sigma_p^* = \sqrt{\frac{c}{d}(\mu_p^*)^2 - \frac{2a}{d}\mu_p^* + \frac{b}{d}} \tag{86}$$

A UNIVERSAL METHOD FOR PORTFOLIO SELECTION

Abstract

Harry Markowitz established the foundations of modern portfolio theory by suggesting that investment decisions should be made based on the risk-return binomial. This theory has as its fundamental premise that the optimal asset allocation is a function of the first moments (mean-variance) of the distribution of returns Gaussian distribution is the most widely used probabilistic model of returns. However, in the finance literature, empirical research indicates that asset returns generally have non-Gaussian distributions. This paper proposes a generalization of modern portfolio theory that considers all moments of the distribution of asset returns. This generalization allows us to obtain a universal method for the selection of assets with returns of any probabilistic nature.

***Keywords**:* Omega Measure *(Ω), Sharpe Index, Variable Income Assets, Capital Allocation, Portfolio Optimization.*