

KONSEPTUAALINEN JA PROSEDURAALINEN TIETO SEKÄ LUOVA PÄÄTTELY LUKION MATEMATIIKAN ENSIMMÄISEN OPINTOJAKSON HARJOITUSTEHTÄVISSÄ

Juho Kettunen, Antti Viholainen & Lasse Eronen

Itä-Suomen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Lukion matematiikassa on tapahtunut useita muutoksia liittyen muun muassa oppimateriaalien ja opiskeluvälineiden sähköistymiseen ja kaikille yhteisen opintojakson perustamiseen lukio-opintojen alkuun. Tässä tutkimuksessa selvitetään, miten näiden muutosten myötä oppikirjojen tehtävien painotukset lukiomatematiikan ensimmäisellä opintojaksolla ovat muuttuneet toisaalta konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon ja toisaalta matemaattisen luovuuden harjoittamisen suhteen. Tutkimuksessa analysoitiin yhteensä 400 tehtävää vuosien 2003, 2015 ja 2019 opetussuunnitelmiin pohjautuvista ensimmäisten opintojaksojen oppikirjoista. Tulokset osoittavat, että uudistusten myötä tehtävät ovat muuttuneet selvästi konseptuaalista tietoa painottavampaan suuntaan.

JOHDANTO

Lukion matematiikan opetus on ollut muutoksien keskellä erityisesti 2010-luvulla. Teknologian rooli osana opetusta on kasvanut merkittävästi. Selkeitä rajoitteita teknologian rantautumisesta matematiikan opetukseen ovat olleet CAS-laskimien hyväksyminen käytettäväksi ylioppilaskirjoituksissa vuonna 2012 ja lopulta siirtyminen digitaaliseen ylioppilaskokeeseen keväällä 2019 (Ylioppilastutkintolautakunta, 2018). Digitaaliseen koeympäristöön siirtyminen tarkoittaa kokelaiden osalta sitä, että käytössä on erilaisten laskinohjelmien (ml. CAS-laskimien tietokoneohjelmistot) lisäksi myös erilaisia apuvälineitä dynaamiseen ja visuaaliseen havainnollistamiseen (Ylioppilastutkintolautakunta, 2021). Myös lukiomatematiikan opintojen alun rakennetta on uudistettu perustamalla pitkälle ja lyhyelle oppimäärälle yhteinen ensimmäinen opintojakso opetussuunnitelmauudistuksen yhteydessä vuonna 2016. Näin valintaa pitkän ja lyhyen oppimäärän välillä ei tarvitse tehdä pelkästään peruskoulussa matematiikasta syntyneiden mielikuvien perusteella (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2013; ks. Portaankorva-Koivisto ym., 2021).

Muutokset opetuksessa käytettävissä välineissä ja opetuskäytänteissä sekä ylioppilaskokeissa herättävät kysymyksen siitä, että ovatko oppiaineen luonne ja oppimistavoitteiden painotukset säilyneet samoina vai onko niissä tapahtunut jopa suunnittelemattomia muutoksia. Tässä tutkimuksessa tätä kysymystä tarkastellaan analysoimalla oppikirjoissa esiintyviä tehtäviä. Tehtävistä analysoidaan sitä, että missä määrin ne harjoituttavat proseduraalista sujuvuutta ja missä määrin käsitteellistä ymmärtämistä. Lisäksi tarkastellaan tehtävien vaatimaa luovan ajattelun määrää.

Aiemmissä tutkimuksissa on havaittu, että oppikirjoilla on suomalaisessa matematiikan opetuksessa varsin suuri opetusta ohjaava vaikutus (Lepik ym., 2015; Perkkilä, 2002; Viholainen ym., 2015). Lepikin ja kollegojen (2015) tutkimus paljasti, että Suomessa oppikirjoilla on merkittävä vaikutus matematiikan opettajien didaktisten ratkaisujen valintaan, ja ne toimivat yleensä myös pääasiallisena opetuksessa käytettävien harjoitustehtävien lähteenä. Myös Viholaisen ja kollegojen (2015) lukion opiskelijoille ja matematiikan opettajille suunnatussa tutkimuksessa tuli esiin, että matematiikan oppikirjojen teoriaosuudet, esimerkit ja harjoitustehtävät vaikuttavat vahvasti opettajien työhön, mutta useimmille opiskelijoille oppikirja näyttäytyy lähinnä harjoitustehtäväpankkina. Kansainvälisissä tutkimuksissa on vastaavasti tullut esiin oppikirjojen ja muiden oppimateriaalien vahva vaikutus matematiikan opetukseen (Haggarty & Pepin, 2002; Johansson, 2006). Tätä taustaa vasten voidaan olettaa, että analysoimalla opetuksessa käytettäviä oppikirjoja ja erityisesti niissä olevia harjoitustehtäviä on mahdollista saada melko hyvä käsitys myös käytännön opetuksen painotuksista.

Lukion opetussuunnitelmaa on 2000-luvulla uudistettu kolme kertaa siten, että uusi opetussuunnitelma on otettu käyttöön vuosina 2004 (LOPS 2003), 2016 (LOPS 2015) ja 2021 (LOPS 2019) (Opetushallitus, 2003; Opetushallitus, 2015; Opetushallitus, 2019). Opetussuunnitelmassa LOPS 2019 opintojaksoista käytetään nimitystä moduuli. Tässä tutkimuksessa tarkasteltavat opintojaksot ovat seuraavat:

- LOPS 2003: Lukion matematiikan pitkä oppimäärä, kurssi MAA1
- LOPS 2003: Lukion matematiikan lyhyt oppimäärä, kurssi MAB1
- LOPS 2015: Kurssi MAY1
- LOPS 2019: Moduuli MAY1

Seuraavassa näihin opintojaksoihin viitataan lyhenteillä MAA1 (2003), MAB1 (2003), MAY1 (2015) ja MAY1 (2019).

TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Seuraavassa yhdistetään konseptuaaliseen ja proseduraaliseen matemaattiseen tietoon liittyvä viitekehys ja luovaa ja jäljittelevää matemaattista päättelyä käsittelevä viitekehys. Lisäksi tarkastellaan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon

ja luovan matemaattisen päättelyn esiintymistä opetussuunnitelmissa LOPS 2003, LOPS 2015 ja LOPS 2019.

Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto voidaan määritellä ymmärrykseksi siitä, kuinka käsitteet ja ongelmat muodostavat keskenään verkoston (Hiebert & Lefevre, 1986). Haapasalo ja Kadijevich (2000) kutsuvat tässä semanttisessa verkostossa olevia käsitteitä *solmuiksi* ja niiden välisiä yhteyksiä *linkeiksi*. Heidän mukaansa konseptuaaliseen tietoon sisältyy myös kyky liikkua joustavasti tässä verkostossa ja etsiä kuhunkin tilanteeseen tai ongelmaan sopivia käsitteitä ja niiden ominaisuuksia.

Proseduraalinen tieto voidaan määritellä kyvyksi käyttää ja esittää sääntöjä, algoritmeja ja proseduureja (Hiebert & Lefevre, 1986). Haapasalo ja Kadijevich (2000) näkevät proseduraalisen tiedon perustaksi peräkkäin toteutetuista operaatioista muodostuvat prosessit, jolloin proseduraalinen tieto tarkoittaa kykyä tunnistaa prosessin vaihe ja hahmottaa sen perusteella miten seuraava vaihe toteutetaan.

Haapasalon ja Kadijevichin (2000) mukaan konseptuaalinen tieto tyypillisesti vaatii tietoista ajattelua, kun taas proseduraalinen tieto voi koostua automatisoituneista ja alitajuisista askeleista. Tällöin tietotyyppien välillä vallitsee dynaaminen suhde eikä selkeää rajaa kahden tietotyypin välille voida määrittää. Haapasalon (2004) mukaan onkin mahdollista, että ratkaistaessa ongelmaa proseduraalisen tiedon varassa kaksi toisiinsa liittyvää sääntöä voidaan yhdistää onnistuneesti keskenään ymmärtämättä yhteyden taustalla olevia perusteluja. Yleensä kuitenkin konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto liittyvät toisiinsa vahvasti, ja hyvin monien ongelmien ratkaisussa tarvitaan näitä molempia.

Star (2005) pyrkii kumoamaan käsityksen, jonka mukaan proseduraalinen tieto olisi pinnallista ja konseptuaalinen syvällistä. Hän tarjoaa esimerkiksi syvällisestä proseduraalisesta tiedosta proseduraalista joustavuutta, jonka avulla yksilön on mahdollista vaikkapa yhtälönratkaisutilanteessa valita kuhunkin tilanteeseen parhaiten sopiva menetelmä eri vaihtoehtoista. Toisaalta myös tieto käsitteiden välisistä suhteista voi olla hyvinkin puutteellista ja pinnallista, perustuen asioiden ymmärtämisen sijaan esimerkiksi ulkoa oppimiseen.

Luova ja jäljittelevä matemaattinen päättely

Matemaattinen päättely voidaan määritellä ajatusten ketjuksi, jonka avulla voidaan tuottaa väittämiä tai saavuttaa ratkaisu tai lopputulos johonkin ongelmaan (Lithner, 2017). Matematiikan opetuksessa painottuu varsin usein erilaisten ratkaisualgoritmien käytön opettelu (Johnson ym., 2014). Tällainen opiskelu kehittää pääasiassa opiskelijoiden *jäljittelevää matemaattista päättelyä*, jossa opiskelija hyödyntää tehtävän ratkaisuprosessissa esimerkiksi jotain algoritmia, joka hänelle on annettu tehtävän ratkaisua varten tai jonka opiskelija muistaa muusta yhteydestä (Lithner, 2007).

Jäljittelevän päättelyn (*imitative reasoning*) vastakohtaksi Lithner (2007) määrittelee *luovan matemaattisperustaisen päättelyn* (*creative mathematically founded reasoning*) käsitteen. Tällaisen päättelyn tulee ensinnäkin olla päättelijälle uutta siten, että siinä joko luodaan kokonaan uusi tai konstruoidaan uudelleen unohtunut päättelysarja. Tämän lisäksi päättelyn tulee Lithnerin mukaan olla myös uskottavaa, eli johtopäätöksille tulee esittää myös argumentteja. Argumenteilla tulee olla myös matemaattinen perusta. On huomattava, että luovuus ja luova päättely ovat käsitteinä melko monitulkintaisia. Esimerkiksi Silver (1997) erottaa ”arkipäiväisen”, opetuksen keinoin kehitettävissä olevan luovan toiminnan luovuuden käsitteen erityislahjakkuuksiin viittaavista tulkinnoista. Hänen mukaansa luovassa toiminnassa keskeistä ovat joustavuus, sujuvuus ja innovatiivisuus. Tällainen luova toiminta on mahdollista lähtökohtaisesti kaikille myös arkielämässä. Myös tässä tutkimuksessa luova päättely ajatellaan tämäntyyppiseksi luovaksi toiminnaksi, mikä on sopusoinnussa myös Lithnerin (2007) tulkinnan kanssa.

Jäljittelevään päättelyyn perustuva lähestymistapa matematiikan opetuksessa saattaa tuntua houkuttelevalta silloin, jos halutaan säästää aikaa tai jos opiskeltava asia vaikuttaa olevan käsitteellisessä mielessä liian vaikeaa opiskelijoille (Lithner, 2017). Johnson ja kollegat (2014) ovatkin Ruotsissa tehdyssä tutkimuksessa havainneet, että opetuksessa käytetyt materiaalit näyttävät suosivan jäljittelevää päättelyä, erityisesti algoritmista päättelyä, luovaa päättelyä enemmän. Niss (2007) kuitenkin painottaa rakentavan ponnistelun merkitystä osana matematiikan oppimista. Hänen mukaansa matemaattisen kompetenssin kehittymisen kannalta on tärkeää, että opiskelijoille tarjotaan riittävästi ponnistelua vaativia tehtäviä. Matemaattisella kompetenssilla Niss tarkoittaa kykyä ymmärtää, arvioida ja käyttää matemaattisia taitoja erilaisissa tilanteissa. Luovaa päättelyä vaativat tehtävät palvelevat tätä tarkoitusta usein paremmin kuin jäljittelevää päättelyä vaativat tehtävät. Toisaalta Lithnerin (2017) mukaan jäljittelevän ja luovan päättelyn keskinäisen tasapainon löytäminen voi parantaa opiskelijoiden matemaattisen kompetenssin kehittymistä.

Matemaattisen tiedon ja matemaattisen päättelyn luokittelujen muodostama nelikenttä

Matemaattinen tieto voidaan siis jakaa konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon ja matemaattinen päättely luovaan ja jäljittelevään päättelyyn. Nämä kumpikin kategorisointi jossain määrin muistuttavat toisiaan, mutta peruslähtökohdiltaan ne käsittelevät eri asioita: Ensimmäinen kategorisointi liittyy yksilöllä olevaan matemaattiseen tietoon, kun taas jälkimmäinen kategorisointi käsittelee toiminnallista prosessia, päättelyä, jossa tarvitaan tietoa. Proseduraalista tietoa hyödyntävä päättely liittyy jonkun proseduurin suorittamiseen ja proseduraalisen tiedon omaksuminen tarkoittaa proseduurin vaiheiden oppimista (Kilpatrick ym., 2001). Konseptuaalista tietoa hyödyntävä päättely ja konseptuaalisen tiedon

omaksuminen puolestaan liittyvät käsitteiden, käsitteiden ominaisuuksien tai käsitteiden välisten yhteyksien tarkasteluun (Kilpatrick ym., 2001, Haapasalo & Kadujevich, 2000). Se, missä määrin päättely vaatii luovuutta, riippuu yksilön aiemmista kokemuksista ja tarjolla olevista avuista. Näitä apuja voivat olla painetussa tai sähköisessä materiaalissa olevat suoritusohjeet tai esimerkit tai esimerkiksi opettajan tai oppilastoverin antamat neuvot. Proseduurin suorittaminen voi vaatia luovuutta, jos siihen ei ole olemassa valmiita mallia, ja toisaalta konseptuaaliseen päättelyyn on mahdollista tarjota valmiita toimintamalleja. Täten voidaan ajatella, että sekä proseduraaliseen tietoon perustuva luova päättely että konseptuaaliseen tietoon perustuva jäljittelevä päättely ovat mahdollisia. Niinpä on mahdollista ja mielekästä muodostaa seuraavat päättelykategoriat:

- Proseduraaliseen tietoon perustuva jäljittelevä matemaattinen päättely (PJ)
- Proseduraaliseen tietoon perustuva luova matemaattinen päättely (PL)
- Konseptuaaliseen tietoon perustuva jäljittelevä matemaattinen päättely (KJ)
- Konseptuaaliseen tietoon perustuva luova matemaattinen päättely (KL)

Käytännössä etenkin monimutkaisemmat päättelyprosessit usein sisältävät elementtejä useammasta kuin yhdestä kategoriasta. Mielenkiintoista onkin tutkia kategorioiden välisiä painotuksia. Useimmiten jonkun kategoriatyypin päättely on prosessissa keskeisin. Lisäksi on huomattava, että tiedon ja päättelyn kategorisointiin perustuva malli ei riitä kuvaamaan kaikkia matemaattisessa päättelyssä tarvittavia kompetensseja. Esimerkiksi Kilpatrickin ja kollegojen (2001) niin kutsutun narunpäämällin mukaan matematiikassa tarvitaan konseptuaalisen ymmärryksen ja proseduraalisen sujuvuuden lisäksi strategista kompetenssia, kykyä loogiseen ajatteluun, reflektioon ja asioiden perustelemiseen sekä oikeanlaista asennetta ja näkemystä matematiikkaa kohtaan. Nämä kaikki elementit ovat lisäksi voimakkaasti vuorovaikutuksessa ja sidoksissa toisiinsa. Päättelyn kategorisoinnin tarkoituksena ei olekaan tarjota selitysmallia matemaattiselle päättelylle, vaan toimia työkaluna painotuserojen havaitsemiselle.

Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto ja luova päättely lukion opetus-suunnitelmissa 2000-luvulla

Opetussuunnitelmissa LOPS 2003 (Opetushallitus, 2003), LOPS 2015 (Opetushallitus, 2015) ja LOPS 2019 (Opetushallitus, 2019) matematiikan yleiset tavoitteet muistuttavat melko pitkälle toisiaan. Kaikissa näissä mainitaan matemaattisesti esitetyn tiedon ymmärtäminen, hyödyntäminen ja tuottaminen sekä tutustuminen matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin. Lisäksi mainitaan matemaattisten käsitteiden merkityksien hahmottaminen ja niiden liittäminen laajempiin kokonaisuuksiin. Nämä kaikki tavoitteet liittyvät ensisijaisesti konseptuaaliseen

tietoon. Proseduraaliseen tietoon liittyvistä tavoitteista mainitaan laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitojen kehittäminen. Opetussuunnitelmissa LOPS 2015 ja LOPS 2019 mainitaan lisäksi tietokoneohjelmistojen käytön harjaannuttaminen matematiikan oppimisen, tutkimisen ja ongelmanratkaisun apuvälineinä. Tämä viitanee ensisijaisesti proseduraaliseen tietoon. Lisäksi kaikissa kolmessa opetussuunnitelmassa mainitaan, että opiskelijaa kannustetaan kokeiluihin ja luovien ratkaisujen kehittämiseen. Opetussuunnitelmassa LOPS 2019 korostuvat aiempia opetussuunnitelmia enemmän tiedon ja tulosten kriittinen arviointi, jonka voidaan ajatella vaativan erityisesti konseptuaalista tietoa. Lisäksi aiemmista opetussuunnitelmista poiketen korostetaan monitieteisyyttä, joka myös liitetään luovuuteen.

Kurssin MAA1 sisältöinä ovat funktioihin ja yhtälöihin liittyvät perusasiat. Kursikohtaisissa tavoitteissa mainitaan proseduraaliseen tietoon viittaavat yhtälönratkaisu- ja prosenttilaskentataitojen vahvistaminen, neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjen käytön harjaantuminen ja potenssiyhtälöiden ratkaisemisen oppiminen. Sen sijaan konseptuaaliseen tietoon tavoitteissa viittaavat verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssi käsitteiden ymmärtäminen ja funktiokäsitteen ymmärtämisen syventäminen.

Kurssin MAB1 aiheena ovat lausekkeet ja yhtälöt. Konseptuaaliseen tietoon kurssikohtaisissa tavoitteissa viittaa lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen yhtälön käsitteiden ymmärtäminen. Muut mainitut tavoitteet liittyvätkin suurelta osin proseduraaliseen tietoon. Näitä ovat muun muassa yhtälönratkaisutaitojen vahvistaminen, toisen asteen yhtälön ratkaisemisen oppiminen, matematiikan käyttö jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisussa ja ongelmien muotoileminen yhtälöksi.

LOPS 2015:n kaikille yhteisen opintojakson MAY1 sisältö on melko moninainen käsittäen muun muassa peruslaskutoimituksiin, prosenttilaskentaan, funktioon, lukujonoihin, potenssin ja logaritmiin liittyvää asiaa. Listatuista kurssikohtaisista tavoitteista käsitteelliseen tietoon voidaan liittää funktion käsitteen ymmärryksen vahvistaminen ja lukujonon käsitteen ymmärtäminen. Proseduraaliseen tietoon puolestaan viittaavat peruslaskutoimitusten ja prosenttilaskennan periaatteiden kertaaminen, kyky määrittää lukujonoja, kyky ratkaista ongelmia lukujonon avulla sekä kyky käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kuvaajan ja lukujonon tutkimisessa ja lukujonoihin liittyvien ongelmien ratkaisemisessa.

Moduulin MAY1 (LOPS 2019) sisältö painottuu peruskoulussa opittujen asioiden kertaamiseen ja täydentämiseen. Käsitteelliseen tietoon opintojaksokohtaisissa tavoitteissa viittaa selkeimmin funktion käsitteen ymmärryksen vahvistaminen. Lisäksi tavoitteissa mainitaan yhtälön ja yhtälöparien ratkaisemisen periaatteiden ymmärtäminen, joka ainakin näin ilmaistuna viitanee ensisijaisesti konseptuaaliseen tietoon. Proseduraaliseen tietoon viittaavia tavoitteita puolestaan ovat

prosenttilaskennan periaatteiden kertaaminen, verrannollisuuden käytön hallinta, murtolukujen laskutaitojen syventäminen, potenssien laskusääntöjen kertaaminen ja ohjelmistojen käytön oppiminen kuvaajien piirtämiseen, havainnointiin ja yhtälöiden ratkaisemiseen.

Verrattaessa edellä käsiteltyjä kolmen opetussuunnitelman tavoitteita havaitaan, että proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon keskinäinen suhde näyttää pysyvän melko samana sekä kaikkien kolmen opetussuunnitelman matematiikan yleisten tavoitteiden että kurssien MAA1 (2003), MAB1 (2003) ja MAY1 (2015) opintojaksokohtaisten tavoitteiden osalta. Moduulin MAY1 (2019) tavoitteissa sen sijaan konseptuaalinen tiedon osuus vaikuttaa kuitenkin jäävään vähäisemmäksi verrattuna muihin tarkasteltuihin kursseihin. Opetussuunnitelmissa LOPS 2015 ja LOPS 2019 tavoitteissa on mainittu opetussuunnitelmasta LOPS 2003 poiketen lähinnä proseduraaliseen tietoon viittaava teknisten apuvälineiden sujuvan käytön harjoittelu.

Luova matemaattinen päättely ei eksplisiittisesti tule esiin minkään mainitun neljän opintojakson MAA1 (2003), MAB1 (2003) ja MAY1 (2015) opintojaksokohteisissa tavoitteissa.

TUTKIMUKSEN TAVOITE

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, kuinka painotukset lukion matematiikan ensimmäisen opintojakson harjoitustehtävien vaatimassa matemaattisessa tiedossa ja päättelyn luonteessa ovat muuttuneet 2000-luvun aikana. Harjoitustehtäviä analysoidaan ainoastaan suhteessa oppimateriaaliin. Tämä tarkoittaa sitä, että harjoitustehtävien vaatimuksia pyritään analysoimaan tehtävän luonteen ja tehtävän oppimateriaalissa olevan kontekstin avulla. Konteksti koostuu oppimateriaalissa olevista tehtävään liitetyistä tai tehtävää edeltävistä esimerkeistä ja teoriaosuuksista. Tehtävän vaatimukseen ratkaisuhetkellä toki vaikuttavat ratkaisijan tiedot, taidot ja kokemukset, opettajan toiminta sekä ratkaisutilanne. Näiden tekijöiden vaikutusta ei tässä tutkimuksessa kuitenkaan huomioida.

TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tässä tutkimuksessa harjoitustehtävien edellyttämiä vaatimuksia analysoitiin Taulukossa 1 esitettävien tehtäväkategorioiden avulla. Kukin tehtävä pyrittiin sijoittamaan parhaiten sopivaan tehtäväkategoriaan Taulukossa 1 esitettyjä kriteerejä soveltaen.

Jos tehtävän päätavoitteena oli jonkun proseduurin tai teknisen laskutoimituksen harjoittelu, sen yleensä katsottiin harjoituttavan ensisijaisesti proseduraalista tietoutta ja siten tehtävä sijoitettiin joko kategoriaan PJ tai kategoriaan PL. Jos taas tehtävän päätavoitteena oli tehdä päätelmiä jostakin matemaattisesta käsitteestä tai käsitteiden välisistä yhteyksistä, tulkittiin sen ensisijaisesti vaativan konseptuaalista tietoa ja se sijoitettiin joko kategoriaan KJ tai kategoriaan KL.

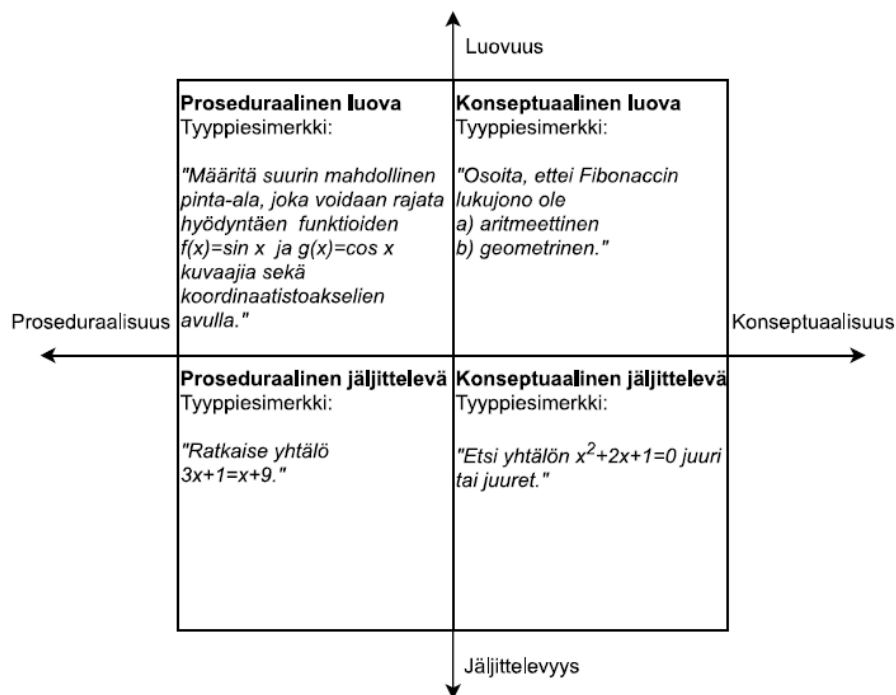
Taulukko 1. Tehtäväkategorioiden kriteerit.

Kategoria	Määritelmä
Proseduraalinen jäljittelevä (PJ)	Tehtävä keskittyy jonkin proseduurin harjoitteluun. Tehtävään löytyy sen oheismateriaalista vähintään yksi esimerkki tai kaava, josta yksin saadaan tehtävän ratkaisuun tarvittava prosessi.
Proseduraalinen luova (PL)	Tehtävässä vahvistetaan tai syvennetään jonkin proseduurin käytön sujuvuutta. Tehtävään ei löydy oheismateriaalista suoraan esimerkkiä tai ratkaisijan tulee itse koostaa tarvittavat proseduurit ja niiden käyttö useammasta esimerkistä.
Konseptuaalinen jäljittelevä (KJ)	Tehtävässä tutustutaan johonkin uuteen käsitteeseen ja sen ominaisuuksiin sekä niiden käyttöön. Tehtävään linkittyy oheismateriaaleista vähintään yksi esimerkki, määritelmä tai kaava, jossa esitellään tehtävän ratkaisuun vaadittavat matemaattiset ominaisuudet ja laskusäännöt. Tehtävä ei vaadi merkittävää tiedon soveltamista. Tehtävässä yleensä luodaan mallia seuraten matemaattisen säännön, todistuksen, laskun, muunnoksen tai datan osa tai hyödynnetään jotakin näistä.
Konseptuaalinen luova (KL)	Tehtävässä vahvistetaan tai syvennetään johonkin käsitteeseen tai sen ominaisuuksiin liittyvää tietoutta. Tehtävään ei löydy oppimateriaalista selkeästi linkittyvää esimerkkiä tai kaavaa, tai vaihtoehtoisesti tehtävään linkittyy useita esimerkkejä, joita soveltamalla ratkaisijan on mahdollista löytää käsitteeseen liittyvät säännöt ja ominaisuudet. Tehtävässä yleensä luodaan matemaattinen sääntö, todistus, lasku, muunnos tai data tai tulkitaan jotakin näistä.

Luova-jäljittelevä -asteikolla keskeisenä kriteerinä analyysissä oli, kuinka paljon ja kuinka helposti opiskelijan on mahdollista löytää tehtävän ratkaisuun apua oppimateriaalista. Jäljittelevää päättelyä vaativiksi luokiteltujen tehtävien kohdalla tehtävän ratkaisuun vaadittavat vaiheet ja tiedot olivat suhteellisen helposti löydettävissä oppimateriaalista. Proseduraalisissa tehtävissä (kategoria PJ) tämä saattoi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että laskussa tapahtuvat vaiheet olivat toisinnettavissa valmiista esimerkistä. Sen sijaan luovaa päättelyä vaativissa proseduraalisissa tehtävissä (kategoria PL) opiskelijan tuli pystyä yhdistelemään ja soveltamaan useista eri esimerkeistä löytyvää tietoa ja luoda niiden pohjalta käsillä

olevaan tehtävään sopiva proseduuri. Konseptuaalisissa tehtävissä puolestaan keskeisenä kriteerinä matemaattisen päättelyn tyyppin suhteen oli se, millä tasolla jokin käsite tai käsitteet tulee hallita. Jäljittelevää päättelyä vaativiksi luokitelluissa tehtävissä (kategoria KJ) ratkaisun kannalta oleellinen käsite ja sen tarvittavat ominaisuudet oli annettu oppimateriaalissa, mutta luovaa päättelyä vaativissa tehtävissä (kategoria KL) opiskelijan tuli pystyä yhdistämään käsitteestä aiemmin oppimaansa asiaan uusia ominaisuuksia ja piirteitä. Esimerkiksi kuvaajien tulkitseminen voidaan katsoa olevan eräänlainen luova tehtävä, sillä siinä opiskelijan tulee luoda päätelmiä ja liittää visuaaliseen, tässä tapauksessa graafiseen, esitystapaan verbaalinen kuvaus. Luovissa konseptuaalisissa tehtävissä tehtävänä saattoi myös olla jonkin käsitteeseen liittyvän ominaisuuden johtaminen tai todistaminen.

Kuvassa 1 on esitetty tyyppiesimerkkejä kustakin analyysissä käytetystä tehtäväkategoriasta.



Kuva 1. Tehtäväluokat asettuneina proseduraalis-konseptuaalinen- ja luova-jäljittelevä -asteikkojen muodostamaan koordinaatistoon.

Tutkimuksen kohteeksi valittiin yhteensä seitsemän kustannettua oppikirjaa siten, että niistä kaksi oli suunnattu kurssille MAA1 (2003), kaksi kurssille MAB 1 (2003), kaksi kurssille MAY1 (2015) ja yksi moduulille MAY1 (2019). Moduulin MAY1 (2019) osalta tyydyttiin yhteen oppikirjaan, koska kyseisen moduulin oppikirjoissa oli analyysin tekohehkellä vielä saatavuusongelmia. Samalle kurssille suunnatut kirjat valittiin eri kustantamoilta. Kurssien MAA1 (2003), MAB 1

(2003) ja MAY1 (2015) oppikirjoista valittiin systemaattisella otannalla 50 analysoitavaa tehtävää kustakin oppikirjasta, ja moduulin MAY1 (2019) kirjasta valittiin 100 tehtävää. Tavoitteena oli valita tehtäviä tasapuolisesti koko kirjan eri osista. Tehtävien kokonaismäärän perusteella määritettiin jokaiselle kirjalle tietty otantaväli, joka määräsi monenko tehtävän välein tehtäviä otetaan luokiteltavaksi. Tällä otantatavalla saatiin luokitteluun tehtäviä kirjan jokaisesta aihealueesta ja tehtävien haastavuustasoon saatiin myös vaihtelua. Analysoitava otos siis koostui yhteensä 400 tehtävästä siten, että jokaiselta neljältä opintojaksolta mukana oli 100 tehtävää.

Analyysissa otokseen valitut tehtävät luokiteltiin Taulukossa 1 esitetyn kategorisoinnin mukaan. Tämän jälkeen opintojaksojen jakaumien välisiä eroja tarkasteltiin tilastollisesti khiin neliötestin ja residuaalien avulla. Luokittelun luotettavuuden arvioimiseksi toinen asiaan perehtynyt luokittelija suoritti jälkikäteen vielä kahdesta eri kirjasta valitun sadan tehtävän riippumattoman tarkistusluokittelun. Luokittelujen yhdenmukaisuusaste oli konseptuaalinen-proseduraalinen -asteikolla 97 % ja luova-jäljittelevä -asteikolla 93 %. Koko nelikentän suhteen yhdenmukaisuusaste oli 91 %. Näkemyserot liittyivät muutamaankin yksittäiseen tehtävään, ja niitä esiintyi molemmilla asteikoilla kumpaankin suuntaan. Luokkien suhteellisiin jakaumiin eroilla oli hyvin vähän vaikutusta. Alkuperäistä luokittelua ei ryhdytty tarkistusluokittelun jälkeen enää muuttamaan. Luotua nelikenttää ja sen toimivuutta testattiin myös opiskelijaryhmillä, joiden tehtäväksi annettiin luokitella alakoulun matematiikan oppikirjoissa esiintyviä tehtäviä nelikenttää käyttäen. Opiskelijoiden luokittelut noudattelivat pääasiassa nelikentän tekijän näkemyksiä tehtävien luokittelusta.

TULOKSET

Tehtäväkategorioiden jakaumat

Tehtäväkategorioiden jakaumat opintojaksoittain on esitetty Taulukossa 2. Kaikilla tarkastelluilla kursseilla frekvenssiltään yleisin kategoria on "Proseduraalinen luova". Toiseksi yleisin kategoria LOPS 2003:n kursseilla MAA1 ja MAB1 on "Proseduraalinen jäljittelevä", kun taas MAY1 (2015) ja MAY1 (2019) -opintojaksoilla toiseksi yleisin kategoria on "Konseptuaalinen luova". Selkeästi frekvenssiltään pienin kategoria kurssia MAA1 (2003) lukuun ottamatta on "Konseptuaalinen jäljittelevä".

Luovaa matemaattista päättelyä ainakin jossakin määrin vaativien tehtävien (kategoriat PL ja KL) osuus koko otannasta (n=400) on 70,5 prosenttia ja jäljittelevää matemaattista päättelyä vaativien tehtävien (kategoriat PJ ja KJ) osuus 29,5 %. Kaikista tehtävistä 68,5 % luokiteltiin proseduraalista tietoa vaativiksi (kategoriat PJ ja PL) ja 31,5 % konseptuaalista tietoa vaativiksi. LOPS 2003:n kursseilla MAA1 ja MAB1 konseptuaalista tietoa vaativien tehtävien osuus jäi alle neljännekseen, mutta myöhemmillä opintojaksoilla MAY1 (2015) ja MAY1 (2019) niiden osuus

oli jo selkeästi suurempi. Eroa on nimenomaan kategorian ”Konseptuaalinen luova” osuuksissa. Mielenkiintoista on myös havaita, että sekä proseduraalista tietoa että jäljittelevää päättelyä vaativien tehtävien osuudet LOPS 2003:n pitkän ja lyhyen matematiikan kursseilla MAA1 ja MAB1 ovat lähes täsmälleen yhtä suuret.

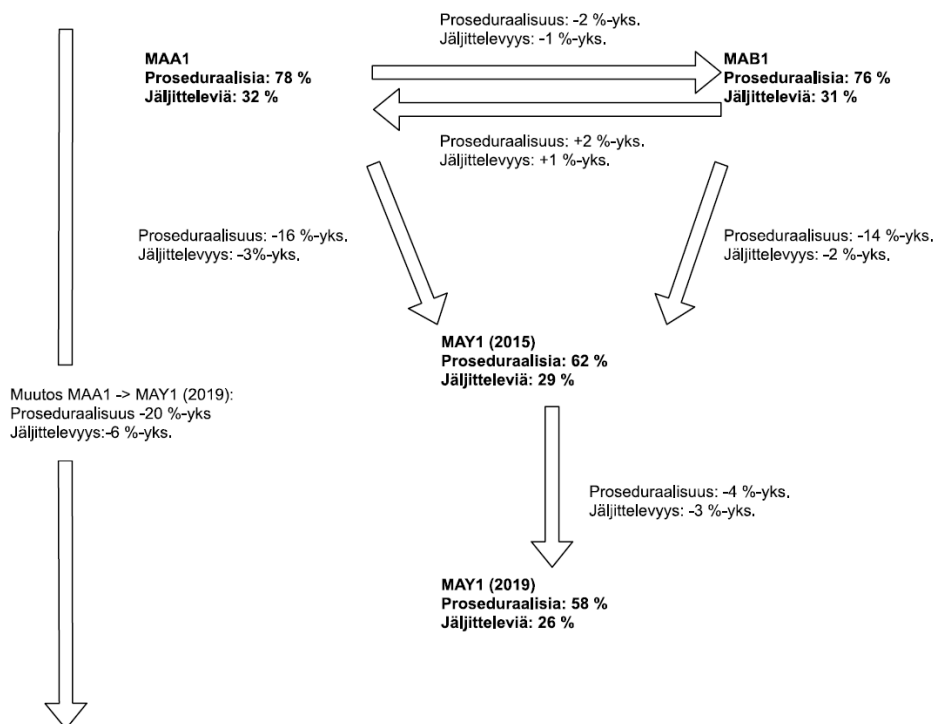
Taulukko 2. Tehtävien prosentuaalinen jakautuminen kategorioihin opintojaksokohtaisesti.

Opintojakso	n	PJ (%)	PL (%)	KJ (%)	KL (%)
MAA1 (2003)	100	20	58	12	10
MAB1 (2003)	100	24	52	7	17
MAY1 (2015)	100	18	44	11	27
MAY1 (2019)	100	19	39	7	35
Yhteensä	400	20,3	48,3	9,3	22,3

Kuvassa 2 esitettävässä kaaviossa on kuvattu proseduraalista tietoa ja jäljittelevää matemaattista päättelyä vaativien tehtävien frekvenssiosuuksien opintojaksojen välisiä eroja prosenttiyksikköinä. Siinä LOPS 2015:n käyttöönoton myötä tapahtunut konseptuaalista tietoa vaativien tehtävien osuuden edellä mainittu kasvu näkyy proseduraalista tietoa vaativien tehtävien osuuden merkittävänä vähenemisenä. Tarkasteltavien opintojaksojen välillä on frekvenssijakaumissa tilastollinen, efektiltään pieni ero ($\chi^2(9) = 23.981$, $p=.004$, $V=0.14$). Ero paikantuu konseptuaalisiin luoviin tehtäviin siten, että opintojaksolla MAY1 (2019) kategoria ”Konseptuaalinen luova” on yliedustettuna (std. res = 2.7), kun taas kurssilla MAA1 (2003) sama kategoria on aliedustettuna (std. res = -2.6). Tarkasteltaessa opetussuunnitelmien päivittämisen yhteyksissä tapahtuneita suhteellisten osuuksien muutoksia näyttää tämän aineiston perusteella siltä, että suurin muutos tapahtui vuonna 2016, kun LOPS 2015 ja sen myötä lukion matematiikan molemmille oppimäärille yhteinen ensimmäinen kurssi otettiin käyttöön. Tällöin proseduraalista tietoa vaativien tehtävien osuus väheni vanhaan pitkään matematiikkaan verrattuna 16 prosenttiyksikköä ja vanhaan lyhyeen matematiikkaan verrattuna 14 prosenttiyksikköä.

Samalle opetussuunnitelmalle suunnattuja oppikirjoja verrattiin keskenään proseduraalista ja konseptuaalista tietoa vaativien tehtävien suhteellisten osuuksien suhteen, luovaa ja jäljittelevää päättelyä vaativien tehtävien suhteellisten osuuksien suhteen ja neljän tehtäväkategorian suhteellisten osuuksien suhteen. Ainoa löydetty ero oli kurssin MAY1 (2015) kohdalla efektiltään kohtalainen tilastollinen ero neljän tehtäväkategorian suhteellisten osuuksien välille ($\chi^2(3)=10.946$, $p=.012$, $V=0.33$) ja luovaa ja jäljittelevää päättelyä vaativien tehtävien osuuksien

välille ($\chi^2(1)=8.208$, $p=.004$, $V=0.29$). Tehtäväkategorioiden väliset erot eivät kuitenkaan paikantuneet yhdenkään kategorian suhteen residuaalien jäädessä itseisarvollisesti alle 1.96 kaikissa kategorioissa.



Kuva 2. Proseduraalista tietoa ja jäljittelevää päättelyä vaativien tehtävien prosentuaalisten osuuksien erot opintojaksojen välillä.

POHDINTA

Tutkimuksen tulokset osoittavat, että kahden viimeisimmän lukion opetussuunnitelmauudistuksen myötä lukiomatematiikan ensimmäisten opintojaksojen harjoitustehtävissä konseptuaalista tietoa vaativien tehtävien suhteellinen osuus on kasvanut ja vastaavasti proseduraalista tietoa vaativien tehtävien osuus pienentynyt. Myös luovaa matemaattista päättelyä vaativien tehtävien osuus on hie-man kasvanut.

Opetussuunnitelmia LOPS 2003, LOPS 2015 ja LOPS 2019 verrattaessa ei aina-kaan suoraan tule esiin lukiomatematiikan painotuksen muuttuminen konseptu-aalisen tiedon suuntaan ensimmäisten opintojaksojen osalta. Tämä herättää ky-symyksen, onko havaittu muutos konseptuaalista tietoa painottavien tehtävien suuntaan tarkoituksellinen vai ovatko muut muutokset sisällöissä ja käytänteissä johtaneet siihen. Voidaan ajatella, että sähköisten ohjelmistojen, etenkin CAS-laskennan, entistä laajemman käyttöönoton myötä proseduraalisten laskumene-telmien harjoittelun tarve on vähentynyt ja mekaaniset laskutoimitukset voidaan suorittaa nopeammin laskinohjelmistojen avulla (Eronen & Haapasalo, 2010). Ai-karesursseja opetuksessa jää siten enemmän käytettäväksi käsitteellisemmälle

tarkastelulle, ongelmanratkaisulle sekä päättelylle ja perustelemiselle (Verschaffel ym., 2009). Sähköiset ohjelmistot helpottavat myös visuaalista mallintamista ja suurten aineistojen analysointia esimerkiksi taulukkolaskennan avulla. Lisäksi erilaisten vaihtoehtojen kokeileminen on helpompaa sovellusten avulla kuin pelkästään kynää ja paperia käyttämällä. Täten tehtävien painotusta on helpompi siirtää kohti soveltamista ja ongelmanratkaisua. Tällaisiin tehtäviin on harvemmin tarjolla valmiita toimintamalleja tai algoritmeja, ja usein ne vaativatkin oppilaalta omaa luovaa ajattelua (Kilpatrick ym., 2001). Tämän kehityksen voisi odottaa näkyvän luovaa matemaattista ajattelua vaativien tehtävien painotuksen lisääntymisenä.

Lukiomatematiikan ensimmäinen kurssi on tärkeässä roolissa mielikuvien ja odotusten luomisessa opiskelijoille. Sen tulisi myös motivoida opiskelijoita matematiikan opiskeluun. MAY1 (2015) -kurssi ei tämän suhteen ollut kuitenkaan kovin hyvin onnistunut, vaan sitä pidettiin laajana ja vaikeana eikä se juuri muuttanut opiskelijoiden kuvaa matematiikasta (Portaankorva-Koivisto ym., 2018). Koulumatematiikkaa etenkin peruskoulun osalta on perinteisesti pidetty laskentapainotteisena, joten konseptuaalista tietoa painottava lähestymistapa lukiossa saattaa olla yksi hämmennystä aiheuttava tekijä lukio-opintojaan aloittelevalla opiskelijalla. Mikäli konseptuaalipainotuksesta lukiomatematiikan ensimmäisen kurssin osalta halutaan jatkossa pitää kiinni, tähän asiaan on syytä kiinnittää huomiota.

Nyky-yhteiskunnassa usein korostetaan tiedonkäsittelyyn, luovuuteen, ongelmanratkaisuun ja kommunikointiin liittyvien taitojen merkitystä (Flynn, 2014). Siten myöskään matematiikassa painotuksen siirtymistä kohti konseptuaalista tietoa ja luovaa matemaattista ajattelua harjoittavien tehtävien suuntaan ei lähtökohtaisesti voi pitää huonona asiana. Kuitenkin myös sujuvaa mekaanista laskutaitoaakin tarvitaan, joten etenkin proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon painotusten suhteeseen on tärkeää kiinnittää huomiota tulevaisuudessa.

Tutkimuksella on rajoituksensa. Eri opetussuunnitelmien mukaisia oppikirjasarjoja on tähän tutkimukseen valittu vain rajattu otos. Toisaalta opetussuunnitelmittain oppikirjasarjoista ei löytynyt raportoitavia eroja ja tämä osaltaan vahvistaa tutkimuksen sisältövaliditeettia. Kirjoitusvaiheessa viimeisimmän opetussuunnitelman mukaisia oppikirjoja oli tarjolla vain yksi, joka on huomioitava tulkintoja tehdessä. Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon dynaaminen luonne asettaa kyseenalaiseksi absoluuttisen rajanvedon näiden tietopainotusten välille (ks. Haapasalo & Kadjevich, 2000). Tämä näkyi myös aineiston tarkistuksessa luokittelujen yhdenmukaisuudessa lähes viiden prosentin erona. Kuitenkin eron jäädessä näin pieneksi vahvistui tutkimuksen keskeisin tulos eri tietopainotteisten tehtävien suhteellisissa osuuksissa tapahtuneista muutoksista.

LÄHTEET

- Eronen, L. & Haapasalo, L. (2010). Making mathematics through progressive technology. Teoksessa: Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Palsdottir, G., Dahl, B. & Haapasalo, L. (Toim.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*. Information Age Publishing. *The Montana Mathematics Enthusiast: Monograph Series in Mathematics Education*, 701–710.
- Flynn, T. (2014). Do they have what it takes? A review of the literature on knowledge, competencies, and skills necessary for twenty-first-century public relations practitioners in Canada. *Canadian Journal of Communication*, 39, 361–384.
- Haapasalo, L. (2004). Pitäisikö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitäisikö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 50–83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Haapasalo, L. & Kadjevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *JMD*, vol 21, 139–157.
- Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567–590.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (Toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1–27). Lawrence Erlbaum Ass.
- Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11(3), 5–30.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (toim.) 2001. *Adding it up*. National Academy Press.
- Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom– the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 129–156.
- Lithner, J. (2007). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276.
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 49(1), 1–13.
- Niss, M. A. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to utopia. Teoksessa F. K. Lester, Jr. (Toim.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2, 1293–1312. Information Age Publishing.

- Opetushallitus. (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Haettu 8.4.2021 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf
- Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Haettu 8.4.2021 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf
- Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Haettu 8.4.2021 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Opetus- ja kulttuuriministeriö. (2013). *Tulevaisuuden lukio. Valtakunnalliset tavoitteet ja tuntijako*. (Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä, 2013:4.) Haettu 16.1.2022 osoitteesta <https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/75291/tr14.pdf>
- Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa*. [Väitöskirja]. Jyväskylän yliopisto.
- Portaankorva-Koivisto, P., Eronen, L., Kupiainen, S. & Hannula M.S. (2018). Lukion ensimmäinen yhteinen matematiikan kurssi - mielekäästä ja merkityksellistä? *FMSERA Journal*, 2(1), 57-66.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 29(3), 75-80. doi:10.1007/s11858-997-0003-x.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411. <http://www.jstor.org/stable/30034943>
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359. doi:10.1002/cbdv.200490137.
- Viholainen, A., Partanen, M., Piironen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 157-178.
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2018). *Tiedote matematiikan opettajille ja opiskelijoille*. *Matematiikan digitaalinen ylioppilaskoe*. Haettu 16.1.2022 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoisen_tutkinto/matematiikka_tiedote_digitaalinen_koe.pdf
- Ylioppilastutkintolautakunta. (2021). *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet*. Haettu 16.1.2022 osoitteesta https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_määräykset_matematiikan_koe.pdf?v=060220