Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博 士 論 文 審 査 報 告 書
Doctoral Dissertation Review Report

論　文　題　目
Dissertation Title

Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval

単位閉区間の区分線形同相写像群の直積分解

申　請　者
(Applicant Name)
Takamichi SATO
佐藤　尚倫

Department of Pure and Applied Mathematics　Research on Mathematical Structures of Materials

March, 2022

幾何学的群論は, 有限生成群を幾何学的に捉え, その代数的性質をその群が作用する幾何的な対象のトポロジー的または幾何的性質を考察することで研究するものである. 幾何学的群論は組合せ群論から生まれ, 20 世紀初頭に Max Dehn, Jacob Nielsen, Otto Schreier らによって先駆的な研究がなされている. その後 1980 年代の後半から Mikhael Gromov らの研究によって現代の幾何学的群論が形づけられてきた. 現在の幾何学的群論は代数学や幾何学のみならず計算機科学, 幾何解析, 測度空間上の群作用の研究など多岐にわたっている.

本論文は幾何学的群論で広く研究されているトンプソン群とバウムスラグ・ソリター群に焦点をあて, 研究を進めたものであり,

第 1 章 Groups of linear homeomorphisms

第 2 章 Geometric description of Schreier graphs of Baumslag-Solitar groups

からなる.

トンプソン群 F, T, V は 1965 年に Richard Thompson によって導入された. McKenzie-Thompson はそれらを利用してワード問題が解決できない有限表示群を構成した. Richard Thompson は未発表のノートで T, V は単純群, よって, 無限群であるが有限表示をもつ単純群であることを示している. 一方, F 自体は単純群ではないが, 交換子群 $[F, F]$ は単純群であり, 剰余群 $F/[F, F]$ は階数 2 の自由可換群である. また, Richard Thompson はノートで「群 F はフォン・ノイマン予想の反例となりうる群として導入した」と記している. 特に, 群 F は群論における様々な予想の反例となる珍しい性質をもっていて最も広く研究されていている. そのためトンプソン群とは群 F を意味することが多い.

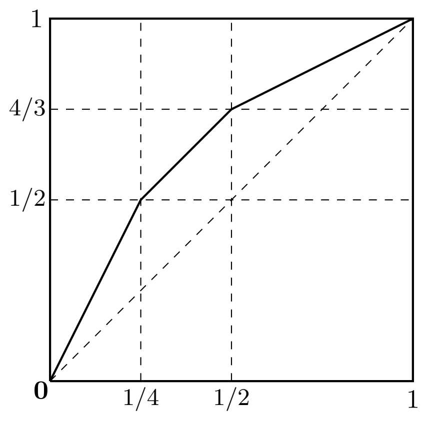
F は無限表示によって次のように簡潔に表示できる.

$$F = \langle\, x_0, x_1, \dots \mid x_i^{-1} x_n x_i = x_{n+1},\ i = 0, 1, \dots, n-1,\ n = 1, 2, \dots \rangle.$$

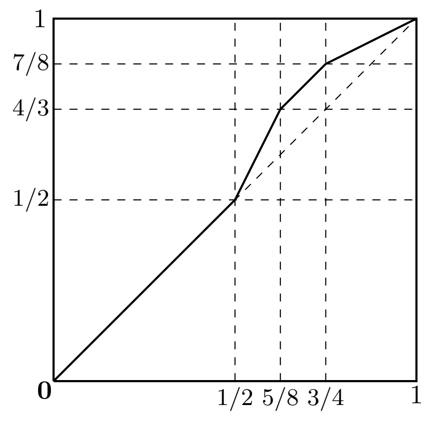
ここで, $x_n = x_{n-2}^{-1} x_{n-1} x_{n-2}$ $(n = 2, 3, 4)$ と定義すると,

$$F = \langle\, x_0, x_1 \mid x_0^{-1} x_2 = x_3,\ x_1^{-1} x_3 x_1 = x_4 \,\rangle.$$

という有限表示をもつ. F を幾何的に表現する方法がいくつかあるが, 有限個の傾きが 2^n, 端点が $\frac{a}{2^n}$ $(a, n \in \mathbb{N})$ の線分から成る単位閉区間 $\mathbb{I} = [0, 1]$ の区分線形自己同相写像全体から成る群は群 F と同一視できる. 本論文ではこの表現をもって群 F としている.



x_0 に対応する区分線形同相写像



x_1 に対応する区分線形同相写像

Richard Thompson 自身が考えたフォン・ノイマン予想の反例としての問題「群 F は従順ではない」は解決していないこともあり, F の構造や群論的性質の解明にはほど遠い状況である. 一方, この幾何的表現を用いると, F は上記の性質のほかに, 捩れのない有限表示群であり, 非可換自由部分群をもたないなどという興味深いことを示すことができる. さらに, この表現は最近の C. Bleak による可解部分群の分類や C. Bleak-B. Wassink による有限指数部分群の構造の研究, Golan-Sapir による無限指数極大部分群に関連する研究などに採られている. Golan-Sapir では, F の単位閉区間への自然な作用によって有限個の実数に関する固定部分群の構造と性質を調べられている. 彼らは次の 3 つの観点からこれら固定部分群が同型である十分条件を与えた.

- F の有限個の交換子部分群の直積と有限階数の自由可換群の半直積を見る
- 固定する有限個の実数の配列に注目して得られる直積構造を見る
- iterated ascending HNN-extennsion を見る

本論文では, 上記の F の幾何的表現を一般化して, 有限個の線分から成る単位閉区間 $\mathbb{I} = [0, 1]$ の向きを保つ区分線形同相写像全体から成る群 $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ を考察する. 明らかに群 $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ は F を部分群として含む. ここで本論文の主定理の一つである次の有限個の非可換直既約部分群の直積に関するある種の一意性を示す.

主定理. $H_1, \ldots, H_n$, $K_1, \ldots, K_m$ を $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ の非可換直既約部分群とする. このとき, $\prod_{i=1}^n H_i$ と $\prod_{j=1}^m K_j$ が同型ならば, $n = m$ かつ置換 $\sigma \in S_n$,

$$H_i/Z(H_i) \cong K_{\sigma(i)}/Z(K_{\sigma(i)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が存在する.

群論における分解の一意性に関する古典的な結果は Krull-Remak-Schmidt の定理が知られているが, 一般には群 $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ や群 F の部分群は Krull-Remak-Schmidt の定理の仮定を満たさない. そのため, 主定理の証明には群 $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ における幾何学的な考察が必要になる. そこでは, 可換部分群と非可換部分群の差異を幾何学的に捉えるために commutative orbital という概念を導入して解決へ導いた.

主定理の応用として, F の固定部分群の同型性について Golan-Sapir が与えた十分条件がまた必要であることを示した. そのために固定部分群の直積構造を見たとき, その因子群が直既約群であることを示さねばならないが, 二つの成分のそれぞれの端点の関係に linked endpoints という概念を導入して解決した. この結果は幾何学的群論の第一人者である M. Sapir が

G. Golan and M. Sapir, On the stabilizers of finite sets of numbers in the R. Thompson group F, St. Petersburg Math. J. **29** (2018), 51–79.

で提示した問題の解決を与えている.

さらに, Golan-Sapir では F を部分群として含む有限個の無限枝をもつ infinite tree diagrams から成る群 $\mathcal{F}$ を定義し, 単位閉区間上の自己同相写像群 $\mathrm{Homeo}(\mathbb{I})$ へ埋蔵できることを示した. そこで二つの固定部分群がその固定点の配列がよい条件を満たす場合それらが $\mathcal{F}$ で共役であることを示した. この結果に動機づけられ, $\mathcal{F}$ を含む自然な拡張である群 $\mathcal{G}$ を導入して, 二つの固定部分群が同型ならば, $\mathcal{G}$ で共役であることを示した.

有限生成群 G と G を生成する有限対称集合 S とその部分群 $H \leq G$ が与えられたとき, 一般には G, S に関する Cayley graph や G, S, H に関する Schreier coset graph を記述することは容易ではな

い. しかし, より簡潔に記述可能な Cayley graph や Schreier coset graph を適切な関連付けで構築できるならば元の群や部分群の性質を解明できる可能性がある. また, 群が与えられたとき. その有限指数部分群の群表示を求める場合, Schreier coset graph が有効であることはよく知られている. 第 2 章では, この考え方をバウムスラグ・ソリター群 $B(1,n)$ とその固定部分群に適用する.

バウムスラグ・ソリター群 $B(1,n) = \langle a, b \mid ab = b^n a \rangle$ $(n \geq 2)$ は実数直線 $\mathbb{R}$ のアフィン写像 $h_a, h_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_a(x) = nx$, $h_b(x) = x + 1$ によって生成されるアフィン群 $\mathrm{Affin}(\mathbb{R})$ の部分群 G_n と捉えることができる. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ について, x の固定部分群 $\mathrm{Stab}(x)$, 自然な左作用 $\varphi_x : G_n \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}_{G_n}(x))$ とすると, Schreier coset graph $(\mathrm{BS}(1,n)/\mathrm{Stab}(x), \{a,b\}^{\pm}, \mathrm{Stab}(x))$ は Schreier graph $(\mathrm{Orb}_{G_n}(x), \{h_a, h_b\}, \varphi_x, x)$ とは基点をもつラベル付き有向グラフとして同型である. そこで, Schreier graph $(\mathrm{Orb}_{G_n}(x), \{h_a, h_b\}, \varphi_x, x)$ を精密に記述し, 構造を調べ, それらの Schreier graph をラベル付き有向グラフとして分類した. 特に, 有理数の固定部分群の構造と生成元を明らかにし, Schreier graph をラベル付き有向グラフとしての分類が元の Schreier coset graph で考えていた固定部分群の群表示に関連する分類に対応していることを示した. 結果自身は群論の立場では既知の部分もあるが, グラフ理論との関連付けでは良い見方なので出版に至った.

このように学位申請者の論文はトンプソン群の一つの表現の一般化である群 $\mathrm{PL_O}(\mathbb{I})$ の部分群の解明に確実に進展を与えた. 申請者はこの群の特性をとらえることを通してトンプソン群の無限指数部分群の性質の解明を目指している. 本論文はその第一歩であり, 今後の進展へ大きな期待をもたせるものと言える. これらの観点から, 本論文は博士（理学）の学位に相応しいものと認める.

2022 年 2 月

主査　早稲田大学理工学術院 教授　理学博士 筑波大学　小山　晃

副査　早稲田大学理工学術院 教授　理学博士 大阪大学　村上　順

早稲田大学理工学術院 教授　博士（理学）京都大学　松崎　克彦

早稲田大学 名誉教授　理学博士 筑波大学　江田　勝哉