

Optimización de observables cuánticos para la maximización de la visibilidad de la autocorrelación

Iñigo Perez

Curso 2019-2020

Índice general

1. Introducción y objetivos	2
2. Marco teórico	4
2.1. Los orígenes de la cuántica	4
2.2. La superposición cuántica	4
2.3. El principio de incertidumbre de Heisenberg	5
2.4. La notación de Dirac	6
2.5. Las imágenes de Heisenberg y Schrödinger	6
2.6. Del bit al qudit	7
2.7. La matriz de densidad	8
2.8. La autocorrelación	9
2.9. La ecuación de Lindblad	10
3. Qubits y qutrits bajo hamiltoniano constante, y su generalización a espacios D-dimensionales	12
3.1. El qubit	12
3.2. El qutrit	15
3.3. El qudit	18
4. Qubits bajo hamiltoniano constante y operadores de Lindblad	20
4.1. El caso de pérdidas	20
4.1.1. La imagen de Schrödinger	20
4.1.2. La imagen de Heisenberg	22
4.2. El caso de ganancias	25
4.2.1. La imagen de Schrödinger	25
4.2.2. La imagen de Heisenberg	26
4.3. El caso de pérdidas y ganancias	27
4.3.1. La imagen de Schrödinger	27
4.3.2. La imagen de Heisenberg	29
4.4. El caso de defasaje puro	30
4.4.1. La imagen de Schrödinger	31
4.4.2. La imagen de Heisenberg	31
4.5. El caso de pérdidas, ganancias y defasaje	32
4.5.1. La imagen de Schrödinger	33
4.5.2. La imagen de Heisenberg	34
5. Conclusiones	36
Bibliografía	38

Capítulo 1

Introducción y objetivos

En lo que llevamos de milenio, los avances en criogenia y nanotecnología nos han permitido una manipulación cada vez más fina de los sistemas cuánticos. Por ello, las teorías de control de sistemas cuánticos y de metrología cuántica son más relevantes que nunca [1; 2; 3; 4; 5], pues existe la posibilidad de una implementación experimental rápida de las nuevas técnicas que no existía cuando nacieron dichas teorías [6; 7]. Es tan relevante la existencia de profesionales que comprendan el funcionamiento de, por ejemplo, la computación cuántica, que se han presentado incluso propuestas de ludificación como el paper de 2019 “Quantum Poker – a pedagogical tool to learn quantum computing that is fun to play” [8]. El propósito de este trabajo es comenzar el estudio de estas técnicas de control de sistemas cuánticos en el marco de un caso particular pero representativo del ámbito de la optimización del control cuántico, para ganar así una visión global de él.

En este trabajo presentaremos las herramientas matemáticas para el análisis de sistemas cuánticos markovianos generales (cap. 2), tras lo que discutiremos la utilidad de la autocorrelación de observables para la caracterización de dichos sistemas. Tomando como hipótesis que nos encontramos en el caso particular en el que podemos elegir el estado inicial de nuestro observable, que es el caso con menos restricciones y particularidades, analizaremos la evolución de la autocorrelación en sistemas cerrados gobernados por hamiltonianos constantes (cap. 3), en los que obtendremos un resultado periódico. Después analizaremos sistemas abiertos (cap. 4), esto es, en contacto con un baño térmico y susceptibles al desfase. Dichos sistemas se modelizan mediante los llamados operadores de Lindblad, que permiten una ecuación de evolución que es una generalización de la que únicamente toma en cuenta el hamiltoniano. En este caso, al producirse la decoherencia, el sistema tiende exponencialmente hacia un punto de equilibrio por lo que en general las soluciones no serán periódicas. Tras el análisis de este caso particular quedará claro que tiene el nivel de generalidad necesario como para resultarnos de interés suficiente, y por tanto quedará justificada la elección de limitarnos a él.

Para medir la autocorrelación, una magnitud compleja, tomaremos como hipótesis que sólo podemos medir su módulo o su módulo al cuadrado. Esto no es en general cierto, pero de nuevo limitar el análisis a este caso demuestra no perjudicar el interés del trabajo. Para que la medida de la señal sea lo más clara posible, es conveniente que la diferencia entre el máximo y el mínimo sea lo mayor posible: al ser la correlación una medida estadística, la autocorrelación máxima será siempre de 1 al normalizarla, por lo que para aumentar la señal sólo queda reducir el mínimo.

Por suerte, tanto en el caso del sistema sin decoherencia como en el caso del sistema abierto, existe al menos un observable con una autocorrelación que se reduce a 0 al menos

una vez. En este escrito mostramos los cálculos necesarios para encontrar dicho operador.

Por último, una vez obtenidos los resultados, analizaremos (cap. 5) la viabilidad de su implementación en sistemas reales. También hablaremos de qué se puede esperar de estas técnicas en otros supuestos, como en el caso en el que la elección del observable inicial no es libre o el caso en el que la magnitud de referencia no sea el módulo de la autocorrelación de los observables.

Se pone también a disposición de la persona evaluadora el archivo de mathematica `4.5.2.- Manipulable 6 parámetros.nb`, disponible en la pataforma ADDI adjuntado a este escrito, que arroja un gráfico interactivo en el que se resumen todos los casos explorados en el trabajo. También es útil para ganar una intuición de cómo la variación de distintos parámetros afecta al recorrido de la autocorrelación por el plano complejo según avanza el tiempo, y para localizar gráficamente las condiciones de casos particulares de dichos recorridos.

Capítulo 2

Marco teórico

Para entender la lógica del uso de la autocorrelación como medida para el análisis de los sistemas cuánticos, es conveniente conocer cómo funcionan estos últimos. Para ello, en esta sección presentamos las herramientas y conceptos básicos que utilizaremos a lo largo del resto del trabajo.

2.1. Los orígenes de la cuántica

En el corazón de la mecánica cuántica se encuentra, tal y como su etimología indica, la cuantización de la energía. En diciembre de 1900 [9] Max Planck publicó que le era posible modelizar correctamente el espectro de emisión de un cuerpo negro. Para ello, sólo hacía falta asumir que la energía de cualquier fotón emitido por él era un múltiplo entero de $h\nu$, siendo ν la frecuencia lineal del fotón y h el factor de conversión que hoy llamamos “constante de Planck”.

Esta cuantización de la energía de los fotones, también aplicada a la de otras partículas, llevó inevitablemente a la cuantización de otras magnitudes tales como la posición, el momento lineal o el momento angular. La naturaleza no continua de las escalas más pequeñas de la realidad se ha manifestado una y otra vez desde aquel diciembre de 1900 y, para lidiar con ella y con sus consecuencias, se han ideado multitud de herramientas.

Supongamos que tenemos el sistema de energía cuantizada más simple posible: el sistema de dos niveles energéticos, de energías E_1 y E_2 . Por el postulado de Planck, estas energías pueden representarse mediante frecuencias lineales a través de la constante de Planck: $E_i = h\nu_i : i \in \{1, 2\}$. De la misma manera se pueden utilizar frecuencias angulares ω para esta conversión: teniendo en cuenta que $\omega \equiv 2\pi\nu$, tenemos que

$$E_i = h\nu_i = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu_i = \hbar\omega_i, \quad (2.1)$$

siendo $\hbar \equiv h/2\pi$ la conocida como “constante reducida de Planck”. En unidades naturales en las que $\hbar = c = 1$ esto se traduce simplemente en $E_i = \omega_i$: energía y frecuencia son iguales e intercambiables.

2.2. La superposición cuántica

Quizás algo contraintuitivamente, la cuantización de la energía no implica que el sistema de dos niveles del que hablábamos deba tener una de las energías $\hbar\omega_i$ (u ω_i , en

unidades de $\hbar = 1$). Significa simplemente que, de tener la energía definida (de estar el sistema en un “autoestado de la energía”), debe tener una de entre las ω_i disponibles. A cada una de las ω_i se les llama autovalores de la energía del sistema. Así, puede que un sistema esté en lo que se conoce como una superposición cuántica: en un estado en el que, de medir la energía, puede colapsar el sistema hacia tanto ω_1 como ω_2 , y por tanto no tenga una energía definida.

2.3. El principio de incertidumbre de Heisenberg

Existen parejas de observables A, B para las que no existe una base de autoestados comunes: existen autoestados del observable A que no lo son del B , y/o viceversa. Por tanto, tras medir A y conseguir que el sistema presente el autovalor de A a_i , puede darse que con respecto a B el sistema se encuentre en una superposición de autoestados de varios b_i diferentes. El ejemplo más típico y por tanto más conocido de estas magnitudes es el de la pareja de posición y momento¹ [10], representado por la forma del principio de incertidumbre de Heisenberg de la ecuación (2.2):

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.2)$$

donde Δx es la incertidumbre de la posición y Δp la del momento. Esta incertidumbre (o “desviación estandar”) se cuantifica mediante

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}, \quad (2.3)$$

donde $\langle A \rangle$ es el valor esperado de la magnitud A , esto es, la suma de la probabilidad de medir cada autoestado de A , multiplicado por su autovalor a_i . Por ejemplo, un sistema con dos energías $\omega_1 = -\omega$ y $\omega_2 = +\omega$ y con la misma probabilidad de estar en cualquiera de esos dos autoestados tendrá una energía esperada (o valor esperado del hamiltoniano) $\langle H \rangle = 0$. Sin embargo, $\langle H^2 \rangle = \omega^2$, pues el cuadrado de ambas autoenergías es positivo (al ser un cuadrado de una magnitud real). Por tanto, $\Delta H = \omega$. El significado físico de este resultado es fácil de ver: el valor esperado de la energía $\langle H \rangle$ del sistema es 0, pues hay la misma probabilidad de que la energía resulte ser $+$ o $-\omega$. Sin embargo, ambas energías posibles están a una distancia $\pm \Delta H = \pm \omega$ de ese valor esperado, dando una “anchura” de la distribución de $2\Delta H$. En distribuciones más complejas los números pueden no cuadrar tan limpiamente, pero en la mayoría de sistemas la incertidumbre ΔA siempre dará una idea de como de alejados están los autovalores del sistema del valor esperado.

De hecho, ese principio de Heisenberg entre x y p no es más que un caso particular del principio general para dos observables A y B cualesquiera [11],

$$\Delta A \Delta B \geq \sqrt{\left| \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle \right|^2}, \quad (2.4)$$

en el que aparecen el conmutador $[A, B] = AB - BA$ y el anticonmutador $\{A, B\} = AB + BA$.

De este principio de Heisenberg general se deduce directamente el menos estricto pero más manejable principio de incertidumbre de Robertson [12]:

¹ x y p son, en general, magnitudes de autovalores no discretos, por lo que en general sus autoestados y autovalores no se presentarán con un subíndice, a diferencia de los a_i y b_i discretos del ejemplo.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| . \quad (2.5)$$

2.4. La notación de Dirac

En la notación de Dirac los estados del sistema se representan mediante lo que se conoce como kets $|\psi\rangle$. Estos kets pueden representar autoestados de un observable, por lo que a menudo es útil escribir el estado actual del sistema en función de los autoestados del observable que queremos analizar:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + \dots = \sum_i c_i |i\rangle . \quad (2.6)$$

Además, $p_i = c_i \bar{c}_i$ es la probabilidad de que al medir el observable A en el sistema en el estado $|\psi\rangle$ la función colapse al autoestado de A $|i\rangle$, donde $c_i \in \mathbb{C}$.

Una vez tenemos el sistema escrito en la base ortonormal de $|i\rangle$ estamos en condiciones de presentar la segunda pieza de la notación de Dirac: si ya tenemos el ket, lo que nos falta es el bra $\langle\psi|$. Estos objetos nos sirven principalmente para “preguntar” a nuestro sistema la cantidad de ese estado que posee: por ejemplo,

$$\langle 1|\psi\rangle = \langle 1| \cdot (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + \dots) = c_0 \langle 1|0\rangle + c_1 \langle 1|1\rangle + \dots . \quad (2.7)$$

Al ser $\langle i|$ una base ortogonal, $\langle j|i\rangle = 0$ excepto para el caso $j = i$. Además, al estar bien normalizada, la base es ortonormal, por lo que en ese caso $\langle i|i\rangle = 1$. Así, concluimos que $\langle i|\psi\rangle = c_i \Rightarrow |\langle i|\psi\rangle|^2 = p_i$. En general, de hecho, se cumple lo siguiente: la probabilidad de medir el estado $|\phi\rangle$ en un sistema en el estado $|\psi\rangle$ es de $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$.

La siguiente pieza de la notación de Dirac son los operadores. Si estos operadores representan magnitudes observables se cumplirá que, si $|i\rangle$ es la base de autoestados del operador A ,

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle \Rightarrow \langle i|A|i\rangle = \langle i|a_i|i\rangle = a_i \langle i|i\rangle = a_i . \quad (2.8)$$

Por tanto, el valor esperado de un observable se puede escribir como

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots = \sum_i p_i a_i . \quad (2.9)$$

Esta forma de $\langle A \rangle$ coincide, como es lógico, con la forma intuitiva usada tras la ecuación (2.3) para conseguir $\langle H \rangle$.

2.5. Las imágenes de Heisenberg y Schrödinger

Una vez tenemos todos los bloques de la notación de Dirac tenemos que hablar sobre la evolución temporal del sistema. Para modelizar esto existen dos imágenes principales [13]: la primera de ellas es la imagen de Schrödinger. En ella, la evolución temporal ocurre en los bras y kets. Si $U(t)$ es el operador de evolución temporal y $U^\dagger(t)$ su operador adjunto,

$$U(t)|\Psi(0)\rangle = |\Psi(t)\rangle \Rightarrow \langle\Psi(0)|U^\dagger(t)AU(t)|\Psi(0)\rangle = \langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle . \quad (2.10)$$

Esta es la imagen más intuitiva, en el que el sistema va variando su estado $|\Psi(t)\rangle$ pero la definición del observable A no se ve afectada. Así, por ejemplo, al medir la posición esperada del sistema $\langle x \rangle(t)$ usaremos el mismo marco de referencia que al medirlo en el tiempo 0, pues la definición del operador x no habrá cambiado.

La segunda imagen de evolución temporal se llama imagen de Heisenberg. En ella, la evolución temporal ocurre en los operadores, mientras que los bras y kets se mantienen constantes:

$$U^\dagger(t)A(0)U(t) = A(t) \Rightarrow \langle \Psi | U^\dagger(t)A(0)U(t) | \Psi \rangle = \langle \Psi | A(t) | \Psi \rangle . \quad (2.11)$$

Esta imagen puede resultar menos natural que la de Schrödinger, pues implica un cambio no en el estado del sistema sino en la magnitud medida. Sería análogo a, en vez de mover un coche a una velocidad \vec{v} con respecto al peatón estacionario, dejarlo aparcado y mover al observador que lo mira a una velocidad $-\vec{v}$: el espectador debe tener en cuenta que es su sistema de referencia lo que se mueve con respecto a la tierra y no el coche, aunque la velocidad medida sea la misma en ambos casos. Otra analogía, también un caso de relatividad galileana, sería la de la equivalencia de rotación: para un detector montado en un aparato que gire sobre el punto en el que está colocado el emisor de señal, las mediciones obtenidas al pivotar un ángulo θ la muestra serán las mismas que al hacer girar al detector un ángulo $-\theta$. Esta analogía es incluso más cercana al caso de las imágenes de Heisenberg y Schrödinger pues, tal y como se muestra en la ecuación (2.1), en un sistema cuántico las diferencias de energía equivalen a una diferencia de velocidad angular y, por tanto, a una diferencia de ángulo al avanzar el tiempo.

Sin embargo, la imagen de Heisenberg resulta en muchos casos más útil o versátil. Ejemplo de ello es el caso de la evolución de la autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ que nos ocupa: al referirse a una evolución temporal del observable, en la imagen de Schrödinger no tiene un sentido conceptual estricto, pese a matemáticamente poder escribirse la expresión en función de la evolución de bras y kets. No sólo eso, sino que dicha forma de Schrödinger de la autocorrelación es, en general, más engorrosa de manipular que la forma conceptualmente sólida que nos proporciona la imagen de Heisenberg. Es en casos como este, pues, que la quizás menos intuitiva imagen de Heisenberg revela su utilidad.

2.6. Del bit al qudit

Los primeros usos del término “bit” para designar una pequeña porción de algo se remontan a comienzos de la baja edad media inglesa, circa 1200 [14], en relación a la palabra inglesa “bite”, mordisco. En 1948, en su artículo “A Mathematical Theory of Communication” [15], el matemático e ingeniero eléctrico Claude Elwood Shannon utilizó por primera vez el término como acrónimo de “BInary digiT”, dígito binario, por sugerencia de su compañero John W. Tukey. Estos bits, como dígitos binarios, tienen sólo dos estados y representan la unidad de información más pequeña de un ordenador clásico: encendido o apagado, uno o cero.

En 1995, en su paper “Quantum coding” [16], Benjamin Schumacher utilizaba por primera vez el término qubit para referirse al sistema cuántico de dos autoestados ortogonales, que implica la unidad de información más pequeña de una computadora cuántica. Como dice el propio artículo, el término “fue acuñado como broma” en una de las conversaciones que W. K. Wootters mantenía con el autor, “y se convirtió en el impulso inicial” para dicho trabajo.

En un qubit², además de los estados $|\psi\rangle = |0\rangle$ y $|\psi\rangle = |1\rangle$ del bit clásico, es posible encontrar estados superpuestos de la forma $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, lo que permite la implementación de algoritmos especializados como el de Shor, el de Grover o el de Deutsch-Jozsa [19]. Pese a que el término qubit se utilizó en un principio en el contexto de la información y la computación, está extendido su uso para referirse a cualquier sistema cuántico de dos niveles, y en ese sentido lo utilizaremos en este trabajo.

Están extendidas también las generalizaciones del término qubit para sistemas de más niveles. Al sistema más simple después del de dos autoestados ortogonales, esto es, al de tres, se lo llama también qutrit. Al caso general de base de D-dimensional, por su parte, se lo conoce como qudit. Utilizaremos ambos términos a lo largo del trabajo junto con el de qubit.

2.7. La matriz de densidad

La notación de Dirac nos permite operar con qudits pertenecientes a poblaciones de distinto tipo. Mediante la matriz de densidad ρ se expresa qué probabilidad hay de que un qudit concreto pertenezca a cada estado:

$$\rho = \sum_j P_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| , \quad (2.12)$$

donde P_j es el porcentaje de veces en que el qudit medido que se encuentra en el estado $|\psi_j\rangle$.

Es importante no confundir P_j con p_i : el segundo se refiere a la probabilidad de que, en un sistema en superposición, se mida un autoestado u otro; esta probabilidad es cuántica, y tiene que ver con la mezcla de la superposición. El primero, por el contrario, se refiere a una mezcla totalmente clásica: de la misma manera que se pueden tener en un saco pelotas de distintos colores es posible tener un grupo de qudits en distintos estados $|\psi_j\rangle$, cada uno con coeficientes de superposición c_i distintos y, por tanto, en general p_i distintos.

Para tener en cuenta esta aleatoriedad clásica, a la hora de calcular el valor esperado de un observable en un qudit hay que promediar sobre la matriz de densidad. En el caso en el que existan distintas poblaciones de qudits en distintos estados de superposición, el valor esperado de un operador A tiene la forma

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}[\rho A] = \text{Tr} \left[\sum_j P_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| A \right] = \sum_j P_j \langle\psi_j| A |\psi_j\rangle , \quad (2.13)$$

debido a la propiedad rotativa de la traza, mediante la cual $\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB] = \text{Tr}[BCA]$, y al hecho de que tanto los P_j como los $\langle\psi_j| A |\psi_j\rangle$ son escalares y por tanto equivalen a su traza. Como se ve claramente, esta es la forma del valor esperado intuitiva: la suma de la forma (2.9) para cada j , multiplicada por la proporción P_j en la que aparece.

Un tipo concreto de ρ es la matriz de densidad térmica, de la forma

²Se utiliza aquí la grafía “qubit” por consistencia con la literatura especializada y los términos “qutrit” y “qudit”. Sin embargo, hay que tener en cuenta que tanto la RAE [17] como la Fundéu [18] recomiendan el uso de la grafía “cúbit”.

$$\rho_T = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \doteq \frac{1}{\sum_n e^{-\beta\omega_n}} \begin{pmatrix} e^{-\beta\omega_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{-\beta\omega_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

donde $\beta = T^{-1}$ es el inverso de la temperatura, ω_n son los autovalores del hamiltoniano H y se ha tomado $\hbar = 1$. La función de partición se ha definido de la manera termodinámica usual de $Z \equiv \sum_n e^{-\beta\omega_n}$. En nuestro análisis asumiremos sistemáticamente que ρ es térmico, pues al hacerlo se consigue que los cálculos y los resultados sean mucho más diáfanos. Esto no significa, sin embargo, que las matrices de densidad no térmicas con respecto al hamiltoniano utilizado (o directamente no térmicas) no tengan aplicación: el estudio de la dinámica de los sistemas fuera del equilibrio térmico del hamiltoniano aplicado (el templado o “quenching” es un buen ejemplo de ello) son de gran interés también.

2.8. La autocorrelación

En el marco de la imagen de la evolución temporal de Heisenberg definimos la autocorrelación de un operador $A(t)$ de la siguiente manera:

$$C(t) \equiv \langle A(0)A(t) \rangle_\rho. \quad (2.15)$$

$C(t)$ es siempre un valor promediado sobre ρ , la matriz de densidad del sistema para el hamiltoniano H , por lo que a partir de ahora no lo explicitaremos.

También es conveniente definir la correlación normalizada:

$$\tilde{C}(t) \equiv \frac{C(t)}{C(0)} = \frac{\langle A(0)A(t) \rangle}{\langle A(0)^2 \rangle}. \quad (2.16)$$

De esta manera $\tilde{C}(0) = 1$. Dado que en general $C(t) \in \mathbb{C}$, elegimos como hipótesis que sólo disponemos de $|C(t)|$ (o, equivalentemente, $|C(t)|^2$) como medida de la cantidad de autocorrelación del operador. Esto no es en general cierto, pues en ciertos sistemas es posible medir una cantidad compleja enteramente al medir por separado su parte real y su parte imaginaria. En otros sistemas como en la medición de la estructura cristalina por dispersión de neutrones es el espectro de potencia $|\mathfrak{F}\{C_{\rho\rho}(\vec{x}, t)\}|^2$ (el cuadrado del módulo de la transformada de fourier de la autocorrelación de la densidad) lo que se mide.

Para medir la correlación lo más fácilmente posible, deberemos buscar los mínimos de $|C(t)|$, pues ahí será (por definición) donde se maximice la visibilidad

$$\Delta \equiv |C(t)|_{MAX} - |C(t)|_{min}. \quad (2.17)$$

Es importante destacar que esta no es la única manera de definir la visibilidad, y que por tanto hay que ser cuidadosos la hora de comparar los resultados aquí obtenidos con los de otras fuentes. Otra métrica de referencia también llamada “visibilidad” (o, también, “contraste”), denotada aquí como V para no confundirla con Δ , es

$$V \equiv \frac{|C(t)|_{MAX} - |C(t)|_{min}}{|C(t)|_{MAX} + |C(t)|_{min}}. \quad (2.18)$$

Sin embargo, vemos que los máximos de Δ lo son también de V y que, por tanto, es más útil utilizar la expresión más simple de Δ a la hora de calcularlos.

Si se consigue, además, que $C(t_n) = 0$ para algún t_n , se consigue un máximo absoluto de la visibilidad y por tanto la visibilidad normalizada, también maximizada, toma el valor de 1:

$$\tilde{\Delta} \equiv |\tilde{C}(t)|_{MAX} - |\tilde{C}(t)|_{min} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{MAX} = 1 - 0 = 1. \quad (2.19)$$

La posición en el tiempo t_n de los mínimos de $|C(t)|$ y la profundidad del valle en el que se encuentren (profundidad que, maximizada, hace que el mínimo se encuentre en $|C(t_n)| = 0$) serán funciones de la forma de ρ y de la de $A(t)$, que a su vez no es más que la evolución de $A(0)$ bajo el hamiltoniano H . Además, en el caso de la matriz de densidad de un estado termal $\rho = \rho_T$ esta equivale al exponencial del hamiltoniano, por lo que todos los valores de $C(t)$ están caracterizados, simplemente, por $A(0)$ y H :

$$C(t) = \text{Tr}[\rho_T A(0) A(t)] = \text{Tr}\left[\frac{e^{-\beta H}}{Z} A(0) U^\dagger A(0) U\right] = \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H} A(0) e^{iHt} A(0) e^{-iHt}]}{\sum_n e^{-\beta \omega_n}}. \quad (2.20)$$

Como se ve claramente, $C(t)$ está totalmente caracterizado por $A(0)$ y H . Además, siempre existe una base en la que H es diagonal, de la forma general

$$H \doteq \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

ordenando las ω_n de mayor a menor por convención. Así, es posible trabajar fácilmente con un hamiltoniano constante genérico y simplemente manipular $A(0)$ para maximizar la visibilidad Δ y optimizar así la medición de $|C(t)|$.

2.9. La ecuacion de Lindblad

No toda evolución de un observable cuántico puede expresarse mediante un hamiltoniano. Una extensión natural de la evolución bajo hamiltoniano hermítico es la ecuación de Lindblad-Gorini-Kossakowsky-Sudarshan [20] (LGKS, o de Lindblad, para abreviar). Mediante dicha ecuación se puede expresar la influencia del entorno en el subsistema a estudiar, incluyendo en el modelo matemático fenomenos tales como las migraciones de población entre autoestados o el defasaje.

En la imagen que nos interesa para calcular la autocorrelación del operador $A(t)$, la de Heisenberg, la ecuación de Lindblad para D dimensiones tiene la forma

$$\frac{d}{dt} A(t) = i[H, A(t)] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{D^2-1} \gamma_j [L_j^\dagger L_j A(t) + A(t) L_j^\dagger L_j - 2L_j^\dagger A(t) L_j], \quad (2.22)$$

donde los L_j son los distintos operadores de Lindblad (operadores que no necesariamente serán hermíticos) y los γ_j los coeficientes que regulan la magnitud de su efecto. A mayor γ_j , más notoria será la influencia de su L_j en el sistema. La forma de esta ecuación asegura que, pese a no ser hermíticos los L_j , el observable $A(t)$ sí que lo sea para cualquier punto de su evolución, y que por tanto sus autovalores sean reales y medibles como corresponde

a un observable bien definido. Para $\gamma_j \geq 0$, dicha ecuación es, además, la modelización más general posible de un sistema markoviano [21].

Como se aprecia en los límites del sumatorio, tan solo son necesarios $D^2 - 1$ términos para representar todo el espacio de operadores. Si bien podríamos pensar que, por ejemplo, para $D = 2$ nos haría falta una base de 4 matrices para poder representar la totalidad de los operadores de Lindblad (al estar los L_j representados por matrices de $D \times D = 4$ elementos), al fijarnos en la ecuación LGKS observamos que al usar la identidad como L_j todos los términos de dicha j se cancelan y el efecto obtenido es nulo. Es por esto que es posible obviar ese subespacio inútil a la hora de construir nuestro sumatorio, y restar 1 al número D^2 que en principio necesitaríamos. De ahí el $D^2 - 1$ del límite superior del sumatorio.

Por otra parte, también podríamos pensar en operadores de Lindblad complejos, necesitando así $2D^2$ (o $2D^2 - 1$) matrices para nuestra base. Pero, de nuevo, no son necesarios: en el caso puramente imaginario, esto es, al sustituir L_j por iL_j , vemos que el efecto sobre $A(t)$ no varía. Para el caso general de los L_j complejos, siempre se puede reordenar la base de operadores en matrices reales e imaginarias, y después reordenar el subespacio de las imaginarias para que cada una sea igual a una de las del subespacio real multiplicada por la unidad imaginaria i : como ya hemos visto, estas dos matrices L_j e iL_j producirían el mismo efecto. Vemos así que la inclusión de matrices complejas en nuestra base de operadores de Lindblad, al igual que la inclusión de la identidad, no añade detalle alguno a nuestro modelo de evolución de $A(t)$, y que por ello siempre es posible reducir a $D^2 - 1$ el número de operadores de Lindblad de un sistema de D dimensiones.

Pese a que calcular la autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ es incómodo en la imagen de Schrödinger, en la que A se mantiene constante y es $\rho(t)$ lo que cambia con el tiempo, también es útil utilizar este formalismo para visualizar mejor, por ejemplo, el fenómeno de la migración de poblaciones. En esta imagen la ecuación LGKS toma la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{D^2-1} \gamma_j [L_j^\dagger L_j \rho(t) + \rho(t) L_j^\dagger L_j - 2L_j \rho(t) L_j^\dagger]. \quad (2.23)$$

Al igual que en la imagen de Heisenberg se conservaba la hermiticidad de $A(t)$, aquí se asegura la conservación de la traza y la positividad completa de $\rho(t)$, haciendo que siga siendo una matriz de densidad válida. Para $\gamma_j \geq 0$ se asegura, además, que la evolución del sistema descrito por la ecuación (2.23) es markoviana.

Una vez tenemos la ecuación que nos describe el movimiento de $A(t)$ o $\rho(t)$, tan solo queda resolver el sistema de D^2 ecuaciones diferenciales acopladas en los que se traduce la ecuación LGKS para conseguir la evolución temporal de cada uno de los D^2 componentes de $A(t)$ o $\rho(t)$. Aún así, por hermiticidad (y, además, en la imagen de Schrödinger por conservación de traza) no es necesario resolverlas todas. Las condiciones iniciales se obtienen de las formas conocidas en $t = 0$ de los elementos de $A(t)$ o $\rho(t)$.

Capítulo 3

Qubits y qutrits bajo hamiltoniano constante, y su generalización a espacios D-dimensionales

3.1. El qubit

En el caso del qubit (por ejemplo, el de una partícula con spin $1/2$) escribimos el hamiltoniano como

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbb{1} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sigma_z \quad (3.1)$$

y nuestro observable genérico como

$$A(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Podríamos escribir $A(0)$ como

$$A(0) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

pero las matrices que usaríamos como base no serían hermíticas y por lo tanto no serían observables, por lo que no podríamos asegurar que para toda combinación de a, b, c , y d $A(0)$ fuese realmente un observable. Por tanto, utilizaremos la identidad y las matrices de Pauli, que sí son hermíticas:

$$A(0) = c_0 \mathbb{1} + c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z = c_0 \mathbb{1} + \vec{c} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.4)$$

Así aseguramos la hermiticidad de $A(0)$ para coeficientes c_n reales:

$$\begin{aligned} A^\dagger(0) &= (c_0 \mathbb{1} + \vec{c} \cdot \vec{\sigma})^\dagger \\ &= \overline{c_0} \mathbb{1}^\dagger + \overline{c_1} \sigma_x^\dagger + \overline{c_2} \sigma_y^\dagger + \overline{c_3} \sigma_z^\dagger \\ &= c_0 \mathbb{1} + c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z \\ &= A(0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es importante resaltar que escribir el observable en función de las matrices de Pauli no tiene por qué tener un significado físico de dirección: es cierto que el momento angular

en el eje z es proporcional a σ_z , pero hay otros observables proporcionales a una σ_i que no tienen por qué tener esa relación. En nuestro caso las matrices de Pauli están tomadas para que el hamiltoniano sea diagonal (o, si se prefiere, la forma de las matrices queda determinada por hacer diagonal el hamiltoniano).

Con esta nueva división de $A(0)$ la autocorrelación se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
C(t) &= \text{Tr}[\rho A(0)U^\dagger A(0)U] \\
&= \text{Tr} \left[\rho \left(\sum_{n=0}^3 c_n \sigma_n \right) U^\dagger \left(\sum_{m=0}^3 c_m \sigma_m \right) U \right] \\
&= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^3 c_n c_m \text{Tr}[\rho \sigma_n U^\dagger \sigma_m U] \\
&= \sum_{n=0}^3 \sum_{m=0}^3 c_n c_m \langle A_n(0) A_m(t) \rangle,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde σ_0 es la identidad y el resto de σ_n los componentes de $\vec{\sigma}$. A su vez, $A_n(t)$ denota simplemente $A(t)$ para el caso $A(0) = \sigma_n$. Se ha elegido esta notación $A_n(t) = U^\dagger \sigma_n U$ para evitar usar expresiones como $\sigma_n(t)$, y dejar así las matrices σ_n , elegidas como nuestra base, como unidades en vez de como funciones del tiempo.

Vemos, por tanto, que para conseguir la correlación queremos conseguir las $\langle A_n(0) A_m(t) \rangle$, y para conseguir estas debemos conocer las $A_n(t)$. Por multiplicación directa conseguimos que

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= U^\dagger \mathbb{1} U = \mathbb{1} & A_1(t) &= U^\dagger \sigma_x U = \cos \omega t \sigma_x - \sin \omega t \sigma_y \\
A_3(t) &= U^\dagger \sigma_z U = \sigma_z & A_2(t) &= U^\dagger \sigma_y U = \cos \omega t \sigma_y + \sin \omega t \sigma_x
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$.

Para calcular todos los valores medios $\langle \sigma_n \sigma_m \rangle$ que se obtienen de introducir (3.7) en (3.6) utilizaremos las propiedades de las matrices de Pauli de $\sigma_n^2 = \mathbb{1}$ y de que para i, j, k consecutivos $\in \{1, 2, 3\}$ se cumple que $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i \sigma_k$. Por otra parte, por simetría $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$, pues el eje en el que tenemos dos energías distintas para los autoestados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ es el eje de σ_z y por ello, al no haber diferencia de energía entre los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ de los ejes de σ_x y σ_y , hay la misma probabilidad de medir ambos autoestados: la media es cero, pues el autovalor del uno es el negativo del del otro. Las únicas correlaciones que no son nulas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\langle A_0(0) A_0(t) \rangle &= \langle \mathbb{1} \rangle & \langle A_1(0) A_1(t) \rangle &= \cos \omega t \langle \mathbb{1} \rangle + i \sin \omega t \langle \sigma_z \rangle \\
\langle A_0(0) A_3(t) \rangle &= \langle \sigma_z \rangle & \langle A_1(0) A_2(t) \rangle &= i \cos \omega t \langle \sigma_z \rangle - \sin \omega t \langle \mathbb{1} \rangle \\
\langle A_3(0) A_0(t) \rangle &= \langle \sigma_z \rangle & \langle A_2(0) A_1(t) \rangle &= -i \cos \omega t \langle \sigma_z \rangle + \sin \omega t \langle \mathbb{1} \rangle \\
\langle A_3(0) A_3(t) \rangle &= \langle \mathbb{1} \rangle & \langle A_2(0) A_2(t) \rangle &= \cos \omega t \langle \mathbb{1} \rangle + i \sin \omega t \langle \sigma_z \rangle.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sabemos que $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$, y operando explícitamente conseguimos que

$$\langle \sigma_z \rangle = \text{Tr}[\rho \sigma_z] = -\tanh \frac{\beta \omega}{2}. \tag{3.9}$$

Por tanto, sumando para todos los valores de n y m ,

$$C(t) = c_0^2 - 2c_0c_3 \tanh \frac{\beta\omega}{2} + c_3^2 + (c_1^2 + c_2^2)(\cos \omega t - i \sin \omega t \tanh \frac{\beta\omega}{2}). \quad (3.10)$$

Al avanzar el tiempo, $C(t)$ describe una elipse en el plano complejo centrada en

$$\mathcal{O} = c_0^2 - 2c_0c_3 \tanh \frac{\beta\omega}{2} + c_3^2 \quad (3.11)$$

y con semieje real

$$S_{\mathbb{R}} = c_1^2 + c_2^2 \quad (3.12)$$

y semieje imaginario

$$S_{\mathbb{I}} = (c_1^2 + c_2^2) \tanh \frac{\beta\omega}{2}, \quad (3.13)$$

tal y como se aprecia en la figura (3.1).

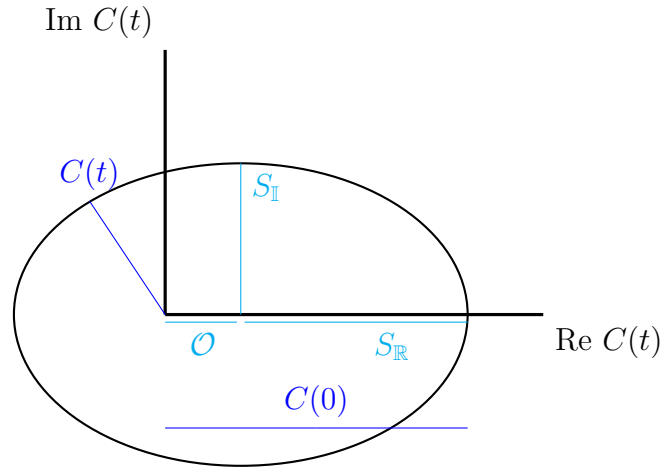


Figura 3.1: Bajo la influencia de un hamiltoniano constante, $C(t)$ describe una elipse en el plano complejo.

Al estar el recorrido elíptico de $C(t)$ centrado en la recta real, para lograr que $C(t_n) = 0$ se anule simplemente debemos hacer que su centro se encuentre a la distancia justa para que, al anularse la parte imaginaria, el límite más negativo de de la elipse roce el origen del plano complejo y se anule también la parte real. Esto se consigue si $|S_{\mathbb{R}}| = |\mathcal{O}|$, esto es, si

$$c_0^2 - 2c_0c_3 \tanh \frac{\beta\omega}{2} + c_3^2 = c_1^2 + c_2^2 \quad (3.14)$$

para los tiempos

$$t_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega} : n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

La existencia de un tiempo mínimo necesario t_1 dependiente del Hamiltoniano y del estado inicial del sistema para alcanzar el mínimo de la autocorrelación nos recuerda, aún

sin ser idéntica la situación, a los límites de velocidad cuánticos (a menudo llamados QSL por sus siglas en inglés) de Margolus-Levitin y Mandelstam-Tamm [2]. Como veremos, la existencia de este tiempo mínimo será una característica común a todos los casos que analizaremos.

Si hacemos cumplir la ecuación (3.14) aseguramos que $C(t_n) = 0$ y que así Δ es maximizada. Una manera sencilla de lograrlo es anular, por ejemplo, c_0 y c_2 , y hacer que $c_1 = c_3 = 1$. Así obtenemos el operador inicial

$$A(0) = \sigma_x + \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Otra opción aún más simétrica sería anular c_2 y c_3 e igualar $c_0 = c_1$:

$$A(0) = \mathbb{1} + \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Como vemos, el requisito (3.14) es sencillo de satisfacer y existen varias maneras de cumplirlo.

Hemos logrado, pues, que $C(t_n) = 0$ en cada t_n , por lo que se maximiza nuestra magnitud a medir: la visibilidad

$$\tilde{\Delta} = |\tilde{C}(t)|_{MAX} - |\tilde{C}(t)|_{min} = \tilde{C}(0) - \tilde{C}(t_n) = 1. \quad (3.18)$$

Es importante destacar que aunque esta es la manera en la que se consigue una $\tilde{\Delta}$ mayor, no es la que minimiza el tiempo en el que se alcanza el mínimo. De la figura (3.1) se deduce rápidamente que para $\mathcal{O} = 0$ se obtiene que, aunque en dicho caso

$$\tilde{\Delta} = \frac{S_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{I}}}{S_{\mathbb{R}}} = 1 - \tanh \frac{\beta\omega}{2} < 1 \quad : \beta\omega > 0, \quad (3.19)$$

esto es, que la profundidad del valle en el que se encuentra el mínimo sea menor, también lo es el tiempo en el que se llega a dicho mínimo: este se encuentra a una cuarta parte del periodo, en vez de a la mitad como ocurría en los casos (3.16) y (3.17) en los que $\tilde{\Delta} = 1$. En cualquier caso, pese a cambiar el tiempo en el que se alcanza el mínimo, este tiempo nunca será cero.

3.2. El qutrit

En el caso del qutrit (por ejemplo, el de una partícula con spin 1) escribimos el hamiltoniano como

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Dado que H es ahora una matriz 3×3 , tanto $U \equiv e^{-iHt}$ como $U^\dagger \equiv e^{iHt}$ son también matrices tridimensionales.

Además, nuestro observable genérico inicial tomará la siguiente forma:

$$A(0) = c_0 \mathbb{1} + \vec{c} \cdot \vec{\lambda}, \quad (3.21)$$

donde $\mathbb{1}$ es la identidad tridimensional y λ_n son las 8 matrices de Gell-Mann [22], equivalentes tridimensionales a las matrices de Pauli del caso bidimensional: igualmente hermiticas, ortogonales tanto con la identidad como entre sí y de traza nula. Además obedecen la relación de normalización

$$\text{Tr}(\lambda_n \lambda_m) = 2\delta_{nm}, \quad (3.22)$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \quad (3.23)$$

Así, la evolución de las distintas $A_n(t)$ es

$$\begin{aligned} A_0(t) &= U^\dagger \mathbb{1} U = \mathbb{1} \\ A_1(t) &= U^\dagger \lambda_1 U = \cos(\omega_{12}t)\lambda_1 - \sin(\omega_{12}t)\lambda_2 \\ A_2(t) &= U^\dagger \lambda_2 U = \cos(\omega_{12}t)\lambda_2 + \sin(\omega_{12}t)\lambda_1 \\ A_3(t) &= U^\dagger \lambda_3 U = \lambda_3 \\ A_4(t) &= U^\dagger \lambda_4 U = \cos(\omega_{13}t)\lambda_4 - \sin(\omega_{13}t)\lambda_5 \\ A_5(t) &= U^\dagger \lambda_5 U = \cos(\omega_{13}t)\lambda_5 + \sin(\omega_{13}t)\lambda_4 \\ A_6(t) &= U^\dagger \lambda_6 U = \cos(\omega_{23}t)\lambda_6 - \sin(\omega_{23}t)\lambda_7 \\ A_7(t) &= U^\dagger \lambda_7 U = \cos(\omega_{23}t)\lambda_7 + \sin(\omega_{23}t)\lambda_6 \\ A_8(t) &= U^\dagger \lambda_8 U = \lambda_8, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\omega_{ij} \equiv \omega_i - \omega_j$. Nótese que las frecuencias elegidas para representar los $A_n(t)$ son positivas, dado que $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, o nulas en los casos degenerados de $\omega_1 = \omega_2$ y $\omega_2 = \omega_3$. Habiendo ordenado los autovalores del hamiltoniano de mayor a menor nunca nos encontraremos con el caso $\omega_1 = \omega_3$ porque eso equivaldría a un hamiltoniano nulo, dado que al tratar únicamente con diferencias de energía el origen de esta queda libre como elección arbitraria y por tanto no puede influir en la realidad física de nuestro sistema.

Las correlaciones $\langle A_n(0)A_m(t) \rangle$ no nulas se muestran en el cuadro (3.1).

Se puede apreciar a simple vista que existe un agrupamiento de las $\langle A_n(0)A_m(t) \rangle$ no nulas en el Cuadro (3.1). Conociendo la forma de dichas correlaciones, se aprecia que los elementos de cada grupo comparten una característica: su velocidad de evolución o, lo que es lo mismo, la frecuencia de su periodicidad. Estos son los cuatro grupos del caso tridimensional:

1. grupo: $n, m \in \{0, 3, 8\}$. Estas correlaciones son reales y constantes en el tiempo.
2. grupo: $n, m \in \{1, 2\}$. Estas correlaciones tienen una periodicidad de frecuencia ω_{12} .
3. grupo: $n, m \in \{4, 5\}$. Estas correlaciones tienen una periodicidad de frecuencia ω_{13} .
4. grupo: $n, m \in \{6, 7\}$. Estas correlaciones tienen una periodicidad de frecuencia ω_{23} .

Como en el caso bidimensional, existen múltiples maneras de lograr que $C(t) = 0$ para algún tiempo y así hacer que $\tilde{\Delta} = 1$. Una manera de conseguirlo similar a la elegida en

	$A_0(t)$	$A_1(t)$	$A_2(t)$	$A_3(t)$	$A_4(t)$	$A_5(t)$	$A_6(t)$	$A_7(t)$	$A_8(t)$
$A_0(0)$	×			×					×
$A_1(0)$		×	×						
$A_2(0)$		×	×						
$A_3(0)$	×			×					×
$A_4(0)$					×	×			
$A_5(0)$					×	×			
$A_6(0)$							×	×	
$A_7(0)$							×	×	
$A_8(0)$	×			×					×

Cuadro 3.1: Las $\langle A_n(0)A_m(t) \rangle \neq 0$ para la base tridimensional. La forma concreta de todas estas correlaciones se puede consultar en el anexo del fichero de Mathematica 3.2.- S=1 - Heisenberg.

el caso bidimensional (3.16) o (3.17) consiste en construir $A(0)$ con una de las matrices del segundo, tercer o cuarto grupo para que genere una correlación de recorrido elíptico en el plano complejo y con otra del primer grupo que genere una correlación constante O , desplazando así el centro de la elipse de manera totalmente análoga a como ocurre en la figura (3.1) del caso bidimensional. La velocidad a la que completa una órbita será inversamente proporcional a la frecuencia ω_{ij} del operador elegido por lo que, dado que es posible conseguir lo que queremos con cualquiera de los operadores de los grupos 2, 3 y 4, utilizaremos los de frecuencia mayor, esto es, los del tercer grupo.

Por tanto, uno de los posibles $A(0)$ en los que $C(t_n) = 0$ se alcanza en el menor tiempo posible se consigue anulando todos los c_n menos $c_0 = 1$ y $c_4 = \sqrt{\alpha}$ para un $\alpha > 0$:

$$A(0) = \mathbb{1} + \sqrt{\alpha} \lambda_4 \Rightarrow A(t) = \mathbb{1} + \sqrt{\alpha} [\cos(\omega_{13}t)\lambda_4 - \sin(\omega_{13}t)\lambda_5] \quad (3.25)$$

y de ahí

$$C(t) = 1 + \frac{\alpha}{Z}(e^{-\beta\omega_1}e^{i\omega_{13}t} + e^{-\beta\omega_3}e^{-i\omega_{13}t}). \quad (3.26)$$

Así, para que $\exists t_n : C(t_n) = 0$ el requisito a cumplir es el siguiente:

$$e^{-\beta\omega_1}e^{i\omega_{13}t} + e^{-\beta\omega_3}e^{-i\omega_{13}t} = -Z/\alpha. \quad (3.27)$$

Como la parte de la derecha es real y negativa, la parte izquierda también debe serlo:

$$e^{\pm i\omega_{13}t} = -1 \Rightarrow \omega_{13}t_n = \pi(2n - 1) : n \in \mathbb{N} \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{\omega_{13}}(2n - 1) \quad (3.28)$$

y, de ahí,

$$\alpha = \frac{Z}{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_3}}. \quad (3.29)$$

Por tanto, para que $\tilde{\Delta} = 1$ y que $C(t_n) = 0$ para un t_n lo más pequeño posible, uno de los observables de entre los que podemos elegir es

$$A(0) = \mathbb{1} + \sqrt{\frac{Z}{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_3}}} \lambda_4. \quad (3.30)$$

3.3. El qudit

Es sencillo generalizar este sistema a un número D de dimensiones. Para un hamiltoniano

$$H = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_D \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

se eligen como parte del operador la identidad (o cualquier matriz de la base que sea diagonal, esto es, que conmute con el hamiltoniano y que por tanto genere una correlación constante en el tiempo) y un operador que conecte la mayor y la menor de las frecuencias, esto es, ω_1 y ω_D .

En el caso D-dimensional elegimos expresar los operadores en función de las matrices de Gell-Mann generalizadas [23]. Existen tres tipos de matrices de Gell-Mann generalizadas: si E_{ij} es la matriz cuyos componentes son todos cero excepto el componente ij , que es igual a uno, las matrices de Gell-Mann generalizadas simétricas y antisimétricas tienen la forma

$$\lambda_{ij}^S = E_{ij} + E_{ji} \quad y \quad \lambda_{ij}^A = i(E_{ij} - E_{ji}). \quad (3.32)$$

Por otra parte, las matrices de Gell-Mann generalizadas diagonales tienen la forma

$$\lambda_l = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left(\sum_j E_{jj} - l E_{ll} \right) \quad \text{para } 1 < l < D-1, \quad (3.33)$$

mientras que para $l = 0$ definimos λ_0 como proporcional a la identidad D-dimensional $\mathbb{1}$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{D}} \mathbb{1}, \quad (3.34)$$

para mantener la condición de normalización $\text{Tr}[\lambda_i \lambda_j] = \delta_{ij}$ que cumplen tanto las matrices tridimensionales de Gell-Mann como las matrices de Pauli.

Si en el caso tridimensional podíamos usar tanto λ_4 como λ_5 , en este caso nos servirán de λ_{1D}^S y λ_{1D}^A . Anulando todos los c_l menos $c_0 = \sqrt{D/2}$ y todos los $c_{ij}^{S/A}$ menos $c_{1D}^S = \sqrt{\alpha}$, de manera análoga a como hemos hecho en la ecuación (3.25),

$$A(0) = \mathbb{1} + \sqrt{\alpha} \lambda_{1D}^S \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \sqrt{\alpha} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Calculando la autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ y, exactamente igual que en la ecuación (3.27), dándonos cuenta de que $-Z/\alpha$ debe ser negativo, logramos la forma general de la ecuación (3.29) para D dimensiones

$$\alpha = \frac{Z}{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_D}}. \quad (3.36)$$

Por ello, la forma genérica del operador D -dimensional más simple de entre los que logran que $\tilde{\Delta} = 1$ haciendo que $C(t_n) = 0$ para un t_n lo más pequeño posible es la siguiente:

$$A(0) = \mathbb{1} + \sqrt{\frac{Z}{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_D}}} \lambda_{1D}^S. \quad (3.37)$$

Se logra así una forma de $A(0)$ para la que, sea cual sea la dimensión del qudit, la trayectoria de la evolución de su autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ en el plano complejo pasa por el origen $\text{Im } C(t_n) = \text{Re } C(t_n) = 0$.

Capítulo 4

Qubits bajo hamiltoniano constante y operadores de Lindblad

Hemos demostrado ya que en el caso de la evolución bajo hamiltoniano del qubit existe al menos un observable $A(0)$ para el cual la autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ pasa por el cero. Para encontrarlo, calculamos la autocorrelación producida por cada matriz de la base en la que escribimos el observable y luego construimos el $A(t)$ sumando dichas matrices en la proporción justa para que tras un tiempo (que siempre existe y nunca es cero) las autocorrelaciones se anulen las unas a las otras. Hacer esto es también posible en qubits bajo la influencia no sólo del hamiltoniano, sino de operadores de Lindblad, como demostraremos en este capítulo.

4.1. El caso de pérdidas

Uno de los fenómenos que se pueden representar con los operadores de Lindblad es el de los flujos de energía. En el caso de las pérdidas, este flujo ocurre desde el subsistema a evaluar hacia otras partes del sistema.

4.1.1. La imagen de Schrödinger

Analicemos primero la imagen de Schrödinger. Si bien es engorroso hablar de la autocorrelación $\langle A(0)A(t) \rangle$ en esta imagen, este análisis nos da una comprensión más clara del significado físico del proceso a estudiar que el que nos daría la imagen de Heisenberg.

Si en $t = 0$ nuestro sistema de dos niveles se encuentra a una temperatura T , esto es, tiene una $\beta = T^{-1}$, sabemos que

$$\rho(0) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\omega_1} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\omega_2} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $Z = e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}$.

Si lo ponemos en contacto con un baño térmico de $T_b = 0$, sabemos que pasado un tiempo en la imagen de Schrödinger la probabilidad de medir un estado que no sea el fundamental tiende a cero. Por tanto, sabemos lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Es posible conseguir este efecto con un solo operador de Lindblad, al que llamaremos operador de pérdidas, o σ_- . Tiene la siguiente forma:

$$\sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Conviene definir ahora también el operador de ganancias, o σ_+ , dado que está íntimamente relacionado con σ_- :

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-^\dagger. \quad (4.4)$$

Si en la ecuación (2.23) llamamos p al coeficiente γ_j correspondiente al operador de pérdidas, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] - \frac{p}{2}[\sigma_+\sigma_-\rho(t) + \rho(t)\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho(t)\sigma_+]. \quad (4.5)$$

Para un hamiltoniano de dos niveles general, las cuatro ecuaciones diferenciales que nos quedan son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{11}(t) &= -p\rho_{11}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{12}(t) &= \left(-\frac{p}{2} - i\omega\right)\rho_{12}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{21}(t) &= \left(-\frac{p}{2} + i\omega\right)\rho_{21}(t) \\ \frac{d}{dt}\rho_{22}(t) &= p\rho_{11}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde, como de costumbre, $\omega = \omega_1 - \omega_2$. No es necesario resolverlas todas, tal y como explicamos en la sección (sec. 2.9), pues sabemos por la conservación de la traza que $\frac{d}{dt}\rho_{11}(t) = -\frac{d}{dt}\rho_{22}(t)$ y que, por hermiticidad, $\rho_{12}(t) = \overline{\rho_{21}(t)}$. Sin embargo, por compleción, se muestran las cuatro ecuaciones y sus resultados:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= C_{11}e^{-pt} \\ \rho_{12}(t) &= C_{12}e^{-\frac{p}{2}t - i\omega t} \\ \rho_{21}(t) &= C_{21}e^{-\frac{p}{2}t + i\omega t} \\ \rho_{22}(t) &= C_{11}(1 - e^{-pt}) + C_{22} \end{aligned} \quad (4.7)$$

y, teniendo en cuenta forma de $\rho(0)$ de la ecuación (4.1), conseguimos los valores de las constantes C_{nm} . De nuevo estos resultados no son independientes entre sí, pero se muestran por compleción. Así, en la imagen de Schrödinger, la evolución de la matriz de densidad inicialmente térmica bajo la influencia del operador σ_- es la siguiente:

$$\rho(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\omega_1}e^{-pt} & 0 \\ 0 & Z - e^{-\beta\omega_1}e^{-pt} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

El significado físico de esta matriz de densidad se aprecia claramente: hay una migración de población del estado excitado de ω_1 al estado relajado de ω_2 que, en el límite de $t \rightarrow \infty$,

hace que toda la población haya migrado al estado base, y que por tanto siempre sea ω_2 la energía medida:

$$\langle H \rangle = \text{Tr}[\rho(t)H] = \omega \frac{e^{-\beta\omega_1} e^{-pt}}{Z} + \omega_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle H \rangle = \omega_2. \quad (4.9)$$

También podemos calcular la media del operador σ_z para luego compararlo con el resultado obtenido en la imagen de Heisenberg:

$$\langle \sigma_z \rangle = \text{Tr}[\rho(t)\sigma_z] = \frac{2e^{-\beta\omega_1} e^{-pt}}{Z} - 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma_z \rangle = -1. \quad (4.10)$$

4.1.2. La imagen de Heisenberg

Analicemos ahora el proceso de pérdidas en la imagen de Heisenberg.

En $t = 0$ los cuatro operadores de nuestra base serán la identidad y las tres matrices de Pauli, como de costumbre. Para el sistema de $D = 2$ la ecuación LGKS (2.22) se traduce en tan solo cuatro ecuaciones diferenciales acopladas, por lo que es comodo resolverlas para un $A(t)$ genérico y después ajustar las constantes de integración con las condiciones de contorno que nos dan cada uno de nuestros $A(0)$ conocidos. Tras introducir el operador 2-dimensional genérico

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

en la ecuación

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)] - \frac{p}{2}[\sigma_+\sigma_-A(t) + A(t)\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_+A(t)\sigma_-] \quad (4.12)$$

obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_{11}(t) &= p(-a_{11}(t) + a_{22}(t)) \\ \frac{d}{dt}a_{12}(t) &= \left(-\frac{p}{2} - i\omega\right)a_{12}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) &= \left(-\frac{p}{2} + i\omega\right)a_{21}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{22}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como en el caso de la imagen de Schrödinger, estas ecuaciones y su resultado no son independientes, pero se muestran por completación. Además, en este caso, aunque la evolución de a_{11} depende tanto de a_{11} como de a_{22} , la derivada de esta última es cero, por lo que su valor se mantiene constante y las cuatro ecuaciones quedan desacopladas, pudiendo resolverse por separado. Estas son las ecuaciones resueltas:

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= a_{22}(0) + C_{11}e^{-pt} \\ a_{12}(t) &= C_{12}e^{-\frac{p}{2}t + i\omega t} \\ a_{21}(t) &= C_{21}e^{-\frac{p}{2}t - i\omega t} \\ a_{22}(t) &= C_{22} \end{aligned} \quad (4.14)$$

para $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Ahora, insertando las cuatro formas iniciales de nuestras A_i

$$A_0(0) = \mathbb{1} \quad A_1(0) = \sigma_x \quad A_2(0) = \sigma_y \quad A_3(0) = \sigma_z \quad (4.15)$$

como condiciones iniciales, despejamos las C_{nm} para cada caso y obtenemos que

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1(t) &= e^{-\frac{pt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{it\omega} \\ e^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\ A_2(t) &= e^{-\frac{pt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{it\omega} \\ ie^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\ A_3(t) &= \begin{pmatrix} -1 + 2e^{-pt} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En este punto, comprobemos que las predicciones de esta imagen casan con las arrojadas por el análisis en la imagen de Schrödinger de la ecuación (4.10):

$$\langle A_3(t) \rangle = \text{Tr}[\rho A_3(t)] = -1 + \frac{2e^{-pt}e^{-\beta\omega_1}}{Z} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle A_3(t) \rangle = -1. \quad (4.17)$$

Efectivamente, tal como debía ser, el $\langle \sigma_z \rangle$ de la imagen de Schrödinger es igual al $\langle A_3(t) \rangle$ de la imagen de Heisenberg para todos los t . Vemos también ahora la utilidad de haber hecho primero el cálculo en la imagen de Schrödinger: no es fácil ver a simple vista en las formas de los A_i que el efecto producido por el operador de pérdidas sea una migración de poblaciones.

Una vez que tenemos nuestros $A_i(t)$, hacer el cálculo de las autocorrelaciones $\langle A(0)A(t) \rangle$ es directo. Estas son las $C(t)$ no nulas:

$$\begin{aligned} \langle A_0(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1 \\ \langle A_0(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\ \langle A_1(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\ \langle A_1(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2}} \frac{ie^{-\beta\omega_1+it\omega} - ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\ \langle A_2(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2}} \frac{-ie^{-\beta\omega_1+it\omega} + ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\ \langle A_2(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\ \langle A_3(0)A_0(t) \rangle &= \frac{(-1 + 2e^{-pt})e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\ \langle A_3(0)A_3(t) \rangle &= \frac{(-1 + 2e^{-pt})e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tal y como ocurría en los casos sin pérdidas, las autocorrelaciones se dividen en dos grupos: las reales positivas y las complejas, que cuando cruzan la línea real pueden ser tanto positivas como negativas.

Por tanto, el procedimiento para conseguir que $\tilde{\Delta} = 1$ es parecido: creamos nuestro operador $A(t)$ como una combinación lineal de un A_i que produzca autocorrelación real, como $A_3(t)$, y otro que produzca autocorrelación compleja, como $A_1(t)$:

$$A(t) = A_1(t) + \sqrt{\alpha} A_3(t) \Rightarrow \langle A(0)A(t) \rangle = \langle A_1(0)A_1(t) \rangle + \alpha \langle A_3(0)A_3(t) \rangle. \quad (4.19)$$

Dada la forma de las autocorrelaciones complejas de (4.18), todas ellas cruzan la línea real por primera vez en $t = \pi/\omega$. Por ello, si buscamos el α que cause simultáneamente que $\text{Im } C(\pi/\omega) = \text{Re } C(\pi/\omega) = 0$, la ecuación a resolver es

$$0 = e^{-\frac{pt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1 + it\omega} + e^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} + \alpha \frac{(-1 + 2e^{-pt})e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z}. \quad (4.20)$$

Teniendo en cuenta la condición impuesta de que $t = \pi/\omega$ para que $e^{\pm it\omega} = -1$ (y que así cuando $\text{Im } C(t_n) = 0$ se logre también $\text{Re } C(t_n) = 0$) llegamos a la conclusión de que existe

$$\alpha = \frac{Ze^{-\frac{p\pi}{2\omega}}}{(-1 + 2e^{-\frac{p\pi}{\omega}})e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}} \quad (4.21)$$

que cumple nuestras condiciones y que, por tanto, aún bajo la influencia del operador de pérdidas σ_- es posible conseguir maximizar la visibilidad.

Para este operador

$$A(t) = A_1(t) + \sqrt{\frac{Ze^{-\frac{p\pi}{2\omega}}}{(-1 + 2e^{-\frac{p\pi}{\omega}})e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}} A_3(t) \quad (4.22)$$

y los valores numéricos de $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $\beta = 1$ y $p = 0,2$ la evolución de $\tilde{C}(t)$ describe curva de la figura (4.1) en el plano complejo.

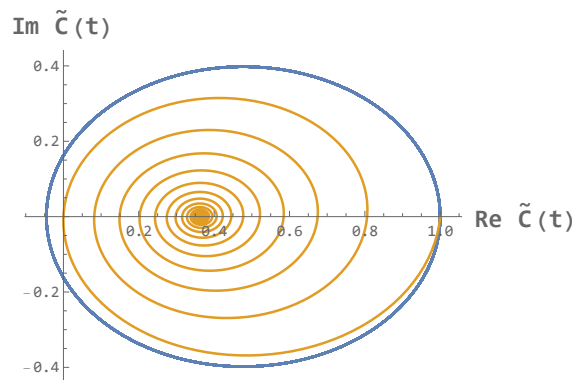


Figura 4.1: Evolución de la correlación bajo operador σ_- . Sin pérdidas, en azul, $\tilde{C}(t)$ describiría una elipse en el plano complejo. Con pérdidas, en amarillo, espiralea hacia un punto de la recta real.

Como podemos observar, nuestro operador $A(t)$ está bien afinado para que la correlación normalizada, en amarillo, salga de las coordenadas $(1, 0)$ en $t = 0$ y cruce la línea real por primera vez por el punto $(0, 0)$ en $t_1 = \omega/2$.

4.2. El caso de ganancias

Además de las pérdidas, los operadores de Lindblad nos permiten representar el flujo de energía contrario, esto es, las ganancias, en las que el subsistema absorbe energía de otras partes del sistema.

4.2.1. La imagen de Schrödinger

Para entender de manera intuitiva el efecto del operador de Lindblad analicemos primero la imagen de Schrödinger, tal y como hicimos en el caso del operador de pérdidas. Si entonces utilizabamos σ_- como nuestro L_j , en este caso utilizaremos el σ_+ definido en (4.4).

Asumimos que en $t = 0$ nuestro sistema se encuentra a una temperatura T por lo que la matriz de densidad tiene la forma conocida (4.1). Determinamos también que, al estar representando una absorción de calor, el límite estará en estado totalmente excitado en el que el sistema no admita más energía:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Podría parecer que para conseguir la energía máxima mediante flujo de calor tuviéramos que colocar nuestro subsistema en contacto con un baño térmico de temperatura infinita, lo que nos dejaría con una $\beta_b = 0$. Pero al introducirla en la forma de una ρ_T nos damos cuenta de que esto sólo consigue que las poblaciones de los dos estados de nuestro sistema se igualen: aún hay una población relajada que podríamos excitar para insuflar más energía al subsistema. La β_b requerida para que el estado relajado se vacíe y así el estado excitado quede repleto es $\beta_b = -\infty$, lo cual nos deja con baño de temperatura nula. ¡Pero nuestra intuición nos dice que el efecto de dicho baño sería el de robarle toda la energía al sistema! Y, de hecho, es el argumento intuitivo que hemos usado en la sección del operador de pérdidas. La solución a esta aparente paradoja, claro está, radica en la naturaleza asintótica de $\beta = 1/T$ cuando $T \rightarrow 0$. Mientras que al aproximarnos por los números positivos β tiende a infinito, al hacerlo por los negativos se $\beta \rightarrow -\infty$ [24]. Siendo bondadosos con la notación podríamos afirmar lo siguiente: un baño de $T_b = 0^+$ absorbe toda la energía del subsistema y nos produce el estado de relajación total, mientras que para $T_b = 0^-$ se produce el estado contrario en el que toda la población queda excitada.

Si en la ecuación (2.23) llamamos g al coeficiente γ_j correspondiente al operador de ganancias, obtenemos la ecuación análoga a (4.5) del caso pérdidas. Dicha ecuación matricial se nos traduce cuatro ecuaciones diferenciales acopladas, como en (4.6), que se resuelven como

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= C_{11} + C_{22}(1 - e^{-gt}) \\ \rho_{12}(t) &= C_{12}e^{-\frac{g}{2}t - i\omega t} \\ \rho_{21}(t) &= C_{21}e^{-\frac{g}{2}t + i\omega t} \\ \rho_{22}(t) &= C_{22}e^{-gt}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como de costumbre, estas ecuaciones no son independientes y se muestran por compatitud. Sustituyendo la forma (4.1) de $\rho(0)$ obtenemos que

$$\rho(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} Z - e^{-\beta\omega_1} e^{-gt} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\omega_1} e^{-gt} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Vemos que hay una simetría clara entre el caso de pérdidas (4.8) y el de ganancias (4.25). Si en el primero teníamos una migración $\rho_{11} \rightsquigarrow \rho_{22}$, reduciendo la energía al mínimo, en el segundo el operador σ_+ provoca la migración contraria, esto es, $\rho_{22} \rightsquigarrow \rho_{11}$.

4.2.2. La imagen de Heisenberg

Analicemos ahora el proceso de ganancias en la imagen de Heisenberg.

En $t = 0$ los cuatro operadores de nuestra base serán, como de costumbre, la identidad y las tres matrices de Pauli. La ecuación de Lindblad (2.22) para el operador σ_+ (4.4), como en el caso de sólo pérdidas, se traduce en cuatro ecuaciones fácilmente desacoplables: aunque la evolución de a_{22} depende tanto del propio a_{22} como de a_{11} , la derivada de esta última es cero, por lo que su valor se mantiene constante y las cuatro ecuaciones se pueden resolver por separado. Estos son los resultados:

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= C_{11} \\ a_{12}(t) &= C_{12} e^{-\frac{g}{2}t + i\omega t} \\ a_{21}(t) &= C_{21} e^{-\frac{g}{2}t - i\omega t} \\ a_{22}(t) &= a_{11}(0) + C_{22} e^{-gt} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Con las cuatro formas iniciales de nuestras A_i (4.15) despejamos las C_{nm} para cada caso y obtenemos que

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1(t) &= e^{-\frac{gt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \\ A_2(t) &= e^{-\frac{gt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\omega t} \\ ie^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \\ A_3(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2e^{-gt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Estos resultados de la imagen de Heisenberg encajan con nuestra idea intuitiva de la imagen de Schrödinger de la migración de la población hacia el estado más energético. Por ejemplo,

$$\langle A_3(t) \rangle = \text{Tr}[\rho A_3(t)] = 1 - \frac{2e^{-gt} e^{-\beta\omega_1}}{Z} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle A_3(t) \rangle = 1 \quad (4.28)$$

Una vez que tenemos nuestros $A_i(t)$, podemos calcular las autocorrelaciones. Estas son las no nulas:

$$\begin{aligned}
\langle A_0(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1 \\
\langle A_0(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_1(t) \rangle &= e^{\frac{-gt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_2(t) \rangle &= e^{\frac{-gt}{2}} \frac{ie^{-\beta\omega_1+it\omega} - ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_1(t) \rangle &= e^{\frac{-gt}{2}} \frac{-ie^{-\beta\omega_1+it\omega} + ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_2(t) \rangle &= e^{\frac{-gt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + (1 - 2e^{-gt})e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - (1 - 2e^{-gt})e^{-\beta\omega_2}}{Z}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Tomando, como de costumbre, (4.19), la ecuación a resolver para que para que $C(\pi/\omega) = 0$ es

$$0 = e^{\frac{-gt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} + \alpha \frac{e^{-\beta\omega_1} - (1 - 2e^{-gt})e^{-\beta\omega_2}}{Z} \tag{4.30}$$

y por tanto, recordando que $t = \pi/\omega$,

$$\alpha = \frac{Ze^{-\frac{g\pi}{2\omega}}}{e^{-\beta\omega_1} + (1 - 2e^{-\frac{g\pi}{\omega}})e^{-\beta\omega_2}} \tag{4.31}$$

Por tanto, al igual que ocurría con el operador de pérdidas, también es posible hacer que la correlación sea nula en algún punto del tiempo, maximizando así la visibilidad $\tilde{\Delta}$.

Para el operador obtenido

$$A(t) = A_1(t) + \sqrt{\frac{Ze^{-\frac{g\pi}{2\omega}}}{e^{-\beta\omega_1} + (1 - 2e^{-\frac{g\pi}{\omega}})e^{-\beta\omega_2}}} A_3(t) \tag{4.32}$$

y los valores numéricos de $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $\beta = 1$ y $g = 0,2$ la evolución de $\tilde{C}(t)$ describe la curva de la figura (4.2) en el plano complejo.

4.3. El caso de pérdidas y ganancias

Tal y como se muestra en las ecuaciones LGKS, es posible aplicar los efectos de varios L_j a nuestro sistema. En este caso, analicemos los efectos de un sistema simultáneamente bajo la influencia de σ_- y σ_+ .

4.3.1. La imagen de Schrödinger

Dado que σ_- y σ_+ representan flujos de población, mejor entendidos bajo la imagen de Schrödinger, tiene sentido analizar su combinación también bajo dicha perspectiva.

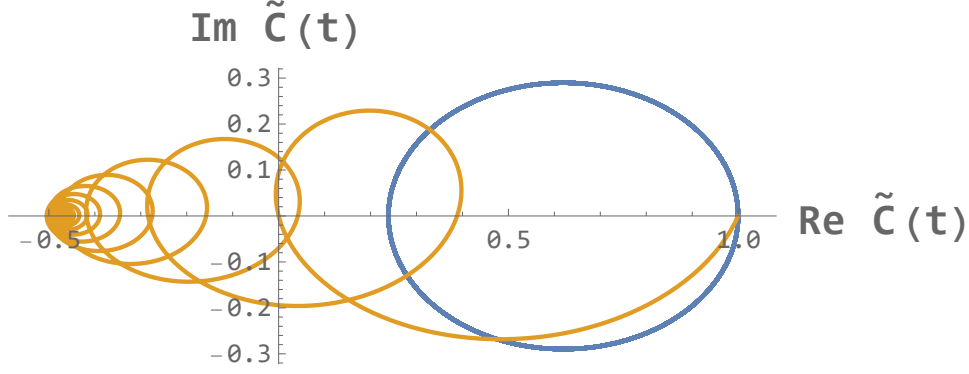


Figura 4.2: Evolución de la correlación bajo operador σ_+ . Sin ganancias, en azul, $\tilde{C}(t)$ describiría una elipse en el plano complejo. Con ganancias, en amarillo, espiralea hacia un punto de la recta real.

Asumimos, como siempre, que en $t = 0$ la matriz de densidad tiene la forma conocida (4.1).

Llamando, como hemos hecho ya anteriormente, p al coeficiente γ_j de σ_- en la ecuación (2.23) y g al de σ_+ , obtenemos la siguiente ecuación, esta vez con dos términos del sumatorio distintos de cero:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -i[H, \rho(t)] - \frac{p}{2}[\sigma_+\sigma_-\rho(t) + \rho(t)\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho(t)\sigma_+] \\ & - \frac{g}{2}[\sigma_-\sigma_+\rho(t) + \rho(t)\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho(t)\sigma_-]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Esta vez la solución a las cuatro ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} - C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g} \\ \rho_{12}(t) &= C_{12} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t - i\omega t} \\ \rho_{21}(t) &= C_{21} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t + i\omega t} \\ \rho_{22}(t) &= C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} - C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g} \end{aligned} \quad (4.34)$$

y, conociendo la forma (4.1) de $\rho(0)$ obtenemos los C_{nm} . En nuestro caso,

$$\rho(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\omega_1} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} - e^{-\beta\omega_2} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\omega_2} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} - e^{-\beta\omega_1} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

En este caso, al existir los dos flujos $\rho_{11} \rightsquigarrow \rho_{22}$ y $\rho_{22} \rightsquigarrow \rho_{11}$, ninguno de los dos estados puede llegar a llenarse: en caso de que eso ocurriera, no tendría flujo entrante, pues no habría población del estado contrario que convertir; pero sí, sin embargo, flujo saliente, por lo que se empezaría a vaciar inmediatamente. Por tanto, aunque se tenga que $p > g$ o viceversa, el sistema tiende a un equilibrio en el que ambas poblaciones son distintas de cero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{1}{p+g} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Este nuevo equilibrio, en el caso del qubit, siempre se podrá escribir mediante una nueva matriz de densidad térmica, aunque las ω'_i de esa $\rho_{T'}$ varíen con respecto a las ω_i del hamiltoniano original. Esto no es cierto, sin embargo, para otros qudits de dimensionalidades mayores.

4.3.2. La imagen de Heisenberg

Analicemos ahora el proceso de pérdidas y ganancias en la imagen de Heisenberg. En $t = 0$ los cuatro operadores de nuestra base serán, como de costumbre, la identidad y las tres matrices de Pauli. En la ecuación de Lindblad (2.22) para los operadores σ_- (4.3) y σ_+ (4.4), a diferencia de en los casos de únicamente pérdidas o ganancias, las ecuaciones 11 y 22 están realmente acopladas, por lo que hay que resolverlas conjuntamente. Teniendo presente que por hermiticidad no son realmente cuatro resultados independientes, estos son los a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} - C_{22} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g} \\ a_{12}(t) &= C_{12} e^{-\frac{p}{2} - \frac{g}{2}t + i\omega t} \\ a_{21}(t) &= C_{21} e^{-\frac{p}{2} - \frac{g}{2}t - i\omega t} \\ a_{22}(t) &= C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} - C_{11} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con las formas (4.15) de cada $A_i(0)$ ajustamos las C_{nm} para cada $A_i(t)$:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1(t) &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \\ A_2(t) &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\omega t} \\ ie^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \\ A_3(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{p+g} & 0 \\ 0 & \frac{-2ge^{-(p+g)t} - p + g}{p+g} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

De (4.38) y aplicando la definición (2.15) se consiguen directamente las $C(t)$. Estas son las distintas de cero:

$$\begin{aligned}
\langle A_0(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1 \\
\langle A_0(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1 + it\omega} + e^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \frac{ie^{-\beta\omega_1 + it\omega} - ie^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \frac{-ie^{-\beta\omega_1 + it\omega} + ie^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2}} \frac{e^{-\beta\omega_1 + it\omega} + e^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_0(t) \rangle &= e^{-b\omega_1} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{(p+g)Z} - e^{-b\omega_2} \frac{2ge^{-(p+g)t} + p - g}{(p+g)Z} \\
\langle A_3(0)A_3(t) \rangle &= e^{-b\omega_1} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{(p+g)Z} + e^{-b\omega_2} \frac{2ge^{-(p+g)t} + p - g}{(p+g)Z}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Tomamos como operador, como en otros casos, $A(t) = A_1(t) + \sqrt{\alpha} A_3(t)$. En este caso de pérdidas y ganancias obtenemos que

$$\alpha = \frac{Z(p+g)e^{-\frac{p\pi}{2\omega} - \frac{g\pi}{2\omega}}}{e^{-b\omega_1}(2pe^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} - p + g) + e^{-b\omega_2}(2ge^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} + p - g)} \tag{4.40}$$

y demostramos así que en este caso también es posible hacer que $\tilde{\Delta} = 1$.

Para el operador obtenido

$$A(t) = A_1(t) + \sqrt{\frac{Z(p+g)e^{-\frac{p\pi}{2\omega} - \frac{g\pi}{2\omega}}}{e^{-b\omega_1}(2pe^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} - p + g) + e^{-b\omega_2}(2ge^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} + p - g)}} A_3(t) \tag{4.41}$$

y los valores numéricos de $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $\beta = 1$, $p = 0,2$ y $g = 0,2$ la correlación normalizada $\tilde{C}(t)$ describe la trayectoria de la figura (4.3).

En este caso, al ser p y g iguales, el límite de $\tilde{C}(t)$ para tiempo infinito es igual a cero, pero esta no es una característica común a todos los casos de pérdidas y ganancias.

4.4. El caso de defasaje puro

En las ecuación LGKS (2.22) y (2.23) el límite del sumatorio está en $D^2 - 1$, que para $D = 2$ tiene un valor de 3. Esto implica que, además de los operadores de pérdidas y ganancias σ_- y σ_+ necesitamos otro L_j para completar todo el espacio de operadores de Lindblad: el operador de defasaje σ_z . Llamaremos d al coeficiente γ_j de este operador.

En este caso, al ser σ_z hermítico, $L_j = L_j^\dagger$. Lo que es más, $\sigma_z^2 = \mathbb{1}$. Por tanto, en algunas de las ecuaciones de esta sección dichos aspectos aparecerán simplificados, rompiendo la simetría visual con los casos de σ_- y σ_+ a cambio de expresiones más sucintas y limpias.

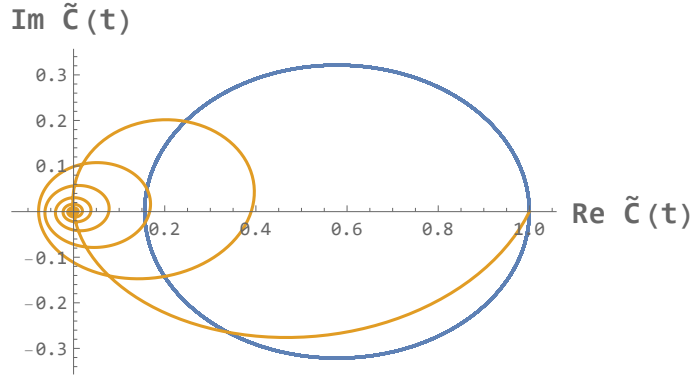


Figura 4.3: Evolución de la correlación bajo operadores σ_- y σ_+ . Sin pérdidas ni ganancias, en azul, $\tilde{C}(t)$ describiría una elipse en el plano complejo. Para p y g iguales, en amarillo, espiralea hacia el origen.

4.4.1. La imagen de Schrödinger

Analícemos como funciona σ_z como operador de Lindblad en la imagen de Schrödinger. Tenemos que

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] - d[\rho(t) - \sigma_z\rho(t)\sigma_z], \quad (4.42)$$

que se resuelve como

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= C_{11} & \rho_{12}(t) &= C_{12}e^{-2dt-i\omega t} \\ \rho_{22}(t) &= C_{22} & \rho_{21}(t) &= C_{21}e^{-2dt+i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

El resultado es que para un $\rho(0)$ diagonal como el nuestro, $\rho(t) = \rho(0)$, pues el efecto de el operador de defasaje es únicamente la de hacer desaparecer los elementos extradiagonales. Esta desaparición también la causaban p y g , pero a una eficacia cuatro veces menor. Dicho de otra manera, para reducir los elementos extradiagonales a la misma velocidad que con los efectos combinados de σ_- y σ_+ , d necesita ser tan solo una cuarta parte de $p + g$.

4.4.2. La imagen de Heisenberg

Analícemos ahora el proceso de defasaje en la imagen de Heisenberg. Teniendo en cuenta las propiedades de σ_z la ecuación (2.22) toma la forma simplificada de

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[H, A(t)] - d[A(t) - \sigma_z A(t)\sigma_z] \quad (4.44)$$

en que las ecuaciones quedan desacopladas y

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= C_{11} & a_{12}(t) &= C_{12}e^{-2dt+i\omega t} \\ a_{22}(t) &= C_{22} & a_{21}(t) &= C_{21}e^{-2dt-i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es directo conseguir que $C_{nm} = a_{nm}(0)$ por lo que

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_1(t) &= e^{-2dt} \begin{pmatrix} 0 & e^{it\omega} \\ e^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\
A_2(t) &= e^{-2dt} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{it\omega} \\ ie^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\
A_3(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Tal y como hemos visto en la imagen de Schrödinger, para una ρ diagonal ninguna de las mediciones $\langle A_i(t) \rangle$ se ve afectada.

Una vez tenemos la evolución de los observables, podemos conseguir las de las auto-correlaciones:

$$\begin{aligned}
\langle A_0(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1 \\
\langle A_0(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_1(t) \rangle &= e^{-2dt} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_2(t) \rangle &= e^{-2dt} \frac{ie^{-\beta\omega_1+it\omega} - ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_1(t) \rangle &= e^{-2dt} \frac{-ie^{-\beta\omega_1+it\omega} + ie^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_2(t) \rangle &= e^{-2dt} \frac{e^{-\beta\omega_1+it\omega} + e^{-\beta\omega_2-it\omega}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1
\end{aligned} \tag{4.47}$$

En este caso de defasaje, para que tomando $A(t) = A_1(t) + \sqrt{\alpha} A_3(t)$ consigamos que la correlación pase por el origen, siguiendo cálculos semejantes a los de las ecuaciones (4.19 - 4.21), se obtiene que

$$\alpha = \frac{Ze^{-\frac{2d\pi}{\omega}}}{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}} \tag{4.48}$$

y, sustituyendo ese α en la forma de $A(t)$ se obtiene que, para los valores numéricos de $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $\beta = 1$ y $d = 0,2$ la evolución de $\tilde{C}(t)$ describe la curva de la figura (4.4) en el plano complejo.

4.5. El caso de pérdidas, ganancias y defasaje

Unamos, por fin, los tres operadores de Linblad en una sola ecuación LGKS.

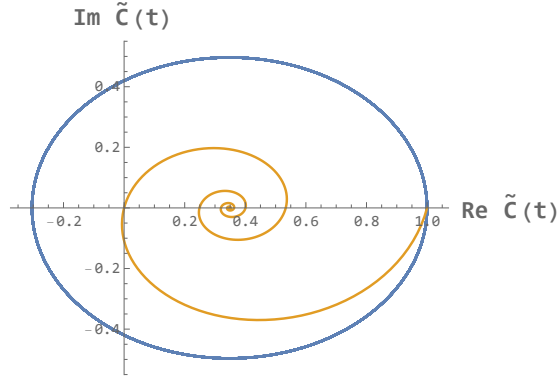


Figura 4.4: Evolución de la correlación bajo operador σ_z . Sin defasaje, en azul, $\tilde{C}(t)$ describiría una elipse en el plano complejo. Con defasaje, en amarillo, espiralea hacia el centro de la elipse azul.

4.5.1. La imagen de Schrödinger

Dado que, como hemos visto, en la imagen de Schrödinger el defasaje no produce cambios en $\rho(t)$ diagonal, podríamos pensar que este caso de pérdidas ganancias y defasaje no será distinto del caso en el que únicamente notamos la influencia de σ_- y σ_+ .

La ecuación LGKS tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & -i[H, \rho(t)] - \frac{p}{2}[\sigma_+\sigma_-\rho(t) + \rho(t)\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho(t)\sigma_+] \\ & - \frac{g}{2}[\sigma_-\sigma_+\rho(t) + \rho(t)\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho(t)\sigma_-] - d[\rho(t) - \sigma_z\rho(t)\sigma_z] \end{aligned} \quad (4.49)$$

para el caso 2-dimensional completo de tres operadores de Lindblad.

Tal y como era de esperar, los elementos diagonales permanecen inalterados con respecto al caso sin defasaje (4.34), pues

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} - C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g} \\ \rho_{12}(t) &= C_{12} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t - 2dt - i\omega t} \\ \rho_{21}(t) &= C_{21} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t - 2dt + i\omega t} \\ \rho_{22}(t) &= C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} - C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Por tanto, la evolución de $\rho(t)$ es la misma que la del caso (4.35)

$$\rho(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\omega_1} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\omega_2} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g} \\ e^{-\beta\omega_2} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} & 0 \\ 0 & e^{-\beta\omega_1} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

y son válidas las ideas y explicaciones que aplicamos para dicho caso de únicamente pérdidas y ganancias.

4.5.2. La imagen de Heisenberg

Por fin llegamos al caso general en que se resumen y exponen todos los cálculos relevantes de esta sección: recordemos que el análisis en la imagen de Schrödinger no era sino una herramienta para la comprensión intuitiva de la evolución del subsistema estudiado, y es sólo en la imagen de Heisenberg que calculamos la correlación que estamos tratando de optimizar.

Esta es la ecuación de LGKS (2.22) para los operadores σ_- , σ_+ y σ_z :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(t) = & i[H, A(t)] - \frac{p}{2}[\sigma_+\sigma_-A(t) + A(t)\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_+A(t)\sigma_-] \\ & - \frac{g}{2}[\sigma_-\sigma_+A(t) + A(t)\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_-A(t)\sigma_+] - d[A(t) - \sigma_zA(t)\sigma_z]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

La resolución general de esta ecuación es

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= C_{11} \frac{pe^{-(p+g)t} + g}{p+g} - C_{22} \frac{pe^{-(p+g)t} - p}{p+g} \\ a_{12}(t) &= C_{12} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t - 2dt + i\omega t} \\ a_{21}(t) &= C_{21} e^{-\frac{p}{2}t - \frac{g}{2}t - 2dt - i\omega t} \\ a_{22}(t) &= C_{22} \frac{ge^{-(p+g)t} + p}{p+g} - C_{11} \frac{ge^{-(p+g)t} - g}{p+g} \end{aligned} \quad (4.53)$$

y, por tanto, para las formas de $A_i(0)$ (4.15),

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1(t) &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \begin{pmatrix} 0 & e^{it\omega} \\ e^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\ A_2(t) &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{it\omega} \\ ie^{-it\omega} & 0 \end{pmatrix} \\ A_3(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{p+g} & 0 \\ 0 & \frac{-2ge^{-(p+g)t} - p + g}{p+g} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Las correlaciones distintas de cero son

$$\begin{aligned}
\langle A_0(0)A_0(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} + e^{-\beta\omega_2}}{Z} = 1 \\
\langle A_0(0)A_3(t) \rangle &= \frac{e^{-\beta\omega_1} - e^{-\beta\omega_2}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \frac{e^{-\beta\omega_1 + it\omega} + e^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_1(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \frac{ie^{-\beta\omega_1 + it\omega} - ie^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_1(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \frac{-ie^{-\beta\omega_1 + it\omega} + ie^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_2(0)A_2(t) \rangle &= e^{-\frac{pt}{2} - \frac{gt}{2} - 2dt} \frac{e^{-\beta\omega_1 + it\omega} + e^{-\beta\omega_2 - it\omega}}{Z} \\
\langle A_3(0)A_0(t) \rangle &= e^{-b\omega_1} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{(p+g)Z} - e^{-b\omega_2} \frac{2ge^{-(p+g)t} + p - g}{(p+g)Z} \\
\langle A_3(0)A_3(t) \rangle &= e^{-b\omega_1} \frac{2pe^{-(p+g)t} - p + g}{(p+g)Z} + e^{-b\omega_2} \frac{2ge^{-(p+g)t} + p - g}{(p+g)Z}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

por lo que para que tomando $A(t) = A_1(t) + \sqrt{\alpha} A_3(t)$ la correlación $C(\pi/\omega)$ sea igual a cero necesitamos que α tome la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{Z(p+g)e^{-\frac{p\pi}{2\omega} - \frac{g\pi}{2\omega} - 2dt}}{e^{-b\omega_1}(2pe^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} - p + g) + e^{-b\omega_2}(2ge^{-(p+g)\frac{\pi}{\omega}} + p - g)}. \tag{4.56}$$

Mediante la existencia de ese α demostramos que incluso para el caso con los tres tipos de decoherencia (pérdidas, ganancias y defasaje) es posible hacer que $\tilde{\Delta} = 1$. Para el operador $A(t)$ obtenido y los valores numéricos de $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $\beta = 1$, $p = 0,2$, $g = 0,2$ y $d = 0,2$ la $\tilde{C}(t)$ describe en \mathbb{C} la curva de la figura (4.5).

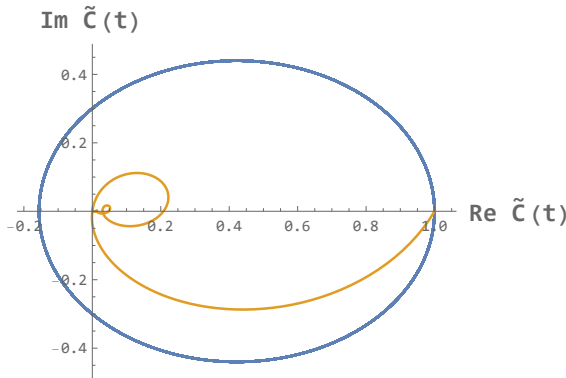


Figura 4.5: Evolución de la correlación bajo operadores σ_- , σ_+ y σ_z . Sin pérdidas, ganancias ni defasaje, en azul, $\tilde{C}(t)$ describiría una elipse en el plano complejo. Para p , g y d positivos, en amarillo, tiende hacia un punto de la recta real.

Como ocurría en la figura (4.3), al ser $p = g$ tenemos que $C(t)$ tiende a cero en el límite $t \rightarrow \infty$. Pero, como se puede comprobar jugando un poco con el gráfico manipulable del archivo adjunto 4.5.2.- Manipulable 6 parámetros.nb, esto no siempre es así. Por otra parte, para proporciones $p : g : d$ bien afinadas es posible hacer que la autocorrelación pase más de una vez por el origen, incluso infinitas veces, pese a sufrir los efectos de la decoherencia.

Capítulo 5

Conclusiones

Con la programación de `4.5.2. - Manipulable 6 parámetros.nb` concluye el trabajo propuesto: tras el análisis realizado, podemos decir que hemos conseguido nuestro objetivo de optimizar las autocorrelaciones de los observables para su uso como medida de caracterización del sistema.

Al estudiar la evolución en del qubit bajo operadores de Lindblad hemos sentado nuestras bases teóricas para el desarrollo del formalismo necesario para estudiar más a fondo los sistemas cuánticos. Mediante las herramientas de la ecuación LGKS y la autocorrelación se han estudiado sistemas en equilibrio térmico, como base también para el análisis de los fenómenos que ocurren fuera de dicho equilibrio. Además, en todos los casos analizados se ha logrado aumentar la visibilidad normalizada $\tilde{\Delta}$ al máximo mediante el ajuste del observable inicial $A(0)$: al escoger los coeficientes de las matrices hermíticas de la base en la que escribimos el observable escogiendo la proporción correcta, se consigue que la correlación $C(t)$ se haga cero en un tiempo mínimo. La existencia de este tiempo mínimo es reminiscente de los tiempos mínimos que aparecen al analizar los límites de velocidad cuánticos (también llamados QSL, por sus siglas en inglés).

Hemos visto cómo, pudiendo elegir nuestro $A(0)$ se puede lograr que $\tilde{\Delta} = 1$. De manera notable, este resultado se cumple incluso en sistemas abiertos y expuestos a la decoherencia: este tipo de sistemas tienden a degradarse velozmente y, sin embargo, este método no se ve afectado por ello. De hecho, el tiempo t_1 necesario para que $C(t_1) = 0$ no varía al introducir operadores de Lindblad, pues sólo depende del hamiltoniano H . Aún en los casos en los que la elección de nuestro $A(0)$ no hace que $|C(t)|_{min} = 0$, existe un tiempo mayor que cero en el que pasar del máximo a dicho mínimo. Esta reminiscencia de los límites de velocidad cuánticos es señalable y digna de mayor estudio.

Como otras tareas pendientes quedan, por ejemplo, el análisis explícito de la evolución de la correlación en sistemas decoherentes de dimensiones superiores a dos. Es de esperar, sin embargo, que dichos sistemas también puedan conseguir la visibilidad máxima, tal y como pueden conseguirla los sistemas cerrados de esas dimensiones. Al aumentar el tamaño de la base de los observables, si es posible elegir cualquier $A(0)$, no se reducen las opciones disponibles sino que se aumentan, por lo que cabe pensar que no sólo será posible hacer que $\tilde{\Delta} = 1$ en $D > 2$, sino que de hecho será más fácil que en $D = 2$. En estos qudits de dimensiones superiores se espera también nueva fenomenología, al existir en estos espacios operadores de Lindblad que interactúan de más maneras con el hamiltoniano que las encontradas en un qubit expresado en una matriz de cuatro elementos. También es esperable nueva fenomenología en sistemas con diferencias de energía no conmensurables,

en los que la interacción entre tres o más frecuencias puede dar lugar a evoluciones no periódicas del sistema incluso en qudits aislados del ruido.

Por otra parte, otro caso de estudio interesante es el de la restricción de la elección del $A(0)$. No en todos los sistemas físicos es posible medir todos los observables por lo que, en un sistema donde la selección del $A(0)$ no es libre, puede darse que incluso en el caso óptimo $\tilde{\Delta}$ no pueda llegar a ser igual a 1. Podría ser, incluso, que no todos los observables que se puedan llegar a medir tengan la misma resolución de medición y que, debido a esto, sea más conveniente elegir un observador con una $\tilde{\Delta}$ teórica menor. Por tanto, estos casos deberían estudiarse sobre sistemas físicos específicos, pues la casuística es enorme.

Otro punto que podría dar lugar a trabajos posteriores es, en casos en los que queramos acelerar las medidas afectando a la visibilidad lo menos posible, el de la maximización no de $\tilde{\Delta}$, sino la magnitud $\tilde{\Delta}/t_1$.

En resumen, la utilidad de la autocorrelación de los observables como herramienta para la caracterización de sistemas cuánticos ha quedado demostrada, no sólo por el trabajo realizado sino por el amplio abanico de ellos que quedan por realizar.

Bibliografía

- [1] A. del Campo, I. L. Egusquiza, M. B. Plenio, and S. F. Huelga. Quantum speed limits in open system dynamics. *Physical Review Letters*, 110(5), Jan 2013. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.050403>, doi:10.1103/physrevlett.110.050403.
- [2] S. Deffner and S. Campbell. Quantum speed limits: from Heisenberg’s uncertainty principle to optimal quantum control. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(45):453001, Oct 2017. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa86c6>. doi:10.1088/1751-8121/aa86c6.
- [3] J. S. Sidhu and P. Kok. A geometric perspective on quantum parameter estimation, 2019. [arXiv:1907.06628](https://arxiv.org/abs/1907.06628).
- [4] Z. Xu, L. P. García-Pintos, A. Chenu, and A. del Campo. Extreme decoherence and quantum chaos. *Physical Review Letters*, 122(1), Jan 2019. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.014103>, doi:10.1103/physrevlett.122.014103.
- [5] L. P. García-Pintos and A. del Campo. Quantum speed limits under continuous quantum measurements. *New Journal of Physics*, 21(3):033012, Mar 2019. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ab099e>, doi:10.1088/1367-2630/ab099e.
- [6] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106:620–630, May 1957. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620>, doi:10.1103/PhysRev.106.620.
- [7] R. Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, 29(1):255–284, jan 1966. URL: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/29/1/306>, doi:10.1088/0034-4885/29/1/306.
- [8] F. G. Fuchs, V. Falch, and C. Johnsen. Quantum poker - a pedagogical tool to learn quantum computing that is fun to play, 2019. [arXiv:1908.00044](https://arxiv.org/abs/1908.00044).
- [9] A. Pais. *Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World*. Oxford University Press, 1986.
- [10] H. Martens. *The uncertainty principle*. PhD thesis, 1991. doi:10.6100/IR348359.
- [11] Original by E. Schrödinger, 1930. Annotated version by A. Angelow and M.-C. Battoni. About heisenberg uncertainty relation, 1999. [arXiv:quant-ph/9903100](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9903100).
- [12] J. Hilgevoord and J. Uffink. The uncertainty principle. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2016 edition, 2016. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/qt-uncertainty/>.

- [13] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [14] Etymology of “bit”. Online Etymology Dictionary. URL: <https://www.etymonline.com/word/bit>.
- [15] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948. URL: <http://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf>. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [16] B. Schumacher. Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 51:2738–2747, Apr 1995. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2738>, doi:10.1103/PhysRevA.51.2738.
- [17] @RAEinforma. Twitter, 5 dic. 2019 URL: <https://twitter.com/raeinforma/status/1202554700840755201>.
- [18] Fundéu BBVA, 18 abr. 2017 URL: <https://www.fundeu.es/recomendacion/cubit-mejor-que-qubit/>.
- [19] Quantum algorithms. IBM Quantum Experience URL: <https://quantum-computing.ibm.com/docs/guide/q-algos/#quantum-algorithms>.
- [20] P. Pearle. Simple derivation of the Lindblad equation. 2012. [arXiv:1204.2016v1](https://arxiv.org/abs/1204.2016v1), doi:10.1088/0143-0807/33/4/805.
- [21] A. Rivas and S. F. Huelga. *Open Quantum Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-23354-8>, doi:10.1007/978-3-642-23354-8.
- [22] C. Stover. Gell-Mann matrix. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Gell-MannMatrix.html>.
- [23] C. Stover. Generalized Gell-Mann matrix. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. URL: <https://mathworld.wolfram.com/GeneralizedGell-MannMatrix.html>.
- [24] M. W. Zemansky and R. H. Dittmann. *Calor y Termodinámica, sexta edición*. McGraw-Hill, 1986. pág. 544, sec. 19-3: Temperaturas Kelvin Negativas.