Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT Zientzia eta Teknologia Fakultatea Facultad de Ciencia y Tecnología

Axiomas de separación en espacios topológicos

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Iris Fernández

Trabajo dirigido por
Marta Macho Stadler

Leioa, 17 de junio de 2020

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi directora de TFG, Marta Macho, por guiarme y ayudarme en todo lo que he necesitado.

También me gustaría dar las gracias a mi familia por cuidarme y apoyarme incondicionalmente. Gracias "aita"por enseñarme a ver la belleza de las matemáticas. A mis amigas y a Jorge por alentarme durante esta etapa.

Finalmente quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis profesores del colegio. En especial a Desiree Anton por animarme a estudiar esta carrera.

Introducción

En este trabajo estudiamos algunos axiomas que nos ayudan a separar puntos, puntos y conjuntos cerrrados o conjuntos cerrados entre sí por medio de los abiertos de la topología.

Los axiomas de separación más importantes se denominan con la letra T, por la palabra alemana *Trennungsaxiom*, que significa precisamente “axioma de separación”. Entre estos espacios cabe destacar los espacios T_2 o Hausdorff, los T_3 o regulares y los T_4 o normales.

En el primer capítulo se introducen los axiomas básicos de separación (T_0, T_1 y T_2), aquellos que separan los puntos en un espacio topológico. Veremos las relaciones y diferencias entre estos. Además se dedica una especial atención en los espacios T_2 debido a sus propiedades importantes. Concluiremos introduciendo dos axiomas topológicos que se encuentran “entre T_1 y T_2”.

En el segundo capítulo se introducen los axiomas R_0, R_1 y T_3. Se estudian las relaciones entre estos espacios y los del capítulo anterior.

En el tercer capítulo se estudian los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ o Tychonoff, normal y T_4, que separan conjuntos cerrados. Veremos las relaciones entre ellos, así como las que existen con los axiomas de los capítulos anteriores. Finalizamos con dos resultados fundamentales: el lema de Uryshon y el teorema de Tietze.

El apéndice incluye las definiciones topológicas que son utilizadas en el trabajo, obviando las definiciones básicas. Por último se muestra la bibliografía utilizada en el trabajo.

Capítulo 1

Axiomas T_0, T_1 y T_2

En este capítulo estudiamos los primeros axiomas de separación y sus propiedades. El primero de ellos fue introducido por A. N. Kolmogorov, y se conoce como axioma T_0. El segundo axioma (axioma T_1 o de Fréchet) fueron estudiadas por F. Riesz. El tercer axioma fue propuesto por F. Hausdorff, y se conoce como axioma T_2 (o de Hausdorff). Finalmente, introducimos dos axiomas de separación entre T_1 y T_2.

1.1. Espacios T_0

Definición 1.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es T_0 *o de Kolmogorov* si dados dos puntos distintos, existe un abierto que contiene a uno de ellos y no al otro. Es decir,

$$\text{Si } x \neq y \text{ entonces existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U,\ y \notin U.$$

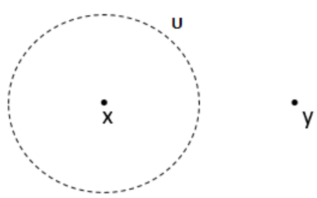


Figura 1.1: Espacio T_0

Teorema 1.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos. Son equivalentes:*
(i) (X, τ) es T_0.
(ii) Si $x \neq y$, existe un entorno de uno de los puntos que excluye al otro.

(iii) Si $x \neq y$, existe un entorno básico de uno de los puntos que excluye al otro.
(iv) Si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$, donde $\overline{A}$ denota la clausura de A (ver definición A.1.6).

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Para todo $x \neq y$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \in \mathcal{N}_x$ e $y \notin U$. Luego existe $N \in \mathcal{N}_x$ ($\mathcal{N}_x$ denota la familia de los entornos de x en (X, τ)) donde $y \notin N$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sea $x \neq y$. Existe $N \in \mathcal{N}_x$, tal que $y \notin N$. Como $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos en x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ con $B \subset N$. Entonces, $x \in B$ e $y \notin B$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Suponemos que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Si $x \neq y$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $y \notin B$. Entonces ocurrirá que $\{y\} \cap B = \emptyset$, con lo que $y \notin \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, lo cual es absurdo.
$(iv) \Rightarrow (i)$
Si $x \neq y$, tenemos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Luego existe $z \in \overline{\{x\}}$ tal que $z \notin \overline{\{y\}}$ (ó $z \in \overline{\{y\}}$ tal que $z \notin \overline{\{x\}}$). Por tanto, existe $U \in \tau$ tal que $y \in U$ pero $z \notin U$. Como $z \in \overline{\{x\}}$, esto implica que $x \notin U$. Luego (X, τ) es un espacio T_0. □

Teorema 1.1.2. *La propiedad T_0 es hereditaria.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológico T_0 y $A \subset X$.
Sea $x \neq y$, donde $x, y \in A$. Existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Utilizando la definición de la topología inducida τ_A, existe $U \cap A \in \tau_A$ tal que $x \in U \cap A$ e $y \notin U \cap A$.
Por lo tanto, (A, τ_A) es un espacio T_0. □

Lema 1.1.3. *Sean (X, τ_1) y (X, τ_2) dos espacios topológicos donde $\tau_1 \subset \tau_2$. Si τ_1 es T_0, entonces τ_2 también es un espacio T_0.*

Demostración. Sea (X, τ_1) un espacio T_0. Para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$, $y \notin U$. Como $\tau_1 \subset \tau_2$, existe $U \in \tau_2$, con $x \in U, y \notin U$.
Por tanto, (X, τ_2) también es un espacio T_0. □

Teorema 1.1.4. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Si la familia $\{f_i : X \longrightarrow X_i\}_{i \in I}$ separa puntos (ver definición A.1.7) y cada (X_i, τ_i) es T_0, entonces la topología inicial (ver definición A.1.8) inducida en X por $\{f_i\}_{i \in I}$, τ_X, es T_0.*

Demostración. Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis, existe $k \in I$ tal que $f_k(x) \neq f_k(y)$.
Al ser (X_k, τ_k) un espacio T_0, existe $U \in \tau_k$ tal que $f_k(x) \in U$ y $f_k(y) \notin U$, sin pérdida de generalidad. Al ser f_i continua para todo $i \in I$ (por la definición A.1.8), $f_k^{-1}(U) \in \tau_X$, $x \in f_k^{-1}(U)$ e $y \notin f_k^{-1}(U)$. Luego (X, τ_X) es un espacio T_0. □

Teorema 1.1.5. *La propiedad T_0 es productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}$ una familia de espacios T_0.
Si $X = \prod_{i \in I} X_i$, recordamos que τ_{Tyc} es la topología inicial inducida por la familia $\{p_i : X \to X_i\}$ donde $p_i : X \to (X_i, \tau_i)$ es la función proyección sobre i. Como la familia $\{p_i\}_{i \in I}$ separa puntos, entonces por el teorema 1.1.4, (X, τ_{Tyc}) también es T_0. □

Observación 1.1.1. Las funciones continuas, en general, no preservan el axioma T_0.
La función $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ es continua. Como se ve en los ejemplos 1.4 (i) y (ii), la topología discreta es T_0 pero la topología indiscreta no.

Teorema 1.1.6. *La propiedad T_0 es invariante bajo homeomorfismos, por lo tanto es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, donde (X, τ_X) es T_0 y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo.
Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Por ser (X, τ_X) un espacio T_0 existe $U \in \tau_X$ tal que $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$. Como f es un homeomorfismo $f(U) \in \tau_Y$ donde $y_1 \in f(U)$, $y_2 \notin f(U)$.
Por tanto, (Y, τ_Y) es un espacio T_0. □

1.2. Espacios T_1

Definición 1.2.1. Un espacio topológico (X,τ) es T_1 *o de Fréchet* si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto que contiene a x pero no a y; y un abierto que contiene a y y no a x. Es decir,

$$\text{Existen } U, V \in \tau \text{ tales que } x \in U,\ y \notin U;\ x \notin V,\ x \in U$$

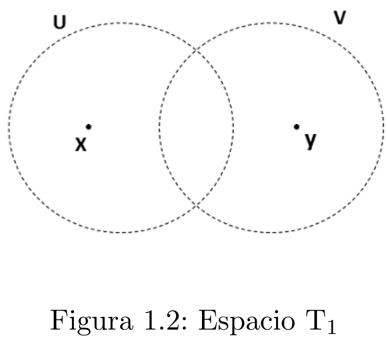


Figura 1.2: Espacio T_1

Teorema 1.2.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sea* $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ *un sistema fundamental de entornos. Son equivalentes:*
(i) (X, τ) *es* T_1.
(ii) Si $x \neq y$*, existe un entorno de* x *que no contiene a* y *(y un entorno de* y *que no contiene a* x*).*
(iii) Si $x \neq y$*, existe un entorno básico de* x *que excluye a* y *(y un entorno básico de* y *que no contiene a* x*).*
(iv) Todo conjunto formado por un único punto es cerrado.
(v) Todo conjunto finito es cerrado.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Para $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ e $y \notin U$ (respectivamente $x \notin V$ y $y \in V$). Como $x \in U \in \tau$, es $U \in \mathcal{N}_x$ (respectivamente $y \in V \in \tau$ es $V \in \mathcal{N}_y$). Por lo tanto, existen $U \in \mathcal{N}_x$ y $V \in \mathcal{N}_y$ tales que $x \notin V$ e $y \notin U$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Si $x \neq y$ por hipótesis existen $N \in \mathcal{N}_x$ e $M \in \mathcal{N}_y$ tales que $x \notin M$ e $y \notin N$. Sean $B_1 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_1 \subset N$ y $B_2 \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_2 \subset M$. Entonces $x \notin B_2$ e $y \notin B_2$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Queremos probar que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{C}$. Esto será equivalente a probar que $X - \{x\} \in \tau$.
Para todo $y \in X - \{x\}$ existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ con $x \notin B_y$ tal que $B_y \subset X - \{x\}$. Por lo tanto, $X - \{x\} \in \tau$.
$(iv) \Rightarrow (v)$
Sea $A = \{x_1, ..., x_n\} = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_n\} \in \mathcal{C}$ al ser una unión finita de cerrados.
$(v) \Rightarrow (i)$
Sean $x \neq y$. Tenemos que $y \in X - \{x\} \in \tau$ ($\{x\} \in \mathcal{C}$ por ser $\{x\}$ finito) donde $x \notin X - \{x\}$. De manera similar $x \in X - \{y\} \in \tau$ e $y \notin V$. □

Teorema 1.2.2. *La propiedad* T_1 *es hereditaria.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio topológico T_1 y $A \subset X$. Sea τ_A a la topología de subespacio.
Sea $x \neq y$, donde $x, y \in A$. Como $x, y \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $x \notin V$, $y \in V$. Al ser $U \cap A$ y $V \cap A \in \tau_A$ y $x \in U \cap A$ y $y \notin U \cap A$ y $x \notin V \cap A$ e $y \in V \cap A$.
Por lo tanto, (A, τ_A) es un espacio T_1. □

Lema 1.2.3. *Sean* (X, τ_1) *y* (X, τ_2) *dos espacios topológicos distintos donde* $\tau_1 \subset \tau_2$. *Si* τ_1 *es* T_1*, entonces* τ_2 *también es* T_1 .

Demostración. Sea (X, τ_1) un espacio T_1. Para todo $x \neq y$, por el axioma T_1 existen $U, V \in \tau_1$ tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $x \notin V$, $y \in V$. Como $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces existen $U, V \in \tau_2$.
Por tanto, (X, τ_2) también es un espacio T_1. □

Teorema 1.2.4. *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si la familia $\{f_i : X \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$ separa puntos y cada (X_i,τ_i) es T_1, entonces la topología inicial inducida en X por $\{f_i\}_{i\in I}$, τ_X, es T_1.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis, existe $k \in I$ tal que $f_k(x) \neq f_k(y)$.
Como (X_k,τ_k) es un espacio T_1, existen $U, V \in \tau_k$ tales que $f_k(x) \in U$, $f_k(y) \notin U$ y $f_k(y) \in V$, $f_k(x) \notin V$. Al ser f_i continua para todo $i \in I$ (por la definición A.1.8), entonces $f_k^{-1}(U), f_k^{-1}(V) \in \tau_X$ tales que $x \in f_k^{-1}(U)$, $x \notin f_k^{-1}(V)$ e $y \in f_k^{-1}(V)$, $y \notin f_k^{-1}(U)$. Luego (X,τ_X) es un espacio T_1. □

Teorema 1.2.5. *La propiedad T_1 es productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i,\tau_i)\}$ una familia de espacios T_1.
Si $X = \prod_{i\in I} X_i$. Como la familia $\{p_i\}_{i\in I}$ separa puntos, entonces por el teorema 1.2.4, (X,τ_{Tyc}) también es T_1. □

Teorema 1.2.6. *La propiedad T_1 se conserva por funciones cerradas.*

Demostración. Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos, $f : (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una función cerrada y sobreyectiva y (X,τ_X) un espacio T_1.
Sea $y \in Y$. Existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por ser (X,τ) un espacio T_1, por el teorema 1.2.1, $\{x\} \in \mathcal{C}_X$. Como la función f es cerrada tenemos que $f(\{x\}) = \{y\} \in \mathcal{C}_Y$. Luego, (Y,τ_Y) es un espacio T_1. □

Observación 1.2.1. El axioma T_1 no se preserva bajo funciones continuas. La función $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R},\tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{ind})$ es continua. Como vemos en los ejemplos 1.4 (i) y (ii) la topología discreta es T_1; en cambio, la topología indiscreta no es un espacio T_1.

Teorema 1.2.7. *La propiedad T_1 es invariante bajo homeomorfismos, por lo tanto es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) dos espacios topológicos, donde (X,τ_X) es T_1 y siendo la función $f : (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ un homeomorfismo.
Como f es biyectiva, cerrada y f^{-1} continua. Por ser f sobreyectiva y cerrada y (X,τ_X) es T_1, el teorema 1.2.4 dice que (Y,τ_Y) también es T_1. □

1.3. Espacios T_2

Definición 1.3.1. Un espacio topológico (X,τ) es *T_2 o de Hausdorff* si dados x e y dos puntos distintos, existen dos abiertos disjuntos que contienen a x e y respectivamente. Es decir,

Si $x \neq y$ entonces existe $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$, con $U \cap V = \emptyset$

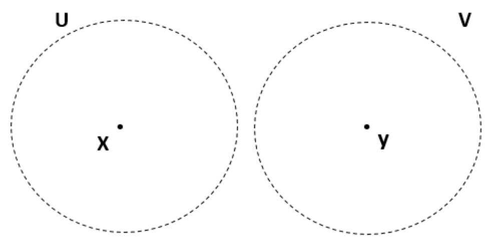


Figura 1.3: Espacio T_2

Teorema 1.3.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ un sistema fundamental de entornos. Son equivalentes:*
(i) (X,τ) es T_2.
(ii) Si $x \neq y$, existen entornos disjuntos de x e y respectivamente.
(iii) Si $x \neq y$, existen entornos básicos disjuntos de x e y respectivamente.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Para todo $x \neq y$, existen abiertos $U, V \in \tau$ donde $x \in U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Luego $U \in \mathcal{N}_x$ e $V \in \mathcal{N}_y$ y $U \cap V = \emptyset$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sea $x \neq y$. Existen $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \in \mathcal{N}_y$ tales que $N \cap M = \emptyset$. Es obvio que $y \notin N$ y que $x \notin M$. Como $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos en x y $\mathcal{B}_y$ es una base de entornos en y, existen $B_1 \in \mathcal{B}_x$ y $B_2 \in \mathcal{B}_y$ donde $B_1 \subset N$ y $B_2 \subset M$ con $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
$(iii) \Rightarrow (i)$
Para todo $x \neq y$, existen $B_1 \in \mathcal{B}_x$ y $B_2 \in \mathcal{B}_y$ tales que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Como $\mathcal{B}_y \subset \mathcal{N}_y$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U \subset B_1$ y $y \in V \subset B_2$. Luego $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.3.2. *La propiedad T_2 es hereditaria.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico T_2 y $A \subset X$.
Sean $x \neq y$, donde $x, y \in A$. Como $x, y \in X$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Utilizando la definición de la topología inducida, $U \cap A$ y $V \cap A \in \tau_A$ donde $x \in U \cap A$ y $y \in V \cap A$ con $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$
Por lo tanto, (A, τ_A) es un espacio T_2. $\square$

Lema 1.3.3. *Sean (X,τ_1) y (X,τ_2) dos espacios topológicos donde $\tau_1 \subset \tau_2$. Si τ_1 es T_2, entonces τ_2 también es T_2 .*

Demostración. Sea (X,τ_1) un espacio topológico T_2. Para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau_1$ tales que $x \in U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Como

$\tau_1 \subset \tau_2$, entonces existen $U, V \in \tau_2$ cumpliendo la condición requerida. Por tanto, (X, τ_2) también es un espacio T_2. $\square$

Lema 1.3.4. *Sea (X, τ) un espacio T_2, $K \subseteq X$ un subconjunto compacto y $x \notin K$. Entonces, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subseteq V$.*

Demostración. Al ser (X, τ) un espacio T_2, para todo $y \in K$ como $y \neq x$, existen dos abiertos U_y y V_y disjuntos conteniendo a x e y, respectivamente. Observemos que $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} V_y$, y como K es compacto, este cubrimiento por abiertos tiene un subrecubrimiento finito. Es decir, existe $\{y_1, ..., y_n\} \subset K$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{y_j} = V$ ($V \in \tau$ por ser una unión finita de abiertos).
Además $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{y_j} = U$ ($U \in \tau$ por ser una intersección finita de abiertos).
Claramente $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.3.5. *Sea (X, τ) un espacio T_2. Entonces, todo subconjunto compacto de X es cerrado.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de X. Demostramos que $X - K$ es abierto, equivalentemente K es cerrado.
Sea $x \notin K$. Por el lema 1.3.4 existen abiertos $U, V \in \tau$, disjuntos tales que $x \in U$ y $K \subseteq V$.

Entonces $x \in U \in X - V \subset X - K$. Por lo tanto, $x \in \overbrace{X - K}^{\circ}$ (donde $\circ$ denota el interior (ver definición A.1.5) de $X - K$), con lo que queda probado que $X - K \in \tau$. $\square$

Observación 1.3.1. El lema 1.3.4 y el teorema 1.3.5 no se cumplen en general. Se puede observar que en la topología indiscreta todo conjunto es compacto pero no es cerrado. Es decir, existen topologías en las cuales hay conjuntos compactos que no son cerrados.

Teorema 1.3.6. *Si la familia $\{f_i : X \longrightarrow X_i\}_{i \in I}$ separa puntos y cada (X_i, τ_i) es T_2, entonces la topología inicial inducida en X por $\{f_i\}_{i \in I}$, τ_X, es T_2.*

Demostración. Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis, existe $k \in I$ tal que $f_k(x) \neq f_k(y)$.
Como (X_k, τ_k) es un espacio T_2, existen $U, V \in \tau_k$ donde $U \cap V = \emptyset$ tales que $f_k(x) \in U$ y $f_k(y) \in V$. Al ser f_i continua para todo $i \in I$ (por la definición A.1.8), $f_k^{-1}(U), f_k^{-1}(V) \in \tau_X$ tales que $x \in f_k^{-1}(U)$ e $y \in f_k^{-1}(V)$ con $f_k^{-1}(U) \cap f_k^{-1}(V) = \emptyset$. Luego (X, τ_X) es un espacio T_2. $\square$

Teorema 1.3.7. *La propiedad T_2 es productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}$ una familia de espacios T_2.
Como la familia $\{p_i\}_{i\in I}$ separa puntos, entonces por el teorema 1.3.6, (X, τ_{Tyc}) también es T_2. □

Observación 1.3.2. Las funciones continuas no preservan el axioma T_2. La función $1_R : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ es continua. Viendo los ejemplos 1.4 (i) y (ii) sabemos que la topología discreta es T_2 pero la topología indiscreta no.

Teorema 1.3.8. *La propiedad T_2 es invariante bajo homeomorfismos, por lo tanto es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, donde (X, τ_X) es T_2 y siendo la función $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo.
Sean $y_1, y_2 \in Y$ con $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Por ser (X, τ_X) un espacio T_2 existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x_1 \in U$, $x_2 \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Como f es un homeomorfismo $f(U)$ y $f(V) \in \tau_Y$ donde $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$ con $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.
Por tanto, (Y, τ_Y) es un espacio T_2. □

Para terminar, veamos las relaciones entre estos axiomas.

Teorema 1.3.9. *Se tienen las siguientes relaciones:*

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico T_2 y $x \neq y$. Existen $U, V \in \tau$ con $x \in U$ e $y \in V$ donde $U \cap V = \emptyset$. Luego para $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ con $x \in U$, $x \notin V$ e $x \notin U$, $y \in V$. Es decir, el espacio es T_1.
Si (X, τ) es T_1, entonces, para $x \neq y$ existe $U \in \tau$ con $x \in U$, $y \notin U$. Luego, es un espacio T_0. □

Estas implicaciones no son equivalencias, como se observará en los ejemplos 1.4.

1.4. Ejemplos

Estudiemos los axiomas anteriores en algunos ejemplos de topologías.

◦ (X, τ_{ind})
La topología indiscreta es $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$.
El único abierto que contiene a x es X, que contiene a cualquier otro punto; entonces (X, τ_{ind}) no será T_0. Por tanto, tampoco será T_1 ni T_2.

$\circ$ (X, τ_{dis})
Se define la topología discreta como $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$.
Sea $x \neq y$, existen abiertos $U = \{x\}$, $V = \{y\}$ tales que $x \in U$, $y \in V$. Además $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, (X, τ_{dis}) es un espacio T_2 y por el teorema 1.3.6 también es T_1 y T_0.

$\circ$ $(\mathbb{R}, \tau_u)$
La topología usual está definida por la base $\beta_u = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
Para $x \neq y$ existe $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ donde $\varepsilon < \dfrac{|y - x|}{2}$ donde $x \in U$ e $y \in V$. Claramente, $U \cap V = \emptyset$. Luego $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es un espacio T_2 y por el teorema 1.3.6 también es T_1 y T_0.

$\circ$ $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$
La topología Kolmogorov viene dada por $\tau_{Kol} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
Si $x \neq y$ suponemos que $x > y$. Entonces $U = (x - \varepsilon, \infty)$ con $x \in U$ e $y \notin U$. Luego es un espacio T_0. No será T_1 porque no existe $V \in \tau_{Kol}$ tal que $y \in V, x \notin V$. Como no es T_1 tampoco será T_2.

$\circ$ $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$
La topología esparcida se define como

$$\tau_{sca} = \{U \subseteq \mathbb{R} : U = A \cup B, A \in \tau_u \text{ y } B \subseteq \mathbb{I}\}.$$

donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de los números irracionales.
Al ser τ_u menos fina que τ_{sca} ($U = U \cup \emptyset$ donde $U \in \tau_u$ y $\emptyset \subset \mathbb{I}$), por el lema 1.3.3, τ_{sca} será un espacio T_2. Por tanto también, T_1 y T_0.

$\circ$ (X, τ_{cof}), si X es un conjunto infinito.
La topología cofinita es $\tau_{cof} = \{U \subseteq X : X - U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.
Para $x \neq y$ existen $U = \mathbb{R} - \{y\}$ y $V = \mathbb{R} - \{x\}$ donde $x \in U, y \notin U$ e $y \in V, x \notin V$. Luego $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es un espacio T_1, luego T_0. Pero no es T_2 porque si $U, V \in \tau_{cof}$ es $U \cap V \neq \emptyset$.

$\circ$ (X, τ_{coc}), si X es no contable.
Esta topología viene definida por $\tau_{coc} = \{U \subseteq X : X - U \text{ es contable }\} \cup \{\emptyset\}$.
Como los abiertos de esta topología no son disjuntos entre sí, se verifica que (X, τ_{coc}) no es T_2.
Si $x \neq y$ es claro que el abierto $U = X - \{y\} \in \tau_{coc}$. Por tanto, $x \in U$ e $y \notin U$. Es decir, la topología cocontable es T_0.
Si $V = X - \{x\} \in \tau_{coc}$ se verifica que $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$. Por tanto, (X, τ_{coc}) es un espacio T_1.

∘ (X, τ_{sier})
La topología Sierpinski es $\tau_{sier} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ siendo $X = \{x, y\}$.
Para $x \neq y$, existe $U = \{x\}$ donde $x \in U$, $y \notin U$. Luego (X, τ_{sier}) es un espacio T_0. El único abierto que contiene a y es X. Luego (X, τ_{sier}) no será un espacio T_1 ni T_2.

∘ (X, τ_A) y $A \subset X$.
Se define la topología A-inclusión por $\tau_A = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$. Si $A = \emptyset$ entonces $\tau_A = \tau_{dis}$ y si $A = X$, $\tau_A = \tau_{ind}$. Por ello estudiamos solo los casos en los que $A \neq \emptyset, X$.
Sea $x \neq y$. Estudiamos las distintas posibilidades. Empezamos con la propiedad T_0:
· Si $x, y \notin A$. Luego $x \in U = A \cup \{x\}$ e $y \notin U$ (en este caso hemos supuesto que $X - A$ tiene más de un punto).
· Si $x \in A$ e $y \notin A$, entonces $x \in U = A$ e $y \notin U$.
· Si $x, y \in A$, para todo $U \in \tau_A$ tal que $x \in U$, entonces $y \in U$. Luego (X, τ_A) no es T_0 (en este caso hemos supuesto que A tiene más de un punto).
Por tanto, si A tiene más de un punto no es T_0 y consecuentemente no es ni T_1 ni T_2.
Si $A = \{a\}$ es un espacio T_0. Estudiamos en este caso las propiedades T_1 y T_2.
· Si $x \in A$ e $y \notin A$, para todo $V \in \tau_A$ tal que $y \in V$, $A \subset V$ entonces $x \in V$. Luego (X, τ_A) no es un espacio T_1 ni T_2. En conclusión (X, τ_A) es T_0 si y sólo si A contiene un sólo punto; en ningún caso es T_1 ni T_2.

∘ (X, τ^A)
La topología A-exclusión se define $\tau^A = \{U \subseteq X : U \cap A = \emptyset\} \cup \{X\}$. En particular, si $A = \emptyset$, tendremos que $\tau^A = \tau_{dis}$ y si $A = X$, entonces $\tau^A = \tau_{ind}$, por lo que supondremos que $A \neq \emptyset, X$.
Dado $x \neq y$ y A con más de un punto.
· Si $x, y \in A$, para todo $U \in \tau^A$ tal que $x \in U$ es $U = X$, pero $y \in U$. En este caso no es un espacio T_0. Luego no es T_1 ni T_2.
Sea $x \neq y$ y $A = \{a\}$. Estudiaremos dos casos:
· Si $x, y \notin A$ entonces $x \in U = \{x\}$ cumpliendo que $y \notin U$.
· Si $x \in A$, $y \notin A$ entonces $y \in U = \{y\}$ donde $x \notin U$.
Por tanto si $A = \{a\}$ es un espacio T_0. Como en el caso que $x \in A$, $y \notin A$ el único abierto que contiene a $\{a\}$ es X; el espacio no será T_1 ni T_2.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$
La topología del límite inferior o Sorgenfrey está generada por la base $\beta_{Sor} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
Al ser τ_u menos fina que τ_{Sor}, por el lema 1.3.3, τ_{Sor} será un espacio T_2. Por tanto también, T_1 y T_0.

○ (X, τ_{Moore})

Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$. La topología de Moore τ_{Moore} viene definida por la base

$$\begin{aligned}\beta_{Moore} = \{&B_u((x,y),\epsilon), \epsilon > 0 \text{ e } (x,y) \in X, y \neq 0\} \cup \\ &\cup \{(x,0) \cup B_u((x,\epsilon),\epsilon), \epsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

donde $B_u((x,y),\epsilon) = \{(x^{'},y^{'}) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x^{'})^2 + (y-y^{'})^2} < \epsilon\}$.
Estudiamos si es un espacio T_2.
· Si $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$ con $y_1, y_2 \neq 0$: existen $B_1((x_1,y_1),\epsilon), B_2((x_2,y_2),\epsilon)$ disjutos con $\epsilon < \text{máx}\{|\frac{x_2-x_1}{2}|, |\frac{y_2-y_1}{2}|\}$ con $(x_i,y_i) \in B_i$, $i = 1,2$.
· Si $(x_1,y_1) \neq (x_2,0)$: existen $B_1((x_1,y_1),\epsilon), B_2((x_2,\epsilon),\epsilon)$, disjuntos cuando $\epsilon < \text{máx}\{|\frac{x_2-x_1}{2}|, \frac{y_1}{2}\}$.
· Si $(x_1,0) \neq (x_2,0)$: existen $B_1((x_1,\epsilon),\epsilon), B_2((x_2,\epsilon),\epsilon)$ disjuntos cuando $\epsilon < |\frac{x_2-x_1}{2}|$.

○ (X, τ_d)

Sea d una métrica y τ_d la topología generada con d, es decir:

$$\tau_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ donde } B(x,\epsilon) \subseteq U\}.$$

Sea $x \neq y$ y $\epsilon < d(x,y)$ entonces existe $U = B(x, \frac{\epsilon}{2}), V = B(y, \frac{\epsilon}{2})$ tal que $x \in U, y \in V$ siendo $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, (X, τ_d) será un espacio T_2; luego T_1 y T_0.
En la siguiente tabla resumimos los espacios estudiados en este capítulo.

Espacio topológico	T_0	T_1	T_2
Topología indiscreta	✘	✘	✘
Topología discreta	✔	✔	✔
Topología usual	✔	✔	✔
Topología Kolmogorov	✔	✘	✘
Topología esparcida	✔	✔	✔
Topología cofinita	✔	✔	✘
Topología Sierpinski	✔	✘	✘
Topología cocontable	✔	✔	✘
Topología de Moore	✔	✔	✔
Topología Sorgenfrey	✔	✔	✔
Topología métrica	✔	✔	✔
Topología {a}-exclusión	✔	✘	✘
Topología {a}-inclusión	✔	✘	✘
Topología A-inclusión *	✘	✘	✘
Topología A-exclusión *	✘	✘	✘
* A es un conjunto que tiene más de un punto			

✓: significa que (X,τ) satisface la propiedad.
x: significa que (X,τ) no satisface la propiedad.

1.5. Entre T_1 y T_2

Terminamos el capítulo con dos axiomas de separación entre T_1 y T_2.

Definición 1.5.1. Un espacio topológico es KC si todo conjunto compacto es cerrado.

Definición 1.5.2. Un espacio topológico es US si toda sucesión convergente tiene exactamente un límite.

Teorema 1.5.1. *Se cumplen las siguientes implicaciones*

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Demostración. $T_2 \Rightarrow KC$
Es el teorema 1.3.5.
$KC \Rightarrow US$
Sea (X, τ) un espacio KC. Es claro que (X, τ) es T_1, ya que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es compacto, luego en este caso $\{x\} \in \mathcal{C}$.
Supongamos entonces que (X, τ) no es US. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a dos puntos distintos x e y.
Como $\{y\} \in \mathcal{C}$, $X - \{y\}$ es un entorno abierto de x y como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $x_n \in X - \{y\}$. Es decir, para todo $n \geq n_0$, $x_n \neq y$. El conjunto $K = \{x, x_{n_0}, x_{n_{0+1}}, ...\}$ es compacto, ya que $\{x_m\}_{m\geq n_0} \to x$ (ver proposición A.1.3). Pero $K \notin \mathcal{C}$ ya que $y \in \overline{K}$ (ya que $\{x_m\}_{m\geq n_0} \to y$), contra la hipótesis KC.
$US \Rightarrow T_1$
Si (X, τ) no fuera T_1, existen $x \neq y$ de manera que (por ejemplo), para todo $U \in \tau$, es también $y \in U$. Entonces, la sucesión constante $\{x_n = x\}$ converge a x y también a y. Luego el espacio no es US. □

Las implicaciones recíprocas no son ciertas.

Ejemplo 1.5.1. $T_1 \not\Rightarrow US$
Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ la topología cofinita. Sabemos (por los ejemplos 1.4) que es un espacio T_1. Pero dada la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ converge a cualquier punto $x \in \mathbb{R}$. En efecto para todo $x \in \mathbb{R}$ y $U \in \tau_{cof}$ tal que $x \in U$ se verifica que existe $k \in \mathbb{N}$: para todo $n \geq k$, $\frac{1}{n} \in U$ (pues en otro caso $U \notin \tau_{cof}$).

Ejemplo 1.5.2. $US \not\Rightarrow KC$
En [4], el autor da un ejemplo de un espacio US que no es KC (ejemplo 4, pág. 264). Para construirlo se necesita acudir a la noción de compactificaciones de Alexandroff y de Stone-Čech. Introducir estas nociones excede los propósitos y la longitud de este trabajo.

Ejemplo 1.5.3. $KC \not\Rightarrow T_2$
Sea (X, τ_{coc}) la topología cocontable. En esta topología los conjuntos compactos son los finitos, que son cerrados. Por tanto, (X, τ_{coc}) es KC. Pero no es T_2 como hemos visto en los ejemplos 1.4.

Capítulo 2

Espacios $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{T}_3$

En este capítulo introducimos axiomas de separación que separan puntos de conjuntos cerrados.

2.1. Espacios $\mathbf{R}_0$

Definición 2.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es R_0 *o simétrico* si dado cualquier punto $x \in U \in \tau$, su clausura está contenida en U. Es decir,

$$\text{Si } x \in U \text{ y } U \in \tau, \text{ entonces } \overline{\{x\}} \subseteq U.$$

Teorema 2.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*
(i) (X, τ) es R_0.
(ii) Si $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $y \in \overline{\{x\}}$.
(iii) Si $x \in \overline{\{y\}}$, entonces $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Sea $x \in \overline{\{y\}}$ y sea M un entorno abierto de y. Entonces, por el axioma R_0, $\overline{\{y\}} \subseteq M$. Luego $x \in \overline{\{y\}} \subseteq M$. Como cualquier entorno abierto de y contiene a x, entonces $y \in \overline{\{x\}}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sea $x \in \overline{\{y\}}$. Por hipótesis sabemos que $y \in \overline{\{x\}}$. Luego, tenemos estas dos relaciones; $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ y $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ (Ver proposición A.1.2). Es decir, $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$
Realizaremos la prueba por reducción al absurdo. Sea $x \in U \in \tau$ supongamos que $\overline{\{x\}} \nsubseteq U$. Existe un punto $y \neq x \in \overline{\{x\}}$ tal que $y \in X - U$. Por ser U un abierto, $X - U$ es cerrado, y entonces $\overline{\{y\}} \subseteq X - U$. Pero esto contradice que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. $\square$

Teorema 2.1.2. *Un espacio topológico (X, τ) es T_1 si y sólo si es T_0 y R_0.*

$$T_1 \iff T_0 + R_0$$

Demostración. $\Rightarrow$ Si suponemos que (X,τ) no es R_0 (puesto que es T_0 por ser T_1) existen $x \neq y$ tales que $x \notin \overline{\{y\}}, y \in \overline{\{x\}}$. Por ser T_1, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \notin U$ e $y \in V, x \notin V$. Como $y \in \overline{\{x\}}$, x está contenido en todo entorno de y. Por tanto, verificará que $x \in V$, en contradicción con la hipótesis. Luego tiene que ser R_0.
$\Leftarrow$ Suponemos que (X,τ) no es T_1. Existen $x \neq y$ y tales que para todo $N \in \mathcal{N}_x$, es $y \in N$.
Por tanto, $x \in \overline{\{y\}}$ y por ser R_0, se verificará (teorema 2.1.1.) que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.
Por el teorema 1.1.1, se deduce que $x = y$, en contra de la hipótesis inicial.
Por tanto es T_1. □

Observación 2.1.1. Las propiedades T_0 y R_0 son claramentes independientes una de la otra. Por ejemplo, la topología indiscreta es R_0 pero no es T_0. En cambio, la topología de Kolmogorov es T_0 pero no es R_0. (Ver ejemplos 1.4 y 2.4).

Observación 2.1.2. Si (X,τ_1) y (X,τ_2) son dos topologías diferentes tales que $\tau_1 \subset \tau_2$ y τ_1 un espacio R_0, entonces en general τ_2 no es R_0. Para probar esto, podemos ver en los ejemplos 2.4 que la topología indiscreta y la topología discreta son R_0, pero la topología A-inclusión no lo es, siendo con $\tau_{ind} \subset \tau_A \subset \tau_{dis}$.

Teorema 2.1.3. *La propiedad R_0 es una propiedad inicial.*

Demostración. Sea $\{f_i : X \longrightarrow (X_i,\tau_i)\}$ la familia de funciones donde todas las (X_i,τ_i) son R_0. Supongamos que τ es la topología inicial sobre X inducida por la familia $\{f_i\}_{i\in I}$.
Una base de τ es $\beta = \{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) : U_{i_j} \in \tau_{i_j} \quad j = 1,..,n\}$. Sea $x \in U \in \tau$. Existe $V = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$.
Por ser (X_{i_j},τ_{i_j}) espacios R_0, y con las notaciones obvias, $\overline{\{f_{i_j(x)}\}}^{i_j} \subset U_{i_j}$.
Por las propiedades de clausura, $f_{i_j}\overline{(x)} \subset \overline{f_{i_j}(x)}^{i_j} \subset U_{i_j}$, por tanto se verifica $\overline{\{x\}} \subset f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$.
Luego $\overline{\{x\}} \subset \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subset U \in \tau$. Consecuentemente (X,τ) es R_0. □

Teorema 2.1.4. *R_0 es una propiedad hereditaria.*

Demostración. Sea (X,τ_X) un espacio R_0, $A \subset X$ e $i_A : (A,\tau_A) \longrightarrow (X,\tau_X)$ la función inclusión de A en X. Entonces τ_A es la topología inicial inducida por la inclusión y por el teorema 2.1.3 (A,τ_A) es R_0. □

Teorema 2.1.5. *R_0 es una propiedad productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios R_0. Si $X = \prod_{i\in I} X_i$, recordemos que τ_{Tch} es la topología inicial asociada al $\{p_i : X \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$

donde $p_i : X \longrightarrow X_i$ es la i-ésima proyeccíon. Como consecuencia del teorema 2.1.3, también es R_0. □

Teorema 2.1.6. *R_0 es invariante bajo funciones continuas y cerradas, luego es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio R_0 y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua, cerrada y sobreyectiva.
Sea V un entorno abierto de $f(x)$, entonces $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x. Por la definición del axioma R_0, $\overline{\{x\}} \subseteq f^{-1}(V)$. Tomando imágenes por f, $f(\overline{\{x\}}) \subseteq ff^{-1}(V) = V$. Por ser f cerrada, $\overline{f(x)} \subseteq f(\overline{\{x\}})$, y por tanto $\overline{f(x)} \subseteq V$. Luego, (Y, τ_Y) es un espacio R_0. □

2.2. Espacios R_1

Definición 2.2.1. Un espacio topológico (X, τ) es R_1 *o preregular* si dados dos puntos x y y con distintas clausuras, entonces existen entornos abiertos disjuntos de x e y respectivamente. Es decir,

$$\text{Si } \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}} \text{ entonces existen } N, M \in \tau,\ x \in N, y \in M \text{ tales que } N \cap M = \emptyset.$$

Teorema 2.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*
(i) (X, τ) es R_1
(ii) Si $y \notin \overline{\{x\}}$, entonces existen entornos abiertos disjuntos de x e y respectivamente.
(iii) Si A es un compacto y $\overline{\{x\}} \cap A = \emptyset$, entonces existen entornos disjuntos de x y A respectivamente.
(iv) Si A, B son compactos y $\overline{\{a\}} \cap B = \emptyset$ para todo $a \in A$, entonces existen entornos disjuntos de A y B respectivamente.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Si $y \notin \overline{\{x\}}$, entonces $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$. Por ser R_1, existen entornos abiertos disjuntos de x e y.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Para cada $a \in A$, se verifica que $a \notin \overline{\{x\}}$. Según la hipótesis (ii), para cada $a \in A$ existen U_a y V_a entornos abiertos disjuntos de A y x, respectivamente.
La familia de entornos abiertos $\{U_a | a \in A\}$ recubre a A; y por ser compacto, existe una subfamilia finita $\{U_{a1}, U_{a2}, ..., U_{an}\}$ que también recubre a A. Los conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ son entornos abiertos disjuntos de A y x.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Para todo $a \in A$, por ser B compacto y de acuerdo al apartado (iii) existen U_a y V_a entornos abiertos disjuntos de a y B. La familia $\{U_a\}_{a \in A}$ cubre A.

Por ser A compacto, existe un subrecubrimiento finto $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{ai} \in \tau$. Además, claramente U y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ son disjuntos y $B \subset V$.
$(iv) \Rightarrow (i)$
Si $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \notin \overline{\{y\}}$. Como $\{x\}$ e $\{y\}$ son compactos (al ser conjuntos finitos) y $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$, aplicando (iv), existen entornos abiertos disjuntos respectivamente de $\{x\}$ e $\{y\}$. □

Teorema 2.2.2. *Un espacio topológico (X, τ) es T_2 si y sólo si es T_0 y R_1.*

$$T_2 \Leftrightarrow T_0 + R_1$$

Demostración. $\Rightarrow$ Por ser (X, τ) un espacio T_2, sabemos que es T_0. Ahora veamos que es R_1.
Sea $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$, entonces $x \neq y$. Por ser (X, τ) T_2 existen $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \in \mathcal{N}_y$ tales que $N \cap M = \emptyset$. Luego (X, τ) es R_1.
$\Leftarrow$ De acuerdo a la caracterización (iv) del teorema 1.1.1.; por ser (X, τ) un espacio T_0, si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ entonces $x = y$. Es decir, si $x \neq y$ por tanto $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Por ser (X, τ) un espacio R_1 existen $N \in \mathcal{N}_x$ y $M \in \mathcal{N}_y$ abiertos con $N \cap M = \emptyset$. Luego (X, τ) un espacio T_2. □

Observación 2.2.1. No hay relación entre T_0 y R_1. Por ejemplo, la topología de Kolmogorov es T_0 pero no es R_1 y la topología indiscreta es R_1 pero no es T_0 (Ver ejemplos 1.4 y 2.4).

Observación 2.2.2. Si (X, τ_1) y (X, τ_2) son dos topologías diferentes tales que $\tau_1 \subset \tau_2$ y τ_1 un espacio R_1, entonces en general τ_2 no es R_1. Para probar esto, podemos ver en los ejemplos 2.4 que la topología indiscreta y la topología discreta son R_1 pero la topología cofinita no lo es; con la relación $\tau_{ind} \subset \tau_{cof} \subset \tau_{dis}$.

Teorema 2.2.3. *La propiedad R_1 es una propiedad inicial.*

Demostración. Sea $\{f_i : X \longrightarrow (X_i, \tau_i)\}$ la familia de funciones donde todas las (X_i, τ_i) son R_1. Sea τ la topología inicial sobre X asociada a la familia $\{f_i\}_{i \in I}$.
Una base de τ es $\beta = \{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) : U_{i_j} \in \tau_{i_j} \quad j = 1, .., n\}$.
Sean $a, b \in X$ tales que $a \notin \overline{\{b\}}$. Por tanto, existe $N \in \mathcal{N}_a$ tal que $b \notin N$, y como $N \in \mathcal{N}_a$, existe $B = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \beta$ tal que $a \in B \subset N$ (y $b \notin B$). Luego existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $b \notin f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ y $a \in f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$.
Como U_{i_j} es un entorno de $f_{i_j}(a)$ que no contiene a $f_{i_j}(b)$, esto significa que $f_{i_j}(a) \notin \overline{\{f_{i_j}(b)\}}$.
Como (X_i, τ_{i_j}) es R_1, entonces existen entornos abiertos disjuntos de $f_{i_j}(a)$ y $f_{i_j}(b)$. Esto implica que existen entornos abiertos disjuntos de a y b. Por tanto (X, τ) es R_1. □

Teorema 2.2.4. *R_1 es una propiedad hereditaria.*

Demostración. Sea (X, τ_X) un espacio R_1, $A \subset X$ y $i_A : (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$ la función inclusión de A en X. Entonces τ_A es la topología inicial inducida por la inclusión y por el teorema 2.2.3 (A, τ_A) es R_1. $\square$

Teorema 2.2.5. *R_1 es una propiedad productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios R_1. Sea $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, recordemos que τ_{Tch} es la topología inicial asociada al $\{p_i : X \longrightarrow X_i\}_{i \in I}$ donde $p_i : X \longrightarrow X_i$ es la i-ésima proyección. Como consecuencia del teorema 2.2.3, también es R_1 $\square$

Teorema 2.2.6. *Todo espacio R_1 es R_0.*

Demostración. Sea $y \in \overline{\{x\}}$. Entonces todo entorno de y contiene a x. Por ser R_1, necesariamente $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$, luego por el teorema 2.2.1 es R_0. $\square$

Teorema 2.2.7. *Sea (X, τ) un espacio R_1 y K un subconjunto compacto de X. Entonces,*
(i) $\overline{K} = \bigcup\limits_{x \in K} \overline{\{x\}}$.
(ii) Si K está contenido en un abierto U, entonces $\overline{K} \subseteq U$.
(iii) $\overline{K}$ es compacto.

Demostración. (i) Para todo $x \in K$, es $\overline{\{x\}} \subset \overline{K}$. Luego $\bigcup\limits_{x \in K} \overline{\{x\}} \subset \overline{K}$.
Veamos la otra inclusión. Sea $y \in \overline{K}$ y supongamos que $y \notin \bigcup\limits_{x \in K} \overline{\{x\}}$. Luego para todo $x \in K$, es $y \notin \overline{\{x\}}$.Por el teorema 2.2.1 apartado (ii), existen U_x, V_x entornos abiertos de x e y respectivamente tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$.
$\mathcal{U} = \{U_x : x \in K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K, que poseerá un subrecubrimiento finito $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$. Si $U = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$ y $V = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$, es $K \subset U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces es $K \cap V = \emptyset$ en contra de que $y \in \overline{K}$.
(ii) Por estar K contenido en un abierto U, se verifica para todo $x \in K$ es $x \in U$. Como (X, τ) es R_1 y por tanto R_0, $\overline{\{x\}} \subseteq U$. Entonces, $\bigcup\limits_{x \in K} \overline{\{x\}} \subseteq U$ y por (i) $\overline{K} = \bigcup\limits_{x \in K} \overline{\{x\}}$ es claro que $\overline{K} \subseteq U$.
(iii) Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de $\overline{K}$. También es un recubrimiento de K, que es compacto. Luego existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ finito que cubre K. Por (ii) $\mathcal{V}$ también cubre $\overline{K}$. Luego $\overline{K}$ es compacto. $\square$

En general la clausura de un conjunto compacto no es compacto.

Ejemplo 2.2.1. Sea (X, τ_0) la topología $\{0\}$-inclusión definida por

$$\tau_0 = \{U \subseteq \mathbb{R}, 0 \in U\} \cup \{\emptyset\} \text{ y } \mathcal{C}_0 = \{F \subseteq \mathbb{R}, F \cap \{0\} = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

El conjunto $A = \{0\}$ es finito luego compacto. En cambio $\overline{A} = \mathbb{R}$ no es compacto porque la familia $\mathcal{U} = \{\{0, a\} : a \in \mathbb{R}\}$ es un cubrimiento de $\overline{A}$ del que no podemos extraer un subrecubrimiento finito.

Observación 2.2.3. Sabemos que $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ es continua. Por los ejemplos 2.4, la topología discreta es R_1; en cambio la topología indiscreta no es R_1. Es decir, la propiedad R_1 no se preserva mediante funciones continuas.

Teorema 2.2.8. *La propiedad R_1 se preserva bajo homeomorfismos, luego es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea (X, τ_X) un espacio R_1, (Y, τ_Y) otro espacio topológico y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo.
Sean $\overline{\{y_1\}} \neq \overline{\{y_2\}}$ siendo $y_1, y_2 \in Y$. Como f es biyectiva, existirán x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.
Al ser $\overline{\{y_1\}} = \overline{f(x_1)} = f(\overline{\{x_1\}})$ y $\overline{\{y_2\}} = \overline{f(x_2)} = f(\overline{\{x_2\}})$. Entonces $\overline{\{x_1\}} \neq \overline{\{x_2\}}$.
Por ser (X, τ_X) un espacio R_1, existen $N \in \mathcal{N}_{x_1}$ y $M \in \mathcal{N}_{x_2}$ abiertos tales que $N \cap M = \emptyset$. Además, $f(x_1) = y_1 \in f(N)$ y $f(x_2) = y_2 \in f(M)$ cumpliéndose además que $f(N) \cap f(M) = f(N \cap M) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por tanto, $f(N)$ y $f(M)$ son abiertos disjuntos que contienen a y_1 e y_2. Luego (Y, τ_Y) es R_1. □

2.3. Espacios regulares y T_3

Definición 2.3.1. Un espacio topológico (X, τ) es *regular* si dados $C \in \mathcal{C}$ y $x \notin C$ existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $C \subset V$.

Definición 2.3.2. Un espacio topológico (X, τ_X) es T_3 si es regular y T_1.

Teorema 2.3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*
(i) (X, τ_X) es regular.
(ii) Para todo $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{M} \subseteq N$.
(iii) Para todo $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{\overline{N} : N \in \mathcal{N}_x\}$ es una base de entornos en x.
(iv) Cada $x \in X$ tiene una base de entornos cerrados.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Sea N un entorno abierto de x. Entonces $x \notin X - N \in \mathcal{C}$. Por la regularidad, existen $U, V \in \tau$, disjuntos, tales que $x \in U$ y $X - N \subset V$. Como $U \subset X - V$, tomando clausuras tenemos $\overline{U} \subset \overline{X - V} = X - V \subset N$. Luego $U \in \mathcal{N}_x$ y $\overline{U} \subset N$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sea $N \in \mathcal{N}_x$. Debemos probar que existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{U} \subset N$. Se cumple directamente por (ii).
$(iii) \Rightarrow (iv)$
$\mathcal{B}_x$ es una base de entornos cerrados.
$(iv) \Rightarrow (i)$
Supongamos que cada $x \in X$ posee una base de entornos cerrados $\mathcal{B}_x$.
Sea $x \in X$ y $F \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin F$. Como $x \in X - F \in \tau$ (es decir, $X - F$ es un entorno de x), existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset X - F$.
Entonces, basta con tomar $V = X - B$ ($V = X - B \in \tau$ pues $B \in \mathcal{C}$), $F \subset V$. Y si se toma $U = \overset{\circ}{B} \in \mathcal{N}_x$, claramente $U \cap V = \emptyset$.

□

Teorema 2.3.2. *La regularidad es una propiedad hereditaria.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio regular y sea $A \subset X$. Queremos comprobar que (A, τ_A) es también un espacio regular.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_A$, existe $G \in \mathcal{C}_X$ tal que $F = C \cap A$. Esto implica que $x \notin G$.
Por ser X regular, existirán U, V entornos disjuntos de tales que $x \in U$ y $G \subset V$. Por tanto, $U \cap A$ y $V \cap A$ serán también entornos disjuntos de (A, τ_A) tales que $x \in U \cap A$ y $F \subset V \cap A$. Consecuentemente (A, τ_A) es un espacio regular. □

Teorema 2.3.3. *La regularidad es productiva, así como el axioma T_3.*

Demostración. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios regulares y definimos $(X = \prod_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ su espacio producto.
Sean $x \in X$ y $U = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \beta_{Tch}$ $(U_{i_j} \in \tau_{ij}, j = 1, ..., n)$, tal que $x \in U$. Como U_j es un entorno de x_{i_j} $(x = (x_i)_{i \in I})$ en (X_{i_j}, τ_{i_j}) y este espacio es regular, existe G_{i_j} entorno cerrado de x_{i_j} tal que $G_{i_j} \subset U_{i_j}$.
Entonces, $G = p_{i_1}^{-1}(G_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_n}^{-1}(G_{i_n})$ es un entorno cerrado de x y $G \subset U$.
Luego x posee una base local de entornos cerrados, con lo que se cumple la caracterización.
Por el teorema 2.3.1 apartado (iv), si los espacios $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ son T$_3$, su producto también lo es. □

Observación 2.3.1. Si (X, τ_1) y (X, τ_2) son dos topologías diferentes tales que $\tau_1 \subset \tau_2$ y τ_1 es regular (T$_3$), entonces en general τ_2 no es regular (T$_3$).
Para probar esto, podemos ver en los ejemplos 2.4 que la topología indiscreta y la topología discreta son regulares pero la topología cofinita no lo es, y $\tau_{ind} \subset \tau_{cof} \subset \tau_{dis}$.

Observación 2.3.2. Sabemos que $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es continua.
Por los ejemplos 2.4, la topología discreta es regular; en cambio la topología de Kolmogorov no es regular. Es decir, la regularidad no se preserva mediante funciones continuas.

Teorema 2.3.4. *La regularidad es invariante bajo homeomorfismos, por tanto es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea (X, τ_X) un espacio topológico regular y el homeomorfismo $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$; tenemos que probar que (Y, τ_Y) también es regular.
Sea $y \notin G \in \mathcal{C}_Y$.
Por ser f biyectiva, existirá un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y $x \notin f^{-1}(G)$. Por ser f continua tenemos que $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_X$. Como (X, τ_X) es regular, existen abiertos U y V disjuntos tales que $x \in U$ y $f^{-1}(G) \subset V$. Por ser f un homeomorfismo, $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos en (Y, τ_Y). Es claro que, $y \in f(U)$ y $f(f^{-1}(G)) = G \subset f(V)$. Además, $f(U) \cap f(V) = f(\emptyset) = \emptyset$. Luego, (Y, τ_Y) es un espacio regular. □

Teorema 2.3.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces,*
(i) Si (X, τ) es un espacio regular, entonces es R_1.
(ii) Si (X, τ) es un espacio T_3, entonces es T_2.

Demostración. (i) Sea $x \notin \overline{\{y\}}$. Como (X, τ) es regular, existen $N, M \in \tau$ tal que $x \in N$ y $\overline{\{y\}} \subset M$. Como $y \in \overline{\{y\}} \subset M$, entonces existen abiertos disjuntos de x e y respectivamente. De acuerdo al apartado (ii) del teorema 2.2.6, el espacio es R_1.
(ii) Como (X, τ) es un espacio T_3, es T_1. De acuerdo con el apartado anterior, también es R_1. Como todo espacio T_1 es T_0, el espacio será R_1 y R_0. De acuerdo con el teorema 2.2.2 es T_2. □

El recíproco de este teorema no tiene porque ser verdadero. Lo vemos en el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.3.1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{Smi})$ la topología de Smirnov generada por la base

$$\beta_{Smi} = \{(a,b), U, (a,b) \cap U : a < b, a, b \in \mathbb{R}, A \subset U\} \text{ con}$$
$$A = \mathbb{R} - \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

τ_{Smi} es más fina que τ_u (puesto que $\beta_u \subset \beta_{Smi}$). Sabemos que τ_u es T_2, por tanto τ_{Smi} también será T_2. Por el teorema 2.2.2 también es R_1.
Estudiamos la regularidad.
Sea $B = \mathbb{R} - A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{C}_{Smi}$ y $0 \notin B$. Los abiertos más pequeños que contienen al 0 son de la forma $V = (-\epsilon, \epsilon) - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Mientras que los abiertos más pequeños que contienen a B son de la forma $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n} - \epsilon_n, \frac{1}{n} + \epsilon_n)$. Es claro que $U \cap W \neq \emptyset$. Por tanto, $(\mathbb{R}, \tau_{Smi})$ no es regular ni T_3.

2.4. Ejemplos

Estudiemos los axiomas anteriores en algunos ejemplos de topologías.

∘ (X, τ_{ind})
Veamos si el espacio es R_1. Para todo $x \neq y$, $\overline{\{x\}} = X = \overline{\{y\}}$, entonces es R_1. Por tanto, el espacio también es R_0.
Veamos que es un espacio regular: según la definición $x \notin F \in \mathcal{C}_{ind}$ (entonces $F = \emptyset$). Tomando $U = X$ y $V = \emptyset$, es claro que $x \in U$ y que $F \subset V$; además $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, (X, τ_{ind}) es un espacio regular. Por otro lado, como (X, τ_{ind}) no es T_2, por el teorema 2.3.5, no es un espacio T_3.

∘ (X, τ_{dis})
Como (X, τ_{dis}) es un espacio T_2, por el teorema 2.2.2, sabemos que es un espacio R_1. Por lo tanto, también es R_0.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_{dis}$. Obviamente x está contenido en $U = \{x\}$ que es un abierto en la topología discreta y $V = X - \{x\}$ es un cerrado en dicha topología. Claramente $F \subset V$, siendo $U \cap V = \emptyset$. Luego (X, τ_{dis}) es un espacio regular. Al ser un espacio regular y T_2, entonces τ_{dis} es T_3.

∘ (X, τ_d), espacio inducido por la métrica d.
En los ejemplos 1.4, vimos que una topología metrizable es T_2. Por el teorema 2.2.2, sabemos que es un espacio R_1 y consecuentemente R_0.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_d$. Llamamos $r = d(x, F)$ donde $d(x, F) = \inf\{d(x, c), c \in F\}$. Tomando $U = B(x, r/2)$ y $V = \{y \in X, d(y, F) > r/2\}$ entonces $x \in U$ y $F \subset V$ con $U \cap V = \emptyset$. Claramente $U \in \tau_d$, pero nos falta comprobar que V es un abierto en la topología metrizable.
Sea la función

$$\begin{aligned} f : (X, \tau_d) &\to (\mathbb{R}, \tau_u) \\ y &\to d(y, F) \end{aligned}$$

f es uniformemente continua ya que para todo $\epsilon > 0$, basta con tomar $\delta = \epsilon$, y si $d(x, y) < \delta$ es $\mid d(y, F) - d(x, F) \mid \leq d(x, y) < \delta$. Como

$$\begin{aligned} V = \{y \in X, d(y, F) < \frac{r}{2}\} &= \{y \in X, f(y) < \frac{r}{2}\} = \\ &= \{y \in X, f(y) \in [0, \frac{r}{2})\} = f^{-1}([0, \frac{r}{2})) = \\ &= f^{-1}((-\infty, \frac{r}{2})), \end{aligned}$$

al ser f continua, $V \in \tau_d$. Luego existen $U, V \in \tau_d$ disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subset V$. Por tanto (X, τ_d) es regular. Al ser regular y T_1, es T_3.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_u)$
En los ejemplos del capítulo 1, $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es un espacio T_2. Por el teorema 2.2.2,

es un espacio R_1. Luego también es un espacio R_0. Por ser $(\mathbb{R}, \tau_u)$ un espacio metrizable será regular y T_3.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$
La topología de Kolmogorov es T_0 pero no es T_1 ni T_2. Por el teorema 2.1.2, no es R_0 y por el teorema 2.2.6, el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ tampoco es R_1.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_{Kol}$ (siendo $\mathcal{C}_{Kol} = \{(-\infty, a]), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$). Como en este espacio no hay abiertos disjuntos, por tanto $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ no es regular, luego tampoco es T_3.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$
Al ser $\tau_u \subset \tau_{sca}$, esto significa que $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es T_2. Por el teorema 2.2.2 obtenemos que $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es R_1 y consecuentemente R_0.
En los ejemplos 3.3 se prueba que $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es completamente regular, luego por el teorema 3.1.2 es un espacio regular.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$
Por ser $\tau_u \subset \tau_{sor}$, esto significa que $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es T_2 y por el teorema 2.2.2 es R_1 y consecuentemente R_0.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_{sor}$. Luego $x \in \mathbb{R} - F \in \tau_{sor}$, y existe $\varepsilon > 0$ tal que $U = [x, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - F$. Entonces, $V = \mathbb{R} - [x, x+\varepsilon) \in \tau_{sor}$ y $F \subset V$. Estos abiertos son disjuntos, luego $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es un espacio regular y T_3.

∘ (X, τ_A) con $A \subset X$
Recordamos que $\mathcal{C}_A = \{F \subset X, F \cap A = \emptyset\} \cup \{X\}$. En esta topología se cumple que:

$$\overline{\{x\}} = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin A \\ X & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Sean $a \in A$ y $b \notin A$. Luego $\overline{\{a\}} = X$ y $\overline{\{b\}} = \{b\} \subset \overline{\{a\}} = X$. Por tanto, no es R_0 y por el teorema 2.2.6 sabemos que tampoco es R_1.
Ahora vamos a estudiar la regularidad. En el caso de que $x \in A$ y $x \notin F \in \mathcal{C}_A$, tenemos que el abierto más pequeño que contiene a F es $V = F \cup A$. Como todo abierto de x contiene a A, entonces la intersección de cualquier abierto U tal que $x \in U$ y V será A. Luego (X, τ_A) no es regular. Por tanto, tampoco es T_3.

∘ (X, τ^A)
Recordemos $\mathcal{C}_A = \{F \subset X, A \subset F\} \cup \{\emptyset\}$. Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior; sean $x \in A$ e $y \notin A$.
Por definición, como $\overline{\{x\}}$ es el menor cerrado que contiene a x, es $\overline{\{x\}} = A$ puesto que $x \in A$. Cómo $y \notin A$, $\overline{\{y\}} = A \cup \{y\}$. Por tanto, $x \in \overline{\{y\}} = A \cup \{y\}$, pero $\overline{\{x\}} = A \neq A \cup \{y\} = \overline{\{y\}}$. Por el teorema 2.1.1 apartado (iii) no es R_0. Por tanto, tampoco es R_1.

Estudiamos la regularidad: sea $x \notin F \in \mathcal{C}_A$.
Por definición de la topología A-exclusión, $A \subset F$ ya que $x \notin A$. El menor abierto que contiene a x es $U = \{x\}$. Pero al ser X el menor abierto que contiene a F, es $U \cap V \neq \emptyset$. Esto implica que (X, τ^A) no es regular ni T_3.

∘ (X, τ_{cof}) con X infinito.
En la topología cofinita, los conjuntos cerrados son los conjuntos finitos y X. Sea $x \neq y$.
(i) $\{x\}$ e $\{y\}$ son conjuntos cerrados y consecuentemente $\{x\} = \overline{\{x\}}$ e $\{y\} = \overline{\{y\}}$. Por tanto, de acuerdo al apartado (iii) del teorema 2.1.1, si $x \in \overline{\{y\}}$; entonces $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Luego (X, τ_{cof}) es R_0.
(ii) Dados x, y no existen U, V tal que $x \in U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Al no existir abiertos disjuntos, entonces no es R_1.
Estudiamos la regularidad. Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_{cof}$. En la topología cofinita, todos abiertos no vacíos se intersecan. Luego (X, τ_{cof}) no es un espacio regular, y tampoco T_3.

∘ (X, τ_{coc}) con X no contable.
Sabiendo que (X, τ_{coc}) es T_1, por el teorema 2.1.2 es R_0. Por otra parte, sabiendo que no es T_2, por el teorema 2.2.2, no es R_1.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}_{coc}$. Cómo la topología cocontable no tiene abiertos disjuntos, esto implica que no es regular ni T_3.

∘ (X, τ_{sier}) con $X = \{a, b\}$

Por el primer capítulo sabemos que (X, τ_{sier}) es un espacio T_0, pero no es T_1 ni T_2. Por el teorema 2.1.2, vemos que no es un espacio R_0 y por el teorema 2.1.2 tampoco es R_1.
Además, como en la topología Sierpinski no existen abiertos disjuntos, luego no es regular ni T_3.

Resumimos en la siguiente tabla, los espacios estudiados en este capítulo.

Espacio topológico	R_0	R_1	Regular	T_3
Topología indiscreta	✓	✓	✓	✗
Topología discreta	✓	✓	✓	✓
Topología usual	✓	✓	✓	✓
Topología Kolmogorov	✗	✗	✗	✗
Topología esparcida	✓	✓	✓	✓
Topología cofinita	✓	✗	✗	✗
Topología Sierpinski	✗	✗	✗	✗
Topología cocontable	✓	✗	✗	✗
Topología Sorgenfrey	✓	✓	✓	✓
Topología métrica	✓	✓	✓	✓
Topología X - {a}-inclusión	✗	✗	✓	✗
Topología A-inclusión *	✗	✗	✗	✗
Topología A-exclusión	✗	✗	✗	✗
* X -A es un conjunto que tiene más de un punto				

✓: significa que (X, τ) satisface la propiedad.
x: significa que (X, τ) no satisface la propiedad.

Capítulo 3

Espacios completamente regulares, de Tychonoff y normales

En este capítulo se estudian los espacios completamente regulares, de Tychonoff y los espacios normales. Finaliza el capítulo con dos resultados fundamentales: el lema de Uryshon y el teorema de Tietze.

3.1. Espacios completamente regulares y de Tychonoff

Definición 3.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es *completamente regular* si para cualquier conjunto cerrado A de X y para todo $x \notin A$, existe una función continua $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Es decir,

$$\text{Si } x \notin A \in \mathcal{C}, \text{ entonces existe } f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u) \text{ continua tal que } f(x) = 0 \text{ y } f(A) = 1.$$

Observación 3.1.1. Se puede reemplazar el intervalo $[0, 1]$ por cualquier intervalo cerrado $[a, b]$. En este caso pediríamos las condiciones $f(A) = a$ y $f(x) = b$.

Definición 3.1.2. Un espacio topológico (X, τ_X) es de *Tychonoff o* $T_{3\frac{1}{2}}$ si es completamente regular y T_1.

Teorema 3.1.1. *La regularidad completa (propiedad de Tychonoff) es una propiedad hereditaria.*

Demostración. Sea $B \subset X$ con (X, τ) un espacio completamente regular y C un conjunto cerrado en (B, τ_B) tal que $b \notin C$.

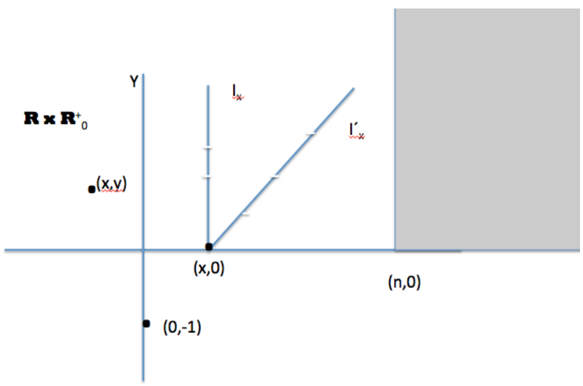
Por ser B un subespacio de X, existirá $A \in \mathcal{C}$ tal que $C = B \cap A$. Ya que $b \notin C$, entonces $b \in B - A$ y tenemos que $b \notin A$. Por hipótesis, al ser (X, τ) completamente regular, existe $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ tal que $f(b) = 0$ y $f(A) = 1$.
Si tomamos la restricción $f|_B : (B, \tau_B) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$, $f|_B$ es continua y verifica que $f|_B(b) = 0$ y $f|_B(B \cap A) = 1$. Por tanto (B, τ_B) es un espacio completamente regular.
Además, como T_1 es una propiedad hereditaria por el teorema 1.2.2; la propiedad de Tychonoff también lo es. □

Observación 3.1.2. Si (X, τ_1) y (X, τ_2) son dos topologías diferentes tales que $\tau_1 \subset \tau_2$ y τ_1 es un espacio completamente regular, entonces en general τ_2 no es completamente regular. Para probar esto, podemos ver en los ejemplos 3.3 que la topología indiscreta y la topología discreta son completamente regulares pero la topología cofinita no lo es; con $\tau_{ind} \subset \tau_{cof} \subset \tau_{dis}$.

Teorema 3.1.2. *Todo espacio completamente regular es regular.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio completamente regular.
Sea $x \notin F \in \mathcal{C}$. Por hipótesis, existe $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Como los intervalos $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos disjuntos en $([0,1], \tau_u)$; por ser f continua, $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos disjuntos en (X, τ) tales que $x \in U$ y $F \subset V$. Luego (X, τ) es un espacio regular. □

Ejemplo 3.1.1. El recíproco del teorema 3.1.2 no es cierto. Veamos un contraejemplo cuyos detalles se encuentran en [2].
Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\} \cup \{(0, -1)\}$. Se define τ sobre X a través del sistema fundamental de entornos definido por:
1. $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{\{(x, y)\}\}$ si $y > 0$.
2. $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x, 0)\} \cup A_x; x \in \mathbb{R}\}$ donde $A_x = (I_x \cup I_x') - \{$cantidad finita de puntos de $(I_x \cup I_x')\}$, $I_x = \{(x, y) : 0 \leq y < 2\}$ e $I_x' = \{(x+y, y) : 0 \leq y < 2\}$.
3. $\mathcal{B}_{(0,-1)} = \{\{(0, -1)\} \cup \{\{(x, y)\} : x > n, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}\}$



Veamos que (X,τ) es regular. Estudiamos tres casos:
(i) Si $y>0$ es claro que $\{\overline{(x,y)}\}=\{(x,y)\}\subseteq U$, con $U\in\mathcal{B}(x,y)$.
(ii) Si $y=0$ y $U\in\mathcal{B}(x,0)$, existe un conjunto finito $P_x\subset I_x\cup I_x^{'}$ tal que $(\mathrm{I}_x\cup\mathrm{I}_x^{'})-\mathrm{P}_x\subseteq U$. Es decir,$(\mathrm{I}_x\cup\mathrm{I}_x^{'})-\mathrm{P}_x\in\mathcal{B}(x,0)$ y $\overline{(I_x\cup I_x^{'})-P_x}\subseteq U$.
(iii) Sea $U\in\mathcal{B}(0,-1)$. Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\{(x,y)\in X: x>N\}\subseteq U$. Si $V=\{(x,y)\in X; x>N+2\}\cup\{(0,-1)\}\in\mathcal{B}(0,-1)$ se verifica que $\overline{V}\subseteq U$.
Luego (X,τ) es regular. Ahora vamos a ver que (X,τ) no es completamente regular.
Sea C= $\{(x,0): x\leq 1\}$. Es claro que $C\in\mathcal{C}_X$ y $(0,-1)\notin C$. Sea la función $f:(X,\tau)\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_u)$ continua definida por $f(x)=0$ para todo $x\in C$.Vamos a probar que $f((0,-1))=0$ obligatoriamente.
Para todo $n\in\mathbb{N}$ sea $A_n=f^{-1}(\{0\})\cup\{(x,0), n-1\leq x\leq n\}$ y sea $S=\{n\in\mathbb{N}, A_n \text{ es un conjunto infinito}\}$. Como $C\subseteq f^{-1}(\{0\})$, $A_1=[0,1]$ y por tanto $1\in S$.
Supongamos que $n\in S$. Veamos que $n+1\in S$. Sea D un conjunto contable con $D\subset A_n$ y tal que $(n-1,0)\notin D$, y sea $(d,0)\in D$. Como $D\subseteq A_n$ y $A_n\subseteq f^{-1}(\{0\})$, entonces $(d,0)\in \overline{f^{-1}(\{0\})}$.
Como $\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})$ es $f^{-1}(\{0\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})$.
Por otra parte $\mathrm{I}_d^{'}\in\mathcal{C}$ y podemos encontrar una colección $\{E_i, i\in I\}\in\mathcal{C}$ tal que $I_d^{'}-f^{-1}(\{0\})=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_i$. Además E_i es finito (ya que si fuese infinito $(d,0)\in\overline{E_i}=E_i$).
Por tanto $I_d^{'}-f^{-1}(\{0\})$ es un conjunto contable y su proyección sobre el eje OX, $p_1=(I_d^{'}-f^{-1}(\{0\}))$ es contable.
Llamando $F=\{(x,0), n\leq x\leq n+1\}-P$, entonces F es un conjunto infinito. Si $(x,0)\in F$ y $(d,0)\in D$ se verifica $n-1\leq d\leq n$, $n\leq x\leq n+1$ y $(x,0)\notin P$ y además $(x,y)\in I_d^{'}$. Puesto que $(x,0)\notin P$, $(x,y)\in f^{-1}(\{0\})$ y se tiene que $(x,y)\in I_x\cup(I_x^{'}\cap f^{-1}(\{0\}))$; $(x,0)\in F$ y $(d,0)\in D$, $I_x\cap(I_x^{'}\cap f^{-1}(\{0\}))\neq\emptyset$.
Como $f^{-1}(\{0\})$ es cerrado, entonces $(x,0)\in f^{-1}(\{0\})$. Así $F\subset f^{-1}(\{0\})$. Al ser F un conjunto infinito tal que $F\subset f^{-1}(\{0\})$ y $F\subset\{(x,0), n\leq x\leq n+1\}$, A_{n+1} es un conjunto infinito. Por tanto $n+1\in S^{'}$. Sea $U\in\tau$ tal que $(0,-1)\in U$. Entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\{(x,y)\in X, x>n_0\}\subset U$. Así $U\cap A_{n+1}$ es un conjunto infinito tal que $(0,-1)\in\overline{f^{-1}(\{0\})}$. Además como $f^{-1}(\{0\})$ es cerrado, $(0,-1)\in f^{-1}(\{0\})$. Por tanto $f((0,-1))=0$. Lo que significa que (X,τ) no es completamente regular.

Como consecuencia del teorema 3.1.2, tenemos que todo espacio de Tychonoff también es T_3.

Teorema 3.1.3. *Si $f_i: X\to(X_i,\tau_i)$ es una familia que separa puntos y cada (X_i,τ_i) es un espacio de Tychonoff, entonces la topología inicial τ_X sobre X asociada a $\{f_i\}_{i\in I}$ también es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Por la definición A.1.7, cada $f_i : (X, \tau_X) \to (X_i, \tau_i)$ es continua. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia que separa puntos, existe $k \in I$ tal que $f_k(x) \neq f_k(y)$.
Cada (X_i, τ_i) es un epacio de Tychonoff, por tanto es un espacio completamente regular y T_1. Por el teorema 1.2.4 la topología inicial en X también es T_1. Por último probamos que es completamente regular.
Sea $A \in \mathcal{C}_X$ y $x \notin A$, entonces $X - A \in \tau_X$. Existe $B \in \beta_X$ (base de τ_X) tal que $x \in B \subset X - A$ siendo $B = f_{i_1^{-1}}(U_{i_1}) \cap f_{i_2^{-1}}(U_{i_2}) \cap ... \cap f_{i_n^{-1}}(U_{i_n})$ con $U_{i_j} \in \tau_{i_j}$ para todo $j = 1, .., n$.
Llamando $V_{i_j} = f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ es claro que $x \in V_{i_j}$, luego $f_{i_j}(x) \in f_{i_j}(V_{i_j}) = f_{i_j}(f_{i_j}^{-1}(U_{i_j})) \subset U_{i_j}$. Por tanto $f_{i_j}(x) \notin X_{i_j} - U_{i_j} \in \mathcal{C}_{i_j}$. Por ser (X_{i_j}, τ_{i_j}) completamente regular existe una función continua $g_{i_j} : (X_{i_j}, \tau_{i_j}) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ tal que $g_{i_j}(f_{i_j}(x)) = 0$ y $g_{i_j}(f_{i_j}(X_{i_j} - U_{i_j})) = 1$.
Lamando $h_{i_j} = g_{i_j} \circ f_{i_j}$, definimos la función $H : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ tal que $H(z) = \text{máx}(h_{i_j}(z))$ para $j \in \{1, ..., n\}$.
Por ser todas las h_{i_j} continuas, la función H es una función continua. Además $H(z) = 0$ (porque $x \in B = f_{i_1^{-1}}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_n^{-1}}(U_{i_n})$) y $H(z) = 1$ (porque $A \subset X - B = X - \bigcap_{j=1}^{n} {f_{i_j}}^{-1}(U_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} {f_{i_j}}^{-1}(X_{i_j} - V_{i_j})$). Por tanto, (X, τ_X) es un espacio completamente regular. □

Teorema 3.1.4. *La regularidad completa es productiva.*

Demostración. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}$ una familia de espacios completamente regulares. Si $X = \prod_{i\in I} X_i$, recordamos que τ_{Tyc} es la topología inicial inducida por la familia de funciones $\{p_i : X \to X_i\}$ donde $p_i : X \to X_i$ es la función proyección de X sobre X_i.
Como $\{p_i\}_{i\in I}$ separa puntos, entonces por el teorema 3.1.3, (X, τ_{Tyc}) también es completamente regular. Luego el producto de espacios de Tychonoff es completamente regular. □

Observación 3.1.3. La imagen continua de un espacio completamente regular no es completamente regular.
En efecto, $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es continua y biyectiva. $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es completamente regular, pero $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ no lo es (ver ejemplos 3.3).

Teorema 3.1.5. *La regularidad completa es una propiedad topológica.*

Demostración. Sea (X, τ_X) un espacio completamente regular y un homeomorfismo $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.
Sea $y \notin A \in \mathcal{C}_Y$. Entonces, como f es continua, $f^{-1}(A) = F \in \mathcal{C}_X$ y existe $f^{-1}(y) = x \in X$, además $x \notin F$.
Por ser (X, τ_X) un espacio completamente regular, existe una función continua $g : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ tal que $g(x) = 0$ y $g(F) = 1$. Por tanto,

$g(f^{-1}(y)) = 0$ y $g(f^{-1}(A)) = 1$.
La función $g \circ f^{-1} : (Y, \tau_Y) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ es continua (por ser composición de funciones continuas) tal que $(g \circ f^{-1})(y) = 0$ y $(g \circ f^{-1})(A) = 1$. Por tanto, (Y, τ_Y) es completamente regular. $\square$

3.2. Espacios normales y T_4

Definición 3.2.1. Un espacio topológico (X, τ) es *normal* si dados dos conjuntos A y B cerrados disjuntos en X, existen U y V abiertos disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Es decir,

$$\text{Si } A, B \in \mathcal{C} \text{ con } A \cap B = \emptyset \text{ entonces existen } U, V \in \tau \text{ tales que } A \subset U, B \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Definición 3.2.2. Un espacio topológico (X, τ_X) es *T_4 o normal Hausdorff* si es normal y T_1.

Teorema 3.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:*
(i) (X, τ) es normal
(ii) Dado $A \in \mathcal{C}$, $A \neq \emptyset$ y $U \in \tau$ con $A \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
(iii) Para cualesquiera A y B cerrados disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ con $A \subset U$ y $B \subset V$.
(iv) Dados A y B cerrados disjuntos, existe $U \in \tau$ tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$
Sea $A \in \mathcal{C}$ y $U \in \tau$ tal que $A \subset U$. Entonces existe un cerrado $B = X - U$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Por ser (X, τ) normal, existen $V, W \in \tau$ tales que $A \subset V$, $B \subset W$ con $V \cap W = \emptyset$.
Por otra parte, $V \subset X - W \subset X - B = U$. Luego, $\overline{V} \subset \overline{X - W}$, por ser $X - W \in \mathcal{C}$, $\overline{X - W} = X - W$. Por tanto, $\overline{V} \subset X - W \subset X - B = U$. Además, $V \subset \overline{V}$. Luego $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Sean A y B cerrados disjuntos, entonces $A \subset X - B \in \tau$. Por hipótesis, existe $V \in \tau$ tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset X - B$.
Luego $B \subset X - \overline{V} \in \tau$ y usando (ii) existe $W \in \tau$ tal que $B \subset W \subset \overline{W} \subset X - \overline{V}$. Al ocurrir $\overline{W} \subset X - \overline{V}$, se verifica que $\overline{W}$ y $\overline{V}$ son cerrados disjuntos tales que $A \subset V$ y $B \subset W$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Sean A y B cerrados con $A \cap B = \emptyset$. Por hipótesis, existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$ con $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Entonces, $B \subset V$ y obviamente $B \subset \overline{V}$. Por tanto, $\overline{U} \cap B = \emptyset$.
$(iv) \Rightarrow (i)$
Si A y B son cerrados disjuntos, por (iv), existe $U \in \tau$ tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Entonces, tomamos $V = X - \overline{U} \in \tau$ verificando que $B \subset V$ y además $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Ejemplo 3.2.1. La normalidad no es hereditaria.
Sea (X, τ_{Moore}) el plano de Moore (ver ejemplos 1.4). Observar que $S = \mathbb{R} \times \{0\} \in \mathcal{C}_{Moore}$ y $D = \{(x, y) \in X, x, y \in \mathbb{Q}\}$ es denso en X. Además, $\mid S \mid \geq 2^{|D|}$ y τ_s es la topología discreta.
Por el lema 3.2.6 (de Jones), (X, τ_{Moore}) no es normal.
Puede probarse (ver [5]) que (X, τ_{Moore}) puede embeberse en (Y, τ_{Tch}) e $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ donde $Y_i = [0, 1]$ con la topología usual. Y (Y, τ_{Tch}) es normal.

Teorema 3.2.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal. Luego, la normalidad es débilmente hereditaria.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio normal y $Y \in \mathcal{C}$ donde $Y \subset X$. Sean $A, B \in \mathcal{C}_Y$ tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $A, B \in \mathcal{C}_X$. Como (X, τ) es normal, existen $U, V \in \tau$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A \subset U$, $B \subset V$. Tomando $U \cap Y, V \cap Y \in \tau_Y$, es $A \subset U \cap Y$, $B \subset V \cap Y$ y $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Por tanto, (Y, τ_Y) es normal. $\square$

Teorema 3.2.3. *Todo espacio normal y T_1 (es decir, T_4) es Hausdorff.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \neq y$. Puesto que X es un espacio T_1, los conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$ son cerrados en X, por el teorema 1.2.1. Por ser (X, τ) normal, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Luego, $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ e $y \in V$. Por tanto, (X, τ) es Hausdorff. $\square$

Observación 3.2.1. Si (X, τ_1) y (X, τ_2) son dos topologías diferentes tales que $\tau_1 \subset \tau_2$ y τ_1 es un espacio normal, entonces en general τ_2 no es normal. Para probar esto, podemos ver en los ejemplos 3.3 que la topología indiscreta y la topología discreta son normales pero la topología cofinita no lo es; con $\tau_{ind} \subset \tau_{cof} \subset \tau_{dis}$.

Observación 3.2.2. La normalidad no es una propiedad productiva.
Para probarlo será suficiente con dar un contraejemplo. La recta Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ es un espacio normal (ver ejemplos 3.3); sin embargo demostraremos que el plano de Sorgenfrey $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_{Sor})$ no es un espacio normal. Una base de la recta Sorgenfrey es $\beta_{Sor} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\beta_{Sor \times Sor} = \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) : a_1 < b_1, a_2 < b_2 \text{ con } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$ es una base del plano Sorgenfrey. Sea $S = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, claramente S es un conjunto cerrado en $\tau_{Sor} \times \tau_{Sor}$ y $\mid S \mid = \mid \mathbb{R} \mid$ y τ_S es la topología discreta.
Por otra parte $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable y denso en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_{Sor})$. Aplicando el Lema de Jones (lema 3.2.6), el plano de Sorgenfrey no es normal porque $\mid S \mid \geq 2^{|D|}$.

Teorema 3.2.4. *La imagen de un espacio normal por una función continua cerrada es normal.*

Demostración. Sea $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua, cerrada y sobreyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{C}_Y$ disjuntos.
Por ser f una función continua; $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{C}_X$ y como (X, τ_X) es normal existen $U, V \in \tau_X$ disjuntos tales que $f^{-1}(A) \subset U$ y $f^{-1}(B) \subset V$. Al ser $X - U, X - V \in \mathcal{C}_X$ y f cerrada entonces $f(X - U), f(X - V) \in \mathcal{C}_Y$. Los conjuntos $U' = Y - f(X - U), V' = Y - f(X - V) \in \tau_Y$. Ahora veremos que $A \subset U'$. Como $f^{-1}(A) \subset U$, entonces $X - U \subset X - f^{-1}(A)$. Luego $f(X - U) \subset f(X - f^{-1}(A)) \subset Y - A$. Por tanto $A \subset Y - f(X - U) = U'$. Análogamente se demostraría que $B \subset V'$.
Como $U \cap V = \emptyset$, es claro que $U' \cap V' = \emptyset$. Por tanto, (Y, τ_Y) es un espacio normal. □

Ejemplo 3.2.2. $X = (\mathbb{R} \times \{0, 1\}, \tau_u)$ un espacio topológico T_2. Una base de la topología es:

$$\beta = \{(a, b) \times \{0\}, (a, b) \times \{1\} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Al ser X un subespacio cerrado de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, por el teorema 3.2.2 es un espacio normal. Sea $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(0, 1) = \infty$ y $f(x, t) = x$ para cada $t \in \mathbb{R}$.
Sea τ_Y generada por la base:

$$\beta_Y = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, 0) \cup \{\infty\} \cup (0, b), 0 < a < b\}.$$

Entonces la función $f(X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua y abierta.
Sin embargo todo abierto de ∞ interseca a todo abierto de $0 \in Y$. Por tanto, (Y, τ_Y) no es T_2.
Dado $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ tiene uno o dos puntos y por esto $f^{-1}(y) \in \mathcal{C}$, para cada $y \in Y$. Entonces (Y, τ_Y) no puede ser normal porque tendría que ser T_2, en contradicción con el teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.5. *La normalidad es invariante bajo homeomorfismos, por tanto, es una propiedad topológica.*

Demostración. Puesto que un homeomorfismo es una función continua, cerrada y biyectiva. Como consecuencia directa del teorema 3.2.4, el resultado es evidente. □

El siguiente resultado ayuda a distinguir cuando un espacio no es normal.

Lema 3.2.6. *(Lema de Jones) Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $S \subset X$ un cerrado de modo que τ_S sea la topología discreta sobre S. Si existe $D \subset X$ denso y $|S| \geq 2^{|D|}$. Entonces (X, τ) no es un espacio normal.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es normal. Sea $T \subset S$, como τ_S es la topología discreta, claramente T es cerrado en S y por tanto en X. Igualmente $S - T$ también será cerrado en X. Como $T, S - T \in \mathcal{C}_X$ y son disjuntos,

por ser X normal existen $U_T, V_T \in \tau_X$ tales que $T \subset U_T$ y $S - T \subset V_T$ con $U_T \cap V_T = \emptyset$.
Sean $T_1, T_2 \subset S$, supongamos que $T_1 - T_2 \neq \emptyset$. Utilizando el mismo razonamiento anterior, existen $U_{T_1}, V_{T_1}, U_{T_2}, V_{T_2} \in \tau_X$ tales que $U_{T_1} \cap V_{T_1} = \emptyset$ y $U_{T_2} \cap V_{T_2} = \emptyset$ con $T_1 \subset U_{T_1}$, $S - T_1 \subset V_{T_1}$, $T_2 \subset U_{T_2}$ y $S - T_2 \subset V_{T_2}$. Además verifica que $U_{T_1} \cap V_{T_2} \neq \emptyset$ (porque si $U_{T_1} \cap V_{T_2} = \emptyset$, se verificaría que $T_1 - T_2 \subset U_{T_1} - T_2 \subset U_{T_1} \cap V_{T_2}$ y por tanto $T_1 - T_2 = \emptyset$, en contra de la hipótesis inicial).
Por ser D denso en X, $U_{T_1} \cap V_{T_2} \cap D \neq \emptyset$. Como $U_{T_1} \cap V_{T_2} \cap D \subset U_{T_1} \cap D$ mientras que $U_{T_1} \cap V_{T_2} \cap D \not\subset U_{T_2} \cap D$ (porque $U_{T_2} \cap V_{T_2} = \emptyset$), deducimos que $U_{T_1} \cap D \neq U_{T_2} \cap D$.
Por tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D}) \\ T &\longrightarrow U_T \cap D \end{aligned}$$

es inyectiva y $|S| < |\mathcal{P}(\mathcal{S})| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{D})| = 2^{|D|}$, contradiciendo la hipótesis. Luego (X, τ) no es normal. $\square$

Para ver una caracterización de la normalidad introducimos varios conceptos:

Definición 3.2.3. Un número *diádico* es un número racional cuyo denominador es una potencia de 2. Por tanto, cualquier número diádico de $[0,1]$ se puede expresar como $\dfrac{m}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $m = \{0, 1, 2, ..., 2^n\}$.

Observación 3.2.3. Sobre $\mathcal{D}$ puede darse un orden del siguiente modo

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} < \frac{m_2}{2^{n_2}} \Longleftrightarrow \begin{cases} n_1 < n_2 \\ \text{y si } \ n_1 = n_2, \quad m_1 < m_2. \end{cases}$$

Este orden se utilizará para la inducción del lema 3.2.9.

Lema 3.2.7. *Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los números diádicos en el intervalo $[0,1]$. Entonces, $\mathcal{D}$ es denso en $([0,1], \tau_u)$.*

Demostración. Como $\mathcal{D} \subset [0,1]$ y $[0,1]$ es cerrado, se verifica $\overline{\mathcal{D}} \subset [0,1]$. Veamos ahora que $[0,1] \subset \overline{\mathcal{D}}$. Únicamente tendremos que demostrar que para todo $a \in [0,1]$, cualquier intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ contiene un punto de $\mathcal{D}$.
Claramente, existe $q = 2^{n_0}$ tal que $\frac{1}{q} \in (0, \epsilon)$. Por otra parte, $[0,1]$ es la unión de los siguientes intervalos,

$$[0, \tfrac{1}{q}], [\tfrac{1}{q}, \tfrac{2}{q}], ..., [\tfrac{q-1}{q}, 1]$$

Por tanto, a pertenece a alguno de estos intervalos. Esto es, $\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$, donde $m \in \{0, 1, ..., q-1\}$. Ahora bien, como $\frac{1}{q} < \epsilon$,

$$a - \epsilon < \tfrac{m}{q} \leq a \leq a + \epsilon$$

Luego $\dfrac{m}{q} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Luego $\mathcal{D}$ es denso en $[0,1]$. $\square$

Lema 3.2.8. *Sea (X,τ) un espacio topológico y D denso en $[0,1]$. Supongamos que para cada $t \in D$ existe un abierto U_t en (X,τ), tal que*
(i) Si $s < t \longrightarrow \overline{U_s} \subset U_t$
(ii) $X = \displaystyle\bigcup_{t\in D} U_t$
En estas condiciones, la aplicación $f : (X,\tau) \longrightarrow ([0,1],\tau_u)$ definida por $f(x) = Inf\ \{t \in D, x \in U_t\}$ para todo $x \in X$ es continua.

Demostración. Se verifican las siguientes propiedades:
(i) Si $x \in U_t$ entonces $f(x) \leq t$.
(ii) Si $f(x) < t$ entonces $x \in U_t$, (en efecto, existe $s < t$ tal que $x \in U_s$ porque si para cada $s < t$ fuera $x \notin U_s$ ocurriría que $f(x) \geq t$ (en contra de la hipótesis). Por tanto existe $s < t$ tal que $x \in U_s \subset \overline{U_s} \subset U_t$).
(iii) Si $f(x) > t$ entonces $x \notin \overline{U_t}$,(en efecto, si $s \in D$ y $t < s < f(x)$ como $f(x) > s$ se verifica que $x \notin U_s$ y $\overline{U_t} \subset U_s$).
Estudiamos la continuidad punto a punto. Sea $a \in X$,
· Si $f(a) = 0$.
$f(a) = 0$ si y sólo si $a \in U_t$, para todo $t \in U_t$. En efecto, para todo $\epsilon > 0$ existe $t_\epsilon \in D$ con $t_\epsilon < \epsilon$. Si $U_{t_\epsilon} = V$ entonces $a \in V$ y por (ii): $f(V) \subset [0, t_\epsilon] \subset [0,\epsilon)$, por tanto f es continua en a.

· Si $f(a) = 1$.
Por ser $f(a) = 1 > t \in [0,1) \cap D$, de acuerdo a la hipótesis (iii) se verifica que $x \notin \overline{U_t}$ para todo $t \in D - \{1\}$. Sea $\epsilon > 0$, por ser D denso en X, existe $t \in D$ tal que $t > 1 - \epsilon$. Sea $V = X - \overline{U_t} \in \tau$, por (iii) $a \in V$ y $f(V) \subset (1-\epsilon, 1]$ puesto que si $x \in V$ se verifica que $x \notin \overline{U_t}$ y por tanto $x \notin U_t$. Por tanto $f(x) \geq t > 1 - \epsilon$ por (ii). Luego f es continua en a.

· Si $f(a) \in (0,1)$.
Por ser D denso, para todo $\epsilon > 0$, existen $t_1, t_2 \in D$ tales que $t_1 < t_2$ y $f(a) - \epsilon < t_1 < f(a) < t_2 < f(a) + \epsilon$.
Sea $V = U_{t_2} - \overline{U_{t_1}} \in \tau$. Entonces $a \in V$ (ya que si $a \notin V$, $a \in \overline{U_{t_1}}$ o $a \notin U_{t_2}$; esto implica que $f(a) \leq t_1$ o $f(a) \geq t_2$, lo cual es absurdo). Y $f(V) \subset (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ (ya que si $x \in V$ si se cumple $x \in U_{t_2}$ y $x \notin U_{t_1}$). Por (ii) $f(x) \leq t_2$ y $f(x) \geq t_1$. Luego $t_1 \leq f(x) \leq t_2$ y por tanto $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$. Luego f es continua en a. $\square$

Lema 3.2.9. *(Lema de Uryshon) Un espacio topológico (X,τ) es normal si y sólo si para cada par de cerrados disjuntos A, B existe una función continua $f : (X,\tau) \longrightarrow ([0,1],\tau_u)$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. f se llama función de Urysohn para A y B.*

Demostración. $\Leftarrow$ Sean $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntos, por hipótesis existe una aplicación continua $f : (X, \tau_X) \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Entonces, $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}]), V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \tau_X$ son disjuntos y tales que $A \subset U, B \subset V$. Por tanto, (X, τ) es normal.
$\Rightarrow$ Sea (X, τ) normal y $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntos. Vamos a construir una familia de abiertos asociada al conjunto de los diádicos en $[0,1]$: a cada $t \in D$ le asociaremos $U_t \in \tau$ tal que:

1. $A \subset U_t \subset \overline{U_t} \subset X - B$.
2. Si $s < t$ entonces $\overline{U_s} \subset U_t$.

La prueba se hace por inducción sobre D.
Como (X, τ) es normal, por el teorema 3.2.1, existe $U_{\frac{1}{2}} \in \tau$ tal que $A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X - B$. Así tenemos que $\{A, X - U_{\frac{1}{2}}\}$ y $\{\overline{U_{\frac{1}{2}}}, B\}$ son dos pares de cerrados disjuntos.
Repitiendo el mismo argumento para cada par de cerrados

1. Existe $U_{\frac{1}{4}} \in \tau$: $A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}}$
2. Existe $U_{\frac{3}{4}} \in \tau$: $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X - B$

En estas dos etapas hemos construido:
· Para $n = 1$, $D_1 = \{\frac{1}{2}\} \subset D$ y $U_{\frac{1}{2}} \in \tau$.
· Para $n = 2$, $D_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ y $U_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}} \in \tau$ (Recordamos el orden de los números diádicos según la observación 3.2.3).
Luego tendríamos cuatro pares de cerrados disjuntos:

$$\{A, X - U_{\frac{1}{4}}\}, \{\overline{U_{\frac{1}{4}}}, X - U_{\frac{1}{2}}\}, \{\overline{U_{\frac{1}{2}}}, X - U_{\frac{3}{4}}\}, \{\overline{U_{\frac{3}{4}}}, B\}$$

e iterando el argumento anterior, por ser (X, τ) normal:

1. Existe $U_{\frac{1}{8}} \in \tau$: $A \subset U_{\frac{1}{8}} \subset \overline{U_{\frac{1}{8}}} \subset U_{\frac{1}{4}}$.
2. Existe $U_{\frac{3}{8}} \in \tau$: $\overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{3}{8}} \subset \overline{U_{\frac{3}{8}}} \subset U_{\frac{1}{2}}$.
3. Existe $U_{\frac{5}{8}} \in \tau$: $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{5}{8}} \subset \overline{U_{\frac{5}{8}}} \subset U_{\frac{3}{4}}$.
4. Existe $U_{\frac{7}{8}} \in \tau$: $\overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_{\frac{7}{8}} \subset \overline{U_{\frac{7}{8}}} \subset X - B$.

con $D_3 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\} \subset D$.

Repitiendo este procedimiento, construimos los abiertos:

$$\{U_{\frac{k}{2^n}} \in \tau : k = 1, ..., 2^n - 1\} \text{ verificando,}$$
$$A \subset U_{\frac{1}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2^n}}} \subset ... \subset \overline{U_{\frac{k-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{k}{2^n}} \subset ... \subset U_{\frac{2^n-1}{2^n}} \subset \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \subset X - B.$$

¿Cómo construir $U_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ para k impar? (para k par, $k = 2m$, $U_{\frac{k}{2^{n+1}}} = U_{\frac{m}{2^n}}$, que ya está construido).

1. $U_{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Como $A, X - U_{\frac{1}{2^n}} \in \mathcal{C}$ disjuntos, por ser (X, τ) normal, por el

teorema 3.2.1, existe $U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \in \tau$ tal que $A \subset U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{1}{2^n}}$.
2. $U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$. Como $B, \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \in \mathcal{C}$ disjuntos, por ser (X,τ) normal, existe $U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} \in \tau$ tal que $\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}} \subset X - B$.
3. $U_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ con k impar y $1 < k < 2^{n+1} - 1$. Como $k-1$ y $k+1$ son pares, $\overline{U_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}}, X - U_{\frac{k-1}{2^{n+1}}} \in \mathcal{C}$ disjuntos, entonces existe $U_{\frac{k}{2^{n+1}}} \in \tau$ tal que $\overline{U_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{k}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{k}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$.

Hemos construido de manera inductiva una familia de abiertos $\{U_t, t \in D\}$, tal que
1. $A \subset U_t$, para todo $t \in D$ (eligiendo $U_1 = X$).
2. Si $s < t$, $\overline{U_s} \subset U_t$.
3. Para todo $t \in D$, $\overline{U_t} \subset X - B$ (si $t \neq 1$).
Por tanto la familia $f(x) = \text{Inf}\{t \in D, x \in U_t\}$ es continua por el lema 3.2.8 y
(i) Como $A \subset U_t$, para todo $t \in D$ se verifica que $f(A) = 0$.
(ii) Para cada $x \in B$, $x \notin \overline{U_t}$ $(t \in D, t \neq 1)$ luego $f(B) = 1$. □

Lema 3.2.10. *Sea (X,τ) un espacio topológico y para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ una función continua.*
Supongamos que existe una serie convergente de números reales, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ tal que para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M_n$.
Entonces, para todo $x \in X$ la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a un número $f(x)$, y la función f así definida es continua.

Demostración. Para $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ por el teorema de comparacón de Weierstrass es absolutamente convergente, por tanto para todo $x \in X$, $f(x)$ existe.
(i) Sea $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$: para todo $x \in X$ y $k > n_\epsilon$ $|f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.
Además, $|f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k} M_n$.
Como $\sum_{n=1}^{k} M_n$ converge, se puede elegir n_ϵ suficientemente grande para que si $k > n_\epsilon$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} M_n < \frac{\epsilon}{3}$.
(ii) Por ser cada función $f_n(x)$ continua. Para todo $x \in X$ existe $U_x \in \tau$ tal

que para todo $y \in U_x$ se verifica que $|\sum_{n=1}^{n_\epsilon} f_n(x) - \sum_{n=1}^{n_\epsilon} f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ tomando n_ϵ y ϵ como antes. Tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\sum_{n=1}^{n_\epsilon}(f_n(x)-f_n(y)) + \sum_{n=n_\epsilon+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=n_\epsilon+1}^{\infty} f_n(y)| \\ &\leq |\sum_{n=1}^{n_\epsilon}(f_n(x)-f_n(y))| + |\sum_{n=n_\epsilon+1}^{\infty} f_n(x)| + |\sum_{n=n_\epsilon+1}^{\infty} f_n(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Luego f es continua. □

Tenemos una nueva caracterización de normalidad:

Teorema 3.2.11. *(Teorema de extensión de Tietze) (X,τ) es un espacio normal si y sólo si para todo cerrado A y para toda función continua $f : (A,\tau_A) \longrightarrow ([-1,1],\tau_u)$ existe $F : (X,\tau) \longrightarrow ([-1,1],\tau_u)$ extensión continua de f a todo el espacio.*

Demostración. $\Leftarrow$ Sean $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntos en (X,τ). Entonces $A \cup B \in \mathcal{C}$ y la función $f : (A \cup B, \tau_{A\cup B}) \longrightarrow ([-1,1],\tau_u)$ definida por $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$ es continua.
Por hipótesis existe $F : (X,\tau) \longrightarrow ([-1,1],\tau_u)$ continua que extiende a f. Por tanto, F es una función de Urysohn para $A, B \in \mathcal{C}$, por el lema 3.2.9, (X,τ) es normal.

$\Rightarrow$ Sea $f : (A,\tau_A) \longrightarrow ([-1,1],\tau_u)$ continua. Dividimos el intervalo $[-1,1]$ en tres partes de amplitud $\frac{2}{3}$: $[-1,1] = [-1,-\frac{1}{3}] \cup [\frac{-1}{3},\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3},1]$. Por ser f continua, los conjuntos $A_1 = f^{-1}[\frac{1}{3},1], B_1 = f^{-1}[-1,-\frac{1}{3}] \in \mathcal{C}$ disjuntos en (A,τ_A), por tanto también en (X,τ).
Aplicando el lema de Uryshon (lema 3.2.9) a A_1, B_1, existe una función continua $f_1 : (X,\tau) \longrightarrow ([-\frac{1}{3},\frac{1}{3}],\tau_u)$ tal que $f_1(A_1) = \frac{1}{3}$ y $f_1(B_1) = -\frac{1}{3}$.
Como f toma valores en $[-1,1]$ y f_1 en $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, se verifica para todo $x \in X$ que $| f(x) - f_1(x) | \leq \frac{2}{3}$.
Por tanto $f - f_1 : (A,\tau_A) \longrightarrow ([-\frac{2}{3},\frac{2}{3}],\tau_u)$ es una función continua, por ser composición de funciones continuas. ($f - f_1$ representa el "error" cometido al aproximar f por f_1 en A).
Llamando $g_1 = f - f_1$, repitiendo el proceso anterior en el intervalo $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$: dividiremos dicho intervalo en tres intervalos iguales de amplitud $\frac{2^2}{3^2}$,
$[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}] = [-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}] \cup [-\frac{2}{9},\frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{2}{3}]$. Sean $A_2 = g_1^{-1}[\frac{2}{9},\frac{2}{3}]$ y $B_2 = g_1^{-1}[-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}]$.
Al ser g_1 continua, $A_1, B_2 \in \mathcal{C}$ disjuntos en (A,τ_A), luego cerrados en (X,τ).
Aplicando el lema de Uryshon (lema 3.2.9), existe una función de Uryshon

$$f_2 : (X,\tau) \longrightarrow ([-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}],\tau_u) \text{ tal que } f_2(A_2) = \tfrac{2}{3} \text{ y } f_2(B_2) = -\tfrac{2}{3}.$$

Y además $\mid g_1(x) - f_2(x) \mid = \mid f(x) - (f_1 + f_2)(x) \mid \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = (\frac{2}{3})^2$.
Así tenemos la función $g_2 = g_1 - f_2$, $\quad g_2 : (A, \tau_A) \longrightarrow ([-\frac{2^2}{3^2}, \frac{2^2}{3^2}], \tau_u)$ continua.
Continuando con el mismo procedimiento, se obtiene una sucesión de funciones continuas, $g_1, g_2, ..., g_k, ...$ en (A, τ_A) tales que:

1. $g_k : (A, \tau_A) \longrightarrow ([-(\frac{2}{3})^k, (\frac{2}{3})^k], \tau_u)$.
2. Existen $A_{k+1} = g_k^{-1}([\frac{2^k}{3^{k+1}}, \frac{2^k}{3^k}]), B_{k+1} = g_k^{-1}([-\frac{2^k}{3^k}, -\frac{2^k}{3^{k+1}}]) \in \mathcal{C}$ disjuntos.
3. Existe una función de Uryshon asociada a los cerrados A_{k+1} y B_{k+1},

$$f_{k+1} : (X, \tau) \longrightarrow ([-\tfrac{2^k}{3^{k+1}}, \tfrac{2^k}{3^{k+1}}], \tau_u) \text{ tal que}$$
$$f_{k+1}(A_{k+1}) = \tfrac{2^k}{3^{k+1}} \text{ y } f_{k+1}(B_k) = -\tfrac{2^k}{3^{k+1}}.$$

4. La función $g_k = f - (f_1 + ... + f_k)$ en A.

Sea ahora $F : (X, \tau) \longrightarrow ([-1, 1], \tau_u)$, dada por $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1. F está bien definida, $|f_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ y es continua por el lema 3.2.10.
2. $|F(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$.
3. Para todo $x \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ satisface que $|f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq \frac{2^n}{3^n}$, por tanto $f = F$ en A.

Luego F es la extensión buscada. $\square$

Teorema 3.2.12. *Todo espacio normal y R_0 es completamente regular.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio normal y R_0. Sea $x \notin A \in \mathcal{C}$.
Por ser el espacio R_0, $\overline{\{x\}} \cap A = \emptyset$. Además, por ser normal, aplicando el lema de Uryshon (3.2.9) existe una función $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ continua tal que $f(\overline{\{x\}}) = 0$ y $f(A) = 1$. Entonces, la misma función del lema de Uryshon verifica que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Por tanto, (X, τ) es completamente regular. $\square$

Teorema 3.2.13. *Todo espacio T_4 es un espacio Tychonoff.*

Demostración. Un espacio T_4 es normal y T_1. Por ser T_1, sabemos por el teorema 2.1.2, que es un espacio T_0 y R_0. Por el teorema 3.2.12, sabemos que el espacio es completamente regular. Al ser un espacio T_1 y completamente regular es un espacio Tychonoff. $\square$

3.3. Ejemplos

○ (X, τ_{ind})
En τ_{ind} el único cerrado es X, al no existir $a \notin X$; (X, τ_{ind}) es completamente regular.
Anteriormente, en los ejemplos 1.4, hemos visto que la topología indiscreta no es T_1, luego no es un espacio Tychonoff, ni T_4.
En esta topología no existen cerrados disjuntos, luego es un espacio normal.

○ (X, τ_{dis})
En esta topología cualquier conjunto es abierto y cerrado. Sean $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \cap B = \emptyset$ entonces existen $A, B \in \tau$ tales que $A \subset A$ y $B \subset B$ con $A \cap B = \emptyset$. Luego la topología discreta es normal.
Por ser (X, τ_{dis}) un espacio normal y T_1 (es decir T_4), por el teorema 3.2.13, es un espacio Tychonoff ($T_{3\frac{1}{2}}$).

○ (X, τ_A)
Sabemos que la topología A-inclusión no es regular, por el teorema 3.1.2, tampoco es completamente regular, consecuentemente no es un espacio Tychonoff.
En esta topología no existen abiertos disjuntos, entonces (X, τ_A) no es normal, consecuentemente tampoco es T_4.

○ (X, τ^A)
Sabemos que la topología A-exclusión no es regular, por el teorema 3.1.2, tampoco es completamente regular, consecuentemente no es un espacio Tychonoff.
Por otra parte, $\mathcal{C}^A = \{F \subseteq X, A \subset F\}$ y al no existir cerrados disjuntos; el espacio es normal.
Por los ejemplos 1.4 no es T_1, por tanto no es T_4.

○ (X, τ_d)
Sean $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \cap B = \emptyset$.
Para todo $a \in A$, existe $\epsilon_a > 0$ tal que $B(a, \epsilon_a) \cap B = \emptyset$ y para todo $b \in B$, existe $\epsilon_b > 0$ tal que $B(b, \epsilon_b) \cap A = \emptyset$. Construimos los siguientes conjuntos: $U = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \dfrac{\epsilon_a}{2})$ y $V = \bigcup\limits_{b \in B} B(b, \dfrac{\epsilon_b}{2})$. $U, V \in \tau_d$ por ser unión de abiertos.
Además es $A \subset U$ y $B \subset V$. Para demostrar que el espacio es normal, nos falta comprobar que $U \cap V = \emptyset$.
Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$, existiría $z \in U \cap V$ y $a_z \in A$, $b_z \in B$ tal que $d(z, a_z) < \frac{\epsilon_{a_z}}{2}$ y $d(z, b_z) < \frac{\epsilon_{b_z}}{2}$. Sea $\epsilon_a = \text{máx}\{\epsilon_{a_z}, \epsilon_{b_z}\}$, sin pérdida de generalidad. Entonces $d(a_z, b_z) \leq \epsilon_{a_z}$, que implica $b_z \in B(a_z, \epsilon_{a_z})$ lo cual es imposible.
(X, τ_d) es un espacio normal y por los ejemplos 1.4 sabemos que τ_d es T_1, lue-

go la topología es T_4. Por el teorema 3.2.13, vemos que (X, τ_d) es Tychonoff.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_u)$
Tomando d como la métrica usual, $\tau_u = \tau_d$. Por tanto, la topología usual es normal, T_4, de Tychonoff y completamente regular.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$
Por los ejemplos 2.4 sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ no es un espacio regular, luego tampoco será completamente regular ni Tychonoff.
Por otra parte, $\mathcal{C}_{Kol} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ y al no existir cerrados disjuntos, el espacio es normal. Además por los ejemplos 1.4 no es T_1, por tanto no es T_4.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Cof})$
Suponiendo que U y V son abiertos disjuntos, se verificará que $U \subseteq \mathbb{R} - V$. Por tanto U será finito, en contradicción con que $U \in \tau_{Cof}$. Como $(\mathbb{R}, \tau_{Cof})$ no tiene conjuntos abiertos disjuntos, no es normal ni consecuentemente T_4.
Como $(\mathbb{R}, \tau_{Cof})$ no es regular, tampoco es completamente regular ni Tychonoff.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{Coc})$
Al no existir en la topología cocontable abiertos disjuntos, entonces $(\mathbb{R}, \tau_{Coc})$ no es normal ni consecuentemente T_4.
Como $(\mathbb{R}, \tau_{Coc})$ no es regular, tampoco es completamente regular ni Tychonoff.

∘ (X, τ_{Sier})
Sea $X = \{a, b\}$. Entonces $\tau_{Sier} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ y $\mathcal{C}_{Sier} = \{\emptyset, \{b\}, X\}$.
Como $b \in X$, no existen cerrados disjuntos en esta topología, luego no es un espacio normal ni consecuentemente T_4.
Como (X, τ_{Sier}) no es regular, tampoco es completamente regular ni Tychonoff.

∘ $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$
Sean $A, B \in \mathcal{C}_{sca}$ y $A \cap B = \emptyset$.
Por ser $A \in \mathcal{C}_{sca}$, $A \cap \mathbb{Q} = \overline{A}^u \cap \mathbb{Q}$, pues $A \in \mathcal{C}_{sca}$ si y sólo si $\mathbb{R} - A \in \tau_{sca}$ si y sólo si $\mathbb{R} - A = C \cup D$, con $c \in \tau_u$ y $D \subset \mathbb{I}$, por tanto $A = (\mathbb{R} - C) \cap (\mathbb{R} - D)$, con $\mathbb{R} - C \in \mathcal{C}_u$ y $\mathbb{R} - D \subset \mathbb{Q}$.
Si $A, B \in \mathcal{C}_{sca}$ disjuntos, luego $A \cap \mathbb{Q}, B \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{C}_u^Q$ y $(A \cap \mathbb{Q}) \cap (B \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$.
Como $(\mathbb{Q}, \tau_u)$(es un espacio metrizable) es normal, existen $U, V \in \tau_u^{\mathbb{R}}$ tal que $A \cap \mathbb{Q} \subset U \cap \mathbb{Q} \subset U$ y $B \cap \mathbb{Q} \subset V \cap \mathbb{Q} \subset V$ con $U \cap V \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
Como Q es denso en $\mathbb{R}$, necesariamente $U \cap V = \emptyset$. Entonces

$$A = (A \cap \mathbb{Q}) \cup (A \cap \mathbb{I}) \subset U \cup (A \cap \mathbb{I}) \in \tau_{sca}$$
$$B = (B \cap \mathbb{Q}) \cup (B \cap \mathbb{I}) \subset V \cup (B \cap \mathbb{I}) \in \tau_{sca}$$

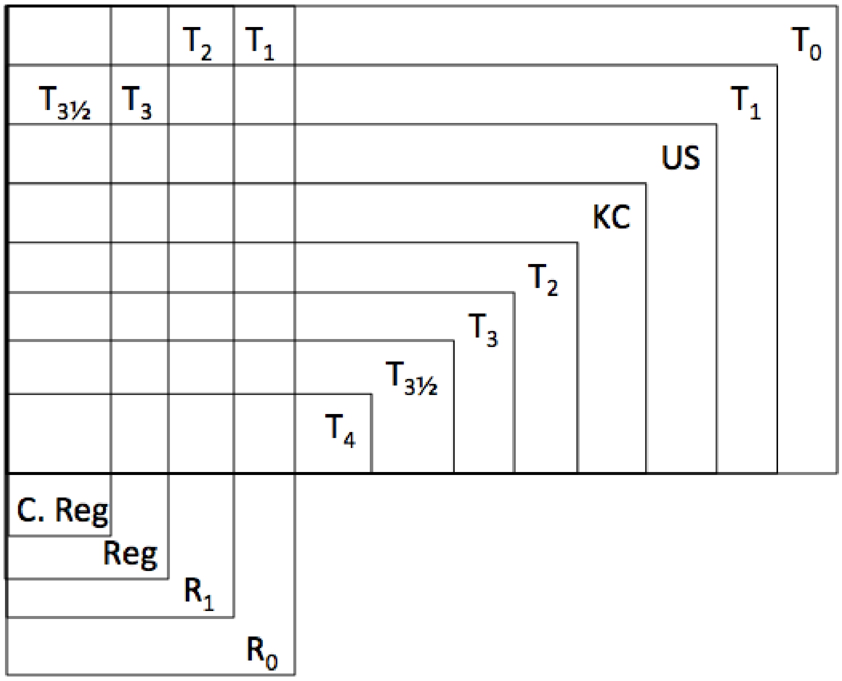
No podemos afirmar que sus abiertos son disjuntos. Pero $B \subset (V-A) \cup (B \cap \mathbb{I})$ y $A \subset (U-B) \cup (A \cap \mathbb{I})$ que si son disjuntos. Por tanto $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es normal. Además hemos visto en los ejemplos 1.4 que$(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es T_1, entonces es T_4. Por el teorema 3.2.13, es un espacio Tychonoff y por definición completamente regular.

$\circ$ $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$
Sean $A, B \in \mathcal{C}_{Sor}$ con $A \cap B = \emptyset$.
Para todo $a \in A$ es $a \in \mathbb{R} - B$. Entonces existe $x_a > a$ tal que $[a, x_a) \cap B = \emptyset$.
Para $b \in B$ igualmente existe $x_b > b$ tal que $[b, x_b) \cap A = \emptyset$.
Tomando $U = \bigcup\limits_{a \in A} [a, x_a)$ y $V = \bigcup\limits_{b \in B} [b, x_b)$ con $U, V \in \tau_{Sor}$ y claramente $A \subset U$ y $B \subset V$. Demostraremos que $U \cap V = \emptyset$.
Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$. Existen $a \in A, b \in B$ tales que $[a, x_a) \cap [b, x_b) \neq \emptyset$, esto sólo sería posible si $a \in [b, x_b)$ ó $b \in [a, x_a)$; lo cual contradice la condición inicial. Luego $U \cap V = \emptyset$, $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ es un espacio normal.
Por los ejemplos 1.4, sabemos que es un espacio T_1. Al ser T_1 y normal, es un espacio T_4. Por el teorema 3.2.13, es un espacio Tychonoff y consecuentemente completamente regular.
Resumimos en la siguiente tabla, los espacios estudiados en este capítulo.

Espacio topológico	C.R	Tychonoff	Normal	T_4
Topología indiscreta	✓	✗	✓	✗
Topología discreta	✓	✓	✓	✓
Topología usual	✓	✓	✓	✓
Topología Kolmogorov	✗	✗	✓	✗
Topología esparcida	✓	✓	✓	✓
Topología cofinita	✗	✗	✗	✗
Topología Sierpinski	✗	✗	✗	✗
Topología cocontable	✗	✗	✗	✗
Topología Sorgenfrey	✓	✓	✓	✓
Topología métrica	✓	✓	✓	✓
Topología A-exclusión	✗	✗	✓	✗
Topología A-inclusión	✗	✗	✗	✗

✓: significa que (X, τ) satisface la propiedad.
x: significa que (X, τ) no satisface la propiedad.

Finalmente obtenemos este diagrama que recoge las relaciones entre todos los axiomas estudiados en este trabajo.



Apéndice A

A.1. Conceptos generales

Definición A.1.1. Una *topología* sobre un conjunto X, es una familia $\tau \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, verificando:
(i) $\emptyset, X \in \tau$,
(ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,
(iii) si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) se llama *espacio topológico.*

Definición A.1.2. En (X, τ), una familia $\beta \subset \tau$ es una *base* de τ, si para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$.

Definición A.1.3. Dadas τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, se dice que τ_1 es *menos fina* que τ_2 (ó τ_2 *más fina* que τ_1), si $\tau_1 \subset \tau_2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ ó $\tau_2 \subset \tau_1$, se dice que las topologías son *comparables.*

Definición A.1.4. Un *entorno* de un punto x en (X, τ), es un subconjunto $N \subset X$ tal que existe un abierto $U \in \tau$, verificando $x \in U \subset N$. La familia $\mathcal{N}_X$ de todos los entornos de x se llama *sistema de entornos* de x.

Definición A.1.5. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. x es un *punto interior* de A si A es un entorno de x. Es decir, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$.

Definición A.1.6. Sea (X, τ) y $A \subset X$. La *clausura* de A es

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ cerrado y } A \subset F\}$$

Si $x \in \overline{A}$, x se llama *punto clausura o adherente* de A.

Definición A.1.7. Sea $\{f_i | i \in I\}$ una coleción de funciones en X, donde $f_i : X \longrightarrow X_i$. Se dice que la familia $\{f_i | i \in I\}$ *separa puntos* en X si y sólo si para todo $x \neq y$ en X, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Definición A.1.8. Sean $f_i : X \longrightarrow X_i$ funciones de un conjunto X a un espacio topológico (X_i, τ_i), para cada $i \in I$. La topología menos fina sobre X τ_X tal que $f_i : (X, \tau_X) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ es continua para cada i se llama *topología inicial* asociada a $\{f_i\}_{i \in I}$.
Si la topología inicial toma cualquier propiedad de X_i, entonces esa propiedad se denomina *propiedad inicial*.

Definición A.1.9. Sea $\{(X_i, \tau_i)\}$ una familia de espacios topológicos. La *topología producto o de Tychonov*, τ_{Tch}, sobre $\prod_{i \in I} X_i$ es la topología inicial asociada a la familia de proyecciones $\{p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow (X_i, \tau_i)\}$, de otro modo, los abiertos básicos de τ_{Tch} son $p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$, donde $U_{i_n} \in \tau_{i_j}$, para $1 \leq j \leq n$.

Proposición A.1.1. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo.*
Entonces es equivalente que

$$f \text{ homeomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva, continua y abierta} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva, cerrada y } f^{-1} \text{ continua.}$$

Definición A.1.10. Un conjunto $\mathcal{D}$ es *denso* en (X, τ) si y sólo si $\overline{\mathcal{D}} = X$.

Definición A.1.11. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *hereditaria*, si cuando (X, τ) verifica $\mathcal{P}$, la cumple cualquier subconjunto de X, $\mathcal{P}$ se llama *débilmente hereditaria* si la hereda sólo los $A \in \mathcal{C}$.

Definición A.1.12. Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *productiva*, cuando si (X_i, τ_i) cumplen $\mathcal{P}$ para cada $i \in I$, entonces su producto también la verifica.

Definición A.1.13. Una propiedad relativa a los espacios topológicos se llama *topológica*, si se conserva bajo homeomorfismos.

Proposición A.1.2. *En (X, τ), si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Proposición A.1.3. *Sea un espacio topológico (X, τ). Dada una sucesión $\{x_n\} \longrightarrow x$ entonces, se verifica que el conjunto $A = \{\{x\}, \{x_n\}, n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto compacto.*

Bibliografía

[1] M.G Murdeshwar, *General topology*, Wiley Eastern Ltd, 1986.

[2] A. Mysior, A regular space which is not completely regular, *American Mathematical Society* vol. 81, no. 4 (1981) 652-653.

[3] L. Steen and L. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Pub. Inc, 1995.

[4] A. Wilansky, Between T_1 and T_2, *The American Math. Monthly* vol.74, no.3 (1967) 261-266.

[5] S. Willard, General topology, Addison-Wesley Pub. Co, 1970.