Zer da dimentsioa delako hori?

Javier Duoandikoetxea

Matematika saila
UPV/EHU
644 p.k., 48080 Bilbo
javier.duoandikoetxea@ehu.es

Laburpena: Dimentsioa kontzeptu intuitibo modura agertu zen matematikan, espazio fisikoak erakusten duen hiruko mugarekin agertu ere. XIX. mendean dimentsio handiagoko objektu matematikoak agertu ziren eta horiekin dimentsioa definitzeko beharra areagotu egin zen. Irizpide batzuen arabera definituriko eskala batean objektu bati dagokion zenbakia da dimentsioa eta irizpide desberdinek dimentsioaren definizio desberdinak ematen dituzte. Horrela, dimentsio aljebraikoa, topologikoa eta fraktala aipatuko ditugu artikulu honetan.

Abstract: The concept of dimension appears in mathematics in an intuitive way, with the limit of three dimensions imposed by the physical space. Through the XIXth century mathematical objects of higher dimension appeared and the need for a definition of dimension increased. The dimension of an object is a number assigned according to a scale defined depending on some specific conditions. Different conditions lead to different definitions of dimension. In this paper we shall be concerned with algebraic, topologic and fractal dimensions.

1. SARRERA

Hari baten tamaina emateko luzera neurtuko dugu; paper-orri baten tamainarako luzera eta zabalera emango ditugu; horiek biak eta garaiera hartuko ditugu gela baterako. *Dimentsio* hitza erabiliz, haria dimentsio batekoa dela esango genuke, bikoa paper-orria eta hirukoa gela.

Greziarrek geometriari era formala eman ziotenean ere horrelako eskala bat zuten. Geometria klasikoak, mundu errealak iradokia zelarik, bat, bi eta hiru dimentsioko objektuak zituen aztergai. Ez, ordea, dimentsio handiagokoak, ez baitzegoen horretarako arrazoirik. Gure intuiziorako dimentsioak hiruko muga hori duenez gero, oraindik ere jendea aztoratu egiten da askotan bost edo hamaika dimentsioko zerbait aipatuz gero.

Zientzian mende asko iraun zuen ikuspegi horrek, hots, geometriako objektuek gehienez ere hiru dimentsiokoak izan behar dutela onartzen duen ikuspegiak. XIX. mendean, ordea, matematikako atal guztiak astindu eta modernizazio bidean jarri zituzten. Geometria euklidearra ez zen aurrerantzean geometria bakarra izango, *ez-euklidearrak* sortu zirelako. Hauek paraleloen postulatuaren beharra eztabaidatu zuten, ez besterik. Aldi beretsuan bektore-kalkulu aljebraikoak hiru dimentsio baino gehiago onartu zituen eta Riemannek proposatu zuen geometria berrian ere objektu matematikoek ez zuten zertan hiru dimentsiora mugatu. XIX. mendeko bigarren erdian horiek guztiak ohikoak ziren matematikan.

XIX. mendeko hasieratik azaldu ziren dimentsioa definitzeko saioak. Behin objektu matematikoen artean hiru dimentsioko atalasea gaindituta, beharrezkoagoa izan zen definizioa. Arazoak ere agertu ziren: zein definizio hartu, objektu baten dimentsioa bata edo bestea izan daiteke. Komeni da, beraz, gauza bat zehaztea: irizpide batzuen arabera objektu bati eskala jakin batean dagokion zenbakia izango da dimentsioa. Eta definizioa aldatuz gero beste ezaugarri bat neurtzen ari garenez, *dimentsio* terminoari adjektiboa eranstea komeni da.

Matematikarien gogoak eraman bazuen dimentsioa hirutik gora, izan du horrek islarik mundu errealaz ari diren zientzietan? Bai, noski. Askorentzat ezagunena lau dimentsioko espazio-denbora izango da. Horrek ziur aski ez du kontrako jarrerarik sortuko, gure pertzepzioak hartzen dituen hiru dimentsioak behar baitira puntua espazioan kokatzeko eta laugarrena zein unetan gertatzen den esateko.

Ez du baina hain erraz onartuko jendeak espazioak bost, hamar, hamaika edo hogeita zazpi dimentsio izatea. Ez dira neuk asmaturiko zenbakiak, fisikariek unibertsoa deskribatzeko proposatu dituztenak baizik. Dimentsio horietatik lau dira (hiru espaziorako, bat denborarako) guk atzematen ditugunak eta besteak hain dira txikiak non izugarrizko energia handiak, erabat iristezinak, beharko liratekeen egiaztatzeko. Errealak diren edo ez eztabaidatzea baino hobe dugu pentsatzea teoria fisiko baterako eredu matematikoak eskatzen duen parametro kopuruaz ari direla fisikariak eta ez guk sumatu behar dugun zerbaitez.

Ez da nire asmoa teoria fisikoen azalpenetan hastea (nahita ere, ezin izango nuke egin, gainera) eta bai dimentsioaren ikuspegi matematikoa ematea. Hor ere bada ustekaberako lekua, ez baita hain aspaldi entzun genuela multzo baten dimentsioa 1,26 dela, adibidez. Zer esan nahi du horrek? Parametro bat eta beste baten «zati» bat hartu behar direla multzoa deskribatzeko? Laster izango dira ehun urte matematikariek dimentsio ezosoak erabiltzen dituztela, baina ez da hain aspaldi «kalean» entzuten hasi zirenetik, izen berezi bati lotuta: *fraktalak*. Lehenengo eta behin esan dezagun ez dela lehengo dimentsio haren kontzeptu bera. Izan ere, beste zerbait neurtzen du eta beste eskala batean ari da, zenbaki erreal positibo guztiak onartzen dituen eskala bat. Hori argitzea ere bada artikulu honen helburua.

2. **EUKLIDES**

Euklidesen *Elementuak* liburuaren hasieran hau irakur dezakegu ([E, 123. or.]):

1. Puntu bat zatirik ez duena da.
2. Lerro bat zabalerarik gabeko luzera da.
3. Lerro baten muturrak puntuak dira.
5. Gainazal bat luzera eta zabalera bakarrik dituena da.
6. Gainazal baten muturrak lerroak dira.

Eta aurrerago, hamaikagarren liburuaren hasieran ([E, 511. or.]):

1. Solido bat luzera, zabalera eta sakonera dituena da.
2. Eta solido baten muturra gainazal bat da.

Euklidesek definizio horietan gure intuizioak dioen gauza bera dio. Eta dimentsio hitza agertzen ez bada ere, bistan da dimentsioaren araberako sailkapena: puntua (0), lerroa (1), planoa (2) eta solidoa (3). Hala ere, zaila da horiek definizio zehatz modura onartzea, Eusklidesek ez baitu aurretik esaten zer diren luzera, zabalera eta sakonera. XIX. mendearen amaieran Hilbertek Euklidesen sistema «garbitu» eta osatu egin zuen, logika formalaren eskaerak bete zitzan. Hilberten sisteman puntua, lerroa eta planoa «hasierako nozioak» dira eta ez dira definitzen. Hilbertek modu grafikoan adierazi zuen sistema logikoaren koherentzia intuiziotik kanpo gelditzen dela: *puntu, lerro* eta *plano* terminoen ordez, *mahai, aulki* eta *garagardo-pitxer* esan daitezke, eta berdin balioko luke geometriak.

Euklides baino lehen agertzen dira dimentsioaren nozio horiek Grezian eta ez bakarrik matematikarien artean, filosofoen aipamenak ere baditugu, Aristotelesenak, adibidez (ikus [T]).

Geroago, Newtonek higidura bitartez deskribatu zuen dimentsio batetik hurrengora igarotze hori: puntu baten fluxu jarraituak sortzen du lerroa, lerroaren higidurak gainazala, gainazalarenak solidoa. XIX. mendean Bolzanok higidura bidezko definizioa kritikatu zuen, geometriari ez dagokiola argudiatuz. Eta izan ohi zuen zorroztasuna erakutsiz, *lerro, gainazal* eta *solido* definizio egokirik gabeko terminotzat jo zituen, dimentsioaren definizioaren beharra agerian utziz (ikus [T]).

3. GEOMETRIA CARTESIARRA

XVII. mendeko ekarpenek aise gainditu zuten matematika klasikoa. Ekarpen horietako bat geometria cartesiarra (analitikoa) izan zen, problema geometrikoei tratamendu aljebraikoa ematea ahalbidetu zuena. Izenak iradokitzen duen moduan René Descartesen ekarpena izan zen. Fermatek ere antzeko asmakizuna egin zuen bere aldetik, baina bera hil ostean argitaratu zuten haren lana.

Ikuspegi berriaren oinarrian zuzen baten eta zenbaki errealen arteko identifikazioa dago, behin jatorrizko puntu bat eta luzerarako unitate bat aukeratuta. Hartu planoan zuzen perpendikular bi *(ardatzak),* ipini jatorria bien ebaki-puntuan eta ezarri zuzen bakoitzean unitate bat: planoko puntuen eta zenbaki errealen bikoteen arteko identifikazioa egiten da horrela. Espazioan, era berean, hiru ardatz perpendikular behar dira eta espazioko puntuak zenbaki errealen hirukoteekin identifikatzen dira. Gaur erabiltzen ditugun terminoetan planoa $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ biderkadura cartesiarra da ($\mathbf{R}^2$ idazten da) eta espazioa, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^3$).

Dimentsioaren ikuspegitik, bistan da koordenatu kopuruak zerikusi handia duela gure ohiturak dioenarekin: zenbaki batek ematen ditu zuzen bateko puntuak, bi behar dira planorako, hiru espaziorako. Pentsa liteke Descartesen identifikazioak ate joka duela dimentsio handiagoko objektuak asmatzea: dimentsioa handitzea koordenatu gehiago jartzea baino ez da. Baina Greziako geometrialarien moduan XVII. mendekoek ere mundu fisikoaren ikuskera zuten geometriaren atzean eta urrats hori eman gabe gelditu ziren. Berrehun urte igaro ziren Grassmannek argi esan arte geometria aljebraikoki adieraziz gero, «hiru» zenbakiak ez duela garrantzi berezirik eta dimentsioak ez duela berez mugarik.

4. DIMENTSIO ALJEBRAIKOA: BEKTORE-ESPAZIOAK

Grassmannek 1844an argitaratu zuen liburua da aljebra linealaren aitzindari eta gaurko eran adierazita ez dagoen arren, *bektore-espazio* kontzeptua agertzen da bertan (dimentsio finituko espazioa). Lan erabat berritzailea izan zen eta garaia baino lehen heldu zen, nolabait esateko, ez baitzuen Grassmannek bere garaiko matematikarien artean onespenik jaso (ikus [FS]). Bektore-espazioen definizio abstraktua XX. mendekoa da.

Aljebra lineala oinarrizko ikasgaia da matematikan. Askorentzat ezagunak izango dira bektore-espazioari lotuta datozen *oinarri* eta *dimentsio* kontzeptuak. Planoa eta espazioa bektore-espazioak dira. Planorako, adibidez, bektore biko oinarria dugu eta beste edozein elementu, bi horien konbinazio lineal modura idazten da. Esate baterako, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ eta $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ oinarritzat hartuz, $(a, b) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ dugu. Bektore-espazioaren dimentsioa oinarriko bektore kopurua da. Behin oinarria finkatuta, zenbaki horrek adierazten du zenbat parametro behar diren espazioko edozein elementu emateko. Dimentsioaren definizio horrek propietate hau eskatzen du: *bektore-espazio baten oinarri guztiek elementu kopuru berbera dute,* eta hala dela frogatzen da. Horren aurretik, ordea, hau beharko litzateke: *bektore-espazio batek beti du oinarri bat*. Eta hala betetzen da, noski.

Hortaz, multzo batek bektore-espazio egitura aljebraikoa badu, horregatik bakarrik, badu dimentsio bat esleituta. Galdera bat dator berehala: *oinarriko elementuen kopurua finitua da beti?* Erantzuna ezezkoa da eta hor agertzen zaigu *dimentsio infinitua,* modu erabat naturalean.

Argi gera bedi dimentsioa multzoaren araberakoa ez ezik egituraren araberakoa ere badela. Esan nahi baita, multzo berberean egitura bik dimentsio desberdina eman dezakete. Xehetasunetan hasi barik, zenbaki konplexuen multzoa da adibide erraz bat: 1 da dimentsioa bektore-espazio konplexu modura hartuta (parametroak konplexuak izanda) eta 2 bektore-espazio erreal modura hartuta (parametroak errealak izanda).

5. GAUSS ETA RIEMANN

Espazioak, $\mathbf{R}^3$-k, hiru dimentsio ditu. Baina espazio horretan plano bat hartu, zirkunferentzia bat hartu, kubo bat hartu, ez dira berdinak. Dimentsio aljebraikoak bektore-espazio osoa hartzen du kontuan, ez azpimultzo bat. Eta objektu bakoitzari dimentsioa esleitu nahi badiogu, beste zerbait beharko dugu.

Kurbak eta gainazalak espazioko parte modura ikus ditzakegu. Geometria analitikoak kalkulu infinitesimala aurkitu zuenean, *geometria diferentziala* sortu zen. Jadanik XVIII. mendean aurki ditzakegu kalkuluaren metodoak kurba eta gainazalen estudioan. Aurreko lan horiek gorabehera, geometria diferentzialaren sorrera hurrengo mendean kokatzen da, Gaussen lanetan (1828ko *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* bereziki). Gauss konturatu zen gainazala deskribatzeko hobe zela lokalki koordenatu birekin eman daitekeen objektu bezala ulertzea, ez espazioko azpimultzo edo solido baten muga modura. Adibidez, Lurrean egiten dugun bezala, longitudea eta latitudea nahikoa dira esferako puntuak kokatzeko, nahiz hiru dimentsioko espazio baten barruan egon. Puntu hurbilen arteko distantzia definitu behar da eta behin hori hartuta, gainazalaren propietateak ondorioztatzen dira. Kurbadura, esate baterako, gainazaletik bertatik hauteman daiteke, kanpotik ikusi gabe. Gaussek dimentsio handiagoko objektuak ere hartu zituen kontuan, baina ez zuen horretaz ezer argitara eman.

Riemannen habilitazioaren pasartea oso ezaguna da. Ahozko azterketarako hiru gai proposatu behar ziren eta epaimahaikoek haietatik bat aukeratzen zuten. 1853an aurkeztu zuen Riemannek bere zerrenda eta hirugarren izenburua *Geometriaren oinarrian dauden hipotesien gainean* zen. Gai hori eskatu zioten epaimahaikoek, Gaussek hala erabakita, diotenez. Ez omen zen ohiko jarrera hirugarrena hautatzea eta jakin-minak bultzatu zuen Gauss hura eskatzera, berak landutako gai kutun baten ingurukoa izanik. Iritzi hori oso zabalduta dagoen arren, baditu aurkakoak ere (ikus [L]). 1854ko udan aurkeztu zuen lana, matematikaren historiako mugarri izan dena. Aipaturiko erreferentzian ([L]) ikus daiteke Riemannen lanaren aurkezpena, bai eta lanak fisikan izan duen eragina.

Riemannen proposamena Gaussenaren antzekoa da alde batetik, baina hasteko, ez ditu gainazalak helburu, eta askoz objektu orokorragoak proposatzen ditu. *Barietateak* deitzen dira objektu horiek eta lokalki *n* koordenaturen bidez adierazten dira *(n dimentsioko barietatea).* Riemannentzat dimentsio horrek edozein balio har dezake, ez du zertan hiruko muga izan. Barietatearen propietateak aztertzeko puntu biren arteko distantzia kalkulatzeko funtzioa behar du: *Riemannen barietatea* da bikote hori, barietatea eta metrika. Distantziaren arabera geometria desberdinak agertzen dira. Geometriari horrek guztiak ekarri zion aldaketa izugarria izan zen, baina dimentsioaren ikuspegitik, guk kontu bi azpimarratuko ditugu: dimentsiorako mugarik ez egotea batetik eta bestetik dimentsioa barietateari egokitzea. Hau da, barietatea beste espazio batean murgilduta egonda ere, horrek ez du dimentsioarekin zerikusirik.

Riemannen objektuak abstraktuak dira, ez dute intuizio fisikoarekin erlaziorik. Baina espazio fisikora ere eraman daiteke eztabaida. Guk geure ingurunea baizik ikusten ez dugularik, inguruneak hiru dimentsio erakusteak ez du esan nahi hiru dimentsioko espazio euklidear batean bizi garenik, hiru dimentsioko barietate batean baizik. Dimentsio txikiagoko adibide batez adierazteko, esfera handi baten azalean bizi den inurri batek bere ingurune txikia ikusita ezin dezake jakin dimentsio biko plano batean edo esferan bizi ote den. Riemannen formulaziotik berrogeita hamar urtera oso modu arrakastatsuan heldu zen haren geometria fisikara: Einsteinek erlatibitatearen teoria orokorra formulatzeko behar izan zuen. Horrela, matematikatik kanpo ere geometriak ez zuen ezinbestean Euklidesen bidetik zertan joan.

6. **CANTOR**

Dimentsioa handitzean multzoak handiago egiten doazela esan dezakegu. Badago loturaren bat dimentsioaren eta multzoaren «tamainaren» artean? Multzo finituak elementu kopuruaren arabera konpara daitezke eta horretarako elementuak zenbatzea besterik ez dago. Baina multzo infinituak konparatu behar izanez gero, zer da zenbatzea? Galileok aztertu zuen kontu hori eta paradoxa iruditu zitzaion zerbaitera heldu zen. Ondorioz, erabaki zuen «multzo infinituen artean ezin daiteke esan bata denik bestea baino handiagoa edo txikiagoa, edo bestearen berdina». Hori elkarrizketa modura idatzita dagoen *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* liburuan erakutsi zuen (1638) era honetan:

> **Salviati:** Badakizue [zenbaki berdinen] biderkadurak karratuak deitzen diren bezala, biderkadurak sortzen dituztenak, hots, biderkatzen diren zenbakiak, aldeak edo erroak deitzen direla. Zenbaki berdin bi biderkatzerakoan lortzen ez diren zenbakiak, ez dira, jakina, karratuak. Beraz, esaten badut zenbaki guztiak, karratuak eta ezkarratuak, karratuak bakarrik baino gehiago direla, egiazko proposizio bat adieraziko dut, ezta?
>
> **Simplicio:** Bistan dena.
>
> **Salviati:** Gainera, zenbat karratu dauden galdetuko banu, erantzun daiteke egiazki erroak beste direla, kontuan hartuz karratu bakoitzak bere erroa duela eta erro bakoitzak ere bere karratua duela; ez dago, bestalde, erro bat baino gehiago duen karraturik ez eta karratu bat baino gehiago duen errorik.
>
> **Simplicio:** Horrelaxe da.
>
> **Salviati:** Baina zenbat erro dauden galdetzen badut, ezin da ukatu zenbakiak beste direla, ez baitago karraturen baten erroa ez den zenbakirik.

Gauzak honela, esan beharko da zenbaki beste karratu daudela, erroak beste baitira eta zenbaki guztiak erroak baitira. Hasieran, aldiz, esan dugu zenbakiak orotara karratuak baino askoz ere gehiago direla, gehienak ez baitira karratuak. Areago, karratuen kopurua gutxituz doa zenbaki handiagoetara hurbildu ahala. Ehuneraino hamar karratu daude, hau da, hamarren bat bakarrik dira karratuak; hamar miletan ehunen bat bakarrik dira karratuak, milioi batean milaren batera jaitsiko gara. Dena dela, zenbaki infinitu batean, bururatzerik bagenu, esan beharko litzateke zenbakiak orotara beste karratu daudela.

Sagredo: Zer ondorioztatu behar dugu horretatik?

Salviati: Nik hau besterik ez dut ikusten: zenbakiak orotara infinitu dira, infinitu karratuak, infinitu hauen erroak; karratuen kopurua ez da zenbakiena baino txikiagoa, ez eta hau hura baino handiagoa; eta, azkenik, «berdin», «handiago», «txikiago» atributuak kantitate finituei egozten zaizkie soilik eta ez kantitate infinituei.

Hiru mende beranduago analisi matematikoko problema batzuek bideratu zuten Cantor multzo infinituen azterketara. Hasteko, irizpide hau hautatu zuen multzo infinituak elkarrekin konparatzeko: multzo biren arteko bijekzio bat badago «tamaina» berekoak dira, edo, *potentzia* berekoak, Cantorren terminoa erabiliz. Galileoren adibideak n zenbaki arruntari n^2 lotzen dio eta bijekzioa egiten du zenbaki arrunten eta karratuen artean; ondorioz, biak tamaina berekoak dira. A multzoa B baino handiagoa izateko, ez da egon behar bijekziorik bien artean, baina bai B eta A-ren azpimultzo baten artean.

Cantorrek ez zuen ondorioztatu, Galileok bezala, konparazioa ezinezkoa zela eta multzo infinituak desberdintzea lortu zuen. Hau izan zen haren lehen arrakasta handia: zenbaki arruntak zenbaki errealak baino *gutxiago* dira. Esan nahi baita, ezin da egin bijekzio bat multzo bi horien artean.

Balio ote lezake infinituen konparazioak dimentsio desberdineko multzoak sailkatzeko? Hala uste zuten Cantorren garaian, ezinezkoa zela dimentsio desberdineko multzoen arteko bijekzioa, zuzen baten eta plano baten puntuen arteko bijekzioa, esate baterako. Baina oker zeuden, egin daiteke bijekzioa! Hain harrituta gelditu omen zen Cantor emaitza lortu zuenean (1877) non Dedekind adiskideari eskutitz batean kontatu zionean esaldi hau idatzi zion frantsesez: *Je le vois, mais je ne le crois pas* («ikusten dut, baina ez dut sinesten»).

Beraz, multzo infinituen potentziak ez zuen zerikusirik dimentsioarekin. Baina ez zen hori bakarrik hautsi Cantorren emaitzarekin: $\mathbf{R}$ eta $\mathbf{R}^2$-ren arteko bijekzio bat badago (eta $\mathbf{R}^2$-ren ordez edozein $\mathbf{R}^n$ jar daiteke), parametro bat nahikoa da planoko puntuak deskribatzeko. Kontuz, honek ez du bektore-espazio modura dagozkien dimentsioekin zerikusirik! Dimentsioa zer zen argitu gabe zegoela erakusten zuen horrek, Riemannen barietate baten dimentsioa, adibidez, zalantzan jar zezakeen. Cantor eta Dedekinden arteko eskutitz-trukaketa egon zen gai horien inguruan eta Dedekindek uste zuen jarraitutasuna kontuan hartu beharko zela. Aieru hau egin zuen: $\mathbf{R}^n$ eta $\mathbf{R}^m$-ren artean bijekzio bat badago, n eta m desberdinak izanik, bijekzio hori ez da jarraitua. Ez zuen berak frogatu, baina arrazoi zuen; lehen froga Brouwerrek eman zuen 1911n.

7. PEANOREN KURBA

Jordanek emandako definizioaren arabera tarte baten irudi jarraituari *kurba* deritzo. Jarraitutasuna eskatu ezean, espazioko edozein multzo izan daiteke tartearen irudia, Cantorren emaitzaren arabera. Planoko kurba bat irudikatzen dugunean, dimentsio bateko objektua ikusten dugu, edo hori dio behintzat gure intuizioak.

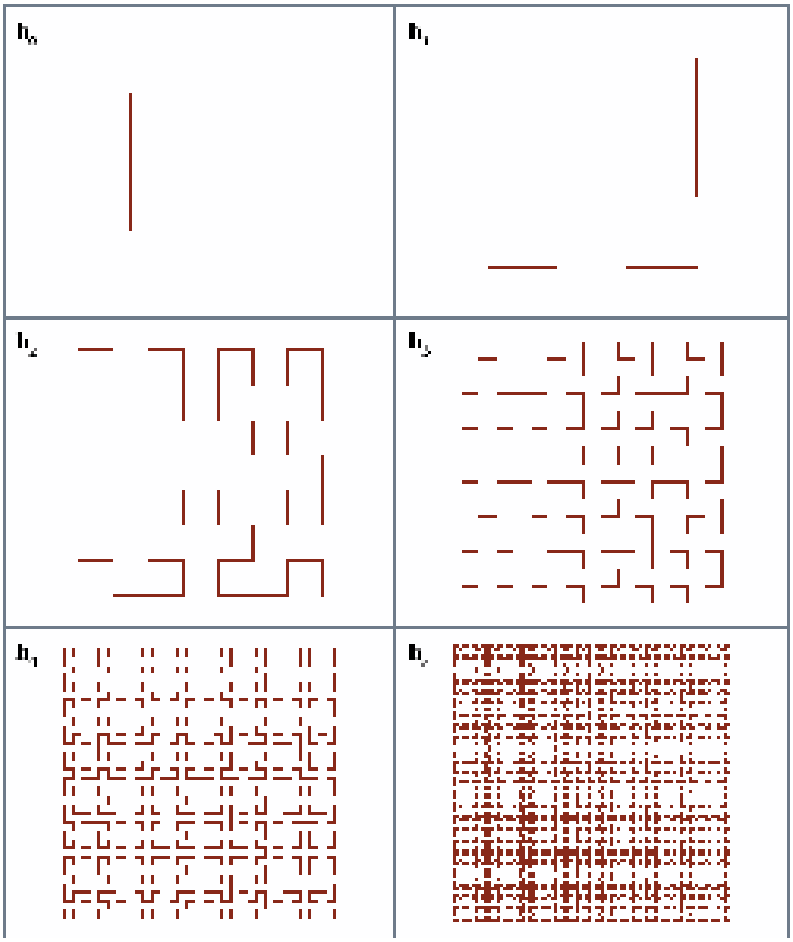
Sorpresa handia izan zen Giuseppe Peano matematikari italiarraren emaitza (1890): *badago karratu bateko puntu guztietatik igarotzen den kurba bat*. Gure intuizioaren aurka doa hori, kurbaren irudiak karratu osoa betetzen baitu. Bistan da kasu horretan irudia ez dela dimentsio bateko objektua. Honek ere, Cantorren emaitzaren moduan, agerian uzten du dimentsioaren kontzeptua ez zegoela argi. Esan dezagun, hala ere, Peanoren kurba ez dela bijekzioa.

Peanoren kurba prozesu iteratibo baten limite modura eraikitzen da. Adibide bat baino gehiago dago: 1. irudian erakusten duguna Hilberti zor zaio (ikus [USM]). Konbergentzia uniformeak erakusten du limitea funtzio jarraitua dela. Horregatik esan dezakegu limitea kurba bat dela.

8. DIMENTSIO TOPOLOGIKOA

XIX. mendeko amaieran eta XX. mendeko hasieran matematikari askoren ardura izan zen dimentsioaren definizio egokia bilatzea. Xehetasun asko agertzen dira [CJ] eta [T] artikuluetan. Jarraitutasuna kontuan hartzeko oinarri topologikoa eman behar zitzaion definizioari eta horrek eskatzen zuen aldaezina izatea *homeomorfismoen* bidez. Homeomorfismoa bijekzio «bijarraitua» da, hau da, aplikazioa bera eta alderantzizkoa, biak dira jarraituak.

Multzo bi homeomorfoak dira bien arteko homeomorfismo bat badago. Hortaz, dimentsioari eskatu nahi zioten multzo homeomorfoak dimentsio berekoak izatea. Definizioek geroz eta bide orokorragoak hartu zituzten eta teoria abstraktu bat eratu zuten, topologia orokorraren atal bat izango zena.



1. irudia. Peanoren erako kurba baten eraiketa (Hilberten bertsioa).

Ez dago bide bakarra dimentsioaren definiziorako. Poincaré bide induktibo bat proposatu zuen. Multzo bati zati bi egiteko zer dimentsiotako azpimultzoa kendu behar zaion aztertzea izan zen haren asmoa, n dimentsioko bati $n - 1$ dimentsioko zerbait kendu behar zaiolakoan. Ez zen ondo egokitzen multzo guztietarako eta multzoaren mugaren dimentsioa begiratzea izan zen beste aukera bat, n dimentsioko multzoek $n - 1$ dimentsioko muga dutela ikusita, gutxienez adibide arruntetan. Bide honetatik eman zuten Pavel Urysohn errusiarrak eta Karl Menger austriarrak nork bere aldetik *dimentsio induktiboaren* definizioa, testuinguru orokor baterako.

Beste definizio bat Lebesgueri zor zaio eta *estalkien bidezko dimentsioa* deitzen da. Espazio topologiko orokorretan aurrekoaren desberdina izan daiteke, baina $\mathbf{R}^n$-ko azpimultzoetarako balio bera lortzen da. Kasu honetarako Lebesgueren dimentsioa zelan definitzen den esango dugu (ikus [USM] liburuan *harlauzen teorema)*.

Multzo bat irekia da multzoko puntu bakoitzeko ingurune bat multzoaren parte bada. Izan bedi A multzo bornatua $\mathbf{R}^n$-n. Baldin $\epsilon > 0$ bakoitzerako aurkitzen badugu A-ren estalki finitu bat ϵ baino diametro txikiagoko multzo irekien bidez eta A-ko puntu bakoitza gehienez estalkiko $d+1$ puntutan badago, orduan A-ren dimentsioa d edo txikiagoa da. Propietatea betetzen duen d txikiena da zehazki multzoaren dimentsioa. Espazio metrikoen teoria ezagutzen duen irakurlea berehala konturatuko da definizio horrek espazio metriko baten azpimultzo trinkoetarako balio duela, aldaketarik gabe. Hori bai, kasu orokorrean gerta daiteke ez egotea propietate hori duen d-rik eta orduan espazioaren dimentsioa infinitua dela esaten da. Espazio topologikoetara ere heda daiteke, baina hor aldaketak behar dira, diametroa ez baita definitzen.

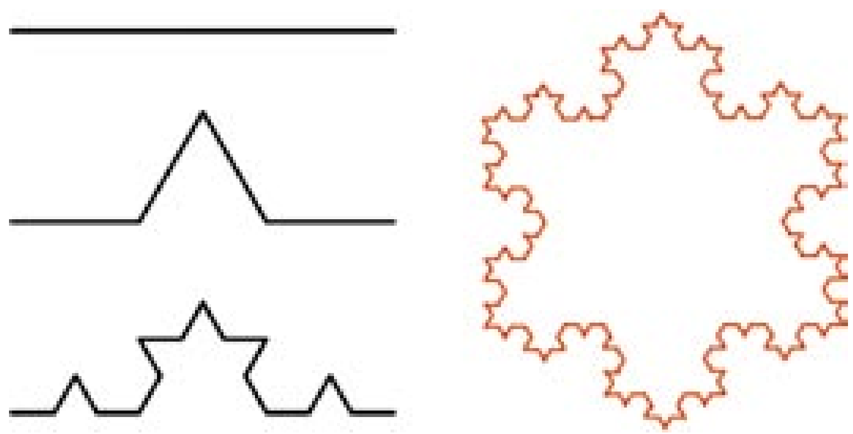
9. **DIMENTSIO FRAKTALA**

Benoît Mandelbrot matematikari frantses-amerikarrak 1975ean argitaratu zuen *Les objets fractals: forme, hasard, et dimension* liburua (1989ko edizioa euskaratuta dago, [M]). Zenbait urte lehenago *Science* aldizkarian argitaratutako *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* artikulua abiapuntu gisa erabiliz dimentsio ezosoko objektuek mundu errealaren azterketarako balio dutela defendatzen du. Arrakasta izan dute fraktalek: biologian, medikuntzan, geofisikan eta beste hainbat arlotan agertzen diren egitura irregularrak deskribatzeko modu bat eman dute. Sistema dinamikoen teorian agertzen diren *erakarle arraroak* fraktalak dira. Baina arrakasta ez da beti zientzia arrazoietan oinarritu, fraktalen eraiketan koloreak sartuz lortu diren irudien alderdi «artistikoak» estali egiten baitu haien atzean dagoen eduki matematikoa.

Aipa dezagun lehenengo kostaldearen adibidea. Kostaldearen luzera neurtu nahi izanez gero, zer zehaztasun erabiltzen dugun, emaitza desberdina da. Eskarmentuak esaten digu 1:100.000 eskalako mapak badia «leun» bat erakusten duen lekuan, 1:10.000 eskalakoak sartu-irtenak erakusten dituela, badia txikiagoak agertzen direla handiaren barruan. Kostalde oso irregular bat zuzenkiz egindako kurbatzat har dezakegu; zuzenkien luzerak batu eta eskalak eskatzen duen faktorearekin biderkatuz, kostaldearen luzera lortuko dugu. Demagun orain eskala aldatu eta mapa zehatzago bat dugula. Lehengo zuzenkiak ez dira zuzenki mantenduko, xehetasun gehiago erakutsiko dute eta modu bereko kalkulua eginez lehen baino luzera handiagoa lortuko dugu. Ikuspegi matematiko batetik pentsa dezakegu limitean luzera infinitua dela eta zein hurbilketarekin gelditzen garen, halako luzera aukeratzen dugula. Eskala aldatzeak kurbaren luzera zenbat handitzen duen zenbaki bati lotuta ikusi zuen Mandelbrotek, *«dimentsio* baten propietateak erakusten dituen zenbakia, nahiz zatikiarra izan», haren hitzak ekarriz.

Matematikan, XX. mendearen hasieratik ezagutzen zen dimentsio ezosoen kontzeptua. Ez du kontzeptu horrek loturarik ez parametro kopuru batekin, ez eta lehenago aipatu dugun dimentsio topologikoarekin. Beste zerbait neurtzen du. Izan ere, eskala bateko zenbaki bat da eta *dimentsio* izendatu beharrean beste termino baten aukera egingo balitz, ez luke ezinegonik sortuko. Baina hori da erabiltzen den terminoa eta objektu batek 1,26ko dimentsioa duela esaten da, adibidez. Ohiko dimentsioarekin (esaterako dimentsio topologikoarekin) interpretatu nahiak ez du zentzurik, jakina.

Kontzeptua bera baino lehenago ezagutzen ziren matematikan objektu bereziak, kontzeptuaren aurkezpenari ederto egokitzen zaizkionak (ikus [Ch]). *Von Kochen kurba* edo *elur maluta* deitzen da horietako bat eta Helge von Koch matematikari suediarrak deskribatu zuen 1904an, inongo puntutan zuzen ukitzailerik ez duen kurba modura. Kurba eraikitzeko has gaitezen zuzenki batekin. Erdiko herena kendu eta haren ordez altxatu alde bi, kendutakoaren luzera berekoak. Egin gauza bera lortutako irudiaren alde bakoitzarekin eta jarraitu horrela behin eta berriro (2. irudia, ezkerrean). Limitean lortzen den kurba hori da hain zuzen Von Kochen kurba.



2. irudia. Von Kochen kurbaren lehen urratsak ezkerrean eta elur maluta eskuinean.

Zein da kurba horren luzera? Urrats batetik bestera kurbaren luzera 4/3 faktorearekin biderkatzen da. Luzeren limitea infinitua da, beraz. Eraiketa bidean agertzen den edozein kurba limitean inskribaturiko kurba da, eta beraz, kurba limitearen luzera infinitua da. Baina gorago aipatu dugun Peanoren kurbak ez bezala, von Kochen kurbak ez du planoko zati «lodi» bat betetzen eta irudiaren azalera 0 da. Dimentsio bateko objektu modura neurtu (luzera) eta infinitu ateratzen da; dimentsio biko objektu bezala neurtu (azalera) eta zero dugu emaitza. Pentsa liteke «luzera eta azaleraren arteko neurri egokiago» bat egongo dela.

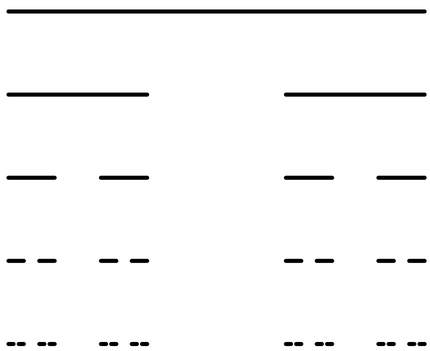
Lehen aipaturiko kostalde baten irudia eman dezake kurba honek. Geroz eta eskala handiagoa erabili, xehetasun gehiago ageri dira eta luzera handiagotuz doa. Elur maluta izena aipatu dugu gorago. Arrazoia ikusteko, zuzenki batekin hasi beharrean hasi triangelu aldeberdin batekin. Alde bakoitzarekin egin aipaturiko prozesua eta gelditzen den kurbak duen simetria hexagonalak elur maluta baten kristalaren itxura du (2. irudia, eskuinean).

9.1. **Dilatazioak eta dimentsioa**

Demagun espazioan dilatazio bat egiten dugula. Dilatazio-faktoreak adierazten digu zenbat bider handitzen diren objektuak. Faktorea r bada, luzera guztiak r bider handitzen dira (txikitzen dira, $r < 1$ bada), r^2 bider azalerak, r^3 bider bolumenak. Hau da, zer dimentsiotako objektua neurtzen ari garen, halako berretzailea jarri behar zaio r-ri. Demagun 3 faktoreko dilatazioa egiten dugula: zuzenki bati aplikatuta hiru halako lortuko ditugu, karratu bati aplikatu eta halako bederatzi. Zer eragin du dilatazio horrek von Kochen kurbaren gainean? Hasierako irudia lau bider errepikatuta ikus dezakegu, eta beraz, hasierako objektuaren neurria laukoiztu egin da. (Argi izan limitean lortu dugun kurbarako dela hori egia, ez eraikitzeko egin ditugun bitarteko kurbetarako.) Demagun d dimentsioko neurria M dela; orduan $4M = 3^d M$ izan beharko genuke. Hori egia da $d = 1$ izanda (luzera), $M = \infty$ delako, bai eta $d = 2$ izanda (azalera), $M = 0$ delako. Baina badago d-ren balio bat berdintza hori posible egiten duena M ez 0 eta ez ∞ izanda. Ekuazioan askatuz $d = \log 4/\log 3 = 1,26186 \ldots$ lortzen da. Beraz, ez 0 eta ez infinitu den neurri batek ekuazioa beteko badu, d dimentsioak ezosoa izan beharko luke eta horri zentzua eman beharko genioke.

Dilatazioen bidezko arrazonamenduak dimentsioa emango badu, multzoaren zatiek multzo osoa errepikatu behar dute beste eskala batean. Propietate hori duten multzoak *autoantzekoak* deitzen dira. Erakutsi dugun von

Kochen kurbaz gain, *Cantorren multzoa* da beste adibide ospetsu bat. Berriro zuzenki batekin hasiko gara eta orain erdiko herena kenduko diogu ((1/3, 2/3) tarte irekia, zehazki); gelditzen diten zuzenki bietan gauza bera egingo dugu eta modu berean jokatuko dugu hurrengoetan (3. irudia). Limitean lortzen den multzoa da Cantorren multzoa. Multzo infinitua da, ez da kontagarria (hots, ezin daiteke bijekziorik egin zenbaki arrunten multzoarekin) eta badu deskripzio polit bat: hasierako zuzenkia [0,1] tartea bada, Cantorren multzoan gelditzen diren zenbakiak dira 3 zenbakikuntza-oinarrian 1 zifra erabili barik eman daitezkeenak. 3 faktoreko dilatazioak multzoaren kopia bi sortzen ditu eta orduan dimentsio egokia log 2/ log 3 da, von Kochen kurbaren dimentsioaren erdia.



3. irudia. Cantorren mutzoaren eraiketa.

Gure ohiko zenbakikuntza-sistema hamartarrean antzeko adibide bat egin nahi izanez gero, hau proposa dezakegu: hautatu digitu bat eta hartu [0,1] tartean digitu hori erabili barik idatz daitezkeen zenbakien multzoa. Irakurlearentzat utziko dugu multzoaren eraiketa prozesua eta dimentsioaren kalkulua.

9.2. **Dimentsio fraktala**

Dilatazioaren bideak ezer gutxi adierazten du multzoak egitura berezia ez badu. Orain aurkeztuko dugun beste bide honek zenbaki bera ematen du eta orokorragoa da. Demagun gauzak argitzeko planoko irudiekin ari garela. Planoa ϵ aldeko karratuekin bete (koadrikulatu), ϵ oso txikia izanik, eta dimentsioa aurkitu nahi diogun multzoa estaltzeko zenbat karratu behar diren kontatu behar dugu. Dimentsio bateko objektuetarako (zuzenkiak, zirkunferentziak eta abar) ϵ^{-1} tamainako zenbakia lortuko dugu eta dimentsio biko objektuetarako (triangelu baten barrualdea, zirkulua) ϵ^{-2} tamainako kopurua beharko da. Erraz sinesten da hala izan behar duela, ϵ aldeko karratutxo batek ϵ luzera estaltzen duelako eta ϵ^2 azalera. Funtsean berretzaileak esan nahi du karratuen aldea 10 aldiz txikiagoa eginda 10 bider karratu gehiago behar direla luzera bera lortzeko, baina 100 bider gehiago azalera bera estaltzeko. Berretzailearen portaeran irakurtzen dugu dimentsioa orain ere eta definizio matematiko zehatzak zenbaki hori lortu behar du.

Definizoa emateko $\mathbf{R}^n$ erabiliko dugu, berdin da n zenbat den. Izan bedi E azpimultzo bornatua eta $\epsilon > 0$. E multzoa ϵ erradioko bolez estal daiteke, modu askotan egin ere. Izan bedi $N(\epsilon)$ multzoa estaltzeko behar den ϵ erradioko bolen kopururik txikiena. Orduan, E-ren dimentsio fraktala hau da:

$$d(E) = \lim_{\to 0} \frac{\log N(\ )}{\log} .$$

Baliteke limiterik ez egotea; hala gertatzen bada, goi limitea eta behe limitea erabiltzen dira. Bolen bidez definitu dugu $N(\epsilon)$, baina berdin erabil daitezke n-dimentsioko kuboak (karratuak, $n = 2$ bada).

Dimentsio hori da Mandelbrotek popularizatu duena, baina ez zen kontzeptu matematiko berria. Beste testuinguru batzuetan agertu zen eta zenbait izen berezi hartzen ditu: Minkowskiren dimentsioa, Kolmogoroven dimentsioa, Besicovitchen dimentsioa, eta abar.

9.3. **Haudorffen dimentsioa**

Dimentsio fraktalak zenbaki bat ematen du baina ez du neurri batekin loturarik. Felix Hausdorff matematikari alemaniarrak neurri-eskala bat proposatu zuen eta horri lotuta multzo bakoitzak dimentsio bat du. 1918koa da Hausdorffen lana eta asko erabiltzen da neurriaren teoria geometrikoa deritzon matematikaren atalean. Definizio honek zailtasun tekniko handiagoa du eta zailagoa da kalkulatzen.

Aurreko definizioaren moduan $\mathbf{R}^n$-ko multzoetarako emango dugu. Izan bedi E multzoa eta finka ditzagun $\epsilon > 0$ eta s zenbaki erreala 0 eta n artean (ez du zertan osoa izan). Defini dezagun

$$H^s(E) = \inf \left. \sum_j d(B_j)^s : E \subset \bigcup_j B_j , d(B_j) \le \right\} .$$

Hemen E multzoa B_j multzoen bidez estali dugu eta $d(B_j)$, B_j-ren diametroa da. Estalkiko multzoen diametroaren balio maximoa finkatu, ϵ, eta estalki guztietatik gutxien betetzen duena aukeratzen da nolabait. Dimentsio frakatalaren definizioan multzoa estaltzeko bola guztiek erradio bera zuten (horregatik $N(\epsilon)$ finitua zen); hemen diametroak desberdinak izan daitezke eta estalkiko bola kopurua infinitua izan daiteke. Behin $H^s_\epsilon(E)$ zenbakiak definituta, E-ren s dimentsioko neurria hau da:

$$H^s(E) = \lim_{\to 0} H^s(E).$$

Parametroa osoa bada, neurri horrek ohiko interpretazioa du: $s = 0$ bada, E multzoko elementu kopurua ematen du; $s = 1$ bada, luzera; $s = 2$ bada, azalera; $s = 3$ bada, bolumena. Zehazki esateko, faktore bat jarri behar da biderkatzen ohiko neurriak emateko.

Demagun irudi lau bat dugula $\mathbf{R}^3$ espazioan, zirkulu bat, adibidez. Orduan, $s = 0$ eta $s = 1$-erako ∞ lortuko dugu; $s = 3$-rako, aldiz, 0. Hori bera gertatuko da s osoa ez bada, ∞ lortuko dugu $s < 2$ guztietarako eta 0, $s > 2$ guztietarako. Zirkuluaren dimentsioa da neurriak ∞-tik 0-ra jauzia egiten duen balioa: 2. Edozein multzok du propietate hori duen zenbaki bat eta bakarra 0-tik n-rako eskalan eta horri multzoaren *Hausdorffen dimentsioa* deritzo. Formalki idatzita,

$$d_H(E) = \sup\{s : H^s(E) = \infty\} = \inf\{s : H^s(E) = 0\}.$$

Hausdorffen dimentsioa dimentsio fraktala baino txikiagoa izan daiteke, ez dute zertan beti berdinak izan. Ohiko kurba eta gainazaletarako bai, berdinak dira, eta lehen aipatu ditugun multzo autoantzekoetarako ere bai. Beraz, von Kochen kurbaren dimentsioa log4/log3 da eta Cantorren multzoarena log2/log3, bai dimentsio fraktala, bai Hausdorffen dimentsioa erabiliz.

10. **BIBLIOGRAFIA**

[Ch] J. L. Chabert, *Un demi-siècle de fractales: 1870-1920,* Historia Math. 17 (1990), 339-365.

[CJ] T. Crilly eta D. Johnson, *The emergence of topological dimension theory* in *History of Topology,* I. M. James (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1999, 1-24.

[E] Euklides, *Elementuak* (Patxi Anguloren itzulpena), Elhuyar, Donostia, 2005.

[F] K. FALCONER, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications,* John Wiley & Sons, 1990.

[FS] D. FEARNLEY-SANDER, *Hermann Grassmann and the creation of linear algebra,* Amer. Math. Monthly 86 (1979), 809-817.

[L] D. LAUGWITZ, *Bernhard Riemann 1826-1866. Turning points in the conception of mathematics,* Birkhäuser, Boston, MA, 1999.

[M] B. MANDELBROT, *Objektu fraktalak eta hizkuntza fraktalari gainbegirada,* Islada bilduma 14, Elhuyar, 1992.

[T] J. TARRÉS, *Historia de la teoría de la dimensión* in *Seminario de Historia de la Matemática I,* Universidad Complutense, Madrid, 1991.

[USM] K. UENO, K. SHIGA eta S. MORITA, *A mathematical gift. I. The interplay between topology, functions, geometry, and algebra,* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.