eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Facultad de Ciencia y Tecnología

Banantze-axiomak eta funtzioen txertatzea

Gradu Amaierako Lana

Matematikako Gradua

Iker Indurain Torre

Iraide Mardones

Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2016ko uztailaren 11a

Gaien Aurkibidea

Sarrera

Multzo baten gainean espazio topologiko bat definitzeko, *irekiak* deitzen ditugun azpimultzoak erabiltzen dira. Beraz, normala da galdetzea ireki horiek propietate jakin batzuk betetzen dituzten. Horrela, neurtu ahal izango dugu, nolabait, zeinen ona den espazio topologikoa. Adibidez, espazio topologiko bateko irekiak, bi puntu ezberdin banantzeko gai dira? Argi dago, ohiko topologia gai dela; ordea, topologia indiskretua ez, bertan multzo hutsa eta espazio osoa baitira ireki bakarrak. Aurreko galderaren harira, beste hainbat gaitasun neur ditzazkegu: bi puntu ezberdin beharrean, itxi bat eta bertan ez dagoen puntu bat banantzeko gai da topologia? Bi itxi disjuntu? **Banantze-axiomak** izango dira gaitasun horiek neurtuko dituzten propietateak.

Axioma bakoitza T_i moduan adierazten da non T letra jartzen den "Trennungsaxiom" hitzagatik, alemanieraz banantze-axioma esan nahi duena. Espazio topologiko batek banantze-axioma konkretu bat betetzen badu, espazioa T_i dela dugu. Idazle guztiak bat datoz T_0, T_1 eta T_2 axiomen definizioekin, ez ordea gainontzekoekin. Orokorrean, sendoagoak diren axiomentzako, bi definizio ezberdin eman daitezke idazlearen arabera. Espazio metrikoekin lan egiten duten matematikariek, T_1 axioma jakintzat emango dute (espazio metrikoak T_1 direlako) ia espazio guztietarako. Hauek, T_i axioma bakoitzerako, definizio bakunena erabiltzen dute eta T_1 betetzen denean, **erregularra** edo **normala** deituko diote. Baina, horrela definituz, ez da T_i axiomen arteko katerik osatuko, baizik eta espazio erregular eta normalen artean. 1970. urtean Lynn A. Steen eta J. Arthur Seebach, Jr. matematikariek, [11] liburuan, lehenengoz sartu zuten notazio hau. Aldiz, topologo orokorrentzako, T_1 axioma aztertu beharreko propietatea da. Beraiek T_i axioma bakoitzaren definiziorako baldintza gehiago jarriko dituzte. Adibidez, T_3 espazioak, T_1 diren espazio erregularrak izango dira; T_4 espazioak, T_1 diren espazio normalak izango dira... Definizio honekin bai, T_i axiomek kate bat osatzen dute: $T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4 \Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$. Besteak beste, [12] liburuan, Stephen Willardek, bigarren notazio hau erabiltzen du. Esaten da, John L. Kelley matematikaria izan zela 1955. urtean bigarren notazio honen aitzindaria. Memoria honetan bigarren notazioa izango da erabiliko duguna.

Matematikako graduan zehar, denbora dela eta, banantze-axiometan ez da gehiegi sakontzen. Horregatik, lan honen helburuetako bat banantze-axioma klasikoak ezagutzea da. Bestalde, lan honen helburu nagusia banantze-axioma batzuen eta funtzioen txertatzearen arteko erlazioa ezartzea da. Horrela, ikuspuntu ezberdin bat emango diogu axiomei, eta topologia bakoitzaren irekien gaitasunak neurtu beharrean, espazio horretan dauden funtzioen gaitasunak neurtuko ditugu. Adibidez, edozein bi funtzio hartuta, egongo al da funtzio jarraiturik espazioan bi funtzio horien artean dagoena?

Erlazio horiek ezartzeko, hainbat tresna berri definitu behar izango ditugu. Lehen kapituluan, multzoak eta funtzioak erlazionatzen dituzten familia espektralak ikusiko ditugu eta, hauen orokorpen gisa, eskalak. Horrela, funtzioen hainbat propietate eskalen propietateekin erlazionatuko ditugu; besteak beste, jarraitutasuna. Ondoren, funtzioen gaitasunak neurtuko dituzten kontzeptu batzuk ezagutuko ditugu: goi- eta behe-erdijarraitutasuna. Kontzeptu hauek jarraitutasunak betetzen ez dituen zenbait propietate interesgarri beteko dute. Lehen kapituluaren bukaeran, erdijarraitutasunarekin loturik dauden goi- eta behe-limite funtzioak aztertuko ditugu. Bi funtzio mota hauen eta itxitura eta barrualde eragileen arteko erlazioa oso estua izango da.

Bigarren kapituluan banantze-axiomak ikusiko ditugu. Axioma gehienak definitzeko, puntuen eta multzoen hizkuntza erabiliko dugu. Aldi berean, axioma batzuk funtzioen hizkuntza erabiltzen hasiko dira. Aipatzekoa da espazio normaletarako dugun emaitzetako bat: Urysohn-en lema. Lema honek, bereziki frogapenak, ordurarte erabili ez ziren teknika ezberdinak erabiltzen ditu. Teknika horiek, memorian zehar, behin baino gehiagotan erabiliko ditugu. Eranskinean, espazio normalen kasu duala aztertuko dugu: espazio erabat ez-konexuak. Espazio normaletan, multzo irekietarako hainbat emaitza lortuko ditugun moduan, espazio hauetan multzo itxietarako lortuko ditugu.

Azken kapituluan, bi artikulu landuko ditugu. Alde batetik, Tomasz Kubiaken "A strengthening of the Katetov-Tong theorem" artikulua daukagu. Bertan, espazio normal eta guztiz normalentzako funtzioen txertatzearen bidezko karakterizazioak ematen dira. Ondorioz, T_4 eta T_5 axiomen funtzioen txertatze bidezko karakterizazioak lortuko ditugu. Bestetik, Javier Gutierrez eta berriro Tomasz Kubiaken "Sandwich-type characterization of completely regular spaces" artikulua landuko dugu. Hemen, espazio guztiz erregularrentzako eta, ondorioz, $T_{3\frac{1}{2}}$ axiomarentzako funtzioen txertatze moduko karakterizazio bat aurkezten da. Momentuz, ez da ezagutzen T_3 edota ahulagoak diren axiomentzako funtzioen txertatze bidezko karakterizaziorik, baina nork daki noiz azal daitezkeen...

1. Kapitulua

Multzoak eta funtzioak erlazionatzen

Kapitulu honetan funtzio errealak eta multzoak erlazionatzen dituzten familiak aztertuko ditugu: familia espektralak. Ondoren, familia espektralen orokorpen gisa, eskalak definituko ditugu; lanean zehar oso erabilgarriak izango direnak. Gaiarekin bukatzeko, jarraitutasunarekin erlazionaturik dauden kontzeptuak eta funtzioak aurkeztuko ditugu.

1.1 Familia espektralak

Memoria osoan zehar, X espazio topologiko orokor batetik $\mathbb{R}$ multzora doazen funtzioekin

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

lan egingo dugu. Funtzio hauek, multzo berezi batzuk sortzen dituzte edozein $t \in \mathbb{R}$ hartuta:

$$[f < t] = \{x \in X : f(x) < t\} = f^{-1}((-\infty, t)).$$

Era berean defini daitezke $[f \leq t]$ edota $[f > t]$ modukoak. Multzo hauek hainbat propietate betetzen dituzte, hona hemen berehalakoak diren batzuk:

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} [f < t] = \emptyset \ , \qquad \bigcup_{t \in \mathbb{R}} [f < t] = X \ , \qquad \bigcup_{s < t} [f < s] = [f < t].$$

Gainera, aurreko emaitza guztietan $\mathbb{Q}$ jar daiteke $\mathbb{R}$ jarri beharrean (edo $\mathbb{R}$ multzoan dentsoa den edozein). Gehienetan, $\mathbb{Q}$ erabiliko dugu multzo hau zenbakigarria baita. Infimoaren eta zenbaki errealen propietateak direla eta, beste bi propietate hauek ondoriozta daitezke:

$$[f \leq t] = \bigcap_{s > t} [f < s] \tag{1.1}$$

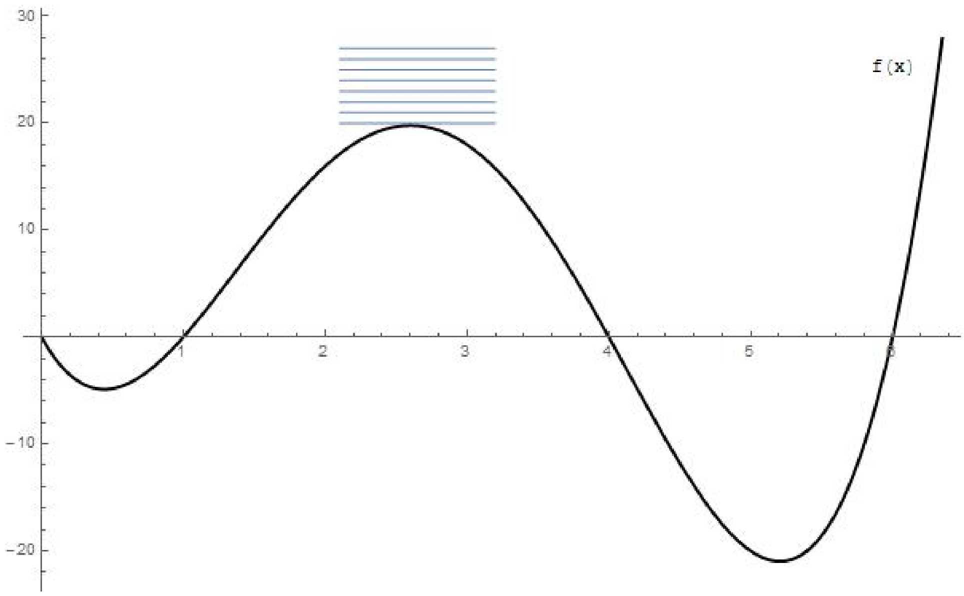
$$f(x) = \inf\{t : x \in [f < t]\} = \inf\{t : x \in [f \leq t]\} \quad \forall x \in X \tag{1.2}$$

Azalpena
(1.1)

$$x \in [f \leq t] \iff f(x) \leq t \iff \forall s > t,\ f(x) < s$$
$$\iff \forall s > t,\ x \in [f < s] \iff x \in \bigcap_{s>t} [f < s]$$

(1.2)

$$\inf\{t : x \in [f < t]\} = \inf\{t : f(x) < t\} = \inf\{t : f(x) \leq t\} = f(x)$$



1.1. Irudia. t guzti horien infimoa $f(x)$ da.

Definizioa.

Izan bedi $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Ondorengo multzoen familiari f funtzioaren *familia espektrala* deituko diogu: $\big\{[f < t] : t \in \mathbb{R}\big\}$.

Proposizioa 1.1.1.

Izan bedi $\big\{E(t) : t \in \mathbb{R}\big\}$ *familia* X *multzoaren azpimultzoen familia ondorengo propietateekin:*

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} E(t) = \emptyset\ , \qquad \bigcup_{t\in\mathbb{R}} E(t) = X\ , \qquad \bigcup_{s<t} E(s) = E(t) \tag{1.3}$$

Orduan, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *bakar bat existitzen da* $\{E(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *bere familia espektraltzat duena.*

Baldintza hauek, (1.3), oso erabiliak izango dira kapitulu honetan zehar.

Frogapena.

Defini dezagun f funtzioa ondorengo moduan:

$$f(x) = \inf\{t : t \in E(t)\} \quad \forall x \in X.$$

Ikus dezagun horrela definitutako f funtzioa erreala dela, hau da, $x \in X$ guztietarako $-\infty \neq f(x) \neq \infty$ dela:

- A.E.⌋
  Demagun existitzen dela $x_0 \in X$ non $f(x_0) = \infty$ den, ondorioz, f funtzioaren definizioa dela eta

  $$f(x_0) = \inf\{t : x_0 \in E(t)\} = \infty \Longrightarrow x_0 \notin E(t),\ t \in \mathbb{R} \quad \#$$

- A.E.⌋
  Demagun existitzen dela $x_0 \in X$ non $f(x_0) = -\infty$ den. Orduan,

  $$f(x_0) = \inf\{t : x_0 \in E(t)\} = -\infty \Longrightarrow x_0 \in E(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \quad \#$$

Kontraesan biak datoz (1.3) baldintzako lehen eta bigarren formuletatik. Ikus dezagun orain, $E(t) = [f < t]$ dela $t \in \mathbb{R}$ guztietarako.

$\subseteq$⌋

$$x \in E(t) = \bigcup_{s<t} E(s) \Longrightarrow \exists s_0 < t : x \in E(s_0)$$
$$\Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in E(t)\} \leq s_0 < t \Longrightarrow x \in [f < t]$$

$\supseteq$⌋

$$x \in [f < t] \Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in E(t)\} < t \Longrightarrow$$
$$\exists s_0 < t : x \in E(s_0) \Longrightarrow x \in \bigcup_{s<t} E(s) = E(t)$$

Bukatzeko, f funtzioaren bakartasuna $f(x) = \inf\{t : x \in [f < t]\}$ definiziotik ondorioztatzen da; izan ere, beste $g(x)$ existitzekotan familia espektral berdinarekin $g(x) = \inf\{t : x \in E(t)\} = \inf\{t : x \in [f < t]\} = f(x)$ izango litzateke. □

Beraz, lortu dugu funtzioak eta multzoak erlazionatzen dituen definizio bat. Orain, ikusiko dugu funtzioen hainbat propietate familia espektraleko multzoekin erlaziona daitezkeela; adibidez, bornatua izatea edota jarraitutasuna.

Proposizioa 1.1.2.

Izan bitez X multzoa, $\{E(t) : t \in \mathbb{Q}\}$ X multzoaren azpimultzoen familia (1.3) betetzen duena eta f familia horrek sortzen duen funtzioa. Orduan,

$$\forall x \in X \quad a \leq f(x) \leq b \Longleftrightarrow \begin{cases} E(t) = \emptyset, & t < a \\ E(t) = X, & t > b \end{cases}$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Lehenik, ikus dezagun $E(t) = \emptyset$ dela $t < a$ guztietarako. Absurdura eramanez, demagun existitzen dela $x_0 \in E(t_0)$ non $t_0 < a$ den. Orduan,

$$f(x_0) = \inf\{t : x_0 \in E(t)\} \leq t_0 < a \qquad \#$$

Azken hori kontraesana da ari garelako suposatzen $a \leq f(x)$ dela $x \in X$ guztietarako. Bestalde, $x \in X$ eta $t > b$ guztietarako, $f(x) = \inf\{s : x \in E(s)\} \leq b < t$ beraz, existituko da $t_0 < t$ non $x \in E(t_0)$ den eta ondorioz $E(t) = \bigcup_{s<t} E(s)$ denez, $x \in E(t)$ den.

$\Longleftarrow\rfloor$

$$\begin{cases} E(t) = \emptyset, & t < a \Longrightarrow f(x) = \inf\{s : x \in E(s)\} \geq a \\ E(t) = X, & t > b \Longrightarrow f(x) = \inf\{s : x \in E(s)\} \leq b \end{cases}$$

□

Proposizioa 1.1.3.

Izan bitez X multzoa eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak. Orduan,

$$f \leq g \Longleftrightarrow [g < t] \subseteq [f < t] \quad \forall t \in \mathbb{Q}$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Izan bedi $x \in [g < t]$ edozein, hau da, $g(x) < t$. Orduan, $f(x) \leq g(x)$ denez, $f(x) < t$ da; baliokideki, $x \in [f < t]$.

$\Longleftarrow\rfloor$

Jakina denez, edozein $A \subseteq B$ bada $\inf B \leq \inf A$ da, hortaz, edozein $t \in \mathbb{R}$ hartuta:

$$f(x) = \inf\{t : x \in [f < t]\} \leq \inf\{t : x \in [g < t]\} = g(x).$$

□

Proposizioa 1.1.4.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak. Orduan,

$$f \text{ jarraitua da} \Longleftrightarrow \overline{[f < s]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \quad \forall s < t.$$

Oharra.

Ondorengo frogapenean eta beste askotan $(\mathbb{R}, \tau_u)$ espazio topologikoan aztertuko dugu jarraitutasuna. Besterik esan ezean, $\mathbb{R}$ espazioko topologia ohiko topologia izango da.

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun f jarraitua dela. Orduan, $s < t$ eta p halakoa non $s < p < t$ den hartzen baditugu:

$$[f < s] \subseteq [f \leq p] \subseteq [f < t].$$

Gainera, f jarraitua denez, $[f \leq p] = f^{-1}((-\infty, p])$ itxia izango da eta $[f < t] = f^{-1}((-\infty, t))$ irekia. Beraz:

$$\overline{[f < s]} \subseteq \overline{[f \leq p]} = [f \leq p] \subseteq [f < t] = \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \Longrightarrow$$

$$\overline{[f < s]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}}.$$

$\Longleftarrow\rfloor$

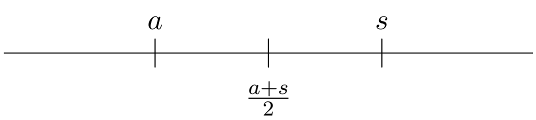
Demagun $\overline{[f < s]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}}$ dela $s < t$ guztietarako. Ikusiko dugu f jarraitua dela, ikusiz $[f < b]$ eta $[f > a]$ irekiak direla. Izan ere, $(-\infty, b)$ eta (a, ∞) motako multzoek, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik, ohiko topologiaren azpionarri bat osatzen dute; hortaz, azpionarriko aurreirudiak irekiak badira nahiko da ikusteko f jarraitua dela. Has gaitezen $x \in [f < b]$ edozein hartzen. Gure helburua da x puntua barruan duen eta $[f < b]$ multzoaren parte den ireki bat aurkitzea. Orain, har ditzagun $s, t \in \mathbb{R}$ halakoak non $f(x) < s < t < b$ diren. Ondorioz:

$$x \in [f < s] \subseteq \overline{[f < s]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \subseteq [f < t] \subseteq [f < b].$$

Beraz, dagoeneko ikusi dugu $[f < b]$ irekia dela. Orain, ikusteko $[f > a]$ irekia dela, ikusiko dugu bere osagarria $X - [f > a] = [f \leq a]$ itxia dela. Ohar modura, aipatu besterik ez, $\mathcal{C}$ ikurraz multzo itxien familia adieraziko dugula, hau da, $A \in \mathcal{C}$ eta A itxia izateak baliokideak izango dira.

$$[f \leq a] = \bigcap_{s>a} [f < s] \overset{?}{=} \bigcap_{s>a} \overline{[f < s]} \in \mathcal{C} \text{ (itxien ebakidua itxia da beti)}$$

Berdintasun horretan, $\subseteq$ partekotasuna nabaria da, baina bestea frogatu behar dugu. Har dezagun $x \in \bigcap_{s>a} \overline{[f < s]}$ edozein, hau da $x \in \overline{[f < s]}$ egongo da $s > a$ edozein hartuta.



$$s > \frac{a+s}{2} > a$$

Alde batetik, $a < \frac{a+s}{2}$ denez $x \in \overline{[f < \frac{a+s}{2}]}$ izango da. Bestetik, $s > \frac{a+s}{2}$ dela erabiliz, hipotesiz:

$$x \in \overline{\left[f < \frac{a+s}{2}\right]} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{[f < s]}} \subseteq [f < s].$$

Edozein $s > a$ hartu dugunez,

$$x \in \bigcap_{s>a} [f < s].$$

$\square$

Gera gaitezen familia espektralen funtzesko propietate hauekin. Hurrengo azpiatalean, eskalak ikusiko ditugu. Eskalak, familia espektralen antzera, funtzio bati loturiko familiak izango dira, baina hauek orokorragoak izango dira.

1.2 Eskalak

Oharra.

Hurrengo definizioetarako familia gorakorrak erabiliko ditugu. Guretzako, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{R}}$ familia *gorakorra* izango da $i < j$ guztietarako $A_i \subseteq A_j$ bada. Bestalde, $\mathcal{A}$ *hertsiki gorakorra* izango da $i < j$ guztietarako $A_i \subsetneq A_j$ bada.

Definizioa.

Izan bitez X multzoa eta $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ familia X multzoaren azpimultzoen familia gorakorra. Esango dugu $\mathcal{F}$ *eskala* dela baldin eta:

$$\bigcap_{t\in\mathbb{Q}} F_t = \emptyset \ , \quad \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} F_t = X$$

baldintzak betezen badira. Mota honetako edozein $\{F_t : t \in Q\}$ familiak $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio bakarra sortzen du ondorengo moduan:

$$f(x) = \inf\{t : x \in F_t\}.$$

Oharra.

Edozein $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa emanda, $\{[f < t] : t \in \mathbb{Q}\}$ eta $\{[f \leq t] : t \in \mathbb{Q}\}$ familiek f funtzioaren eskalak izateko baldintzak betetzen dituzte. Honen ondorioz, hurrengo emaitza daukagu:

Proposizioa 1.2.1.

Edozein $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala emanda, $\{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ familia f funtzioaren eskala izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa

$$[f < t] \subseteq F_t \subseteq [f \leq t]$$

betetzea da $t \in \mathbb{Q}$ guztietarako.

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ familia f funtzioaren eskala dela. Orduan, $t \in \mathbb{Q}$ guztietarako,

$$x \in [f < t] \Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in F_t\} < t \Longrightarrow \exists t_0 < t : x \in F_{t_0}$$

$$\overset{gorakorrak}{\Longrightarrow} x \in F_t \Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in F_t\} \leq t \Longrightarrow x \in [f \leq t]$$

$\Longleftarrow\rfloor$

Bestalde, demagun partekotasunak betetzen direla. Orduan

$$t_1 < t_2 \Longrightarrow F_{t_1} \subseteq [f \leq t_1] \subseteq [f < t_2] \subseteq F_{t_2}$$

$$\bigcap_{t \in \mathbb{Q}} F_t \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{Q}} [f \leq t] = \emptyset \Longrightarrow \bigcap_{t \in \mathbb{Q}} F_t = \emptyset$$

$$\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} F_t \supseteq \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} [f < t] = X \Longrightarrow \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} F_t = X$$

Ondorioz, $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ familiak f funtzioaren eskala izateko baldintzak betetzen ditu. $\square$

Korolarioa 1.2.2.

Izan bedi f funtzioa $\{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ eskalak sorturikoa, orduan:

$$\bigcup_{r<t} F_r = [f < t] \quad \textit{eta} \quad \bigcap_{r>t} F_r = [f \leq t].$$

Ondorioz, $\{E(t) : t \in \mathbb{Q}\}$ non $E(t) = \bigcup_{r<t} F_r$ den, da zehazki f funtzioaren familia espektrala.

Frogapena.

Ikus dezagun lehenik $\bigcup_{r<t} F_r = [f < t]$ dela.

$\subseteq\rfloor$

$$x \in \bigcup_{r<t} F_r \Longleftrightarrow \exists r_0 < t : x \in F_{r_0} \Longrightarrow f(x) = \inf\{r : x \in F_r\} \leq r_0 < t.$$

Hau da, $x \in [f < t]$.

$\supseteq\rfloor$

$$x \in [f < t] \Longleftrightarrow f(x) = \inf\{s : x \in F_s\} < t \Longrightarrow \exists s_0 < t : x \in F_{s_0} \Longrightarrow x \in \bigcup_{r<t} F_r$$

Ikus dezagun orain $\bigcap_{r>t} F_r = [f \le t]$ dela.

$\subseteq\rfloor$

$$x \in \bigcap_{r>t} F_r \Longleftrightarrow \forall r > t,\ \ x \in F_r \Longrightarrow f(x) = \inf\{s : x \in F_s\} \le t \Longrightarrow x \in [f \le t]$$

$\supseteq\rfloor$

$$\forall r > t,\ \ x \in [f \le t] \subseteq [f < r] \subseteq F_r \Longrightarrow x \in \bigcap_{r>t} F_r$$

□

Familia espektralekin egin dugun moduan, eskalekin ere, funtzioen propietate batzuk deskribatuko ditugu:

Proposizioa 1.2.3.

Izan bitez X multzoa eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak, $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ eta $\mathcal{G} = \{G_t : t \in \mathbb{Q}\}$ eskalekin sorturikoak, hurrenez hurren. Orduan,

$$f \le g \Longleftrightarrow G_r \subseteq F_t \quad \forall r < t.$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun $f(x) \le g(x)$ dela $x \in X$ guztietarako. Orduan, badakigu $r \in \mathbb{Q}$ edozein hartuta, $[g \le r] \subseteq [f \le r]$ beteko dela. Hau erabiliz:

$$\forall r < t, \quad G_r \subseteq [g \le r] \subseteq [f \le r] \subseteq [f < t] \subseteq F_t \Longrightarrow$$

$$G_r \subseteq F_t \quad \forall r < t.$$

Lehen eta azken partekotasunak ematen dira $\mathcal{F}$ eta $\mathcal{G}$ eskalak direlako, 1.2.1 proposizioaren ondorioz.

$\Longleftarrow\rfloor$

Bestalde, $t \in \mathbb{Q}$ guztietarako,

$$[g < t] = \bigcup_{s<t} G_s \subseteq \bigcup_{s<t} F_s = [f < t] \Longrightarrow [g < t] \subseteq [f < t].$$

Eta familia espektralen atalean ikusi genuenez, azken partekotasun hori, nahikoa da $f \le g$ izateko.

Ohartu frogan dagoen partekotasunak ez duela esaten $G_r \subseteq F_r$ denik $r < t$ guztietarako. Bertan, hipotesia erabili dugu, izan ere, $s < t$ edozein hartuta, beste r bat dago $s < r < t$ dena eta hipotesiz, $G_s \subseteq F_r$ betetzen duena. □

Oharra.

Memorian zehar, askotan, (X,τ) espazio topologikoaz arituko gara. Bertan, $A \in \tau$ izatea eta $A \subseteq X$ multzoa irekia izatea baliokideak izango dira.

Proposizioa 1.2.4.

Izan bitez (X,τ) espazio topologikoa, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala eta $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ bere eskala. Orduan,

$$f \text{ jarraitua da } \Longleftrightarrow \overline{F_r} \subseteq \overset{\circ}{F_t} \quad \forall r < t$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun f jarraitua dela. Orduan, $[f \leq r] \in \mathcal{C}$ eta $[f < t] \in \tau$ ditugu. Ondorioz:

$$F_r \subseteq [f \leq r] \Longrightarrow \overline{F_r} \subseteq [f \leq r]$$

eta,

$$[f < t] \subseteq F_t \Longrightarrow [f < t] = \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \subseteq \overset{\circ}{F_t}$$

ditugu eta ondorioz:

$$r < t \text{ guztietarako,} \quad \overline{F_r} \subseteq [f < t] \subseteq \overset{\circ}{F_t}\,.$$

$\Longleftarrow\rfloor$

Orain, aurreko proposizioan bezala, familia espektraletan frogatu dugun ondorengo emaitza hau erabiliko dugu f jarraitua dela ikusteko:

$$r < t \text{ guztietarako ,} \quad \overline{[f < r]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \Longleftrightarrow f \text{ jarraitua.}$$

Har ditzagun $r < s < t$, orduan,

$$[f < r] \subseteq F_r \subseteq \overline{F_r} \overset{hip}{\subseteq} \overset{\circ}{F_s} \subseteq F_s \subseteq [f < s] \subseteq [f < t].$$

Hau da,

$$\left.\begin{array}{lcl} [f < r] \subseteq \overline{F_r} & \Longrightarrow & \overline{[f < r]} \subseteq \overline{F_r} \\ \overset{\circ}{F_s} \subseteq [f < t] & \Longrightarrow & \overset{\circ}{F_s} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \end{array}\right\} \overset{hip}{\Longrightarrow} \overline{[f < r]} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{[f < t]}} \quad \forall r < t. \qquad \square$$

1.3 Erdijarraitutasuna

Atal honi hasiera emateko, hain ezagun den jarraitutasunaren definizioa, beste ikuspuntu batetik ikusiko dugu:

Proposizioa 1.3.1.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Orduan, f funtzioa $a \in X$ puntuan jarraitua izango da baldin eta soilik baldin ondorengo bi baldintzak betetzen badira:

$$\forall \lambda < f(a),\ \exists V \in \mathcal{N}_a : \lambda < f(y),\ y \in V \ \textit{guztietarako} \tag{1.4}$$

$$\forall \lambda > f(a),\ \exists V \in \mathcal{N}_a : \lambda > f(y),\ y \in V \ \textit{guztietarako} \tag{1.5}$$

Frogapena.

Ikusiko dugu ondorengoa betetzen dela edozein $a \in X$ hartuta:

$$\forall M \in \mathcal{N}_{f(a)}\,,\ f^{-1}(M) \in \mathcal{N}_a \Longleftrightarrow (1.4) \text{ eta } (1.5)$$

$\Longrightarrow\rfloor$

Edozein $a \in X$ eta $\lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non $\lambda_1 < f(a) < \lambda_2$ hartuta, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{N}_{f(a)}$ den. Beraz, $V = f^{-1}((\lambda_1, \lambda_2)) \in \mathcal{N}_a$ dugu hipotesiz, eta ondorioz:

$$f(x) \in (\lambda_1, \lambda_2) \quad \forall x \in V$$

dugu. Horrela, aldi berean, (1.4) eta (1.5) baldintzak betetzen dira.

$\Longleftarrow\rfloor$

Har ditzagun $a \in X$ eta $M \in \mathcal{N}_{f(a)}$ edozein. Orduan, badakigu existitu behar direla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non $\lambda_1 < \lambda_2$ diren eta $f(a) \in (\lambda_1, \lambda_2) \subseteq M$. Orain, hipotesia erabiliz, existitzen dira $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_a$ halakoak non $\lambda_1 < f(x)$ eta $f(y) < \lambda_2$ diren edozein $x \in V_1$ eta $y \in V_2$ hartuz. Beraz, $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_a$ definituz:

$$f(V) \subseteq (\lambda_1, \lambda_2) \subseteq M$$

eta ondorioz

$$V \subseteq f^{-1}(f(V)) \subseteq f^{-1}(M) \Longrightarrow f^{-1}(M) \in \mathcal{N}_a.$$

$\square$

Baldintza hauek aldi berean ez badira betetzen, erdijarraitutasunaren kontzeptua dugu:

Definizioa.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Orduan, f *behe-erdijarraitua* izango da $a \in X$ puntuan baldin eta (1.4) baldintza betetzen bada. Aurrekoa $a \in X$ guztietarako betzen bada, f funtzioa *behe-erdijarraitua* dela esango dugu.

Goi-erdijarraitutasuna era berean definitzen da (1.5) baldintza erabiliz.

Oharra.

Ondoren azalduko ditugun propietate guztiak behe-erdijarraitutasunerako enuntziaturik daude. Izan ere, f funtzioa $a \in X$ puntuan behe-erdijarraitua izatea eta $-f$ funtzioa a puntu horretan bertan goi-erdijarraitua izatea baliokideak dira. Beraz, ez dugu zertan aztertu eta frogatu emaitza guztiak behe- eta goi-erdijarraitutasunerako, batekin nahikoa da.

Proposizioa 1.3.2.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Orduan, f behe-erdijarraitua izango da baldin eta soilik baldin $\lambda \in \mathbb{R}$ edozein hartuta $[f > \lambda] \in \tau$ bada, edo baliokideki, $[f \leq \lambda] \in \mathcal{C}$.

Frogapena.

$\Longleftarrow\rfloor$

Izan bedi $a \in X$ edozein eta $\lambda < f(a)$. Orduan, $[f > \lambda]$ irekia denez eta $a \in [f > \lambda]$ dugunez, $[f > \lambda] \in \mathcal{N}_a$ da eta badaukagu (1.4) betetzeko behar dugun ingurunea: $V = [f > \lambda]$. Beraz, f behe-erdijarraitua da.

$\Longrightarrow\rfloor$

Edozein $\lambda < f(a)$ hartuta, (1.4) baldintza erabiliz, badakigu existituko dela $V \in \mathcal{N}_a$ halakoa non $f(x) > \lambda$ den $x \in V$ guztietarako. Beraz, $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $a \in [f > \lambda]$ guztietarako existitzen da $V \in \mathcal{N}_a$ halakoa non $a \in V \subseteq [f > \lambda]$ den, hau da, $[f > \lambda]$ irekia da $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako. $\square$

Eskalen atalean ikusi dugun moduan, jarraitutasuna eskalen multzoen bitartez aztertu daiteke. Era berean, erdijarraitutasuna azter daiteke.

Proposizioa 1.3.3.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $\mathcal{F} = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\}$ eskala. Orduan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa erreala $\mathcal{F}$ eskalak sorturiko funtzioa bada,

$$f \text{ behe-erdijarraitua} \Longleftrightarrow \overline{F_r} \subseteq F_s \quad \forall r < s \tag{1.6}$$

$$f \text{ goi-erdijarraitua} \Longleftrightarrow F_r \subseteq \overset{\circ}{F_s} \quad \forall r < s \tag{1.7}$$

Frogapena.

Ikus dezagun (1.6) lehenik,

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun f behe-erdijarraitua dela. Orduan, aurreko proposizioa erabiliz, badakigu $r \in \mathbb{R}$ guztietarako $[f \leq r]$ itxia dela eta ondorioz, $s > r$ hartuta:

$$[f < r] \subseteq F_r \subseteq [f \leq r] \implies \overline{F_r} \subseteq \overline{[f \leq r]} = [f \leq r] \subseteq [f < s] \subseteq F_s.$$

$\Longleftarrow\rfloor$

Orain, ikusi behar dugu edozein $\lambda \in \mathbb{R}$ hartuta, $[f \leq \lambda]$ itxia dela:

$$[f \leq \lambda] = \bigcap_{s>\lambda} [f < s] \stackrel{?}{=} \bigcap_{s>\lambda} \overline{[f < s]} \in \mathcal{C}.$$

Beraz, frogatzen baldin badugu azken berdintza hori, itxien ebakidura itxia denez, frogatuta dago $[f \leq \lambda]$ itxia dela.

$\subseteq\rfloor$

Berehalakoa.

$\supseteq\rfloor$

Izan bedi $x \in \bigcap_{s>\lambda} \overline{[f < s]}$, hau da, $x \in \overline{[f < s]}$ dugu edozein $s > \lambda$ hartuta. Izan bitez , $r > \lambda$ edozein eta $s, t \in \mathbb{R}$ non $\lambda < s < t < r$ diren . Orduan,

$$x \in \overline{[f < s]} \subseteq \overline{F_s} \stackrel{hip}{\subseteq} F_t \subseteq [f \leq t] \subseteq [f < r] \quad \forall r > \lambda.$$

Beraz, $x \in \bigcap_{r>\lambda} [f < r]$.

Froga dezagun orain (1.7):

$\Longrightarrow\rfloor$

Demagun f goi-erdijarraitua dela, hau da, $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako $[f < \lambda]$ irekia dela. Orduan, $r < s$ bada

$$F_r \subseteq [f \leq r] \subseteq [f < s] = \overset{\circ}{\widehat{[f < s]}} \subseteq \overset{\circ}{F_s}$$

$\Longleftarrow\rfloor$

Orain, ikusi behar dugu edozein $\lambda \in \mathbb{R}$ hartuta $[f < \lambda]$ irekia dela:

$$[f < \lambda] = \bigcup_{r<\lambda} F_r \stackrel{?}{=} \bigcup_{r<\lambda} \overset{\circ}{F_r} \quad \in \tau.$$

Beraz, frogatzen baldin badugu azken berdintza hori, irekien bildura irekia denez, frogatuta dago $[f < \lambda]$ irekia dela.

$\subseteq\rfloor$

Ez dugu esan nahi banan-banako partekotasuna betetzen denik, bai ordea, edozein $r < s < \lambda$ hartuta $F_r \subseteq \overset{\circ}{F_s}$ betetzen dela.

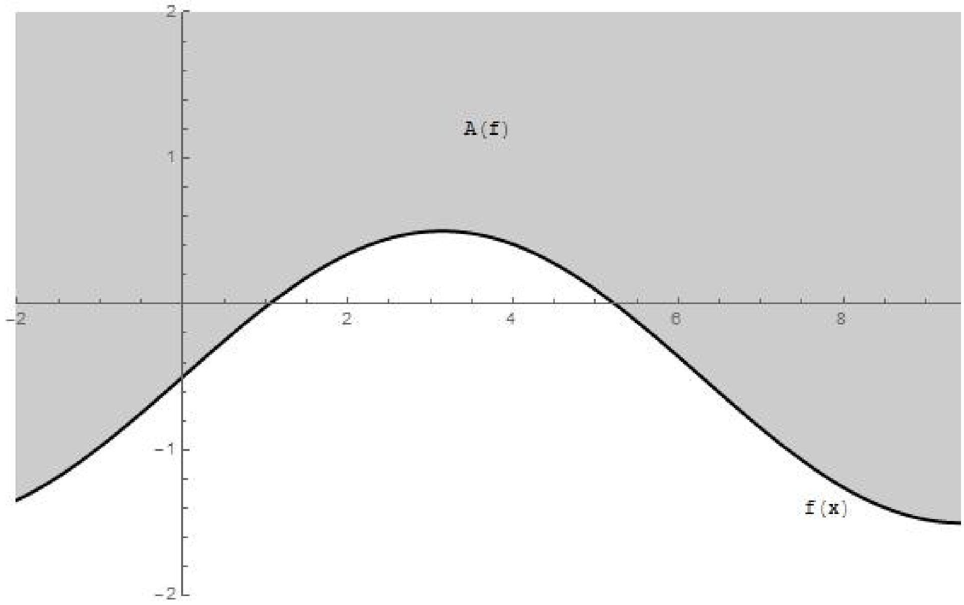
$\supseteq\rfloor$

Berehalakoa da, hemen bai banan-banako partekotasunagatik. $\square$

Definizioa.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Defini dezakegu $A(f)$ multzoa, $X \times \mathbb{R}$ biderkadura espazioko azpimultzoa ondorengo moduan:

$$A(f) = \{(x, \lambda) : \lambda \geq f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$



1.2. Irudia. $A(f)$ baten irudikapena.

Oharra.

Ondorengo proposizioan biderkadura topologikoak erabiliko ditugu. Bertan, (X_1, τ_1) eta (X_2, τ_2) espazio topologikoen biderkadura topologikoa adierazteko (X_{Tych}, τ_{Tych}) erabiliko dugu.

Proposizioa 1.3.4.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Orduan,

$$f \text{ behe-erdijarraitua} \Longleftrightarrow A(f) \in \mathcal{C}_{Tych}$$

Frogapena.

$\Longrightarrow \rfloor$

Ikusiko dugu $A(f)$ itxia dela, bere osagarria irekia dela ikusiz. Beraz, edozein $(a, b) \in (X \times \mathbb{R}) - A(f)$ hartuta, $b < f(a)$ da. Orduan, $r \in \mathbb{R}$ hartzen badugu, halako non $b < r < f(a)$ den; f behe-erdijarraitua denez,

$$\exists V \in \mathcal{N}_a \ : \ r < f(y), \ \ y \in V \text{ guztietarako.}$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned} V \times (-\infty, r) &= \{(\alpha, \beta) : \alpha \in V, \beta \in (-\infty, r)\} \\ &= \{(\alpha, \beta) : r < f(\alpha) \wedge \beta < r\} \\ &\subseteq \{(\alpha, \beta) : \beta < f(\alpha)\} \end{aligned}$$

Beraz,

$$(a, b) \in V \times (-\infty, r) \subseteq (X \times \mathbb{R}) - A(f).$$

Eta ondorioz, $V \in \mathcal{N}_a$ denez, $(X \times \mathbb{R}) - A(f)$ irekia da eta baliokideki $A(f)$ itxia da.

$\Longleftarrow\!\rfloor$

Izan bedi $(a, b) \in (X \times \mathbb{R}) - A(f)$ edozein. Orduan, $A(f)$ itxia denez, bere osagarria irekia da eta, ondorioz, existitzen da $U = U_1 \times U_2 \in \tau_{Tych}$ erakoa $U_1 \in \tau$ eta $U_2 \in \tau_u$ halakoa non:

$$(a, b) \in U_1 \times U_2 \subseteq (X \times \mathbb{R}) - A(f)$$

den. Orduan,

$$(a, b) \in U_1 \times \{b\} \subseteq (X \times \mathbb{R}) - A(f)$$

eta $(a, b) \in (X \times \mathbb{R}) - A(f)$ dagoenez, $b < f(a)$ dugu. Hau da,

$$\forall b < f(a)\,,\ \exists U_1 \in \mathcal{N}_a : b < f(y)\,,\ y \in U_1.$$

$\square$

Proposizioa 1.3.5.

Funtzio erdijarraituen batura erdijarraitua da.

Frogapena.

Demagun $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak direla eta $a \in X$ puntuan behe-erdijarraituak. Orduan, $\lambda \in \mathbb{R}$ edozein hartuta: $[f > \lambda]$, $[g > \lambda] \in \tau$ dira. Ikus dezagun zer gertatzen den $f + g$ funtzioarekin:

$$\begin{aligned} [f + g > \lambda] &= \{x \in X : (f + g)(x) > \lambda\} = \{x \in X : f(x) + g(x) > \lambda\} \\ &= \{x \in X : f(x) > \lambda - g(x)\} \\ &= \{x \in X : \exists \mu \in \mathbb{R} : f(x) > \mu > \lambda - g(x)\} \\ &= \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} \{x \in X : f(x) > \mu > \lambda - g(x)\} \\ &= \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} \Big(\{x \in X : f(x) > \mu\} \cap \{x \in X : g(x) > \lambda - \mu\} \Big) \\ &= \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} \Big([f > \mu] \cap [g > \lambda - \mu] \Big) \in \tau \end{aligned}$$

irekien bildura eta irekien ebakidura finitua irekiak direlako. $\square$

Proposizioa 1.3.6.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erdijarraitu hertsiki positiboak. Orduan, fg ere erdijarraitua da.

Frogapena.

Aurreko proposizioaren antzeko froga egingo dugu, baina $\lambda \leq 0$ eta $\lambda > 0$ kasuak bananduz.

$\lambda \leq 0$

Hemen $[fg > \lambda] = X \in \tau$ dugu f eta g hertsiki positiboak direlako.

$\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
[fg > \lambda] &= \{x \in X : (fg)(x) > \lambda\} = \{x \in X : f(x)g(x) > \lambda\} \\
&= \left\{x \in X : f(x) > \frac{\lambda}{g(x)}\right\} = \left\{x \in X : \exists \mu \in \mathbb{R} : f(x) > \mu > \frac{\lambda}{g(x)}\right\} \\
&= \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} \left\{x \in X : f(x) > \mu > \frac{\lambda}{g(x)}\right\} \\
&= \bigcup_{\mu \in \lambda} \left(\{x \in X : f(x) > \mu\} \cap \left\{x \in X : g(x) > \frac{\lambda}{\mu}\right\}\right) \\
&= \bigcup_{\mu \in \lambda} \Big([f > \mu] \cap [g > \lambda/\mu]\Big) \in \tau
\end{aligned}
$$

□

Ikusi ditugun azken bi propietateak funtzio erdijarraituetarako zein jarraituetarako betetzen dira. Ondoren azalduko duguna, propietate berezia da, izan ere, funtzio jarraituek ez dute orokorrean beteko, baina bai erdijarraituek.

Proposizioa 1.3.7.

Izan bedi $\{f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ funtzio errealen familia. Demagun, $i \in I$ guztietarako, f_i behe-erdijarraitua dela. Orduan, $\sup\limits_{i \in I} f_i$ ere behe-erdijarraitua da. Gainera I finitua bada, orduan $\inf\limits_{i \in I} f_i$ ere behe-erdijarraitua da.

Frogapena.

Ikusiko dugu $\sup\limits_{i \in I} f_i$ behe-erdijarraitua dela 1.3.4 proposizioa erabiliz:

$$
A(\sup_{i \in I} f_i) = \{(x, y) : \sup_{i \in I} f_i(x) \leq y\} = \{(x, y) : \forall i \in I, f_i(x) \leq y\} = \bigcap_{i \in I} A(f_i)
$$

Azken hau, f_i guztiak behe-erdijarraituak direnez, itxien ebakidura da, hau da, itxia. Ondorioz 1.3.4 proposizioa erabiliz, frogatuta dago.

Bestalde, I finitua bada, orduan,

$$\inf_{i\in I} f_i(x) = \min_{i\in I} f_i(x) \leq y \Longleftrightarrow \exists i_0 \in I : f_{i_0}(x) \leq y.$$

Hau erabiliz,

$$A(\inf_{i\in I}\{f_i\}) = \{(x,y) : \inf_{i\in I} f_i(x) \leq y\} = \{(x,y) : \exists i_0 \in I : f_{i_0}(x) \leq y\} = \bigcup_{i\in I} A(f_i).$$

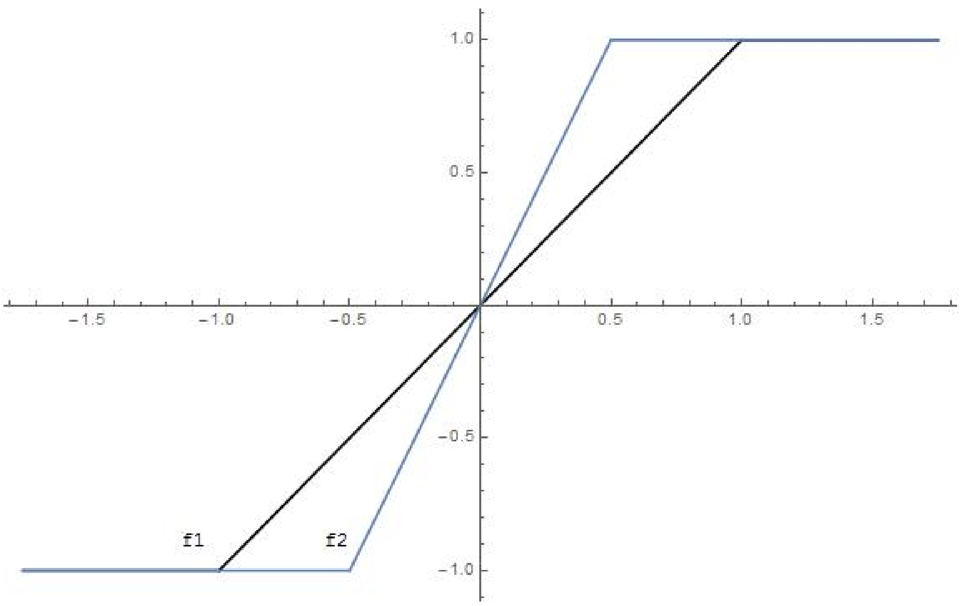
Eta azken hau itxien bildura finitua denez, itxia da. $\square$

Oharra.

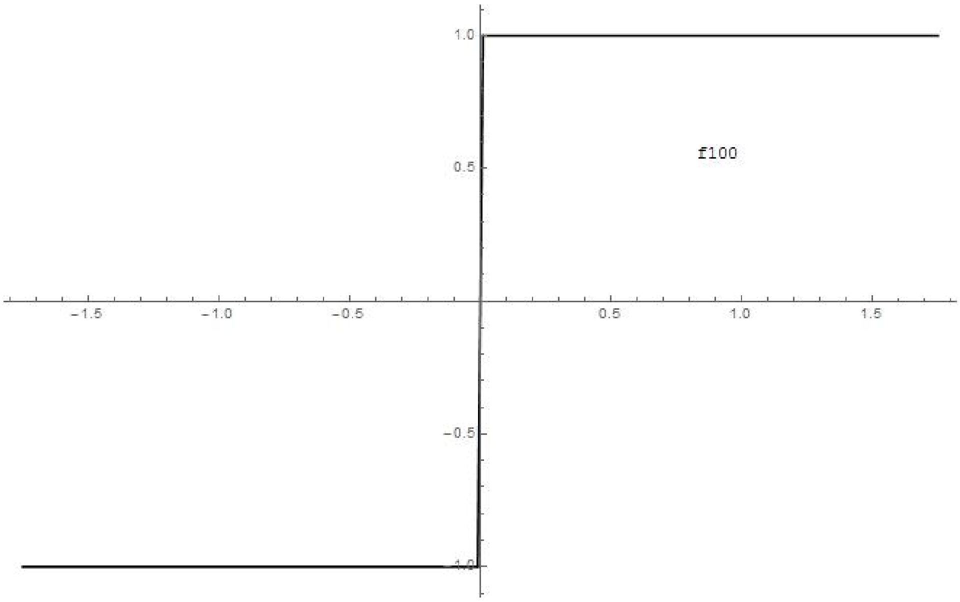
Ikus dezagun kontraadibide baten bitartez, funtzio jarraituek orokorrean ez dutela betetzen aurreko propietatea; hau da, $\{f_i\}_{i\in I}$ jarraituak izanik, $\sup_{i\in I} f_i$ ez duela zertan jarraitua izan. Izan bedi $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ ondoko funtzio errealen familia:

$$f_i(x) = \begin{cases} -1, & x < -1/i \\ ix, & x \in [-1/i, 1/i] \\ 1, & x > 1/i \end{cases}$$

Ondorengoak f_1 eta f_2 funtzioen irudikapenak dira:



Ikusten den moduan, i handituz doan heinean $-1/i$ eta $1/i$ arteko zuzenak malda gero eta handiagoa du. Gauzak horrela, $i = 100$ denean ondorengo grafikoa lortzen dugu:



Ondorioz,

$$\sup_{i \in I} f_i = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

eta badakigu funtzio hori ez dela jarraitua.

Proposizioa 1.3.8.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa, $A \subseteq X$ eta χ_A funtzioa A multzoaren funtzio karakteristikoa. Orduan,

$$\begin{cases} A \in \tau \iff \chi_A \text{ behe-erdijarraitua} \\ A \in \mathcal{C} \iff \chi_A \text{ goi-erdijarraitua} \end{cases}$$

Frogapena.

1.3.2 Proposizioa erabiliz, ikusiko dugu χ_A behe-erdijarraitua dela edozein $\lambda \in \mathbb{R}$ hartuta $[\chi_A > \lambda]$ irekia dela aztertuz.

$$[\chi_A > \lambda] = \begin{cases} \emptyset, & \lambda \geq 1 \\ A, & 0 \leq \lambda < 1 \\ X, & \lambda < 0 \end{cases}$$

eta ondorioz, $[\chi_A > \lambda]$ irekia da baldin eta soilik baldin A irekia da.

Era berean $[\chi_A < \lambda]$ aztertuz, ikus daiteke $A \in \mathcal{C}$ baldintza beharrezkoa eta nahikoa dela χ_A goi-erdijarraitua izateko. $\square$

1.4 Goi- eta behe-limite funtzioak

Azpi atal honetan aurkeztuko ditugun funtzioak goi- eta behe-erdijarraitutasunarekin erlazionaturik daude. Goi- eta behe-limite funtzio bezala definitu arren, funtzio horiek f^* eta f_* moduan adieraziko ditugu. Bai hemen, eta bai memoriako beste atal batzuetan, erabilgarria denean, sup eta inf idazkerak erabili beharrean $\bigvee$ eta $\bigwedge$ erabiliko ditugu.

Definizioa.

Izan bedi $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala eta edozein $x \in X$. Defini ditzagun $f^*, f_* : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funtzioak f funtzioaren *goi-limite* eta *behe-limite* funtzioak ondorengo eran:

$$f^*(x) = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in N} f(y) = \inf\{\sup\{f(y) : y \in N\} : N \in \mathcal{N}_x\}$$

eta

$$f_*(x) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} f(y) = \sup\{\inf\{f(y) : y \in N\} : N \in \mathcal{N}_x\}$$

Ez badugu f funtzio bornatua eskatzen, gerta daiteke, bere goi- edo behe-limite funtzioak infinituraino joatea. Horregatik $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ multzora bideratzen ditugu. Dena den, memoriako teorema garrantzitsuetan, sandwich moduko karakterizazioak erabiliko ditugu: $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$. Ohartu, hauekin ziurtatuta daukagula goi- eta behe-limite funtzieok ez dutela infinitu balioa hartuko, f eta g funtzioek ez dutelako hartzen.

Ondoren hainbat propietate aurkeztuko ditugu funtzio hauen inguruan, baina aurretik, beste proposizio garrantzitsu bat aurkeztu behar dugu. Proposizio honek frogapen asko modu errezago batean egiteko aukera emango digu:

Proposizioa 1.4.1.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak. Orduan:

$$f^* = -(-f)_*$$

Frogapena.

Ikusiko dugu $-f^* = (-f)_*$ dela. Izan bedi $x \in X$ edozein. Jakina denez, $\inf -f = -\sup f$ eta $\sup -f = -\inf f$ dira eta ondorioz:

$$\begin{aligned}(-f)_*(x) &= \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} (-f(y)) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \Big(- \bigvee_{y \in N} f(y) \Big) \\ &= - \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in N} f(y) = -f^*(x)\end{aligned}$$

□

Propietateak.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio errealak, orduan

(i) f^* goi-erdijarraitua da eta f_* behe-erdijarraitua da.

(ii) $f_* \leq f \leq f^*$.

(iii) $f \geq g \Longrightarrow f^* \geq g^*$ eta $f_* \geq g_*$.

(iv) $(f^*)^* = f^*$ eta $(f_*)_* = f_*$.

Frogapena.

(i)

Ikusiko dugu f^* goi-erdijarraitua dela 1.3.2 proposizioa erabiliz, hau da, edozein $\lambda \in \mathbb{R}$ hartuta $[f^* < \lambda]$ irekia dela ikusiz.
Izan bitez edozein $\lambda \in \mathbb{R}$ eta edozein $x \in [f^* < \lambda]$. Orduan,

$$f^*(x) = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in N} f(y) < \lambda.$$

Orduan, existituko da $V \in \mathcal{N}_x$ non

$$\bigvee_{y \in V} f(y) < \lambda$$

den, hau da,

$$\exists U \in \tau : x \in U \subseteq V \text{ eta } \bigvee_{y \in U} f(y) < \lambda.$$

Gainera, edozein $r \in U$ hartzen badugu

$$f^*(r) = \bigwedge_{M \in \mathcal{N}_r} \bigvee_{y \in M} f(y) \leq \bigvee_{y \in U} f(y) < \lambda.$$

Azken desberdintza hori ematen da $U \in \mathcal{N}_r$ delako. Ondorioz, ikusi dugu $x \in U \subseteq [f^* < \lambda]$ dela, hau da, $[f^* < \lambda]$ irekia dela.
Ikusteko f_* behe-erdijarraitua dela, nahikoa da 1.4.1 proposizioa erabiltzea.

$$[f_* > \lambda] = [-f_* < -\lambda] = [(-f)^* < -\lambda] \in \tau$$

(ii) $f_* \overset{?}{\leq} f \overset{?}{\leq} f^*$

$$f_*(x) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} f(y)$$

Alde batetik, edozein $x \in X$ hartuta, argi dago $\bigwedge_{y \in N} f(y) \leq f(x)$ dela $N \in \mathcal{N}_x$ guztietarako. Gainera, supremoa goi bornerik txikiena denez,

$f_*(x) = \bigvee_{N\in\mathcal{N}_x} \bigwedge_{y\in N} f(y) \leq f(x)$ da.

Argudio berdina erabiliz, $f(x) \leq \bigvee_{y\in N} f(y)$ da $N \in \mathcal{N}_x$ guztietarako eta infimoa behe bornerik handiena denez, $f(x) \leq \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in N} f(y) = f^*(x)$ da.

(iii) $f \geq g \overset{?}{\Longrightarrow} f^* \geq g^*$ eta $f_* \geq g_*$

Demagun $f \geq g$ dela. Beraz, edozein $x \in X$ eta $y \in N \in \mathcal{N}_x$ hartuta $f(y) \geq g(y)$ da. Beraz,

$$\bigvee_{y\in N} f(y) \geq \bigvee_{y\in N} g(y)$$

eta

$$\bigwedge_{y\in N} f(y) \geq \bigwedge_{y\in N} g(y).$$

Hortaz,

$$f^*(x) = \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in N} f(y) \geq \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in N} g(y) = g^*(x)$$

eta

$$f_*(x) = \bigvee_{N\in\mathcal{N}_x} \bigwedge_{y\in N} f(y) \geq \bigvee_{N\in\mathcal{N}_x} \bigwedge_{y\in N} g(y) = g_*(x).$$

(iv) $(f^*)^* \overset{?}{=} f^*$ eta $(f_*)_* \overset{?}{=} f_*$

Lehen berdintza ikusiko dugu eta bigarrenerako 1.4.1 proposizioa erabiliko dugu:

Frogatu berri dugun (ii) propietatea erabiliz, badaukagu $(f^*)^* \geq f^*$ dela. Gainera

$$(f^*)^* = \bigwedge_{N\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in N} \bigwedge_{M\in\mathcal{N}_y} \bigvee_{t\in M} f(t) =$$

$$\bigwedge_{N\in\mathcal{N}_x} \bigvee_{y\in N} f^*(y).$$

Orain, inguruneen propietateak erabiliz,

$$\forall N \in \mathcal{N}_x, \exists M \in \mathcal{N}_x (M \subseteq N) : \forall y \in M, N \in \mathcal{N}_y.$$

Beraz, $N_0 \in \mathcal{N}_x$ eta dagokion M_0 multzorako $y \in M_0$ edozein hartuta, $N_0 \in \mathcal{N}_y$ denez,

$$f^*(y) = \bigwedge_{M\in\mathcal{N}_y} \bigvee_{t\in M} f(t) \leq \bigvee_{t\in N_0} f(t)$$

gainera $y \in M_0$ edozein har daitekeenez,

$$\bigvee_{y\in M_0} f^*(y) \leq \bigvee_{t\in N_0} f(t).$$

Orduan, $M_0 \in \mathcal{N}_x$ denez,

$$(f^*)^*(x) = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in N} f^*(y) \leq \bigvee_{y \in M} f^*(y).$$

Bukatzeko, N_0 edozein izan daitekeenez eta infimoa behe bornerik handiena denez:

$$(f^*)^*(x) \leq \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{t \in N} f(t) = f^*(x).$$

Orain, beste berdintza frogatzeko, frogatu berri dugun propietatea eta 1.4.1 erabiliko ditugu:

$$f_* = -(-f)^* = -((-f)^*)^* = -(-f_*)^* = (f_*)_*$$

$\square$

Proposizioa 1.4.2.

Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa eta $t \in \mathbb{R}$. Orduan, $A \subseteq X$ bada, $(\chi_A)_* = \chi_{\overset{\circ}{A}}$ eta $(\chi_A)^* = \chi_{\overline{A}}$ dira.

Frogapena.

Azter dezagun $(\chi_A)_*(x) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} \chi_A(y)$ funtzioa zatika:

$$\bigwedge_{y \in N} \chi_A(y) = \begin{cases} 1, & \forall y \in N, y \in A \\ 0, & \exists y_0 \in N : y_0 \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & N \subseteq A \\ 0, & N \nsubseteq A \end{cases}$$

Ondorioz,

$$(\chi_A)_*(x) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} \chi_A(y) = \begin{cases} 1, & \exists N \in \mathcal{N}_x : N \subseteq A \\ 0, & \forall N \in \mathcal{N}_x, N \nsubseteq A \end{cases}$$

Bestalde, badakigu barrualdearen definizioa erabiliz:

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists U \in \tau : x \in U \subseteq A \overset{U \in \mathcal{N}_x}{\Longleftrightarrow} \exists N \in \mathcal{N}_x : N \subseteq A$$

eta ondorioz,

$$\chi_{\overset{\circ}{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overset{\circ}{A} \\ 0, & x \notin \overset{\circ}{A} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \exists N \in \mathcal{N}_x : N \subseteq A \\ 0, & \forall N \in \mathcal{N}_x, N \nsubseteq A \end{cases} = (\chi_A)_*(x).$$

Beste berdintza antzeko eran ikus daiteke multzo baten itxituraren definizioa erabiliz. $\square$

Teorema 1.4.3.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Orduan,

$$f \text{ behe-erdijarraitua} \Longleftrightarrow f_* = f.$$

Era berean,

$$f \text{ goi-erdijarraitua} \Longleftrightarrow f^* = f.$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Izan bitez edozein $x \in X$ eta $\lambda < f(x)$. Orduan, existituko da $V \in \mathcal{N}_x$ halakoa non $\lambda < f(y)$ den $y \in V$ guztietarako. Orduan:

$$\lambda \leq \bigwedge_{y \in V} f(y) \leq \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} f(y) = f_*(x).$$

Bestalde, $f(x) = \sup\{\lambda : \lambda < f(x)\}$ moduan adieraziz:

$$f(x) = \sup\{\lambda : \lambda < f(x)\} \leq f_*(x).$$

$\Longleftarrow\rfloor$

Izan bitez edozein $x \in X$ eta $\lambda < f(x)$. Orduan, $f = f_*$ denez,

$$\lambda < f(x) = f_*(x) = \bigvee_{N \in \mathcal{N}_x} \bigwedge_{y \in N} f(y)$$

hau da,

$$\exists N_0 \in \mathcal{N}_x : \lambda < \bigwedge_{r \in N_0} f(r) \leq f(y), \quad y \in N_0 \text{ guztietarako.}$$

Beste berdintza frogatzeko, 1.4.1 proposizioa erabiliko dugu:

$$\begin{aligned} f \text{ goi-erdijarraitua} &\Longleftrightarrow -f \text{ behe-erdijarraitua} \\ &\Longleftrightarrow -f = (-f)_* = -f^* \Longleftrightarrow f = f^* \end{aligned}$$

□

Azken emaitza hauek agerian uzten dute f^* eta f_* eta itxitura eta barrualde eragileen arteko erlazioa. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa, $A, B \subseteq X$ multzoak eta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioak. Orduan:

$f_* \leq f \leq f^*$.	$\longleftrightarrow$	$\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
f_* behe-erdijarraitua.	$\longleftrightarrow$	$\overset{\circ}{A}$ irekia da.
f^* goi-erdijarraitua.	$\longleftrightarrow$	$\overline{A}$ itxia da.
$f \leq g \Longrightarrow f^* \leq g^*$, $f_* \leq g_*$.	$\longleftrightarrow$	$A \subseteq B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
$(f^*)^* = f^*$ eta $(f_*)_* = f_*$.	$\longleftrightarrow$	$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ eta $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
f behe-erdijarraitua $\Longleftrightarrow f_* = f$.	$\longleftrightarrow$	$A \in \tau \Longleftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.
f goi-erdijarraitua $\Longleftrightarrow f^* = f$.	$\longleftrightarrow$	$A \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

2. Kapitulua

Banantze-axiomak

Atal honetan, banantze-axiomak aurkeztuko ditugu. Axioma hauek, nolabait, espazioak gauzak bereizteko duen gaitasuna neurtzen dute: puntu ezberdinak, puntuak eta itxiak, itxi disjuntuak... Banantze-axiomak kate baten moduan aurkezten dira normalean eta axioma bakoitza T_i ikurraz adierazten da. T_0 axioman hasi eta T_6 axioman bukatuko dugu. T_0 axiomarik ahulena izango da, hau da, betetzeko errezena eta aurrera joan ahala, axiomak gero eta sendoagoak izango dira.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_0 dela edozein bi puntu ezberdinetarako existitzen bada multzo ireki bat puntuetako bat barruan duena baina ez bestea. Espazio hauek *Kolmogorov* izenaz ere ezagutzen dira.

Adibidea.

Orokorrean ia edozein espazio topologiko T_0 izango da: (X, τ_u), (X, τ_{kof}), $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$... Beraz, aurkeztuko dugu T_0 ez den espazio bat: (X, τ_{ind}). Espazio topologiko honetan $\emptyset$ eta X dira ireki bakarrak; hortaz, X espazioak bi puntu ezberdin baditu ez da existitzen irekirik puntuetako bat barruan duena, baina ez bestea.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_1 dela edozein $x, y \in X$ puntu ezberdinetarako $U, V \in \tau$ existitzen badira halakoak non $x \in U, x \notin V$ eta $y \in V, y \notin U$ diren. T_1 espazioak baita *Fréchet* izenaz ere ezagutzen dira.

Proposizioa 2.0.4.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa, orduan

$$T_1 \Longrightarrow T_0$$

Oharrak.

(i) Frogapena berehalako da.

(ii) Kontrako inplikazioa ez da egia. Adibidez, $(\mathbb{R}, \tau_{kol})$ non $\tau_{kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ den, T_0 da: edozein $x < y \in \mathbb{R}$ eta $U = (x, \infty) \in \tau_{kol}$ hartuta, $x \notin U$ eta $y \in U$ betetzen dira. Ordea, $x < y$ izanik, ez da existitzen U irekirik $x \in U$ duena baina $y \notin U$.

Ondorengo proposizioa dagoeneko *Topologia* arloan ikusi dugu. Hala ere, garrantzia handikoa denez, aurkeztu eta frogatu egingo dugu.

Proposizioa 2.0.5.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan, ondorengoak baliokideak dira:

(i) *Espazioa T_1 da.*

(ii) *Atomoak itxiak dira.*

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Izan bedi edozein $x \in X$. Espazioa T_1 denez, beste edozein $y \neq x$ hartzen badugu, existituko da $U_y \in \tau$ halakoa non $x \notin U_y$ eta $y \in U_y$ den. Gauzak horrela, $y \in X$ guzti horiei dagokien irekien bildura egiten badugu:

$$\bigcup_{y \in X} U_y = X - \{x\}$$

izango dugu, hau da, $X - \{x\}$ irekia da, baliokideki $\{x\}$ itxia da.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Orain, atomoak itxiak badira, edozein $x, y \in X$ ezberdin hartuta, $X - \{x\}$ eta $X - \{y\}$ irekiak dira, eta gainera behar ditugun modukoak espazioa T_1 izateko. $\square$

Hau da T_1 axiomak ematen duen aurrerapen nabariena: T_1 espazioak identifikatu ditzakegu atomoak itxiak diren aztertuz.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_2 dela edozein $x, y \in X$ puntu ezberdinetarako $U, V \in \tau$ disjuntuak existitzen badira halakoak non $x \in U$ eta $y \in V$ diren. Espazio hauek baita *Hausdorff* izenaz ere ezagutzen dira.

Proposizioa 2.0.6.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa, orduan

$$T_2 \Longrightarrow T_1$$

Oharrak.

(i) Hemen ere frogapena berehalakoa da.

(ii) Kontrako inplikazioa ez da egia. Adibidez, $(\mathbb{R}, \tau_{kof})$ non $\tau_{kof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} - A \text{ finitua}\}$ den, T_1 da: Edozein $x \neq y \in \mathbb{R}$ hartuta, $U = \mathbb{R} - \{y\}, V = X - \{y\} \in \tau_{kof}$ eta ireki horiek betetzen dituzte T_1 izateko baldintzak. Ordea, ikus dezagun ez dela T_2:

A.E.|

Demagun edozein $x, y \in \mathbb{R}$ ezberdin hartuta, existitzen direla U eta V ireki disjuntu ez-hutsak halakoak non $x \in U$ eta $y \in V$ diren. Orduan,

$$\left.\begin{aligned} U, V \in \tau_{kof} &\Longrightarrow \mathbb{R} - U \text{ eta } \mathbb{R} - V \text{ finituak} \\ U \cap V = \emptyset &\Longrightarrow U \subseteq \mathbb{R} - V \text{ eta } V \subseteq \mathbb{R} - U \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \#$$

Beraz, $\mathbb{R}$ infinitua denez, $\mathbb{R} - U$ edo $\mathbb{R} - V$ finituak izateko, halabeharrez, U eta V infinituak izan behar dira. Kontraesana daukagu ezin delako multzo infinitu bat finitu batean barruan egon. Beraz, (X, τ_{kof}) ez da T_2 eta aurkitu dugu T_1 den eta T_2 ez den adibide bat.

(iii) Erabilgarria izango delakoan, ohartu T_1 eta T_2 axiomak hedatu egiten direla topologia finagoetara; hau da, $\tau_1 \subset \tau_2$ badira

$$(X, \tau_1)T_i \Longrightarrow (X, \tau_2)T_i \quad i = 1, 2$$

Oraingoz, oso ezagunak diren banantze-axiomak landu ditugu. Ondoren, sakonagoak diren axiomekin hasiko gara. Axioma hauek puntuen arteko banantzeak alde batera utziko dituzte eta multzoen arteko banantzeak aztertuko dituzte:

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *erregularra* dela edozein $A \in \mathcal{C}$ eta $x \notin A$ hartuta, U eta V ireki disjuntuak existitzen badira halakoak non $x \in U$ eta $A \subseteq V$ diren.

Oharra.

Espazio erregularrak ez dira zertan T_2 izan:

Izan bedi (X, τ) non $X = \{0, 1, 2, 3\}$ eta $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{2, 3\}, X\}$ diren. Espazio topologiko honetan, $\mathcal{C} = \{X, \{2, 3\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ dugunez, errez ikus daiteke erregularra dela. Bestalde, $x = 0$ eta $y = 1$ hartuta,

$$\left.\begin{aligned} x \in U \Longrightarrow U = \{0, 1\} \text{ edo } U = X \\ y \in V \Longrightarrow V = \{0, 1\} \text{ edo } V = X \end{aligned}\right\}$$

Edozein kasutan $U \cap V \neq \emptyset$ daukagu eta, ondorioz, espazioa ez da T_2.

Arazo hau ekiditeko eta axiomen arteko katea osatu ahal izateko, ondorengo eran definituko dugu T_3 axioma:

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_3 dela T_1 espazio erregularra denean. Espazio hauek baita *Hausdorff erregular* moduan ere ezagutzen dira.

Proposizioa 2.0.7.

Izan bedi (X, τ) *espazio topologikoa, orduan*

$$T_3 \Longrightarrow T_2$$

Oharrak.

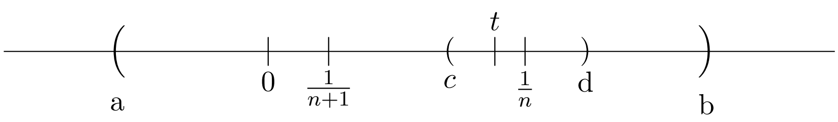
(i) Edozein T_3 espazio T_1 denez, bertan atomoak itxiak dira. Hau erabiliz berehala froga daiteke proposizioa.

(ii) Kontrako inplikazioa ez da egia, baina hemen kontraadibideak ez dira horren errezak izango. Adibidez, har dezagun modu honetan definituta dagoen $(\mathbb{R}, \tau)$ espazio topologikoa: $x \neq 0$ motako puntuen inguruneak ohiko inguruneak dira, $x = 0$ puntuaren inguruneak $U - F$ motakoak dira, U ohiko ingurunea eta $F = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ izanik. Topologia hau ohiko topologia baino finagoa denez, $U - F \subseteq U$ dagoelako, eta ohiko topologia T_2 denez, topologia hau ere T_2 izango da. Gainera, $F \in \mathcal{C}$ dugu eta $0 \notin F$ betetzen da, baina, ezinezkoa da hauek biak ireki disjuntuen bitartez banantzea:

A.E.

Demagun $U, V \in \tau$ existitzen direla halakoak non $0 \in U$ eta $F \subseteq V$ diren. Beraz, har ditzagun ondorengoak:

- Oinarriko ireki bat 0 barruan duena eta U multzoaren parte dena: $(a, b) - F$.
- $n \in \mathbb{N}$ egokia $\frac{1}{n} \in (a, b)$ izateko.
- Oinarriko ireki bat $\frac{1}{n}$ barruan duena eta V multzoaren parte dena: (c, d).
- Hartu $t \in \mathbb{R}$ non $t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ den eta $t > c$.



Gauzak horrela, $t \in U \cap V = \emptyset \Longrightarrow \#$

Beraz, T_2 den, baina T_3 ez den espazio topologikoa aurkitu dugu.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *guztiz erregularra* dela edozein A itxi eta $y \notin A$ hartuta, existitzen bada $f : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzio jarraitua halakoa non $f(y) = 0$ eta $f(x) = 1$ den $x \in A$ guztietarako.

Ohartu, nahiko dela aurkitzea funtzio jarraitu bat $f(x) = b$ eta $f(y) = a$ duena $y \in A$ guztietarako non $a \neq b$ den.

Oharra.

Espazio guztiz erregularrak ere ez dira zertan T_2 izan; adibidez (X, τ) bikoiti-bakoiti topologia. Bertan, $X = \mathbb{N}$ dugu eta $\beta = \{\{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \emptyset\}$ oinarria izango da. Espazio topologiko hau ez da T_2 izango, ezin baitira bi zenbaki bikoiti irekien bidez banandu. Ohartu $\tau = \mathcal{C}$ dugula. Ondorioz edozein $A \in \mathcal{C}$ eta $y \notin A$ hartuta, χ_A funtzio karakteristikoa da espazioa guztiz erregularra izateko behar dugun funtzioa. Izan ere, A multzoa aldi berean irekia eta itxia denez, 1.3.8 proposizioa erabiliz, χ_A behe- eta goi-erdijarraitua izango da, hau da, jarraitua izango da; eta jakina $\chi_A(x) = 1$ da $x \in A$ guztietarako eta $\chi_A(y) = 0$ da $y \notin A$ dugulako. Dena den, axiomen arteko katea mantentzeko, ondorengo moduan definitzen da hurrengo axioma:

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa $T_{3\frac{1}{2}}$ dela T_1 espazio guztiz erregularra denean.

Momentu honetan, normala litzateke galdetzea axioma honen zenbakiagatik. Egia esan, banantze-axiomak hasiera batean T_0, T_1, T_2, T_3 eta T_4 ziren (T_4 beranduago ikusiko dugu). Axioma hauek finkatu zirenean, oraindik espazio guztiz erregularrak gehiegi aztertu gabeko espazioak ziren eta horregatik, sakonki aztertu zenean, T_3 eta T_4 artean zegoela ohartu ziren. Momentu horretan broma gisa $T_{3\frac{1}{2}}$ moduan jarri zuten, baina denboraren poderioz matematikari askok horrela jarraitu dute idazten. Axioma hau betetzen duten espazioak *Tychonoff* izenaz ere ezagutzen dira hainbat liburutan.

Proposizioa 2.0.8.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa, orduan

$$T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3$$

Oharrak.

(i) Espazio guztiz erregularrak erregularrak dira eta ondorioz frogapena berehalakoa da. Ikusteko espazio guztiz erregularrak erregularrak direla, hartu $A \in \mathcal{C}$, $x \notin A$ eta $f : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzio jarraitua halakoa non $f(x) = 0$ eta $f(y) = 1$ den $y \in A$ guztietarako; orduan $U = [f < \frac{1}{2}]$

eta $V = [f > \frac{1}{2}]$ ireki disjuntuak dira halakoak non $x \in U$ eta $A \subseteq V$ diren.

(ii) Kontrako inplikazioa ez da egia, baina kontraadibidieak oso arraroak dira. *Tychonoff Corkscrew* adibideetako bat da; [11] liburuan 109. orrialdean ikusten da T_3 espazioa dela, baina ez dela $T_{3\frac{1}{2}}$.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *normala* dela edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntuak hartuta existitzen badira $U, V \in \tau$ disjuntuak non $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$ diren.

Proposizioa 2.0.9.

Edozein (X, τ) espazio topologikorako ondorengoak baliokideak dira:

(i) *(X, τ) normala da.*

(ii) *Edozein $A \in \mathcal{C}$ eta $U \in \tau$ halakoa non $A \subseteq U$ den, orduan existitzen da $V \in \tau$ non*

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

diren.

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Izan bitez edozein $A \in \mathcal{C}$ eta $U \in \tau$ halakoa non $A \subseteq U$ den. Orduan, $A \cap (X - U) = \emptyset$ dugunez,

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{C} \\ B = X - U \in \mathcal{C} \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists V, W \in \tau \text{ disjuntuak } : A \subseteq V \text{ eta } B \subseteq W.$$

Hemen, V, W disjuntuak direnez, $V \subseteq X - W \in \mathcal{C}$ beraz, $\overline{V} \subseteq X - W$. Bestalde, $B = X - U \subseteq W$ denez, $X - W \subseteq U$ dugu baita. Gauzak horrela:

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X - W \subseteq U$$

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Izan bitez edozein $A, B \in \mathcal{C}$ eta $A \cap B = \emptyset$. Orduan, ondorengo egoera daukagu:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{C} \\ X - B \in \tau \\ A \subseteq X - B \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists V \in \tau : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X - B.$$

Hau da, $A \subseteq V$ eta $B \subseteq X - \overline{V}$ eta azken hau irekia da: $X - \overline{V} \in \tau$. $\square$

Ondoren aurkeztuko dugun teorema topologiako oso teorema garrantzitsua da. Dagoeneko *Ampliación de Topología* irakasgaian landutako teorema bada ere, ondoren ikusiko dugun frogapena lanean zehar landutako tresnak erabiltzen ditu; eskalak adibidez.

Lema 2.0.10. (***Urysohnen Lema***)

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan (X, τ) normala da baldin eta soilik baldin edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntuetarako existitzen bada f jarraitua halakoa non

$$\begin{aligned} f : (X, \tau) &\longrightarrow ([0,1], \tau_u) \\ x \in A &\Longrightarrow f(x) = 0 \\ x \in B &\Longrightarrow f(x) = 1 \end{aligned}$$

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Inplikazio honetan, edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntu hartuta eskala bat definituko dugu behar dugun funtzioa eraikitzeko bidean. Has gaitezen definitzen U_p irekien familia ordenatua $p \in \mathbb{Q}$ bakoitzerako. $\mathbb{Q}$ zenbakigarria denez, beti existituko da $\mathbb{N}$ eta $\mathbb{Q}$ arteko funtzio bijektibo bat. Beraz, $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ multzoa hartzen badugu, $h : \mathbb{N} \longrightarrow P$ bijektiboa existituko da eta P ondorengo eran deskriba dezakegu:

$$P = \{h(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Orain, gure asmoa da edozein $p < q \in P$ hartuta $\overline{U_p} \subseteq U_q$ izatea eta aldi berean, $U_p \in \tau$ egotea. Orokortasuna galdu gabe, demagun $r_1 = 0$ eta $r_2 = 1$ direla P segidako lehen bi elementuak. Nahi ditugun ireki berezi horiek definitzeko espazio normalen karakterizazioetako bat erabiliko dugu, aurreko 2.0.9 proposizioan ikusitakoa:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{C} \\ X - B = U_1 \in \tau \\ A \subseteq X - B \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, U_0 \in \tau : A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$$

Beraz, lehen bi indizeetarako irekiak ondo moldatzen dira. Orain, indukzioaren bitartez, ikus dezagun P segidako elementu bakoitzerako eraiki dezakegula ireki bat eta edozein $p < q$ hartuta, $\overline{U_p} \subseteq U_q$ beteko dela. P_n izendatuko dugu P segidako lehenengo n elementuak dituen multzo gisa. Horrela indukzioa n gainean egingo dugu. Dagoeneko $n = 2$ kasua eginda dago ($\overline{U_0} \subseteq U_1$). Demagun orain, jada edozein $p \in P_n$ hartuta U_p irekiak eraiki ditugula eta

$$p < q \in P_n \Longrightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q \tag{2.1}$$

betetzen dela. Behin indukzio hipotesia onartuta dagoela, har dezagun r_{n+1} segidako hurrengo zenbaki arrazionaal eta $P_{n+1} = P_n \cup \{r_{n+1}\}$. Demagun p_0 eta q_0 direla r_{n+1} zenbakiaren ondoz ondokoak P_{n+1} multzoan:

$$P_{n+1} = \{0, \dots, p_0, r_{n+1}, q_0, \dots, 1\} \quad \text{ordenatuz gero.}$$

Beraz, $p_0, q_0 \in P_n \Longrightarrow \overline{U_{p_0}} \subseteq U_{q_0}$ eta normaltasuna erabiliz,

$$\exists U_{r_{n+1}} \in \tau : \overline{U_{p_0}} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U_{r_{n+1}}} \subseteq U_{q_0}.$$

Hortaz, 3 egoera ezberdin izan ditzazkegu $s, t \in P_{n+1}$ hartuta $s < t$:

(i) $s, t \in P_n \overset{(2.1)}{\Longrightarrow} \overline{U_s} \subseteq U_t$

(ii) $s \leq p_0$ eta $t = r_{n+1} \Longrightarrow \overline{U_s} \subseteq \overline{U_{p_0}} \subseteq U_t \Longrightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$

(iii) $s = r_{n+1}$ eta $q_0 \leq t \Longrightarrow \overline{U_s} \subseteq U_{q_0} \subseteq U_t \Longrightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$

Edozein kasutan irekiek betezen dute nahi genuena eta ondorioz, indukzioa erabiliz, $p \in P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ guztietarako U_p irekiak definitu ditugu ondoko baldintza beteko dutenak:

$$\forall p < q \in P, \ \overline{U_p} \subseteq U_q.$$

Gainera

$$U_p = \emptyset, \ p < 0$$
$$U_p = X, \ p > 1$$

definituz, p eta q edozein zenbaki arrazional izan daitezke eta orandik ere $\overline{U_p} \subseteq U_q$ beteko da $p < q$ guztietarako. Dagoeneko definitu ditugu gure eskalak behar dituen irekiak; beraz, hurrengo pausua eskala bera definitzea da:

$$\mathcal{F} = \{U_p : p \in \mathbb{Q}\}.$$

Honela definituz,

$$\bigcap_{p \in \mathbb{Q}} U_p = \emptyset, \quad \bigcup_{p \in Q} U_p = X$$

ziurtatuta daukagu. Gainera,

$$f(x) = \inf\{t : x \in U_t\}$$

moduan definituz,

$$\left.\begin{array}{r} \nexists U_p : p < 0, x \in U_p \Longrightarrow f(x) \geq 0 \\ \forall x \in X, \forall p > 1, x \in U_p \Longrightarrow f(x) \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$$

Beraz, f funtzioa nahi dugun moduan definituta dago. Gainera U_p guztiak irekiak direnez, $\overline{U_p} \subseteq \overset{\circ}{U_q}$ daukagu $p < q$ guztietarako eta 1.2.4 proposizioagatik baldintza nahikoa da $f(x)$ funtzioa jarraitua izateko.

Bukatzeko, ikus dezagun f funtzioak A eta B multzoak behar bezala banantzen dituen. Horretarako, gogora dezagun $A \subseteq U_0 \subseteq U_1 = X - B$ betetzen dela:

$$x \in A \Longrightarrow x \in U_p, p \geq 0 \Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in U_t\} = 0$$
$$x \in B \Longrightarrow x \notin U_1 \Longrightarrow x \in U_p, \forall p > 1 \Longrightarrow f(x) = \inf\{t : x \in U_t\} = 1$$

$\underline{\Longleftarrow}\rfloor$

Hemen, edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntuetarako badakigu existitzen dela f funtzio jarraitu bat halakoa non $f(x) = 0$ den $x \in A$ guztietarako eta $f(x) = 1$ den $x \in B$ guztietarako. Beraz, $U = [f < \frac{1}{2}] \in \tau$ eta $V = [f > \frac{1}{2}] \in \tau$ definituz, U eta V disjuntuak dira; f jarraitua denez, irekiak dira eta $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$. $\square$

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_4 dela T_1 espazio normala denean.

Korolarioa 2.0.11.

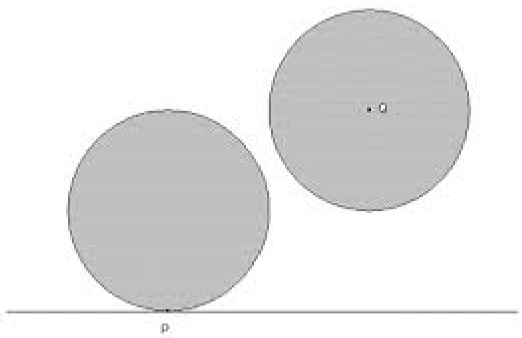
Izan bedi (X, τ) *espazio topologikoa, orduan*

$$T_4 \Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$$

Oharrak.

(i) Atomoak itxiak direla eta Urysohn-en lema erabiliz, berehalakoa da aurreko korolarioa.

(ii) Kontrakoa ez da egia. Mooren planoa, adibidez:



moduan irudikatu daitekeena, ikus daiteke, $T_{3\frac{1}{2}}$ dela, baina ez dela T_4. [11] liburuan 100. orrialdean ikusten da *Niemytzki's Tangent Disc Topology* izenarekin.

Definizioa.

Esango dugu A eta B multzoak *bereizirik* daudela edo *bereiziak* direla $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ denean.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *guztiz normala* dela $A, B \subseteq X$ bereizi guztietarako existitzen badira $U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$ diren.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_5 dela T_1 espazio guztiz normala denean.

Proposizioa 2.0.12.

Izan bedi (X, τ) *espazio topologikoa, orduan*

$$T_5 \Longrightarrow T_4$$

Oharrak.

(i) Edozein multzo itxiren itxitura multzoa bera denez, espazio guztiz normalak normalak dira eta ondorioz frogapena berehalakoa da.

(ii) Kontrakoak ez du zertan egia izan. Adibidez, *Alexandroffen karratua*, [11] liburuan 120. orrialdean aztertzen denez, T_4 espazioa da, baina ez da T_5 espazioa.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *perfektuki normala* dela edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntu hartuta existitzen bada $f : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzio jarraitua halakoa non $A = f^{-1}(0)$ eta $B = f^{-1}(1)$ diren.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa T_6 dela T_1 espazio perfektuki normala denean.

Proposizioa 2.0.13.

Izan bedi (X, τ) *espazio topologikoa, orduan*

$$T_6 \Longrightarrow T_5$$

Oharrak.

(i) Kasu honetan, aurrekoetan ez bezala, frogapena ez da berehalakoa. Inplikazio hori frogatzeko, lehenik, 3 emaitza ikusi behar dira:

- Edozein espazio topologiko guztiz normala da baldin eta soilik baldin edozein $A \subseteq X$ hartuta, (A, τ_A) espazio normala bada. Froga: [4, 65.or.].
- Edozein espazio topologiko T_6 da baldin eta soilik baldin T_4 bada eta edozein multzo itxi irekien ebakidura kontagarri moduan jar badaiteke. Froga: [4, 69.or.].
- T_6 axioma propietate heredagarria da. Froga: [4, 68.or.].

Orain bai, T_6 heredagarria denez, edozein $A \subseteq X$ hartuta (A, τ_A) espazioa T_6 izango da. Ondorioz, (A, τ_A) normala da. Beraz, edozein $A \subseteq X$ hartuta, (A, τ_A) normala da, baliokideki espazioa guztiz normala izango da eta ondorioz T_5.

(ii) Kontrakoa ez da egia. Adibidez, *Fort-en espazio ez-kontagarria*, [11] liburuan 52. orrialdean ikusten denez, T_5 espazioa da, baina ez da T_6.

Honekin banantze-axiomen atala bukatutzat emango dugu. Aipatzekoa da banantze-axiomei dagokionez, badaudela beste zenbait propietate eta erlazio garrantzitsu lan honetan agertuko ez direnak lanaren hedapena mugatua dela eta. Gure kasuan, helburua banantze-axiomen eta funtzioen txertatze propietateen arteko erlazioa aztertzea da; 3. kapituluan ikusiko dugun moduan.

3. Kapitulua

Funtzioen txertatzea banantze-axiometan

Atal honetan, "A strengthening of the Katetov-Tong insertion theorem " artikulua sakonki landuko dugu. Dagoeneko landu ditugu artikulua ulertzeko behar genituen tresna guztiak, baina hala ere, zailatasun handiko teoremak lantzen dira artikuluan zehar. Horregatik esaten dugu atal hau dela memoriako erronkarik handiena. Bertan, espazio normalen eta guztiz normalen karakterizazio berriak landuko ditugu funtzioen txertaketa erabiliz. Bukatzeko, "Sandwich-type characterization of completely regular spaces " artikulua ere landuko dugu. Azken artikulu honetan, aurrekoaren ideiarekin jarraitzen da eta espazio guztiz erregularretarako funtzioen txertaketaren bidezko karakterizazio bat lortzen da.

Lagungarri izango delakoan, zenbait notazio berri sartuko dugu azpiatal honetan. (X, τ) idatzi beharrean, X soilik idatziko dugu espazio topologikoaz ari garenean. $F(X)$ familia X espaziotik $\mathbb{R}$ multzorako funtzio erreal guztien familia da. Edozein $t \in \mathbb{R}$ izanik, $\mathbf{t} \in F(X)$ funtzioa $\mathbf{t}(x) = t$ funtzio konstantea izango da. Izendatuko ditugu $LSC(X)$, $USC(X)$ eta $C(X)$ funtzio behe-, goi- eta jarraituen familia gisa, guztiak $F(X)$ familiako funtzioak izanik. Atal honetan ere, sup $(\bigvee)$ eta inf $(\bigwedge)$ notazioak erabiliko ditugu behin eta berriro. Gainera, $\mathcal{A} \subseteq F(X)$ bada, idatziko ditugu $\mathcal{A}^* = \{a^* : a \in \mathcal{A}\}$ eta era berean $\mathcal{A}_* = \{a_* : a \in \mathcal{A}\}$.

3.1 Espazio normalak eta funtzioen txertatzea

Azpi atal honi hasiera emateko funtzioen txertatze moduko lema bat ikusiko dugu, kasu honetan funtzio behe-erdijarraitu bat txertatu ahal izango dugu:

Lema 3.1.1.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f, g \in F(X)$ non $f \leq g$ diren. Baldin eta, $L \subseteq LSC(X)$ eta $U \subseteq USC(X)$ familia kontagarriak badira halakoak non:

$$\left.\begin{aligned} f &\leq \sup L \leq \sup L^* \leq g \\ f &\leq \inf U_* \leq \inf U \leq g \end{aligned}\right\}$$

diren. Orduan, existitzen da $h \in LSC(X)$ non $f \leq h \leq h^* \leq g$ den.

Frogapena.

Izenda ditzagun L eta U familietako funtzioak ondorengo eran:

$$L = \{l_i : i \in \mathbb{N}\}$$

eta

$$U = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Orduan, h ondorengo eran eraikiko dugu:

$$\begin{aligned} h_1 &= l_1 \\ h_2 &= l_2 \wedge (u_1)_* \\ h_3 &= l_3 \wedge \Big((u_1)_* \wedge (u_2)_*\Big) \\ h_4 &= l_4 \wedge \Big((u_1)_* \wedge (u_2)_* \wedge (u_3)_*\Big) \\ &\vdots \\ h_n &= l_n \wedge \bigwedge_{i<n} (u_i)_* \ , \ \ n \geq 2. \end{aligned}$$

Ohartu, $h_j \in LSC(X)$ dugula $j \in \mathbb{N}$ guztietarako funtzio behe-erdijarraituen infimo finituak ari garelako egiten (1.3.7 proposizioa). Bukatzeko

$$h = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} h_n$$

eta horrela $h \in LSC(X)$ dugu behe-erdijarraituen supremoa behe-erdijarraitua delako (1.3.7 proposizioa). Orain, saia gaitezen ikusten sortu berri dugun h funtzio hau f eta g artean txerta dezakegun:

$$f \leq \Big(\bigvee L\Big) \wedge \Big(\bigwedge U_*\Big) = \Big(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} l_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge U_*\Big) = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \Big(l_i \wedge \Big(\bigwedge U_*\Big)\Big) \leq$$

$$\leq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \Big(l_i \wedge \bigwedge_{j<i} (u_j)_*\Big) = l_1 \vee \bigvee_{\substack{i \geq 2 \\ i \in \mathbb{N}}} \Big(l_i \wedge \bigwedge_{j<i} (u_j)_*\Big) = h.$$

Beraz, badaukagu $f \leq h$. Gainera, edozein $m, n \in \mathbb{N}$ hartuta:

$$m \leq n \Longrightarrow h_m \leq l_m \leq \sup\{l_i : i \leq m\} \leq \sup\{(l_i)^* : i \leq m\} \leq \sup\{(l_i)^* : i \leq n\}$$
$$n < m \Longrightarrow h_m \leq \inf\{(u_i)_* : i < m\} \leq \inf\{u_i : i < m\} \leq u_n$$

Edozein kasutan ondorioztα dezakeguna ondorengoa da:

$$h_m \leq \Big(\bigvee_{i \leq n} (l_i)^*\Big) \vee u_n \in USC(X).$$

Azken hori goi-erdijarraitua da goi-erdijarraituen supremo finitua goi-erdijarraitua delako. Orduan, edozein $n \in \mathbb{N}$ har daitekeenez:

$$h_m \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Big(\Big(\bigvee_{i \leq n} (l_i)^*\Big) \vee u_n\Big) \in USC(X)$$

eta oraindik ere, goi-erdijarraituen infimoa denez, goi-erdijarraitua da. Gainera $m \in \mathbb{N}$ edozein izan daitekeenez:

$$h = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} h_m \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Big(\Big(\bigvee_{i \leq n} (l_i)^*\Big) \vee u_n\Big) \in USC(X).$$

Hortaz, h^* funtzioa h baino handiago edo berdina den funtzio goi-erdijarraiturik txikiena denez:

$$h^* \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Big(\Big(\bigvee_{i \leq n} (l_i)^*\Big) \vee u_n\Big) \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigvee L^* \vee u_n\Big) = \bigvee L^* \vee \bigwedge U \leq g.$$

Hau da, aurkitu dugu $h \in LSC(X)$ halakoa non:

$$f \leq h \leq h^* \leq g$$

$\square$

Ondorengo proposizioan azalduko ditugun 3 propietateak oso erabilgarriak izango dira:

Proposizioa 3.1.2.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f, g \in F(X)$. Orduan, $\mathcal{H} \subseteq F(X)$ eta $t \in \mathbb{R}$ edozein hartzen baditugu:

(i)
$$[\sup \mathcal{H} > t] = \bigcup_{\substack{h \in \mathcal{H} \\ n \in \mathbb{N}}} [h \geq t + \frac{1}{n}]$$

(ii)
$$[\inf \mathcal{H} < t] = \bigcup_{\substack{h \in \mathcal{H} \\ n \in \mathbb{N}}} [h \leq t - \frac{1}{n}]$$

(iii) *$f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ badira, $[f > t]$ eta $[g < t]$ bereizirik daude.*

Frogapena.

(i)
$$[\sup \mathcal{H} > t] = \bigcup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ n\in\mathbb{N}}} [h \geq t + \frac{1}{n}]$$

$\subseteq\rfloor$

Izan bedi $x \in [\sup \mathcal{H} > t]$. Orduan,
$$\sup \mathcal{H}(x) = \bigvee_{i\in I} h_i(x) > t$$

Orduan, $\bigvee_{i\in I} h_i(x) > t$ denez, existituko da $i_0 \in I$ non $h_{i_0}(x) > t$ den. Beste era batera esanda, $h_{i_0}(x) - t > 0$. Orduan, existituko da $n_0 \in \mathbb{N}$ non
$$0 < \frac{1}{n_0} < h_{i_0}(x) - t$$
den. Beraz,
$$x \in [\sup \mathcal{H} > t] \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, i_0 \in I : h_{i_0}(x) > t + \frac{1}{n_0} \Longrightarrow$$
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, i_0 \in I : h_{i_0}(x) \geq t + \frac{1}{n_0} \Longrightarrow x \in \bigcup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ n\in\mathbb{N}}} [h \geq t + \frac{1}{n}]$$

$\supseteq\rfloor$

Izan bedi $x \in \bigcup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ n\in\mathbb{N}}} [h \geq t + \frac{1}{n}] \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, h' \in \mathcal{H} : h'(x) \geq t + \frac{1}{n_0} > t$.

Beraz, $h'(x) > t$ denez, $\big(\sup \mathcal{H}\big)(x) > t$ da, hau da, $x \in [\sup \mathcal{H} > t]$ da.

(ii)
$$[\inf \mathcal{H} < t] = \bigcup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ n\in\mathbb{N}}} [h \leq t - \frac{1}{n}]$$

Aurreko ataleko argudio berdina erabiliz frogatzen da.

(iii) Demagun $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ direla orduan, ikusi behar dugu $[f > t]$ eta $[g < t]$ benetan bereiziak diren. Gogora dezagun, definizioak esaten duela $[f > t]$ eta $[g < t]$ bereizirik egongo direla baldin eta: bada. Berdintzetako bat frogatuko duguabsurdura eramanez; bestea oso antzera egiten da:

A.E.$\rfloor$

Demagun existitzen dela $x \in \overline{[f > t]} \cap [g < t]$. Orduan,

- $x \in [g < t] \Longrightarrow g(x) < t \Longrightarrow f^*(x) < t.$
- $x \in \overline{[f > t]} \Longrightarrow \forall N \in \mathcal{N}_x, N \cap [f > t] \neq \emptyset \Longrightarrow$

$$\forall N \in \mathcal{N}_x,\ \exists y_0 \in N : f(y_0) > t \Longrightarrow \forall N \in \mathcal{N}_x,\ \bigvee_{y \in N} f(y) > t.$$

Bukatzeko, infimoa behe-bornerik handiena denez:

$$f^*(x) = \bigwedge_{N \in \mathcal{N}_x} \bigvee_{y \in N} f(y) \geq t \Longrightarrow \#$$

Ohar bezala, aipatzea dago, hemen frogatu dugula $\overline{[f > t]} \subseteq [f^* \geq t]$ dela.

Bigarren baldintza, $[f > t] \cap \overline{[g < t]} = \emptyset$, era berean frogatzen da f^* funtzioaren ordez g_* erabiliz.

$\square$

Ondoren azalduko dugun emaitza 3.1.1 lemaren korolario modura uler daiteke. Bertan $A \in F_\sigma$ motako multzoekin lan egingo dugu. Multzo horiek, itxien bildura kontagarriak izango dira. Ohartu, horrek ez duela ziurtatzen A bera itxiak denik. Era berean, G_δ definitzen da irekien ebakidura kontagarrietarako.

Korolarioa 3.1.3.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan, espazioa normala da baldin eta soilik baldin edozein $A, B \in F_\sigma$ bereizi hartuta, existitzen badira $U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$ diren.

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Izenda ditzagun ondorengo eran A eta B multzoak:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \text{eta} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \quad : \ F_n, G_n \in \mathcal{C}.$$

Beraz, 3.1.1 lema erabili nahi badugu, multzoetarako daukagun hizkuntza hau funtzio hizkuntzara eraman behar dugu. Horretarako, funtzio karakteristikoak erabiliko ditugu. Ohartu $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ eta $X - B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X - G_n$ direnez, funtzioak ondorengo eran ere defini daitezkela:

$$f = \chi_A = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \chi_{F_n}$$

eta

$$g = \chi_{X-B} = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \chi_{X-G_n}.$$

Gure ondorengo helburua 3.1.1 lemako L eta U familiak aurkitzea da. Horretarako, espazioa normala dela erabiliko dugu eta espazio hauen karakterizazioetako bat:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \overline{B} = \emptyset \Longrightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq X - \overline{B} = \overset{\circ}{\overbrace{X-B}} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, F_n \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X-B}} \\ \overline{A} \cap B = \emptyset \Longrightarrow B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \subseteq X - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X-A}} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, G_n \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X-A}} \end{array}\right\}$$

eta espazio normala denez

$$\exists U_n \in \tau : F_n \subseteq U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X-B}} \subseteq X - B$$

$$\exists V_n \in \tau : G_n \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X-A}} \subseteq X - A.$$

Bigarren kateari buelta emango diogu:

$$A \subseteq X - \overline{V_n} \subseteq X - V_n \subseteq X - G_n.$$

Orain, U_n irekiak eta $X - V_n$ itxiak direnez, 1.3.8 proposizioagatik, dagozkien funtzio karakteristikoak behe- eta goi-erdijarraituak izango dira hurrenez hurren:

$$L = \{\chi_{U_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq LSC(X)$$

eta

$$U = \{\chi_{X-V_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq USC(X).$$

Ikus dezagun L eta U familia hauek behar bezala eraiki ditugun Horretako, 1.4.2 proposizioa erabili behar izango dugu,

- Alde batetik,

$$f = \chi_A = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{F_n} \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{U_n} \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (\chi_{U_n})^* = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\overline{U_n}} \leq \chi_{X-B} = g.$$

  Hau da,

$$f \leq \bigvee L \leq \bigvee L^* \leq g.$$

- Bestetik,

$$f = \chi_A \leq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{X-\overline{V_n}} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\overset{\circ}{\overbrace{X-V_n}}} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (\chi_{X-V_n})_* \leq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{X-V_n}$$

$$\leq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{X-G_n} = \chi_{X-B} = g.$$

  Hau da,

$$f \leq \bigwedge U_* \leq \bigwedge U \leq g.$$

Orduan, 3.1.1 lema erabiliz, exisititzen da $h \in LSC(X)$ non

$$\chi_A \leq h \leq h^* \leq \chi_{X-B}$$

den. Bukatzeko, funtzioetarako lortu dugun emaitza hau multzoetara pasatuko dugu eskalak erabiliz:

$$A = [\chi_A > 1/2] \subseteq [h > 1/2] \subseteq [h^* \geq 1/2] \subseteq [\chi_{X-B} \geq 1/2] = X - B.$$

Emaitza hau bitan bananduz:

$$\begin{aligned} A &\subseteq U = [h > 1/2] \\ B &\subseteq V = X - [h^* \geq 1/2] = [h^* < 1/2] \end{aligned}$$

dugu $U, V \in \tau$ izanik eta $U \cap V = \emptyset$ dugu $U \subseteq X - V$ baitugu.

$\underline{\Longleftarrow}\rfloor$

Espazio normalen definizioa erabiliko dugu. Edozein $A, B \in \mathcal{C}$ disjuntu hartuta, ohartu $A, B \in F_\sigma$ direla. Gainera, itxi disjuntuak direnez, bereiziak izango dira. Ondorioz, existitzen dira $U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$ diren.

$\square$

Ondoren azalduko dugun teorema memoria osoko teoremarik indartsuena da. Bertan espazio normalen bi karakterizazio ikusiko ditugu, biak funtzioen txertatze moduko karakterizazioak. Bigarrena bereziki ezaguna da, *Katetov-Tong* teorema, hain zuzen ere. Izenda dezagun lehenik $USC_\sigma(X)$ familia. Familia horretan dauden funtzioak funtzio goi-erdijarraituen supremo kontagarriak dira. Ohartu, $f \in USC_\sigma(X)$ badugu, ez duela esan nahi $f \in USC(X)$ dugunik. Era berean defini daiteke $LSC_\delta(X)$ funtzio behe-erdijarraituen infimo kontagarrien familia bezala.

Teorema 3.1.4.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa, orduan ondorengoak baliokideak dira:

(i) (X, τ) *normala.*

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} f \in USC_\sigma(X) \\ g \in LSC_\delta(X) \\ f \leq g_* \text{ eta } f^* \leq g \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists h \in LSC(X) : f \leq h \leq h^* \leq g.$$

(iii) (*Katetov-Tong teorema*)

$$\left.\begin{array}{l} f \in USC(X) \\ g \in LSC(X) \\ f \leq g \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists h \in C(X) : f \leq h \leq g.$$

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Izan bitez $f \in USC_\sigma(X)$ eta $g \in LSC_\delta(X)$. Orduan,

$$f = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} f_i \quad \text{da,} \quad f_i \in USC(X) \text{ izanik}$$

eta

$$g = \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} g_i \quad \text{da,} \quad g_i \in LSC(X) \text{ izanik.}$$

Ondoren, $r \in \mathbb{Q}$ edozein hartzen badugu 3.1.2 proposizioa erabiliz:

$$[f > r] = [\bigvee_{i\in\mathbb{N}} f_i > r] = \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} [f_i \geq r + \frac{1}{n}]$$

eta

$$[g < r] = [\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} g_i < r] = \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} [g_i \leq r - \frac{1}{n}].$$

Ohartu hauek biak ez direla zertan itxiak izan, baina biak badira F_σ motakoak, hau da, itxien bildura kontagarriak. Bestalde, $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ direnez,

$$\overline{[f > r]} \cap [g < r] = \emptyset = [f > r] \cap \overline{[g < r]}.$$

Beraz, aurreko korolarioa erabiliz, espazioa normala denez, existitzen da $r \in \mathbb{Q}$ guztietarako $U_r \in \tau$ halakoa non

$$[f > r] \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq [g \geq r] \qquad (\clubsuit)$$

den. Orain, frogapena bi kasutan bananduko dugu:

(a) $f, g : X \longrightarrow [0, 1]$

Izan bedi $r \in [0, 1]$ eta erabil dezagun f funtzioaren deskribapen berri hauek:

$$\begin{aligned} f &= \bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I} (\mathbf{r} \wedge \chi_{[f>r]}) = \bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I} (\mathbf{r} \wedge \chi_{[f\geq r]}) \\ &= \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I} (\mathbf{r} \vee \chi_{[f>r]}) = \bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I} (\mathbf{r} \vee \chi_{[f\geq r]}) \end{aligned}$$

Berdintza hauen arrazoia hurrengoa da: $f(x) > r$ eta $f(x) \leq r$ kasuak bereiztuz,

$$f(x) > r \Longrightarrow \mathbf{r}(x) \wedge \chi_{[f>r]}(x) = r \wedge 1 = r$$
$$f(x) \leq r \Longrightarrow \mathbf{r}(x) \wedge \chi_{[f>r]}(x) = r \wedge 0 = 0$$

eta ondorioz,

$$\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{[f>r]})=\bigvee_{\substack{r\in\mathbb{Q}\cap I\\ f(x)<r}} r=\sup\{r\in\mathbb{Q}\cap I: f(x)>r\}=f(x).$$

Beste berdintzekin antzera argudiatuko litzateke. Orain, 3.1.1 lema erabiltzea da gure asmoa. Horretarako defini ditzagun L eta U funtzio behe- eta goi-erdijarraituen familiak. Aurreko pausoan lortu ditugun U_r irekiak erabiliz, (♣) betetzen dutenak, har ditzagun:

$$L=\{\mathbf{r}\wedge\chi_{U_r}: r\in\mathbb{Q}\cap I\}\subseteq LSC(X)$$

eta

$$U=\{\mathbf{r}\vee\chi_{\overline{U_r}}: r\in\mathbb{Q}\cap I\}\subseteq USC(X).$$

Orduan, berriz ere 1.4.2 proposizioa erabiliz,

$$f=\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{[f>r]})\leq\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{U_r})=\bigvee L\leq\bigvee L^*=$$

$$=\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{U_r})^*=\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{\overline{U_r}})\leq\bigvee_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\wedge\chi_{[g\geq r]})=g.$$

Bestalde, $[f>r]\subseteq U_r\subseteq\overset{\circ}{\overline{U_r}}$ erabiliz:

$$f=\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\vee\chi_{[f>r]})\leq\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\vee\chi_{\overset{\circ}{\overline{U_r}}})=\bigwedge U_*\leq$$

$$\leq\bigwedge U=\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\vee\chi_{\overline{U_r}})\leq\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}\cap I}(\mathbf{r}\vee\chi_{[g\geq r]})=g.$$

Orduan, 3.1.1 lemako hipotesiak betetzen dituzten L eta U familiak aurkitu ditugu. Beraz, existitzen da $h\in LSC(X)$ non $f\leq h\leq h^*\leq g$ diren eta lortu dugu nahi genuen emaitza.

(b) $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$

Izan bedi $h:\mathbb{R}\longrightarrow(0,1)$ homeomorfismo gorakorra, hortaz, h aplikazioak infimoak eta supremoak gordetzen dituenez,

$$(h\circ f)^*=h\circ f^*\quad eta\quad (h\circ g)_*=h\circ g_*.$$

Gauzak horrela, $h\circ f$, $h\circ g: X\longrightarrow[0,1]$ eta $h\circ f\in USC_\sigma(X)$ eta $h\circ g\in LSC_\delta(X)$ direnez, aurreko (a) atala erabiliz, existitzen da $h':X\longrightarrow[0,1]$ non $h'\in LSC(X)$ eta $h\circ f\leq h'\leq(h')^*\leq h\circ g$ den. Orduan,

$$f\leq h^{-1}\circ h'\leq h^{-1}\circ(h')^*=(h^{-1}\circ h')^*\leq g.$$

Orduan, h homeomorfismoa denez, $h^{-1}\circ h'$ da bilatzen ari ginen funtzio behe-erdijarraitua.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Orokortasuna galdu gabe, demagun $f, g : X \longrightarrow I$ direla non $I = [0, 1]$ eta gainera, $f \leq g$ eta goi- eta behe-erdijarraituak, hurrenez hurren. Ondorioz,

$$f \in USC(X) \Longrightarrow f \in USC_\sigma(X)$$
$$g \in LSC(X) \Longrightarrow g \in LSC_\delta(X).$$

Bestalde, $f = f^*$ eta $g = g_*$ direnez, $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ ditugu, beraz, (ii) erabiltzeko hipotesiak betetzen direnez, existitzen da $l_0 \in LSC(X)$ non $f \leq l_0 \leq l_0^* \leq g = l_1$ den.

Hemen, Urysohn-en leman, 2.0.10 leman, egin genuen argudio berdina erabiltzen da; hipotesia erabiliz, kasu honetan, irekien familia beharrean, l_r funtzio behe-erdijarraituen familia bat osatzen da: $L = \{l_r : r \in \mathbb{Q} \cap I\}$. Bertan, edozein $r \in \mathbb{Q} \cap I$ hartuta $l_0 \leq l_r \leq l_1$ izango dira eta gainera, $r < s$ bada, $l_r^* \leq l_s$. Behin L familia osatu dugula, ondorengo eran definituko ditugu U_r irekiak:

$$U_r = \begin{cases} \emptyset, & r < 0 \\ [l_r > 1 - r], & r \in [0, 1] \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

Izan ere, $l_r \in LSC(X)$ denez, $U_r \in \tau$ dugu. Gainera, $r < s$ hartuta,

$$\overline{U_r} = \begin{cases} \emptyset, & r < 0 \\ \overline{[l_r > 1 - r]}, & r \in [0, 1] \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

eta $\overline{[l_r > 1 - r]} \subseteq [l_r^* \geq 1 - r] \subseteq [l_s \geq 1 - r] \subseteq [l_s > 1 - s]$ betetzen denez, ondorengo eran ordena daitezke U_r irekiak edozein $r \in \mathbb{Q} \cap I$ hartuta:

$$[l_r > 1 - r] = U_r \subseteq \overline{U_r} = [l_r^* \geq 1 - r] \subseteq [l_s > 1 - s] = U_s.$$

Beraz,
$$k(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in U_r\}$$
definituz, $k : X \longrightarrow I$ da eta jarraitua izango da $\overline{U_r} \subseteq \overset{\circ}{U_s}$ delako.

Bukatzeko, $f \leq l_r \leq g$ denez r guztietarako, $[f > 1 - r] \subseteq [l_r > 1 - r] = U_r \subseteq [g > 1 - r]$ izango da, hau da, $1 - g \leq k \leq 1 - f$. Hortaz, $h = 1 - k$ izendatzen badugu:
$$f \leq h \leq g.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i)

Izan bitez $F, G \in \mathcal{C}$ disjuntuak. Orduan, $F \subseteq X - G$ denez eta $F \in \mathcal{C}$ eta

$X - G \in \tau$ ditugunez,

$$\left.\begin{array}{r}\chi_F \in USC(X)\\ \chi_{X-G} \in LSC(X)\\ \chi_F \leq \chi_{X-G}\end{array}\right\} \overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \exists\, h \in C(X) \text{ eta } \chi_F \leq h \leq \chi_{X-G}.$$

Beraz,

$$\begin{aligned} F = [\chi_F > 1/2] \subseteq [h > 1/2] = U \in \tau \\ G = [\chi_{X-G} < 1/2] \subseteq [h < 1/2] = V \in \tau \end{aligned}$$

eta $U \cap V = \emptyset$. □

Ondoren, espazio guztiz normalen karakterizazioekin hasiko gara. Lehenik, erabilgarria izango zaigun propietate bat frogatuko dugu.

Proposizioa 3.1.5.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f, g \in F(X)$ halakoak non $f \leq g$ den. Orduan, ondorengoak baliokideak dira:

(i) *Existizen da $h \in LSC(X) : f \leq h \leq h^* \leq g$.*

(ii) *Edozein $r \in \mathbb{Q}$ hartuta existitzen dira $U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $[f > r] \subseteq U$ eta $[g < r] \subseteq V$ diren.*

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Izan bedi $r \in \mathbb{Q}$ edozein, orduan

$$f \leq h \leq h^* \leq g \Longrightarrow [f > r] \subseteq [h > r] \subseteq \overline{[h > r]} \subseteq [h^* \geq r] \subseteq [g \geq r]$$

Beraz,

$$\begin{aligned} &[f > r] \subseteq [h > r] = U \in \tau \quad (h \in LSC(X) \text{ delako}) \\ &[g < r] \subseteq [h^* < r] = V \in \tau \quad (h^* \in USC(X) \text{ delako}) \end{aligned}$$

eta $h \leq h^*$ denez, ezin da existitu $x \in X$ non $h(x) > r$ eta $h^*(x) < r$ diren. Beraz, U eta V disjuntuak dira.

(ii)$\Longrightarrow$ (i)

Ohartu atal hau dagoeneko frogatuta dagoela. Izan ere, 3.1.4 teoremako (i)$\Longrightarrow$(ii) zatian, normaltasuna erabili eta gero, ikusi dugu $U, V \in \tau$ disjuntuak existitzea halakoak non $[f > r] \subseteq U$ eta $[g < r] \subseteq V$ diren baldintza nahikoa dela (i) betetzeko. □

Aurreko emaitzaren ondorio gisa, espazio guztiz normalen txertatze karakterizazioa lortuko dugu. Horrela, T_5 axioma ere funtzioen txertatze moduko axioma bat bezala aurkeztu ahal izango dugu.

Korolarioa 3.1.6.

Izan bedi X espazio topologikoa. Orduan hurrengoak baliokideak dira.

(i) *X guztiz normala da.*

(ii) *$f, g \in F(X)$ eta $f^* \leq g$, $f \leq g_*$ betetzen badira, orduan existitzen da $h \in LSC(X)$ non $f \leq h \leq h^* \leq g$ diren.*

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Izan bitez $f, g \in F(X)$ eta $f^* \leq g$, $f \leq g_*$ betetzen dutenak. Orduan, 3.1.2 proposizioko (iii) atala erabiliz, edozein $r \in \mathbb{Q}$ hartuta $[f > r]$ eta $[g < r]$ bereiziak dira. Beraz, espazioa guztiz normala denez, $\exists U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $[f > r] \subseteq U$ eta $[g < r] \subseteq V$ diren. Ondorioz, aurreko proposizioa dela eta, existitzen da $h \in LSC(X)$ non $f \leq h \leq h^* \leq g$ den.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Izan bitez $A, B \in \mathcal{C}$ bi multzo bereizi. Orduan,

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \Longrightarrow \overline{A} \subseteq X - B \Longrightarrow (\chi_A)^* = \chi_{\overline{A}} \leq \chi_{X-B}$$

$$A \cap \overline{B} = \emptyset \Longrightarrow A \subseteq X - \overline{B} = \overset{\circ}{\overbrace{X - B}} \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_{\overset{\circ}{\overbrace{X-B}}} = (\chi_{X-B})_*$$

Hipotesiz, existitzen da $h \in LSC(X)$ non $\chi_A \leq h \leq h^* \leq \chi_{X-B}$ diren. Hortaz,

$$\chi_A \leq h \Longrightarrow A = [\chi_A > 1/2] \subseteq [h > 1/2] = U \in \tau \quad (h \in LSC(X))$$

$$h^* \leq \chi_{X-B} \Longrightarrow B = [\chi_{X-B} < 1/2] \subseteq [h^* < 1/2] = V \in \tau \quad (h^* \in USC(X))$$

eta noski U eta V disjuntuak dira. □

Ondoren azalduko dugun emaitza espazio perfektuki normalen funtzioen txertatze bidezko karakterizazio bat da. Emaitza hau [9] artikuluan azaltzen da. Emaitza hau aurkeztuko dugu, baina ez dugu froga egingo. Aipatutako artikuluan froga eginda dago, baina beste tresna batzuk erabili behar dira; memoria honetatik kanpo daudenak.

Teorema 3.1.7.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan, espazioa perfektuki normala da baldin eta soilik baldin edozein $f \in USC(X)$ eta $g \in LSC(X)$ funtzioetarako halakoak non $f \leq g$ diren, existitzen da $h \in C(X)$ non $f \leq h \leq g$ den eta honez gain $f(x) < g(x)$ den guztietarako, $f(x) < h(x) < g(x)$ dugun.

3.2 Espazio guztiz erregularrak eta funtzioen txertatzea

Ondorengo azpiatalean "Sandwich-type characterization of completely regular spaces "artikuluko emaitzak aztertuko ditugu. Gure asmoa da espazio guztiz erregularretarako dagoen karakterizazioa aztertzea. Horretarako kontzeptu gutxi batzuk aztertu behar izango ditugu lehenik. Artikulu honetan erabiltzen diren funtzio guztiak funtzio errealak dira $I = [0, 1]$ tartera doazenak. Orokortasunik ez da galtzen hau suposatzeagatik eta gauzak asko erraz ditzake hainbat unetan. Orokorrean, gainontzeko notazioa berdina izango da, baina orain, $F(X, I)$ moduko notazioa erabiliko dugu adierazteko funtzioak I tartera doazela; $C(X, I)$ funtzio jarraituetarako eta abar.

Ikusiko ditugun lehen bi emaitzek espazio guztiz erregularren karakterizazio berriak emango dizkigute. Lehenak funtzio karakteristikoak erabiliz hain zuzen ere. Horretarako, lehenik definizio berri bat aurkeztu behar dugu.

Definizioa.

Izan bedi X espazio topologikoa eta $A, B \subseteq X$. Esango dugu A eta B *guztiz bereizirik* daudela edo *guztiz bereiziak* direla existitzen bada $f \in C(X)$ non $f(x) = 1$ den $x \in A$ guztietarako eta $f(x) = 0$ edozein $x \in B$ hartuta. Baliokideki $\chi_A \leq f \leq \chi_{X-B}$. Kasu hauetan esango dugu f funtzio horrek A eta B multzoak guztiz bereizten dituela.

Definizio honekin, espazio guztiz erregularrak karakterizatzeko modu berri bat lortuko dugu: espazio topologiko bat guztiz erregularra izango da baldin eta soilik baldin edozein itxi eta bertan ez dauden puntuak guztiz bereiziak badira. Karakterizazio honekin, ondorengo proposizioa berehalakoa da:

Proposizioa 3.2.1.

Izan bedi X espazio topologikoa. Orduan, espazioa guztiz erregularra da baldin eta soilik baldin edozein $U \in \tau$ eta $y \in U$ hartuta existitzen bada $f \in C(X, I)$ non $\chi_{\{y\}} \leq f \leq \chi_U$ den.

Ondorengo proposizioan estalkiak erabiliko dira espazio guztiz erregularrak karakterizatzeko:

Proposizioa 3.2.2.

Edozein X espazio topologikoa guztiz erregularra da baldin eta soilik baldin edozein U irekirako existitzen bada estalki ireki bat: $\mathcal{V}$, halakoa non edozein $V \in \mathcal{V}$ hartuta existitzen da $f_V \in C(X, I)$ non $\chi_V \leq f_V \leq \chi_U$ den.

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Izan bedi $U \in \tau$ edozein. Espazioa guztiz erregularra denez, edozein $y \in U$ hartuta existituko da $g_y \in C(X, I)$ non $\chi_{\{y\}} \leq g_y \leq \chi_U$ den. Orduan, izenda ditzagun $V_y = [g_y > 1/2]$ multzoak, irekiak direnak g_y jarraitua delako eta $f_y = \min\{1, 2g_y\}$ funtzioa. Gauzak horrela, $\mathcal{V} = \{V_y\}_{y \in U}$ familia U multzoaren estalki irekia daukagu eta funtzioak horrela konpara daitezke:

$$\chi_{V_y}(x) = \begin{cases} 0, & g_y(x) \leq 1/2 \\ 1, & g_y(x) > 1/2 \end{cases} \quad , \quad f_y(x) = \begin{cases} 2g_y(x), & g_y(x) \leq 1/2 \\ 1, & g_y(x) \geq 1/2 \end{cases}$$

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 0, & x \notin U \\ 1, & x \in U \end{cases}$$

alde batetik, argi dago $\chi_{V_y} \leq f_y$ dela, bestetik, $x \notin U$ bada $g_y(x) = 0$ denez, $f_y \leq \chi_U$ ere berehalakoa da.

$\Longleftarrow\rfloor$

Berehalakoa da 3.2.1 proposizioa erabiliz. □

Definizioa.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f \in C(X, I)$ funtzioa. Esango dugu f *trinko erakoa* dela edozein $t \in (0, 1]$ hartuta eta $\mathcal{H} \subseteq USC(X, I)$ non $\min\{f, \inf \mathcal{H}\} < \mathbf{t}$ den, existitzen bada $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ finitua halakoa non $\min\{f, \inf \mathcal{H}_0\} < \mathbf{t}$ den oraindik ere.

Ondoren trinko erako kontzeptu berri honen hainbat propietate aurkeztuko ditugu. Lehenengoak, funtzio erdijarraituen antzeko karakterizazio emango digu:

Propietateak.

Izan bedi X espazio topologikoa. Orduan,

(i) $f \in F(X, I)$ trinko erakoa da baldin eta soilik baldin $[f \geq t]$ trinkoa bada $t \in (0, 1]$ guztietarako.

(ii) $A \subseteq X$ trinkoa da baldin eta soilik baldin χ_A trinko erakoa bada.

(iii) X trinkoa bada, orduan $USC(X, I)$ familiako funtzio guztiak trinko erakoak dira.

(iv) X espazioa Hausdorff bada eta $f \in F(X, I)$ trinko erakoa, orduan $f \in USC(X, I)$.

Frogapena.

(i)

Izan bitez $f \in F(X)$ trinko erako funtzioa eta edozein $t \in (0,1]$. Har dezagun $[f \geq t]$ multzoaren $\mathcal{U}$ estalki ireki bat. Orduan, bi aukera ditugu:

$$f(x) < t$$

$$f(x) \geq t \Longrightarrow x \in [f \geq t] \Longrightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U} : x \in U_0 \Longrightarrow \bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \chi_{X-U}(x) < t$$

Edozein kasutan:

$$\min(f, \bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \chi_{X-U}) < \mathbf{t}.$$

Hipotesiz, $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ azpifamilia finitua har daiteke

$$\min(f, \bigwedge_{U \in \mathcal{U}_0} \chi_{X-U}) < \mathbf{t}$$

izanik. Hortaz, $f(x) \geq t$ bada, $\bigwedge_{U \in \mathcal{U}_0} \chi_{X-U} < t$ da derrigor eta ondorioz, existitzen da $U_0 \in \mathcal{U}_0$ non $\chi_{X-U_0}(x) = 0$ den, hau da, $x \in U_0$. Beraz, edozein $x \in [f \geq t]$ hartuta existituko da $U_0 \in \mathcal{U}_0$ non $x \in U_0$ den, baliokideki $[f \geq t] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} U$. Beraz, $[f \geq t]$ trinkoa da.

Alderantziz, izan bitez $t \in (0,1]$ edozein eta $\mathcal{H} \subseteq USC(X, I)$ familia halakoa non

$$\min(f, \bigwedge \mathcal{H}) < \mathbf{t}$$

den. Orduan,

$$\emptyset = [\min(f, \bigwedge \mathcal{H}) \geq t] = [f \geq t] \cap [\bigwedge \mathcal{H} \geq t]$$

3.1.2 proposizioa erabiliz, $[\bigwedge \mathcal{H} \geq t] = \bigcap_{h \in \mathcal{H}} [h \geq t]$ denez:

$$\emptyset = [f \geq t] \cap \bigcap_{h \in \mathcal{H}} [h \geq t].$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned} [f \geq t] &\subseteq X - \bigcap_{h \in \mathcal{H}} [h \geq t] \\ &= \bigcup_{h \in \mathcal{H}} X - [h \geq t] \in \tau. \end{aligned}$$

Hipotesiz, existituko da $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ azpiestalki finitua non

$$[f \geq t] \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{H}_0} X - [h \geq t]$$

den. Baliokideki:

$$\emptyset = [f \geq t] \cap \bigcap_{h \in \mathcal{H}_0} [h \geq t] = [\min(f, \bigwedge \mathcal{H}_0) \geq t].$$

Eta honek esan nahi du,

$$\min(f, \bigwedge \mathcal{H}_0) < \mathbf{t}$$

(ii)

Berehalakoa da (i) eta $A = [\chi_A > t]$ dela $t \in (0, 1]$ guztietarako erabiliz.

(iii)

Berehalako da espazio trinko batean, itxia izatea baldintza nahikoa delako trinkoa izateko.

(iv)

Berehalako da Heine-Borel teoremagatik badakigulako, T_2 espazioetan, trinkoak direla itxiak eta bornatuak diren multzoak. □

Azpiatal honen azken helburua espazio guztiz erregularren karakterizazio berriak ezagutzea da. Hori ikusi aurretik, ondorengo teorema hau ikusi behar dugu. Teorema honen froga, memoriaren hedapena dela eta, ez dugu emango. Dena den, jakin bedi, teorema honen frogapenean, 3.1.4 proposizioaren frogaren antzera egiten dela (funtzioen eraikuntza), baina egoera konplikatuago batean. [1] artikuluan zein [7] artikuluan aurki daitezke frogak.

Teorema 3.2.3.

Izan bitez X espazio topologikoa eta $f, g \in F(X)$ edozein funtzio halakoak non $f \leq g$ den. Orduan, ondorengoak baliokideak dira:

(i) *Existitzen da $h \in C(X, I)$ halakoa non $f \leq h \leq g$ den.*

(ii) *Edozein $s < t \in I$ hartuta, $[f \geq t]$ eta $[g \leq s]$ guztiz bereiziak dira.*

Ondoren memoriako azken teorema aurkeztuko dugu. Bertan, espazio guztiz erregularren karakterizazio berri bi lantzen dira: multzoak erabiliz eta funtzioen txertaketa erabiliz.

Teorema 3.2.4.

Izan bedi X espazio topologikoa, orduan ondorengoak baliokideak dira:

(i) *Espazio topologikoa guztiz erregularra da.*

(ii) *Edozein $A \subseteq X$ trinko eta $B \subseteq X$ itxi disjuntuetarako A eta B guztiz bereizirik daude.*

(iii) *Edozein $f \in F(X)$ trinko erakoa eta $g \in LSC(X,I)$ badira halakoak non $f \leq g$ den, orduan existitzen da $h \in C(X,I)$ non $f \leq h \leq g$ den.*

Frogapena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Har ditzagun A eta B (ii) atalekoak bezala. Orduan $A \subseteq X - B$ daukagu eta $X - B$ irekia da. Espazioa guztiz erregularra denez, 3.2.2 proposizioaren ondorioz, existitzen da $\mathcal{V}$ familia $X - B$ multzoaren estalki irekia dena halakoa non $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako $h_V \in C(X,I)$ existitzen den non $\chi_V \leq h_V \leq \chi_{X-B}$ den. Baina, A trinkoa denez, $\mathcal{V}$ estalkiaren azpiestalki finitu bat existitu behar da: $\mathcal{V}_0$. Beraz, $A \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V$ da eta ondorioz

$$\chi_A \leq \chi_{\bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V} = \bigvee_{V \in \mathcal{V}_0} \chi_V \leq \bigvee_{V \in \mathcal{V}_0} h_V = h \leq \chi_{X-B}$$

eta h jarraitua da funtzio jarraituen supremo finitua delako.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Hipotesiak erabiliz, ondorengo egoeran gaude:

$$\left.\begin{array}{l} A = [f \geq t] \text{ trinkoa} \\ B = [g \leq s] \in \mathcal{C} \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \text{ A eta B guztiz bereiziak dira } \overset{3.2.3\, Teorema}{\Longrightarrow}$$

$$\exists h \in C(X,I) : f \leq h \leq g.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i)

Edozein $U \in \tau$ eta $x \in U$ hartuz, hurrengo egoera daukagu:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_{\{x\}} \text{ trinko erakoa} \\ \chi_U \in LSC(X,I) \\ \chi_{\{x\}} \leq \chi_U \end{array}\right\} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \exists h \in C(X,I) : \chi_{\{x\}} \leq h \leq \chi_U$$

eta ondorioz gure espazioa guztiz erregularra da. $\square$

A. Eranskina

Espazio erabat ez-konexuak

Eranskin honetan espazio normalen kasu duala ikusiko dugu: espazio erabat ez-konexuak. Lehenik, ez-konexutasunarekin erlazionaturik dauden definizio batzuk garatuko ditugu eta hauei buruzko emaitza erabilgarriak. Ikusiko dugun moduan, definizio hauetako batzuek banantze-axioma batzuren modukoak izango dira. Emaitza dual hauek itxien eta irekien arteko paperak trukatuko dituzte.

Definizioa.

Esango dugu (X, τ) espazio topologikoa *erabat ez-konexua* (EEK) dela edozein $A \in \tau$ hartuta, $\overline{A} \in \tau$ bada.

Adibideak.

(i) (X, τ_{disk}) espazioan azpimultzo guztiak irekiak direnez, $A \in \tau_{disk}$ edozein hartuta, $\overline{A} \in \tau_{disk}$ izango dugu.

(ii) (X, τ_{kof}) non X infinitua eta $\tau_{kof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ finitua}\} \cup \{\emptyset\}$ diren.
X infinitua denez, $X - A$ finitua izateko A bera infinitua izan behar du. Ondorioz, A infinitua $\Longleftrightarrow \overline{A} = X \in \tau_{kof}$.

Proposizioa A.0.5.

Demagun (X, τ) espazioa Hausdorff dela. Orduan,

$$(X, \tau) \text{ EEK} \Longrightarrow (X, \tau) \text{ ez-konexua.}$$

Frogapena.

Gure espazioa Hausdorff denez, edozein $x, y \in X$ ezberdinak hartuta, existituko dira $U, V \in \tau$ disjuntuak halakoak non $x \in U$ eta $y \in V$ diren. Orduan, (X, τ) EEK denez, $\overline{U} \in \tau$ da, baina aldi berean $X - \overline{U} \in \tau$ ere. Hau da, lortu ditugu bi ireki $\overline{U}$ eta $X - \overline{U} \in \tau$ disjuntuak eta bien bildura espazio osoa da. Ikusten baldin badugu hutsak ez direla, frogatu dugu espazioa ez-konexua dela. Alde batetik, $x \in U \subseteq \overline{U}$, beraz $\overline{U}$ ez da hutsa. Bestetik, $y \in V$ eta $U \cap V = \emptyset$ denez, $V \subseteq X - U$ da, eta beraz, $V = \overset{\circ}{V} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X - U}} = X - \overline{U}$. Ondorioz, $X - \overline{U}$ ez da hutsa eta frogapena bukatu dugu. $\square$

Oharrak.

(i) Ohartu, aurreko proposizioak ez duela esaten baldintza baliokideak direnik. Ondorengo kontraadibidearekin ikusiko dugu espazio topologiko ez-konexu bat EEK ez dena:
Izan bedi $X = [0,1) \cup (2,3] \subseteq \mathbb{R}$. Kasu honetan, argi dago (X, τ_X) ez-konexua dela:

$$\begin{array}{ll} U = [0,1) \in \tau_X & V = (2,3] \in \tau_x \\ U \cap V = \emptyset & U \cup V = X \end{array}$$

Baina, betetzen al da

$$A \in \tau_X \overset{?}{\Longrightarrow} \overline{A} \in \tau_X.$$

Ez, $A = [0, 1/2) \in \tau_X$ daukagu, baina, $\overline{A} = [0, 1/2] \notin \tau_X$.

(ii) Espazio topologikoa Hausdorff izatea beharrezko baldintza da aurreko proposizioa egia izateko. Izan ere, (X, τ_{kof}) hartzen badugu, T_2 ez dena, ikusiko dugu proposizioa ez dela betetzen. Gogora dezagun $\tau_{kof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ finitua }\} \cup \{\emptyset\}$ dela X infinitua izanik. Bestetik, adibideetan ikusi dugu EEK dela, ondoriozta dezakegu ez-konexua dela? Ez, (X, τ_{kof}) konexua baita: Ez dago ireki disjunturik.

Ondoren, espazio erabat ez-konexuen 4 karakterizazio ezberdin ikusiko ditugu. Emaitza honetan, bereziki (iv) eta (v) karakterizazioetan, espazio erabat ez-konexuen eta espazio normalen arteko dualtasuna ikusiko dugu. Karakterizazioetako batek espazio normalaren definizioarekin eta besteak 2.0.9 proposizioarekin ezarriko ditu erlazioak. Bi karakterizazio hauek, ireki eta itxien arteko paperak trukatuko dituzte.

Proposizioa A.0.6.

Ondorengoak baliokideak dira:

(i) (X, τ) *EEK da.*

(ii) $\forall F \in \mathcal{C}$, $\overset{\circ}{F} \in \mathcal{C}$.

(iii) $\forall U, V \in \tau$ *disjuntuak* $\Longrightarrow \overline{U}$ *eta* $\overline{V}$ *disjuntuak dira.*

(iv) $\forall U, V \in \tau$ *disjuntuak,* $\exists F, G \in \mathcal{C}$ *disjuntuak non* $U \subseteq F, V \subseteq G$ *diren.*

(v) $\forall U \in \tau$, $F \in \mathcal{C}$ *non* $U \subseteq F$ *den,* $\exists G \in \mathcal{C}$, $V \in \tau$ *non* $U \subseteq G \subseteq V \subseteq F$ *diren.*

Frogapena.

$\boxed{\text{(i)}\Longrightarrow\text{(ii)}}$

Demagun (X,τ) EEK dela. Orduan, $A \in \tau$ hartuta $\overline{A} \in \tau$ da ere. Beraz, edozein $F \in \mathcal{C}$ hartzen badugu:

$$F \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow X - F \in \tau \overset{Hip}{\Longrightarrow} \overline{X - F} = X - \overset{\circ}{F} \in \tau \Longleftrightarrow \overset{\circ}{F} \in \mathcal{C}.$$

$\boxed{\text{(ii)}\Longrightarrow\text{(iii)}}$

Edozein $U, V \in \tau$ disjuntu hartzen baditugu:

$$U \cap V = \emptyset \Longleftrightarrow U \subseteq X - V \Longrightarrow \overline{U} \subseteq \overline{X - V} = X - \overset{\circ}{V} = X - V$$

$$\Longleftrightarrow \overline{U} \subseteq X - V \Longleftrightarrow \overline{U} \cap V = \emptyset \Longleftrightarrow V \subseteq X - \overline{U} = \overset{\circ}{\overbrace{X - U}}.$$

Hemen, U irekia denez $X - U$ itxia izango da eta hipotesia erabiliz, $\overset{\circ}{\overbrace{X - U}}$ ere itxia izango da, beraz,

$$\overline{V} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X - U}} = X - \overline{U} \Longleftrightarrow \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

$\boxed{\text{(iii)}\Longrightarrow\text{(iv)}}$

Edozein $U, V \in \tau$ disjuntuak hartuta, $U \subseteq \overline{U}$ eta $V \subseteq \overline{V}$ betetzen da eta hipotesiz badakigu $\overline{U}$ eta $\overline{V}$ disjuntuak direla. Beraz, $F = \overline{U}$ eta $G = \overline{V}$ izendatuz, nahikoa daukagu.

$\boxed{\text{(iv)}\Longrightarrow\text{(v)}}$

Izan bitez $U \in \tau$, $F \in \mathcal{C}$ eta $U \subseteq F$. Orduan,

$$\left.\begin{aligned} U \in \tau \\ X - F \in \tau \\ (X - F) \cap U = \emptyset \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \exists G, H \in \mathcal{C} : G \cap H = \emptyset, \text{ eta } U \subseteq G,\ X - F \subseteq H.$$

Beraz, alde batetik $X - H \subseteq F$ eta bestetik, $G \subseteq X - H$ direnez, hurrengoa ondoriozta daiteke:

$$U \subseteq G \subseteq X - H \subseteq F$$

$G \in \mathcal{C}$ eta $X - H \in \tau$ direlarik.

$\boxed{\text{(v)}\Longrightarrow\text{(i)}}$

Izan bedi edozein $U \in \tau$. Orduan, $U \subseteq \overline{U}$ denez, eta azken hau itxia denez, hipotesia erabiliz, existitzen dira $G \in \mathcal{C}$ eta $V \in \tau$ halakoak non

$$U \subseteq G \subseteq V \subseteq \overline{U}$$

diren. Ondorioz,

$$\overline{U} \subseteq G \subseteq V \subseteq \mathring{\overline{U}} \Longrightarrow \overline{U} \subseteq \mathring{\overline{U}} \Longrightarrow \overline{U} = \mathring{\overline{U}} \Longrightarrow \overline{U} \in \tau.$$

$\square$

Ondoren, Urysohn-en lemaren emaitza duala aurkeztuko dugu, hau da, itxiak beharrean, ireki disjuntuak banantzen dituen funtzio jarraituaren existentzia:

Proposizioa A.0.7.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan (X, τ) EEK da baldin eta soilik baldin edozein $U, V \in \tau$ disjuntuetarako $f : X \longrightarrow ([0,1], \tau_u)$ jarraitua existitzen bada halakoa non $f(U) = \{0\}$ eta $f(V) = \{1\}$ diren.

Frogapena.

$\Longrightarrow\rfloor$

Frogapenaren inplikazio hau, Urysohn-en lemaren berdina da eskalako multzoen eraikuntzan izan ezik. Beraz, multzo horien eraikuntza egingo dugu eta gainontzeko guztia Urysohn-en lematik jarraitu daiteke.

Edozein $U, V \in \tau$ disjuntu hartzen ditugunez, $U_1 = X - \overline{U}$ izendatuko dugu. Espazioa EEK denez, $\overline{U}$ irekia da eta ondorioz U_1 aldi berean itxia eta irekia da. Bestalde, $U \cap V = \overline{U} \cap V = \emptyset$ denez, $V \subseteq U_1$. Orduan, A.0.8 proposizioaren (v) atala erabiliko dugu:

$$\exists A \in \tau,\ B \in \mathcal{C} : V \subseteq B \subseteq A \subseteq U_1.$$

Hemen, $U_0 = \mathring{B}$ izendatuz, lortuko dugu U_0 irekia eta itxia izatea aldi berean (espazioa EEK delako) eta gainera $U_0 \subseteq U_1$. Hau izango litzateke indukziorako hasiera kasua. Ondoren, indukzio hipotesia:

$$\forall p \in P_n,\ U_p \in \tau, U_p \in \mathcal{C}$$

horrez gain,

$$p < q \in P_n \Longrightarrow U_p \subseteq U_q.$$

Horrela, beste $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ gehitzean, eta $p_0 = \max\{p \in P_n : p < r\}$, $q_0 = \min\{q \in P_n : q > r\}$ hartuz,

$$U_{p_0} \subseteq U_{q_0} : U_{p_0} \in \tau, U_{q_0} \in \mathcal{C} \Longrightarrow \exists A \in \tau, B \in \mathcal{C} : U_{p_0} \subseteq B \subseteq A \subseteq U_{q_0}.$$

Bukatzeko, $U_r = \mathring{B}$ izendatuz, lortzen dugu aldi berean irekia eta itxia den multzoa eta $U_{p_0} \subseteq U_r$ eta $U_r \subseteq U_{q_0}$ betetzen duena.

Beraz, U_r multzoak erabiliz Urysohn-en leman bezala eskala bat sortzeko, nahi genuen funtzioa lortzen dugu. Funtzioak bete beharreko baldintzak antzeko eran ere egiaztatzen dira.

$\Longleftarrow$

Ikusteko espazioa EEK dela A.0.8 proposizioaren (iv) atala erabiliko dugu. Edozein $U, V \in \tau$ hartuta, f funtzio jarraitua existitzen denez halakoa non $f(U) = \{0\}$ den eta $f(V) = \{1\}$ den, ondorengo multzoak defini ditzazkegu:

$$F = f^{-1}(\{0\})$$

eta

$$G = f^{-1}(\{1\})$$

Horrela, $F, G \in \mathcal{C}$ ditugu f jarraitua izateagatik eta atomoak itxiak direlako ohiko topologian. Gainera disjuntuak dira eta $U \subseteq F$ eta $V \subseteq G$ ditugunez, nahiko daukagu (iv) karakterizazioa erabiliz espazioa EEK dela esateko. $\square$

Ondorengo proposizioak, espazio erabat ez-konexuen funtzioen bidezko karakterizazioak emango dizkigu.

Proposizioa A.0.8.

Izan bedi X espazio topologikoa. Frogatu ondorengo baliokidetasunak:

(i) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio goi-erdijarraitua* $\Longrightarrow f_*$ *jarraitua.*

(ii) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio behe-erdijarraitua* $\Longrightarrow f^*$ *jarraitua.*

(iii) (X, τ) *EEK da.*

(iv)

$$\left.\begin{array}{l} f,g : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \textit{ behe-erdijarraitua} \\ g \textit{ goi-erdijarraitua} \\ f \leq g \end{array}\right\} \Longrightarrow f^* \leq g_* .$$

Ebazpena.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Uler dezagun (i) propietatea ondorengo eran: $t \in \mathbb{R}$ edozein hartuta, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ goi-erdijarraitua denez, $[g < t]$ irekia da. Orduan propietateak esaten du, $[g_* < t]$ ere irekia dela. Izan ere, azken horrek g_* funtzioaren goi-erdijarraitutasuna bermatzen du eta ondorioz jarraitutasuna ere, dagoeneko g_* behe-erdijarraitua delako. Beraz, har dezagun $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ behe-erdijarraitua.

$$[f > t] \in \tau \quad \forall t \in \mathbb{R} \overset{f=-g}{\Longleftrightarrow} [g < -t] \in \tau \quad \forall t \in \mathbb{R} \overset{(i)}{\Longrightarrow} [g_* < -t] \in \tau \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beraz, $g = -f$ denez, $g_* = (-f)_* = -f^*$ dugu eta ondorioz:

$$[-f^* < -t] = [f^* > t] \in \tau \quad \forall t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow f^* \text{ behe-erdijarraitua da } \Longrightarrow$$

$$f^* \text{ jarraitua da.}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Ikusiko dugu edozein irekiren itxitura irekia dela ere. Izan bedi $A \in \tau$ edozein. Orduan, A multzoaren funtzio karakteristikoa hartzen badugu, χ_A behe-erdijarraitua da 1.3.8 proposizioa dela eta. Hipotesiz, $(\chi_A)^*$ ere behe-erdijarraitua izango da eta 1.4.2 proposizioa erabiliz, $(\chi_A)^* = \chi_{\overline{A}}$ da. Ondorioz, berriro 1.3.8 proposizioa erabiliz, $\overline{A} \in \tau$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv)

Demagun (X, τ) espazio topologikoa EEK dela, eta ondorengo bi funtzioak ditugula: $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ behe- eta goi-erdijarraituak hurrenez hurren eta $f \leq g$. Beste era batera esanda, $t \in \mathbb{R}$ edozein hartuta

$$[f > t] \in \tau, \quad [g \geq t] \in \mathcal{C} \quad \text{eta } [f > t] \subseteq [g \geq t].$$

Orain, hipotesiz, A.0.8 proposizioa erabiliz, badakigu V irekia eta G itxia existituko direla halakoak non:

$$[f > t] \subseteq G \subseteq V \subseteq [g \geq t]$$

diren. Funtzioen hizkuntzan adieraziz:

$$f \leq \chi_G \leq \chi_V \leq g.$$

Bukatzeko, V irekia eta G itxia direnez, χ_G goi-erdijarraitua da eta χ_V behe-erdijarraituak ditugu. Baina,f^* funtzioa f baino handiagoa edo berdina den funtzio goi-erdijarraiturik txikiena denez, $f^* \leq \chi_G$. Era berean, $\chi_V \leq g_*$.

$$f^* \leq \chi_G \leq \chi_V \leq g_* \Longrightarrow f^* \leq g_*.$$

(iv)$\Longrightarrow$(i)

Izan bedi $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ goi-erdijarraitua. Gainera, edozein funtziorako $f_* \leq f$ denez, hipotesia erabiliz:

$$\left.\begin{array}{l} f_* \text{ behe-erdijarraitua} \\ f \text{ goi-erdijarraitua} \\ f_* \leq f \end{array}\right\} \Longrightarrow (f_*)^* \leq f_* \Longrightarrow (f_*)^* = f_*$$

Horrek esan nahi du, 1.4.3 teoremagatik, f_* funtzioa goi-erdijarraitua dela eta ondorioz jarraitua dela. $\square$

Ondorengo proposizioak 3.1.4 teoremako *Katetov-Tong* teoremarekin eraikiko du dualtasuna:

Proposizioa A.0.9.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan, espazioa EEK da baldin eta soilik baldin edozein $f \in LSC(X)$ eta $g \in USC(X)$ funtzioetarako halakoak non $f \leq g$ diren, existitzen bada $h \in C(X)$ halakoa non $f \leq h \leq g$ den.

Frogapena.

$\Longrightarrow\lrcorner$

Hipotesiz, f funtzioa behe-erdijarraitua da, gainera espazioa EEK denez, A.0.8 proposizioa erabiliz, f^* jarraitua izango da. Gainera g goi-erdijarraitua denez, eta f^* funtzioa f baino handiago edo berdina den funtzio goi-erdijarraiturik txikiena denez, $f^* \leq g$. Hau da, $f \leq f^* \leq g$, non f^* jarraitua den.

$\Longleftarrow\lrcorner$

Hemen ere, A.0.8 proposizioa erabiliko dugu; (iv). atala hain zuzen ere. Kasu honetan, edozein $f \in LSC(X)$ eta $g \in USC(X)$ funtzioetarako halakoak non $f \leq g$ diren, existitzen denez $h \in C(X)$ halakoa non $f \leq h \leq g$ den, ondorengo egoera daukagu;

$$\left.\begin{array}{r} f \leq h \Longrightarrow f^* \leq h^* = h \\ h \leq g \Longrightarrow h = h_* \leq g_* \end{array}\right\} \Longrightarrow f^* \leq g_*.$$

$\square$

Memoria osoan zehar, funtzioen txertatze bidezko hainbat karakterizazio ikusi ditugu. Gainera, ia guztietarako funtzio jarraituak txertatzeko gai izan gara: espazio normaletan, perfektuki normaletan, guztiz erregularretan eta erabat ez-konexuetan ere. Baina, ez espazio guztiz normaletan. Ondorengo azken proposizioak, espazio guztiz normalak eta aldi berean erabat ez-konexuak diren espazioentzako funtzioen txertze bidezko karakterizazio bat emango digu. Hemen bai, txertaturiko funtzioa jarraitua izango da.

Proposizioa A.0.10.

Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Orduan, espazioa guztiz normala eta EEK izango da baldin eta soilik baldin edozein $f, g \in F(X)$ funtzio errealetarako halakoak non $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ diren, existitzen bada $h \in C(X)$ halakoa non $f \leq h \leq g$ den.

Frogapena.

$\Longrightarrow\lrcorner$

Izan bitez, $f, g \in F(X)$ funtzio errealak non $f^* \leq g$ eta $f \leq g_*$ diren. Alde batetik, espazioa guztiz normala denez, 3.1.6 proposizioa erabiliz, existituko da $h \in LSC(X)$ non $f \leq h \leq h^* \leq g$ den. Bestetik, espazioa EEK denez, A.0.8 proposizioko bigarren atala erabiliz, h^* jarraitua da, eta ondorioz, $f \leq h^* \leq g$ dugu.

$\Longleftarrow\rfloor$

Jakina, espazioa guztiz normala da 3.1.6 proposizioa betetzeagatik. Bestalde, A.0.8 proposizioko (iv). atala erabiliz, espazioa EEK izango da. Edozein $f \in LSC(X)$ eta $g \in USC(X)$ hartzen baditugu, $f \leq g$ izanik, f^* funtzioa f baino handiagoa edo berdina den funtzio goi-erdijarraiturik handiena denez, $f^* \leq g$ izango dugu. Antzeko argudioa erabiliz, $f \leq g_*$ dugu eta ondorioz, hipotesiz, existituko da $h \in C(X)$ halakoa non $f \leq h \leq g$ den. Eta hemen, aurreko proposizioan erabilitako argudioa errepikatuz, $f^* \leq g_*$ lortzen dugu. $\square$

Bibliografia

[1] BLAIR, Robert L. *Extension of Lebesgue sets and real valued functions.* Czechoslovak Math.J, Vol **31**,(1981), 63–74.

[2] CHOQUET, Gustave. *Topología.* Lehen edizioa. Paris: Toray-Mason, 1971.

[3] DILWORTH, Robert P. *The normal completion of the lattice of continuous functions.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol **68**,(1950), 427-438.

[4] ENGELKING, Ryszard. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics; Vol 6. Berlin: Heldermann, 1989.

[5] GUTIERREZ GARCIA, Javier; KUBIAK, Tomasz. *Sandwich-type characterization of completely regular spaces.* Applied General Topology, Vol **8** (2007) 239–242.

[6] KUBIAK, Tomasz. *A strengthening of the Katetov-Tong insertion theorem.* Commentations Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol **34** (1993) 357–362.

[7] LANE, Ernest Paul. *Insertion of a continuous function.* Pacific Journal Of Mathematics, Vol **82**, No.1 (1979).

[8] MACHO STALDER, Marta. *Topología General.* Lehen edizioa. Leioa: UPV/EHU, 2002.

[9] MICHAEL, Ernest. *Continuous selections.* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol **63**, No. 2 (1956) 361–382.

[10] MUNKRES, James. *Topología.* Bigarren edizioa. Madrid: Prentice Hall, 2002.

[11] STEEN, Lynn Arthur; SEEBACH, JR J. Arthur. *Counterexamples in Topology.* Bigarren edizioa. New York: Springer-Verlag, 1978.

[12] WILLARD, Stephen. *General Topology.* Lehen edizioa. Estatu Batuak eta Canada: Addison-Wesley, 1970.