ENPRESEN ADMINISTRAZIO ETA ZUZENDARITZAKO MATEMATIKA I
AZTERKETAK

Josune Albizuri
Arritokieta Chamorro
Xabier Lasaga
Txus Ortells
Luisma Zupiria

eman ta zabal zazu

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.argitalpenak.ehu.es
ISBN: 978-84-694-4006-3

Aurkibidea

Sarrera 2

Azterketen enuntziatuak..6

Azterketen erantzunak.. 28

    Espazio bektorialak.. 28

    Aplikazio linealak.. 76

    Integrazioa.. 130

Sarrera

Zerrenda honetan azaltzen diren ariketak baliagarriak dira Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturako Matematika I irakasgaian matrikulatuta dauden ikasleentzat eta baita bost gradu berrietako Matematika I irakasgaian matrikulatuta daudenentzat ere.

Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturako Matematika I lau hileko ikasgai bat da, azken urteetan Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko lehenengo urtean irakatsi dena eta oraindik beste lau deialdietako azterketak egingo dira. Batez ere aljebra linealaren elementuak barneratzen dituen arren, azken zatian aldagai bateko funtzioen integrazioa ere aztertzen da.

Publikazio honetan Matematika I-eko ikasgaian 2001. urtetik 2010. urtera egin diren azterketetan planteatuko problemak jasotzen dira, ekaineko eta iraileko deialdiak.

Ikasgai honetan ikusitako gaiak hauek dira:

1. MATRIZEAK

   Oinarrizko definizioak

   Matrizeen arteko eragiketak

   Matrize baten iraulia

   Matrize mailakatuak

   Matrize baten heina

2. DETERMINANTEAK

   Matrize karratuen determinantea

   Determinanteen garapena lerro baten elementuekiko

   Propietateak

   Determinanteen aplikazioak

3. EKUAZIO LINEALEKO SISTEMAK. GAUSS-EN METODOA

   Oinarrizko definizioak

   Adierazpen matriziala

   Sistema homogenoak

   Gauss-en metodoa

   Rouché-ren teorema

   Cramer-en erregela

   Interpretazio geometrikoa

4. ESPAZIO BEKTORIALAK

   Azpiespazio bektorialak

   Sistema libreak eta sortzaileak

   Oinarriak

   Barietate lineala

5. ESPAZIO EUKLIDEARRA

   Barne biderkaketa

   Norma

   Bi bektoreen arteko angelua

   Sistema ortogonalak

   Oinarri ortonormalak

   Gram-Schmidt-en teorema

6. APLIKAZIO LINEALAK

   Oinarrizko definizioak

   Aplikazio lineal baten adierazpen matriziala

   Aplikazio linealen konposaketa

   Isomorfismoak

7. INTEGRAZIOA

   Funtzio bornatuen integrazioa multzo bornatuetan: Funtzioen integrala tarte batean. Funtzio jarraien integragarritasuna. Integralen propietateak. Batezbesteko balio integralaren teorema.

   Integralen kalkuluaren teoria: Jatorrizko funtzioak. Barrow-en erregela. Aldagai aldaketak integrazioan. Zatikako integrazioa.

   Integral inpropioak: 1. motako integral inpropioak. 2. motako integral inpropioak. Kasu orokorra.

   R^2-ko integrazioaren sarrera: Integragarritasuna errektangeluetan. Fubini-ren teorema. Integralen kalkulua barruti errektangeluarretan. Funtzio jarraien integrazioa $(-\infty,a]\times(-\infty,b]$ motako barrutietan.

Gai hauen garapen teorikoa bibliografia honetan aurkitu daiteke:

- Álgebra lineal y geometría cartesiana. Juan de Burgos, MCGraw-Hill argitaletxea, 2000.
- Álgebra Lineal y Teoría de Matrices. Barbolla eta Sanz, Prentice Hall argitaletxea, 1998.
- Matemáticas para el Análisis Económico. Sydsaeter eta Hammond, Prentice Hall argitaletxea, 1996.

Bestalde, hasieran esaten zen bezala, ariketa hauek baliagarriak dira ezarri berri diren 5 graduetako lehenengo ikasturteko Matematika I ikasgaiaren zati handi baterako ere. Gainera kasu honetan interesgarria izan daiteke ikasgai berria delako eta ondorioz oraindik irakaskuntzarako material handirik ez dagoelako. Jarraian ikus daitekeenez publikazio honetako problemek graduetako Matematika I-eko ikasgaiko bost gai jasotzen ditu. Graduetako Matematika I-eko ikasgaiko gaiak hauek dira:

ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA

1. ALDEZ AURRETIKO KONTZEPTUAK
   Zenbakiak: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$
   Zuzen erreala
   Ordena $\mathbb{R}$ -n
   $\mathbb{R}^2$ planoa

2. ALDAGAI BATEKO FUNTZIO ERREALAK
   Aldagai bateko funtzio errealen oinarrizko ezagutza
   Adierazpen grafikoa
   Oinarrizko funtzioak
   Aldagai bateko funtzioen propietate batzuk
   Jarraitasuna

3. KALKULU DIFERENTZIALA
   Deribatuaren definizioa
   Puntu batean funtzio baten deribatuaren zeinu eta magnitudearen interpretazioa
   Hurbilketa lineala
   Deribatuaren kalkulua
   Katearen erregela
   Ekuazio baten bitartez inplizituki definitutako funtzio baten deribatua
   Deribatuaren batezbesteko balioaren teorena
   Goi ordenako deribatuak
   Bigarren ordenako hurbilketa
   Funtzio baten maximo eta minimo lokalak eta globala, Baldintza beharrezkoak eta nahikoak
   Funtzioen azterketa eta adierazpen grafikoa

4. KALKULU INTEGRALA
   Osoaren kalkulua tasatik abiatuz
   Jatorrizkoen kalkulua
   Integral mugatua. Barrow-en erregela
   Integral inpropioak

ALGEBRA LINEALA

5. BEKTOREAK: SARRERA
   Bektoreak planoan eta espazioan

Bektoreen interpretazio geometrikoa
Eragiketak bektoreekin
Bektoreen konbinazio linealak
Biderketa eskalarra

6. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK ETA MATRIZEAK
   Bi aldagai eta bi ekuazioko sistemak
   n aldagai eta m ekuazioko sistemak
   Gauss-en metodoa: sarrera
   Matrizeen definizioa
   Matrize mota batzuk
   Eragiketak matrizeekin
   Matrize baten iraulia
   Matrize baten alderantzizkoa
   Matrize mailakatuak eta sistema mailakatuak
   Gauss-en metodoa
   Sistema homogenoak

7. ESPAZIO BEKTORIALAK
   $\mathbb{R}^n$ espazio bektoriala
   Menpekotasun eta independentzia lineala
   Oinarria eta dimentsioa
   Matrize baten eta bektore sistema baten heina
   Azpiespazio bektorialak

8. DETERMINANTEAK
   Definizioak eta propietateak
   Determinanteen propietateak
   Matrize baten alderantzizkoa
   Matrize baten eta bektore sistema baten heinaren kalkulua
   Ekuazio linealetako sistemen sailkapen

9. MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA
   Balio eta bektore propioak
   Matrizeen diagonalizazioa

Lana 3 zatitan banatua dago: espazio bektorialak, aplikazio linealak eta diagonalgarritasuna. Modu honetan irakurleek gaia menperatzen duten edo ez froga dezakete problemak eginez.

Lehenengo zatian azterketetako problemen enuntziatuak daude aurkibide moduan, problema bakoitza zein azterketakoa den adierazten delarik. Bigarren zatian problema hauen ebazpenak daude.

Problema hauek egin aurretik, ikasleek materiaren kontzeptuak menperatzea oinarrizkoa da. Gomendagarria da baita ere bakoitzak problema bakoitzeko galderak ebazteko beharrezkoa den esfortzua egin aurretik problemen ebazpenak ez begiratzea. Modu honetan gai bakoitzeko kontzeptuak menperatzen dituzten edo ez frogatu ahal izango dute.

Azterketen enuntziatuak

ESPAZIO BEKTORIALAK

1 (i) Demagun A eta B $\mathbb{R}^4$-ren bi azpiespazio bektorial, non beraien sistema sortzaileak $\langle(1,1,-1,2),(1,2,0,1)\rangle$ eta $\langle(1,0,-2,3),(x,y,z,t)\rangle$ diren, hurrenez hurren. $A=B$ berdintza baieztatzen duen $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ bektorea existitzea posible al da? Zergatik?

Baiezko erantzuna eman baduzu, aurkitu $(3,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ bektore bat non

$$A = B \text{ den.}$$

(ii) Aurkitu $\langle(1,2,1),(2,1,-1)\rangle$ sistemak sortzen duen D multzoaren beste bi sistema sortzaile, bat librea eta bestea lotua.

(iii) Demagun U eta V $\mathbb{R}^2$-ren bi azpiespazio bektorial, non beraien sistema sortzaileak $\langle(1,3),(1,-1)\rangle$ eta $\langle(1,1),(2,1)\rangle$ diren, hurrenez hurren. Kalkulatu *U, V* eta $U\cap V$ multzoen dimentsioak.

(iv) Demagun $\langle(1,2,1),(0,1,-2),(1,3,-1)\rangle$ sistemak sortzen duen C multzoa:

(a) Aurkitu *C*-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Aurkitu *C*-ren oinarri ez ortogonal bat.

[2001eko otsailaren 12ko azterketa]

2 a) Bira $\boldsymbol{x}_1 = (3,2,-1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1,0,1)$ eta $S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_1\rangle = 2\langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_2\rangle \text{ eta } \langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_2\rangle = 0\}$.

S multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? Zergatik?

b) Eman *S*-ren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

c) Kalkula ezazu (1,1,1,1) eta (1,2,1,2) bektoreei ortogonalak diren $\mathbb{R}^4$-ren bektore guztien multzoa.

[2001eko ekainaren 4ko azterketa]

3 Bira $\mathbb{R}^3$-ko bost bektore: (1,0,1), (1,1,2), (1,−1,0), (2,−2,2) eta (1,2,3). Hauetako bektore bat edo gehiago erabiliz, aurkitu:

(i) $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(ii) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+y-z=0\}$ multzoaren oinarri bat.

(iii) Bi dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial baten sistema sortzaile ez libre bat.

[2002ko urtarrilaren 21eko azterketa]

4 (a) Demagun $B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right\}$.

B multzoa $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, aurkitu B-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Demagun $f(x,y,z)=(ax+y+z,bx+y+z,cx+y-z)$ aplikazio lineala.

$W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \text{ non } f \text{ isomorfismoa ez den}\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

Hala bada, kalkulatu W-ren oinarri ortonormal bat.

[2002ko ekainaren 7ko azterketa]

5 Bira $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t=0, x+2y+2z+t=0\}$,

$B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-t=0, 2y+z=0\}$ eta $C=\{x(1,-1,2,3)+y(2,-1,3,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoak.

(a) Aurkitu A-ren bi oinarri.

(b) Aurkitu B-ren oinarri ez ortogonal bat.

(c) $(1,-2,3,5)\in C$?

(d) $(3,-1,4,-1)\in A\cap C$?

[2003ko urtarrilaren 22ko azterketa]

6 Bira $\boldsymbol{x}_1=(1,-2,1,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(2,-1,3,2)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,-3,-1,1)$, $\boldsymbol{x}_4=(2,5,5,0)$ bektoreak eta $A=\{x\in\mathbb{R}^4:\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_1\rangle=0\}$, $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_2\rangle=0\}$ multzoak:

(a) Kalkulatu A-ren oinarri bat.

(b) Kalkulatu $A\cap B$-ren oinarri bat.

(c) $\boldsymbol{x}_1$ bektorea $\langle\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ sistemaren konbinazio lineala al da?

(d) Aurkitu $\langle\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\rangle$ sistemak sortzen duen azpiespazioaren oinarri ortogonal bat.

[2003ko ekainaren 16eko azterketa]

7 (a) $\mathbb{R}^3$-ko $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}$ lau bektore hartuz non $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ bektoreak $\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}\rangle$ sistemaren konbinazio linealak diren, frogatu $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}$ ere $\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}\rangle$-ren konbinazio lineala dela.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\langle(1,a,1),(b,2,-1)\rangle$ sistema $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y-3z=0\}$ azpiespazioaren oinarria den.

(c) $\langle(1,0,1),(2,1,1),(0,1,-1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea dela jakinik, aurkitu S-ren oinarri ortonormal bat.

[2004ko urtarrilaren 29ko azterketa]

8 (a) Bira ondoko bi multzoak:

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle(x,y,z),(1,0,0),(0,0,1)\rangle$ bektore sistema lotua den$\}$.

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle(x,y,z),(1,0,0),(0,0,1)\rangle$ bektore sistema librea den$\}$.

S eta T $\mathbb{R}^3$–ren azpiespazio bektorialak al dira? Hala den kasuan, eman azpiespazioaren oinarri ortonormal bat.

(b) Demagun E $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio bektoriala non $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ E-ren oinarri ortonormala den.

Esan zuzenak ala okerrak diren ondoko baieztapenak, erantzunak azalduz:

(i) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$ sistema ortogonala da.

(ii) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$ E-ren oinarria da.

[2004ko maiatzaren 28ko azterketa]

9 Demagun $A = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0\}$; $B = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\notin \mathrm{A}\}$;

$C = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 0\}$ eta $D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 1\}$ multzoak.

(a) A eta B $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorialak al dira? Zergatik?

(b) Aurkitu $A\cap C$-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu $A\cap C\cap D$.

(d) Aurkitu C-ren oinarri ortonormal bat.

[2005eko urtarrilaren 18ko azterketa]

10 (i) Esan zuzenak ala okerrak diren ondoko baieztapenak, <u>erantzunak azalduz</u>, hau da, <u>baieztapen zuzenak frogatuz eta okerrak direnetan kontradibidea emanez</u>:

(a) V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala bada eta $W\subset V$, orduan W $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

(b) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in \mathbb{R}^3$ badira non $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ betetzen den, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ eta $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle$ sistemek aspiespazio desberdinak sortzen dituzte.

(c) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in \mathbb{R}^2$ badira, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$ $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzailea da.

(ii) $\langle (1,1,0), (0,-1,1), (1,0,1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea bada,

(a) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta bere oinarri ortonormal bat.

(b) Kalkulatu S-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore guztien multzoa.

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

11 (a) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,0)$ bektorea $\langle (1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala den.

(b) Demagun $S = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\}$ multzoa:

(i) Eman S-ren oinarri bat.

(ii) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ S-ren oinarria den.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ ortogonala den.

Ba al dago a-ren balioren bat non $\|(1,2,-1)\| = \|(3,1,a)\|$ den?

(d) Aurkitu $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle(x,y,z), (1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ librea den $\forall a\in \mathbb{R}$.

[2006ko urtarrilaren 25eko azterketa]

12 Bira $A = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x -3y + 2z = 0\}$, $B = \{x(0,1,1) + y(1,0,1) \mid x,y\in \mathbb{R}\}$ eta $C = \{\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid (1,2,1)\rangle = 2\}$ multzoak.

(a) C multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

(b) Kalkulatu A-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu B-ren oinarri ortonormal bat.

(d) Kalkulatu $A\cap C$.

(e) Aurkitu $\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle \boldsymbol{x}, (0,1,1), (1,0,1)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat den.

[2006ko ekainaren 27ko azterketa]

13 (a) Aurkitu $A = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (2,-1,1)\rangle = 0\}$ multzoaren oinarri bat.

(b) Aurkitu $B = \{(x+ z+ t, 2x+ y+ 3z+ t, -x + y -2t) \mid x, y, z, t\in \mathbb{R}\}$ multzoaren oinarri bat.

(c) Biz $\langle(1, 2,-1), (1, 3, 0)\rangle$ S azpiespazio bektorialaren oinarri bat.

(i) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a)\in S$ den.

(ii) Kalkulatu S-ren oinarri ortonormal bat.

(iii) Kalkulatu S-ren bektore guztiei ortogonala den $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ bektore bat.

(iv) $T = \{(x,0,x) \mid x\in \mathbb{R}\}$ bada, $T \subseteq S$ al da?

[2007ko otsailaren 1eko azterketa]

14 Demagun $\mathbb{R}^3$-ko lau bektore: $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,m)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (2,1,1)$, $m\in \mathbb{R}$.

(i) Ba al dago m–ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ librea den? Azaldu erantzuna.

(ii) Ba al dago m-ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ librea den? Azaldu erantzuna.

(iii) $m = 0$ izanik eta $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ sistemako bektore batzuk erabiliz, aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(iv) Demagun A $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat non bere oinarria $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ den:

(a) Kalkulatu A multzoa.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

[2007ko maiatzaren 28ko azterketa]

15 a) Demagun E $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle (1,1,1,1),(1,1,1,0) \rangle$ bere oinarri bat.

i) Kalkulatu E-ren oinarri ortonormal bat.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(2,1,1,a) \in E$?

iii) Kalkulatu E multzoa eta frogatu $E = S$ dela,

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0,\ x + y - 2z = 0\} \quad \text{izanik.}$$

iv) Eman E-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore multzoaren oinarri bat.

b) Esan hurrengo esaldia zuzena edo okerra den, erantzuna azalduz: $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren bektore sistema ortogonala bada orduan $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da.

[2008ko urtarrilaren 25eko azterketa]

16 a) Kalkulatu $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z + t = 0, \quad y - 3t = 0\}$ -ren oinarri bat eta dimentsioa.

b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z^2\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

c) Demagun U $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle (1,2,-1),(0,1,1) \rangle$ U-ren oinarri bat.

i) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,1,a) \in U$?

ii) b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\langle (0,1,1),(2,0,b) \rangle$ U-ren oinarria dela?

iii) Kalkulatu U-ren oinarri ortonormal bat.

iv) Idatzi V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat non $\dim V = 1$ eta $V \subseteq U$.

[2008ko ekainaren 17ko azterketa]

17 Ondoko multzoak kontutan izanik: $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y+z=0,\ x+2y+t=0\}$

$B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-z+t=0,\ 2y+t=0\}$ eta $C=\{(x+2y,x-y,2x-3y,3x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

i) Kalkula ezazu A-ren oinarri bat eta oinarri ortonormal bat.

ii) Kalkula ezazu B-ren oinarri bat eta aurkitu $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $\langle(x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ B-ren oinarri bat izan dadin.

iii) Kalkula ezazu $A\cap B$ multzoaren oinarri bat eta bere dimentsioa.

iv) Existitzen al da a-ren baliorik non $(1,a,9,a)\in C$?

[2009ko urtarrilaren 30eko azterketa]

18 a) Demagun ondorengo oinarria duen $\mathbb{R}^4$-ren E azpiespazio bektoriala: $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$

i) Kalkulatu E azpiespazioaren beste oinarri bat.

ii) 1 norma duen E-ko puntu bat aurkitu.

iii) Kalkulatu $(1,1,1,0)$ bektorearekiko ortogonala den eta zeroz osaturikoa ez den E-ko bektore bat.

iv) Froga ezazu ondorengoa: $E=\{(a,a,a,b)\in\mathbb{R}^4 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

v) $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako izango da $(1,a,1,2)\in E$?

b) Demagun S, $\mathbb{R}^4$-ko azpiespazio bektoriala non $\dim(S)=3$ eta $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ $\mathbb{R}^4$-ko bektore sistema linealki independentea den. Orduan, $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ S-ren oinarria al da? Arrazoitu erantzuna.

[2009ko ekainaren 30eko azterketa]

19 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle(x,y,z)\mid(1,1,-2)\rangle=0\}$ azpiespazio bektoriala.

i) Eman S-ren bi bektore.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,a,2)\in S$?

iii) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta oinarri bat.

iv) Hurrengo bektore sistemen artean esan (eta azaldu erantzunak) zein den eta zein ez den *S*-ren oinarria. Eta *S*-ren oinarri ortonormala?

$$\langle (1,1,-2) \rangle; \qquad \langle (0,2,1),(1,1,-2) \rangle; \quad \langle (-1,1,0),(1,-1,1) \rangle;$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle; \qquad \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle.$$

v) Demagun $T = \{(x+y+2z, 3x+y, 2x+y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. $T \subset S$ baieztatzen al da? Azaldu erantzuna.

[2010eko otsailaren 2ko azterketa]

20 Demagun *S* $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1)\rangle$ bektore sistemak sortzen duen azpiespazioa.

i) Aurkitu (posible bada) (x,y,z,t) bektore bat non $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ *S*-ren oinarria den. Bestalde, $(1,2,-2,0) \in S$ baieztatzen al da?

ii) Kalkulatu $T=\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x}$ ortogonala *S*-ren bektore guztiei$\}$ multzoaren oinarri bat.

iii) Kalkulatu *S*-ren oinarri ortonormal bat.

iv) Aurkitu bi bektore $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4$ non $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ $\mathbb{R}^4$-ren oinarri bat den.

[2010eko maiatzaren 31ko azterketa]

APLIKAZIO LINEALAK

21 Bira $f(x,y) = (x+y, 2x-y)$ eta $g(x,y,z) = (x+z, y-z)$ aplikazio linealak:

(i) Kalkulatu $M(f \circ g)$, $M(f^{-1} \circ g)$ eta $M(f \circ f^{-1})$ matrizeak.

(ii) Kalkulatu $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (1,1)\}$ eta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (1,1)\}$ multzoak.

(iii) Aurkitu *a* eta *b*-ren balio batzuk non:

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (1,2)\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (a,b)\} = \varnothing$ den

eta beste batzuk non:

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (1,2)\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (a,b)\} \neq \varnothing$.

[2001eko otsailaren 12ko azterketa]

22 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal hau:

$$g(x,y,z)=(x-2y+z, x+ay, 5y-z).$$

(i) $a\in \mathbb{R}$ -ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(ii) $a\in \mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $f(1,0,2)=(3,1,-2)$?

(iii) $a,b\in \mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,b)\}=\varnothing$?

(iv) $a=0$ bada, kalkulatu $f^{-1}(x,y,z)$ alderantzizko aplikazioa.

[2001eko ekainaren 4ko azterketa]

23 Demagun M(f)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrize elkartua daukan $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala.

(i) (a) Kalkulatu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $(1,0,-1)\in \ker(f)$ betetzen den.

(ii) a=1 eta b=0 badira, kalkulatu Im(f) eta ker(f) multzoak.

(iii) a=0 eta b=1 badira, eta $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala hartuz, esan ondoko baieztapenak betetzea ziurra, posiblea edo ezinezkoa den (erantzunak azalduz):

(a) n≠3 bada orduan $f\circ g$ isomorfismoa da.

(b) n=3 bada orduan $g\circ f$ alderanzkarria da.

[2002ko urtarrilaren 21eko azterketa]

24 Demagun $f(x,y,z)=(x+y+2z, 2x+y+z, y+3z)$ aplikazio lineala.

(a) f alderanzkarria al da?

(b) Aurkitu irudi bera daukaten $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore.

(c) Aurkitu k-ren balio bat non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}\neq\varnothing$ den.

[2002ko ekainaren 7ko azterketa]

25 (a) Bira $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(1,2,a)=(0,a,2a)$ den $\forall a\in\mathbb{R}$. Aurkitu ker(f)-ren bi bektore eta Im(f)-ren beste bi bektore.

(b) $g(x,y,z)=(x-2y+3z,3x-7y+2z,-x+3y+4z)$ aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $\ker(g)$ eta $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(3,4,4)\}$ multzoa.

[2003ko urtarrilaren 22ko azterketa]

26 Demagun $f(x,y,z)=(ax+y,x+y+z,bx+y+z)$ aplikazio lineala, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako ziurta daiteke $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(u,v,w)\}\neq\varnothing$ dela $\mathbb{R}^3$-ren (u,v,w) bektore guztietarako?

(b) a eta b-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(c) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(2,-1,-1)\in\ker(f)$?

(d) Aurkitu Im(f)-ren oinarri bat $a=b=1$ balioentzako.

[2003ko ekainaren 16ko azterketa]

27 (a) Kalkulatu Im(f), $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ hiru baldintza hauek baieztatzen dituen aplikazio lineala dela jakinik:

(i) $(1,0,0)\in\ker(f)$.

(ii) $(0,1,0)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\}$.

(iii) $f(0,1,2)=(3,4,5)$.

(b) $(1,2,3)\in\ker(g)$ baldintza baieztatzen duen $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio lineala isomorfismoa izan al daiteke? Zergatik?

[2004ko urtarrilaren 29ko azterketa]

28 Bira f eta g aplikazio linealak: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x,y)=(2x+2y, y, -x-3y)$ den eta

$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $M(g) = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix}$ den.

(a) Aurkitu a, b eta c-ren balioak non $M(g \circ f) = I_2$ den. Balio horietarako, $g = f^{-1}$ al da?

(b) a=1 bada:

(i) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim(\ker(f \circ g)) = 2$ den.

(ii) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim(\mathrm{Im}(f \circ g)) = 2$ den.

(iii) $(f \circ g)$ isomorfismoa izatea posible al da?

[2004ko maiatzaren 28ko azterketa]

29 Demagun $f(x,y,z,t) = (x+2y+z+t, y+az+t, 2x+3y+t)$ aplikazio lineala, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\dim(\ker(f)) = 1$ den.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (b,1,1)\} = \varnothing$ den.

(c) a=1 bada, kalkulatu Im(f) eta $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) = (1,2,0)\}$.

[2005eko urtarrilaren 18ko azterketa]

30 (a) Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hurrengo hiru baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala:

(0,1,0)$\in$ker(f), (2,0,0)$\in$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (2,4,6)\}$ eta f(2,0,1)=(3,6,3).

Orduan, kalkulatu $M(f)$.

(b) Demagun $\boldsymbol{u}=(1-a, a, 1-a) \in \mathbb{R}^3$ eta g aplikazio lineala non $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix}$ den;

$a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Kalkulatu a eta b-ren balioak non ondoko bi baldintzak aldi berean betetzen diren:

g ez da isomorfismoa eta $u \in \mathrm{Im}(g)$.

(ii) Existitzen al dira a eta b non $u \in \ker(g)$ den?

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

31 Biz $f(x,y,z)=(x+y,x+2y+2z,ax+y-2z)$ aplikazio lineala.

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-2,1) \in \ker(f)$ den.

(b) Aurkitu a-ren balioak non $(2,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$ den.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-1,1) \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\}$ den.

(d) Aurkitu a-ren balioak non $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ den.

(e) $a=2$ bada, kalkula ezazu $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,4,-1)\}$ multzoa.

(f) $a=2$ bada, kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f \circ f)$ multzoaren oinarri bat.

[2006ko urtarrilaren 25eko azterketa]

32 Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ den.

(a) $a,b \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) $a,b \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako baieztatuko da:

$(-1,0,1,1) \in \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,b,0)\}$?

(c) $a,b \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,2,1) \in \ker(f)$?

(d) $a,b \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako baieztatuko da $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$?

(e) $a=1$ eta $b=1$ badira, kalkula ezazu $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,5,2)\}$ multzoa.

[2006ko ekainaren 27ko azterketa]

33 (a) Kalkula ezazu $M(h)$, $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ bi baldintza hauek baiezztatzen dituen aplikazio lineala izanik:

$$h(2,-1) = (3,3,1) \text{ eta } h(2,0) = (2,4,2).$$

(b) Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ den.

(i) Aurkitu ker (f)-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(ii) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a)\in \ker(f)$ den.

(iii) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

(iv) Kalkulatu $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,-2)\}$ multzoa.

(v) $g(x,y)=(x-y,x+y,y)$ bada, kalkulatu $(f\circ g)(2,1)$ eta $\mathrm{Im}(f\circ g)$ multzoaren dimentsioa.

[2007ko otsailaren 1eko azterketa]

34 Biz $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ den.

(i) Aurkitu a-ren balioak f isomorfismoa izateko.

(ii) Aurkitu a eta b-ren balioak $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,b,2)\}=\varnothing$ izateko.

(iii) $a = 1$ bada, kalkulatu $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,-3,4)\}$ multzoa.

(iv) $a = 2$ bada, kalkulatu $(f\circ f)(1,-1,2)$.

(v) $a = -1$ bada, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$–ren oinarri bana.

[2007ko maiatzaren 28ko azterketa]

35 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x,y,z)=(ax,by+z,cy+z)$; $a,b,c\in \mathbb{R}$.

a) $a=0,\ b=1,\ c=1$ badira, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri ortonormal bana.

b) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(1,1,1)\in \ker(f)$ den.

c) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$ den.

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala, $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(g\circ f)(0,1,1)=(2,0)$ baieztatzen den.

[2008ko urtarrilaren 25eko azterketa]

36 Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua

$$M(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \text{ den, } a\in\mathbb{R}.$$

(i) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,3,1)\in \ker(f)$?

(ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $\dim(\ker(f))=1$?

(iii) $a=5$ bada, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ multzoaren oinarri bat.

(iv) $a=1$ bada kalkulatu $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x})=(3,5,0)\}$ multzoa.

(v) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ aplikazioa non $g(x,y,z)=x-y+3z$ den. $a=1$ baliorako kalkulatu $(g\circ f)(2,0,1)$.

[2008ko ekainaren 17ko azterketa]

37 (a) Kalkula ezazu $M(g)$, g: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, ondoko baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala dela jakinik:

i) $(1,-2)\in\ker(g)$. ii) $g(0,1)=(1,-1,2)$.

(b) Demagun f aplikazio lineala eta $M(f)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$;

i) Kalkulatu a eta b-ren zein baliotarako f ez den isomorfismoa eta gainera $f(1,b,0)=(0,-2,2)$.

ii) $a=2$ baliorako, kalkula itzazu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa

iii) $a=-2$ baliorako, kalkula itzazu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa.

iv) Kalkula ezazu zein a-ren baliorako beteko den $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,0)\}=\varnothing$.

v) Kalkulatu $(f\circ g)(2,-4)$.

[2009ko urtarrilaren 30eko azterketa]

38 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondorengo aplikazio lineala:

$$f(x,y,z) = (ax+by+z, y+cz, 2x), a,b,c \in \mathbb{R}.$$

a) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako izango den f isomorfismoa.

b) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako betetzen diren ondorengo bi baldintzak (biak batera) $(0,1,1) \in \ker(f)$ eta $f(1,1,1) = (0,0,2)$.

c) $a=0,\ b=1,\ c=1,$ balioentzat

c1) Kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$ multzoen oinarri ortonormal bana.

c2) Kalkula ezazu $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (3,3,2)\}$ multzoa.

c3) Kalkulatu zein d-ren baliotarako betetzen den ondorengoa:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,d,1)\} = \emptyset.$$

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $g(x,y,z) = (x+z, y)$. Kalkula itzazu *a, b* eta *c*-ren balioak non $(g \circ f)(1,1,1) = (3,1)$.

[2009ko ekainaren 30eko azterketa]

39 a) Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den.

i) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$-ren dimentsioa eta oinarri bat. Frogatu $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ dela.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,a) \in \ker(f)$?

iii) $h(x,y) = (x+y, y, 2x+y)$ aplikazio lineala hartuz, existituko al da $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bektore bat non $h(x,y) = (0,1,1)$ den? Eta $h(x,y) = (1,1,1)$ baieztatzen duena? Erantzuna baiezkoa den kasurako, kalkulatu bektoreak.

iv) Kalkulatu $f \circ h$ konposaketari elkartutako matrizea. $f \circ h$ lineala eta alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu $(f \circ h)^{-1}$.

b) Kalkulatu $M(g)$, $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ honako baldintza hauek betetzen dituen aplikazio lineala izanik:

$g(0,0,2)=(2,4,0)$, $g(1,1,-1)=(1,3,1)$ eta $(x,0,-x)\in\ker(g)$ $x\in\mathbb{R}$ guztietarako.

[2010eko otsailaren 2ko azterketa]

INTEGRAZIOA

40 (a) Demagun f aplikazio lineala:

$$\begin{array}{rl} f: \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to (x+2y-z, 2x+3y+z, 3y-9z) \end{array}$$

i) f alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu f^{-1} aplikazioa.

ii) Aurkitu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ non $f(x,y,z)=(1,2,0)$ den. Existituko al da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektore bat non $f(x,y,z)=(1,1,0)$ den?

iii) Kalkulatu Im(f) eta ker(f)-ren oinarri bana.

iv) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$?

a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1)\in \ker(f)$?

(b) Aurkitu $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio lineal bat non $f(2,0,0)=(4,2,2)$ eta $f(1,1,0)=(1,1,0)$ baieztatzen diren.

[2010eko maiatzaren 31ko azterketa]

41 Sailkatu eta kalkulatu (posible bada) hurrengo bi integralak:

$$\text{(i)} \int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx \quad ; \qquad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx .$$

[2001eko otsailaren 12ko azterketa]

42 (i) Kalkula ezazu hurrengo integrala:

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx\,.$$

(ii) a) Sailkatu ondoko integralak $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinen arabera:

$$\int_0^1 x^a\,dx \quad ; \quad \int_1^\infty x^a\,dx$$

b) Kalkulatu aurreko integralak, posible bada, $a = 2$ baliorako.

c) Kalkulatu aurreko integralak, posible bada, $a = -2$ baliorako.

[2001eko ekainaren 4ko azterketa]

43 (i) Sailkatu $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-a}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

(ii) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ eta $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ integralak.

[2002ko urtarrilaren 21eko azterketa]

44 (a) Kalkulatu $\int_1^3 (2x-1)e^{x+1}dx$ eta $\int_2^5 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ integralak.

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx$ integrala.

[2002ko ekainaren 7ko azterketa]

45 (a) Kalkulatu $\int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx$ integrala.

(b) Sailkatu $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^p}\,dx$ integrala p-ren balio desberdinentzako eta kalkulatu integrala, posible bada, p=2 denean.

[2003ko urtarrilaren 22ko azterketa]

46 (a) Kalkulatu $\int_1^2 xe^{(x^2-1)}dx$ integrala.

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_{-\infty}^{5} f(x)dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & ; \quad x<-1\\ 5 & ; \quad x=-1\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad x>-1\end{cases} \quad \text{izanik.}$$

[2003ko ekainaren 16ko azterketa]

47 (a) Bete hurrengo hutsuneak $\int_{\square}^{\square}(x-4)^{\square}(x+2)^{\square}dx$ integrala:

(i) Propioa izateko.

(ii) Lehen motako integral inpropioa izateko.

(iii) Bigarren motako integral inpropioa izateko.

(b) $f(x)=x(x-1)^8$ integragarria al da $[0,b]$ tartean, $\forall b\in\mathbb{R}$?

(c) Kalkulatu $b\in\mathbb{R}$ non $\int_0^b x(x-1)^8\,dx=\dfrac{1}{90}$ den.

[2004ko urtarrilaren 29ko azterketa]

48 Biz $f(x)=x\left(1-x^2\right)^{1/p}$ funtzioa, $p\neq 0$.

(a) Sailkatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala p-ren balio ez-nulu desberdinentzako.

(b) Kalkulatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala $p=-1$ eta $p=-2$ direnean.

[2004ko maiatzaren 28ko azterketa]

49 (a) Kalkulatu $\int_1^4 xe^{2x}dx$ integrala.

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx$ integrala.

[2005eko urtarrilaren 18ko azterketa]

50 (a) Sailkatu hurrengo integralak p-ren balioen arabera, $p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ izanik:

$$\int_0^p \frac{1}{(2-x)^p}dx \quad \text{eta} \quad \int_0^p \frac{1}{(2-x)^{-p}}dx .$$

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}dx$ integrala.

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

51 Biz $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & ; \quad x<a \\ e^{2x} & ; \quad x\geq a \end{cases}$ funtzioa, $a\in \mathbb{R}$.

(a) a=1 bada, sailka ezazu $\int_0^3 f(x)dx$ integrala.

(b) a-ren zein baliotarako (a≥0) izango da $\int_0^3 f(x)dx$ integral inpropioa?

(c) a=3 bada kalkula ezazu, posible bada, $\int_0^3 f(x)dx$.

[2006ko urtarrilaren 25eko azterketa]

52 Sailkatu eta kalkulatu hurrengo integralak

(a) $\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$; (b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}dx$; (c) $\int_0^\infty 4e^{-2x}dx$.

[2006ko ekainaren 27ko azterketa]

53 Biz $f(x)=\begin{cases} 2+e^x & \text{si } x\le a \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si } x>a \end{cases}$ ($a\in\mathbb{R}$).

a) Sailkatu $\int_a^{a+2} f(x)dx$ integrala $a\in\mathbb{R}$-ren balio desberdinentzako.

b) $a=0$ bada, sailkatu eta kalkulatu hurrengo integralak:

(i) $\int_{-1}^{0} f(x)dx$; (ii) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

[2007ko otsailaren 1eko azterketa]

54 Biz $f(x)=\begin{cases} 3e^{2x} & ;\ x\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}} & ;\ x>0 \end{cases}$ funtzioa.

(a) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ eta $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralak.

(b) Kalkulatu, zatikako metodoa erabiliz, $\int_1^e x\ln x dx$ integrala.

[2007ko maiatzaren 28ko azterketa]

55 a) Bete hutsuneak $\int_{\square}^{\square} \dfrac{1}{(x-1)^2}dx$ integralean hurrengo integral mota izateko:

(i) Propioa.

(ii) Lehen motako integral inpropioa.

(iii) Bigarren motako integral inpropioa.

(iv) Lehen eta bigarren motako integral inpropio nahasia.

b) Sailkatu $\int_{-2}^{2} \dfrac{1}{(x-a)^2}dx$ integrala $a\in\mathbb{R}$-ren balio desberdinetarako eta kalkulatu $a=1$ denean.

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\left(x^2-5\right)^2} dx$ integrala.

[2008ko urtarrilaren 25eko azterketa]

56 a) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{0}^{6} \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}} dx$ integrala $a=-3$ baliorako.

b) Sailkatu $\int_{0}^{6} \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}} dx$ integrala $a \in \mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{0}^{1} 3xe^{1-x^2} dx$.

[2008ko ekainaren 17ko azterketa]

57 a) Sailkatu $\int_{a}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala $a<0$ balio desberdinentzat.

b) Sailkatu $\int_{0}^{b} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala $b>0$ balio desberdinentzat.

c) Kalkulatu a eta b balioak $(a<b)$ non $\int_{a}^{b} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala propioa den.

d) Kalkulatu $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala.

[2009ko urtarrilaren 30eko azterketa]

58 a) Sailkatu $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^a}$ integrala $a \in \mathbb{R}$ balio ezberdinen arabera.

b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-\infty}^{2} f(x) dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases} e^{2+2x} & ; \quad x<-1 \\ 3x & ; \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad \text{izanik.}$$

[2009ko ekainaren 30eko azterketa]

59 a) Sailkatu $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

b) Kalkulatu $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a=-1$ eta $a=2$ direnean.

[2010eko otsailaren 2ko azterketa]

60 i) Sailkatu (kalkulatu gabe) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx$ integrala a-ren balio desberdinentzako ($a>0$).

ii) Kalkulatu aurreko integrala $a=\frac{1}{2}$ eta $a=2$ direnean.

[2010eko maiatzaren 31ko azterketa]

Azterketen erantzunak

ESPAZIO BEKTORIALAK

1 (i) Demagun A eta B $\mathbb{R}^4$-ren bi azpiespazio bektorial, non beraien sistema sortzaileak $\langle(1,1,-1,2),(1,2,0,1)\rangle$ eta $\langle(1,0,-2,3),(x,y,z,t)\rangle$ diren, hurrenez hurren. $A=B$ berdintza baieztatzen duen $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ bektorea existitzea posible al da? Zergatik?

Baiezko erantzuna eman baduzu, aurkitu $(3,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ bektore bat non

$A = B$ den.

(ii) Aurkitu $\langle(1,2,1),(2,1,-1)\rangle$ sistemak sortzen duen D multzoaren beste bi sistema sortzaile, bat librea eta bestea lotua.

(iii) Demagun U eta V $\mathbb{R}^2$-ren bi azpiespazio bektorial, non beraien sistema sortzaileak $\langle(1,3),(1,-1)\rangle$ eta $\langle(1,1),(2,1)\rangle$ diren, hurrenez hurren. Kalkulatu U, V eta $U\cap V$ multzoen dimentsioak.

(iv) Demagun $\langle(1,2,1),(0,1,-2),(1,3,-1)\rangle$ sistemak sortzen duen C multzoa:

(a) Aurkitu C-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Aurkitu C-ren oinarri ez ortogonal bat.

<u>EBAZPENA</u>:

(i) $A = B$ baieztatuko da ondoko baldintzak betetzen badira:

$\bullet$ $(1,0,-2,3)\in A$; $\bullet$ $(x,y,z,t)\in A$; $\bullet$ $\dim B = 2$

$\bullet$ $(1,0,-2,3)\in A$?

$$(1,0,-2,3)\in A \iff \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \text{ bada.}$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&2&0&1\\1&0&-2&3\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2 \text{ denez, } (1,0,-2,3)\in A.$$

Orain $(x,y,z,t)\in A$ eta dim $B = 2$ baldintzak betetzen dituen $(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4$ bektorea aurkitzea falta zaigu.

Eta adibidez, $3(1,1,-1,2)=(3,3,-3,6)$ bektoreak bi baldintza hauek betetzen ditu.

(ii) $\langle(1,2,1),(2,1,-1)\rangle$ D-ren sistema sortzaile librea denez, $\dim(D)=2$ da. Beraz,

D-ren beste sistema sortzaile librea: $\langle(2,4,2),(2,1,-1)\rangle$.

D-ren sistema sortzaile lotua: $\langle(1,2,1),(2,4,2),(2,1,-1)\rangle$.

(iii) $\langle(1,3),(1,-1)\rangle$ eta $\langle(1,1),(2,1)\rangle$ sistema libreak direnez, $\dim(U)=\dim(V)=2$. Gainera bi bektorez osaturiko $\mathbb{R}^2$-ren sistema libreak direnez, $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak izango dira, eta ondorioz, $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzaileak. Beraz, $U=V=\mathbb{R}^2$ eta ondorioz $U\cap V=\mathbb{R}^2$. Hau da, $\dim(U\cap V)=2$.

(iv) Demagun $\langle(1,2,1),(0,1,-2),(1,3,-1)\rangle$ sistemak sortzen duen C multzoa.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}=2 \text{ denez, } \dim(C)=2.$$

Beraz, adibidez, $\langle(1,2,1),(0,1,-2)\rangle$ eta $\langle(0,1,-2),(1,3,-1)\rangle$ C-ren bi oinarri dira.

(a) $\langle(1,2,1),(0,1,-2)\rangle$ C-ren oinarri ortogonala denez, $\left\langle\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(0,1,-2)}{\sqrt{5}}\right\rangle$ C-ren oinarri ortonormala da.

(b) Adibidez, $\langle (0,1,-2),(1,3,-1) \rangle$ C-ren oinarri ez ortogonal bat da.

2 a) Bira $\boldsymbol{x}_1 = (3,2,-1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1,0,1)$ eta $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle = 2\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2 \rangle \text{ eta } \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0\}$.

S multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? Zergatik?

b) Eman S-ren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

c) Kalkula ezazu (1,1,1,1) eta (1,2,1,2) bektoreei ortogonalak diren $\mathbb{R}^4$-ren bektore guztien multzoa.

EBAZPENA:

a) $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle = 2\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2 \rangle \text{ eta } \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0\} =$

$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_1 \rangle = 0 \text{ eta } \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (3,2,-1) \rangle = 0 \text{ eta } \langle (x,y,z) \mid (1,0,1) \rangle = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - z = 0, x + z = 0\}$, hau da,

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$ sistemaren soluzio multzoa.

Ebatziz, bere soluzioak $z = -x$; $y = -2x$, $x \in \mathbb{R}$ dira, beraz,

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -2x, z = -x\} = \{(x,-2x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,-1) : x \in \mathbb{R}\}$.

S, $\langle (1,-2,-1) \rangle$ bektore sistemaren konbinazio lineal guztien multzoa denez, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

b) $\langle (1,-2,-1) \rangle$ S-ren oinarria denez, $\dim(S) = 1$.

S-ren oinarri ortonormal bat: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) \right\rangle$.

c) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,t) \mid (1,1,1,1) \rangle = 0 \text{ eta } \langle (x,y,z,t) \mid (1,2,1,2) \rangle = 0\} =$

$= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, x + 2y + z + 2t = 0\}$, hau da,

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + z + t = 0 \end{cases}$$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}.$$

[2. EK.] $y = -t$; [1. EK.] $x = -y - z - t = t - z - t = -z$.

Beraz,

$$\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : \left\langle (x,y,z,t) \mid (1,1,1,1)\right\rangle = 0 \ \text{ eta } \ \left\langle (x,y,z,t) \mid (1,2,1,2)\right\rangle = 0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=-z,\, y=-t\right\} = \left\{(-z,-t,z,t) : z,t\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{z(-1,0,1,0)+t(0,-1,0,1) : z,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

3 Bira $\mathbb{R}^3$-ko bost bektore: (1,0,1), (1,1,2), (1,−1,0), (2,−2,2) eta (1,2,3). Hauetako bektore bat edo gehiago erabiliz, aurkitu:

(iv) $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(v) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+y-z=0\}$ multzoaren oinarri bat.

(vi) Bi dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial baten sistema sortzaile ez libre bat.

<u>EBAZPENA</u>:

(i) $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat. Adibidez $\langle(1,0,1),(1,1,2),(2,-2,2)\rangle$, sistema librea baita.

(ii) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+y-z=0\}$ multzoaren oinarri bat: $\langle(2,-2,2)\rangle$.

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+y-z=0\}$, $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Ebatziz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$.

[2. EK] $y=-z$ [1. EK] $x=-y=z$

Beraz,

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ 2x+y-z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z,\ y=-z\} =$

$= \{(z,-z,z): z\in\mathbb{R}\} = \{z(1,-1,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

$\langle(1,-1,1)\rangle$ A-ren oinarri bat, bestea, adibidez, $\langle(2,-2,2)\rangle$.

<u>Beste era batean:</u> $(2,-2,2)\in A$ eta $\dim(A)=1 \to \langle(2,-2,2)\rangle$, A-ren oinarria.

(iii) Bi dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial baten sistema sortzaile ez libre bat.

$\langle(1,0,1),(1,1,2),(1,-1,0)\rangle$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ baita.

4 (a) Demagun $B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right\}$.

B multzoa $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, aurkitu *B*-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Demagun $f(x,y,z)=(ax+y+z,bx+y+z,cx+y-z)$ aplikazio lineala.

$W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ non f isomorfismoa ez den$\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

Hala bada, kalkulatu *W*-ren oinarri ortonormal bat.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) Demagun $B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right\}$.

B multzoa $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, aurkitu *B*-ren oinarri ortonormal bat.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & y \\ z+t & t \end{pmatrix} \text{ eta } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ x+z & y+t \end{pmatrix} \text{ direnez,}$$

$B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=x,\ y=y,\ z+t=x+z,\ y=y+t\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y=0,\ t=x\}=$

$=\{(x,0,z,x)\mid x,z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(1,0,0,1)+z(0,0,1,0)\mid x,z\in\mathbb{R}\}$.

B $\langle(1,0,0,1),(0,0,1,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineal guztien multzoa denez, $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala da.

B-ren oinarri bat: $\langle(1,0,0,1),(0,0,1,0)\rangle$. Eta oinarria ortogonala denez,

B-ren oinarri ortonormal bat: $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,0,1,0)\right\rangle$.

(b) $f(x,y,z)=(ax+y+z,bx+y+z,cx+y-z)$ aplikazio lineala hartuz,

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; |M(f)|=2(b-a).$$

$W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \text{ non } f \text{ isomorfismoa ez den}\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

Hala bada, kalkulatu W-ren oinarri ortonormal bat.

$W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid b=a\}=\{(a,a,c)\mid a,c\in\mathbb{R}\}=\{a(1,1,0)+c(0,0,1)\mid a,c\in\mathbb{R}\}$.

$\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineal guztien multzoa denez, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

W-ren oinarri bat: $\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$.

Gainera, sistema ortogonala denez, W-ren oinarri ortonormal bat: $\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),(0,0,1)\right\rangle$.

5 Bira $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t=0, x+2y+2z+t=0\}$,

$B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-t=0, 2y+z=0\}$ eta $C=\{x(1,-1,2,3)+y(2,-1,3,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoak.

(a) Aurkitu A-ren bi oinarri.

(b) Aurkitu B-ren oinarri ez ortogonal bat.

(c) $(1,-2,3,5)\in C$?

(d) $(3,-1,4,-1)\in A\cap C$?

<u>EBAZPENA</u>

(a) $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t=0, x+2y+2z+t=0\}$, $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x+2y+2z+t=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Gauss-en metodoa erabiliz ebatziko dugu:

$$\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x+2y+2z+t=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y+3z+2t=0 \end{cases}.$$

[2. EK] $y=-3z-2t$.

[1. EK] $x=-y+z+t=-(-3z-2t)+z+t=4z+3t$.

Beraz, $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t=0, x+2y+2z+t=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=4z+3t, y=-3z-2t\}=$

$=\{(4z+3t,-3z-2t,z,t) \mid z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{z(4,-3,1,0)+t(3,-2,0,1) \mid z,t\in\mathbb{R}\}$.

Honela,

A-ren bi oinarri: $\langle(4,-3,1,0),(3,-2,0,1)\rangle$ eta adibidez $\langle(4,-3,1,0),(7,-5,1,1)\rangle$.

(b) $B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-t=0, 2y+z=0\}$, $\begin{cases} x-t=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Kasu honetan soluzioa aurkitzea berehalakoa da: $x=t$ eta $z=-2y$.

Beraz, $B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-t=0, 2y+z=0\} =$

$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=t,\ z=-2y\} =$

$= \{(t,y,-2y,t) \mid y,t\in\mathbb{R}\} =$

$= \{y(0,1,-2,0)+t(1,0,0,1) \mid y,t\in\mathbb{R}\}$.

Honela,

B-ren oinarri bat: $\langle(0,1,-2,0),(1,0,0,1)\rangle$. Baina ortogonala denez,

B-ren oinarri ez ortogonala: $\langle(0,1,-2,0),(1,1,-2,1)\rangle$.

(c) $(1,-2,3,5)\in C \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}=2$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -5\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=3$. Beraz, $(1,-2,3,5)\notin C$.

(d) $(3,-1,4,-1)\in A\cap C \Leftrightarrow (3,-1,4,-1)\in A$ eta $(3,-1,4,-1)\in C$.

Baina $(3,-1,4,-1)\notin A$ (ez du baieztatzen $x+y-z-t=0$ baldintza) beraz,
$(3,-1,4,-1)\notin A\cap C$.

6 Bira $\boldsymbol{x}_1=(1,-2,1,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(2,-1,3,2)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,-3,-1,1)$, $\boldsymbol{x}_4=(2,5,5,0)$ bektoreak eta $A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_1\rangle=0\}$, $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}_2\rangle=0\}$ multzoak:

(a) Kalkulatu A-ren oinarri bat.

(b) Kalkulatu $A\cap B$-ren oinarri bat.

(c) $\boldsymbol{x}_1$ bektorea $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\rangle$ sistemaren konbinazio lineala al da?

(d) Aurkitu $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\rangle$ sistemak sortzen duen azpiespazioaren oinarri ortogonal bat.

EBAZPENA:

(a) $A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_1\rangle=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\langle(x,y,z,t)\mid(1,-2,1,3)\rangle=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x-2y+z+3t=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x=2y-z-3t\}=$

$=\{(2y-z-3t,y,z,t):y,z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{y(2,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-3,0,0,1):y,z,t\in\mathbb{R}\}$.

$\langle(2,1,0,0),(-1,0,1,0),(-3,0,0,1)\rangle$ A-ren sistema sortzailea librea denez, A-ren oinarria da.

(b) $A\cap B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:\boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{x}\in B\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4:\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_1\rangle=0,\langle\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}_2\rangle=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\langle(x,y,z,t)\mid(1,-2,1,3)\rangle=0,\langle(x,y,z,t)\mid(2,-1,3,2)\rangle=0\}=$

$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x-2y+z+3t=0,\ 2x-y+3z+2t=0\}$,

hau da,

$\begin{cases}x-2y+z+3t=0\\2x-y+3z+2t=0\end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

$A{:}B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&3&0\\2&-1&3&2&0\end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&3&0\\0&3&1&-4&0\end{array}\right)$, hau da, $\begin{cases}x-2y+z+3t=0\\3y+z-4t=0\end{cases}$.

Ebatziz, $z=-3y+4t$ eta $x=2y-z-3t=5y-7t$.

Beraz,

$A\cap B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x=5y-7t,z=-3y+4t\}=\{(5y-7t,y,-3y+4t,t)\mid y,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{y(5,1,-3,0)+t(-7,0,4,1)\mid y,t\in\mathbb{R}\}$.

$A\cap B$ -ren oinarria: $\langle(5,1,-3,0),(-7,0,4,1)\rangle$.

(c) $\boldsymbol{x}_1$ bektorea $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$-ren konbinazio lineala $\Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$=2.

Ikus dezagun:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3.$$

Beraz, $\boldsymbol{x}_1$ ez da $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ sistemaren konbinazio lineala.

(d) Aurkitu $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ sistemak sortzen duen azpiespazioaren oinarri ortogonal bat.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Beraz, $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ lotua da eta bi bektore linealki independente daude, adibidez $\langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$

Gram-Schmidt-en teorema aplikatuz, $\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(0,-3,-1,1)$;

$$\boldsymbol{y}_4 = (2,5,5,0) - \left\langle (2,5,5,0) \mid \tfrac{1}{\sqrt{11}}(0,-3,-1,1) \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{11}}(0,-3,-1,1) =$$

$$= (2,5,5,0) - \frac{20}{\sqrt{11}}\frac{1}{\sqrt{11}}(0,-3,-1,1) = (2,5,5,0) - \frac{20}{11}(0,-3,-1,1) == \frac{1}{11}(22,-5,35,20)$$

Beraz, $\langle (0,-3,-1,1), (22,-5,35,20) \rangle$, $\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ sistemak sortzen duen azpiespazioaren oinarri ortogonal bat da.

7 (a) $\mathbb{R}^3$-ko $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}$ lau bektore hartuz non $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ bektoreak $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t} \rangle$ sistemaren konbinazio linealak diren, frogatu $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}$ ere $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t} \rangle$-ren konbinazio lineala dela.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\langle (1,a,1),(b,2,-1) \rangle$ sistema $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$ azpiespazioaren oinarria den.

(c) $\langle (1,0,1),(2,1,1),(0,1,-1) \rangle$ S-ren sistema sortzailea dela jakinik, aurkitu S-ren oinarri ortonormal bat.

<u>EBAZPENA</u>

(a) $\boldsymbol{x}$ eta $\boldsymbol{y}$ bektoreak $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t} \rangle$ sistemaren konbinazio linealak badira, $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{z}+b\boldsymbol{t}$ eta $\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{z}+d\boldsymbol{t}$.

Beraz,

$$\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{z}+b\boldsymbol{t}+3(c\boldsymbol{z}+d\boldsymbol{t}) = a\boldsymbol{z}+b\boldsymbol{t}+3c\boldsymbol{z}+3d\boldsymbol{t} = (a+3c)\boldsymbol{z}+(b+3d)\boldsymbol{t},$$

hau da, $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}$ ere $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t} \rangle$-ren konbinazio lineala da.

(b) $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\} = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=-2y+3z\} =$

$= \{(-2y+3z,y,z) \mid y,z\in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1,0)+z(3,0,1) \mid y,z\in \mathbb{R}\}$.

Beraz, dim(A)=2.

$\langle (1,a,1),(b,2,-1) \rangle$ sistema A azpiespazioaren oinarria izateko hiru baldintza bete behar dira: $\langle (1,a,1),(b,2,-1) \rangle$ librea, $(1,a,1)\in A$ eta $(b,2,-1)\in A$.

$\langle (1,a,1),(b,2,-1) \rangle$ librea da, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=2$ bada.

- $(1,a,1)$ bektoreak $x+2y-3z=0$ baldintza betetzeko: $1+2a-3=-2+2a=0$, hots, $a=1$.
- $(b,2,-1)$ bektoreak $x+2y-3z=0$ baldintza betetzeko: $b+4+3=7+b=0$, hots, $b=-7$.

- Eta $a=1$ eta $b=-7$ direnean, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=2$.

$\langle (1,a,1),(b,2,-1)\rangle$ sistema $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$-ren oinarria $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1$ eta $b = -7$.

(c) $\langle (1,0,1),(2,1,1),(0,1,-1)\rangle$ *S*-ren sistema sortzailea dela jakinik, aurkitu S-ren oinarri ortonormal bat.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ da. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ denez, heina ≥ 2, eta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ denez, heina 2.

Beraz, $\langle (1,0,1),(2,1,1),(0,1,-1)\rangle$ lotua da eta adibidez $\langle (2,1,1),(0,1,-1)\rangle$ *S*-ren oinarria da.

Gainera, $\langle (2,1,1),(0,1,-1)\rangle$ ortogonala da, $\langle (2,1,1) \mid (0,1,-1)\rangle = 0$ baita. Honela, bektore bakoitzari bere norma zatituz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\rangle$ *S*-ren oinarri ortonormala da.

<u>Beste era batean</u>: $\langle (1,0,1),(0,1,-1)\rangle$ ere librea denez, *S*-ren oinarria da.

Ez denez ortogonala, Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko dugu. Honela eginez,

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\right\rangle$, *S*-ren oinarri ortonormala lortzen da.

8 (a) Bira ondoko bi multzoak:

$$S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle \text{ bektore sistema lotua den}\}.$$

$$T=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle \text{ bektore sistema librea den}\}.$$

S eta T $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorialak al dira? Hala den kasuan, eman azpiespazioaren oinarri ortonormal bat.

(b) Demagun E $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio bektoriala non $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ E-ren oinarri ortonormala den. Esan zuzenak ala okerrak diren ondoko baieztapenak, erantzunak azalduz:

(j) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$ sistema ortogonala da.

(ii) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$ E-ren oinarria da.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) Bira ondoko bi multzoak:

$$S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle \text{ bektore sistema lotua den}\}.$$

$$T=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle \text{ bektore sistema librea den}\}.$$

- S, $\mathbb{R}^3$–ren azpiespazio bektoriala al da?

$\langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle$ lotua $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y = 0$. Beraz, $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid y=0\} =$

$=\{(x,0,z) \mid x,z\in \mathbb{R}\}= \{x(1,0,0)+z(0,0,1) \mid x,z\in \mathbb{R}\}$. $\langle (1,0,0), (0,0,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineal guztien multzoa denez S, $\mathbb{R}^3$–ren azpiespazio bektoriala da, bere oinarri ortonormala $\langle (1,0,0), (0,0,1)\rangle$ izanik.

- T, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? $\langle (x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)\rangle$ librea bada, $(0,0,0)\notin T$ eta ondorioz T ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

(b) Demagun E $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio bektoriala non $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ E-ren oinarri ortonormala den. Esan zuzenak ala okerrak diren ondoko baieztapenak, erantzunak azalduz:

(k) $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle$ sistema ortogonala da. ZUZENA

$\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\rangle = (*) = 1-0+0-1=0$ baita.

(*) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ ortonormala.

(ii) $\langle\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\,\rangle$ E-ren oinarria da. ZUZENA.

E-ren oinarria izateko, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \in E$ eta $\langle\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\,\rangle$ librea.

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ eta E espazio bektoriala denez, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \in E$ baieztatzen dira.
- Sistema ortogonal bateko bektore guztiak ez nuluak badira, librea da. Gure kasuan,

  Badakigu $\langle\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\,\rangle$ ortogonal dela.

  Gainera, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \neq 0$ eta $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \neq 0$ dira ($\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ librea denez, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ eta $\boldsymbol{u} \neq -\boldsymbol{v}$ dira).

  Beraz, $\langle\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\,\rangle$ E-ren oinarria da.

9 Demagun $A = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0\}$; $B = \{(x,y,z\in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\notin A\}$;

$C = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 0\}$ eta $D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x- y -z = 1\}$ multzoak.

(a) A eta B $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorialak al dira? Zergatik?

(b) Aurkitu $A\cap C$-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu $A\cap C\cap D$.

(d) Aurkitu C-ren oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA

(a) A eta B $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorialak al dira? Zergatik?

- $A = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0\} = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y - 4z\} =$

  $= \{(-2y-4z, y, z) \mid y, z\in \mathbb{R}\} = \{ y(-2,1,0) + z(-4,0,1) \mid y, z\in \mathbb{R}\}$.

  Eta A $\langle(-2,1,0), (-4,0,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineal guztien multzoa denez, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

- $B = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\notin A\}$. $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala izateko $(0,0,0)\in B$ baldintza beharrezkoa da. Baina A $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala denez, $(0,0,0)\in A$, beraz, $(0,0,0)\notin B$. Ondorioz, B ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

(b) $A\cap C = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0, 2x + y + 2z = 0\}$, beraz, $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$

sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$,

beraz, $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -3y-6z=0 \end{cases}$

[2. ek] $y = -2z$; [1. ek] $x= -2y - 4z = 4z - 4z = 0$.

Beraz, $A\cap C=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x= 0, y= -2z\} = \{(0,-2z, z) \mid z\in \mathbb{R}\}$.

(c) $A\cap C\cap D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0, 2x + y + 2z = 0, x-y -z = 1\}$,

beraz, $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -3y-6z=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Honela, [3. ek] $z = 1$; [2. ek] $y = -2z = -2$; [1. ek] $x = -2y - 4z = 4-4 = 0$.

Beraz, $A \cap C \cap D = \{(0, -2, 1)\}$.

(d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -2x-2z\} =$

$= \{(x,-2x-2z, z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,0) + z(0,-2,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$.

C-ren oinarria: $\langle(1,-2,0), (0,-2,1)\rangle$. $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\rangle$ oinarri ortonormala lortzeko, Gram –Schmidt-en teorema aplikatuko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{(1,-2,0)}{\|(1,-2,0)\|} = \frac{(1,-2,0)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0).$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\rangle \boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\rangle \boldsymbol{y}_1\|} = \frac{(0,-2,1) - \left\langle (0,-2,1) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(0,-2,1) - \frac{4}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(0,-2,1) - \frac{4}{5}(1,-2,0)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(-4,-2,5)}{\left\|\frac{1}{5}(-4,-2,5)\right\|} = \frac{\frac{1}{5}(-4,-2,5)}{\frac{1}{5}\|(-4,-2,5)\|} = \frac{(-4,-2,5)}{\sqrt{45}} = \frac{-1}{\sqrt{45}}(4,2,-5).$$

Beraz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \frac{-1}{\sqrt{45}}(4,2,-5)\right\rangle$ C-ren oinarri ortonormala da.

10 (i) Esan zuzenak ala okerrak diren ondoko baieztapenak, <u>erantzunak azalduz</u>, hau da, <u>baieztapen zuzenak frogatuz eta okerrak direnetan kontradibidea emanez</u>:

(a) V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala bada eta $W \subset V$, orduan W $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

(b) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ badira non $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ betetzen den, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ eta $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$ sistemek aspiespazio desberdinak sortzen dituzte.

(c) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ badira, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzailea da.

(ii) $\langle (1,1,0), (0,-1,1), (1,0,1) \rangle$ S-ren sistema sortzailea bada,

(a) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta bere oinarri ortonormal bat.

(b) Kalkulatu S-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore guztien multzoa.

<u>EBAZPENA</u>

(i) (a) V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala bada eta $W \subset V$, orduan W $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

OKERRA. Kontradibidea: $V=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$ eta $W=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\ ;\ y=3\}$.

$W \subset V$, V espazio bektoriala da, $x + y - z = 0$ sistema homogenoaren soluzio multzoa delako; W ez da espazio bektoriala, $(0,0,0) \notin W$ delako.

(b) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ badira non $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ betetzen den, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ eta $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$ sistemek azpiespazio desberdinak sortzen dituzte.

OKERRA. Kontradibidea: $\boldsymbol{x} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{y} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{z} = (0,0,2)$. $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ da eta $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ eta $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$ sistemek azpiespazio bera sortzen dute.

(c) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ badira, orduan $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzailea da.

OKERRA. Kontradibidea: $\boldsymbol{x} = (1,0)$, $\boldsymbol{y} = (2,0)$, $\boldsymbol{z} = (3,0)$.

$\{a\boldsymbol{x} + \mathrm{b}\boldsymbol{y} + \mathrm{c}\boldsymbol{z} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0) + b(2,0) + c(3,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} =$

$= \{a(1,0) + 2b(1,0) + 3c(1,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \{(a+2b+3c)(1,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} =$

$= \{d(1,0) \mid d \in \mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$ ez da $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzailea.

(ii) $\langle(1,1,0), (0,-1,1), (1,0,1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea bada,

(a) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta bere oinarri ortonormal bat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ denez eta } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,\ \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Orduan, $\dim(S) = 2$ eta adibidez $\langle(1,1,0), (0,-1,1)\rangle$ S-ren oinarria da.

S-ren $\langle(1,1,0), (0,-1,1)\rangle$ oinarria ortonormalizatzeko Gram-Smidt-en teorema erabiliko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{(0,-1,1) - \left\langle (0,-1,1) \mid \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(0,-1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(0,-1,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{\frac{1}{2}(1,-1,2)}{\frac{1}{2}\|(1,-1,2)\|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}.$$

Beraz, $\left\langle \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} \right\rangle$ S-ren oinarri ortonormala.

(b) $\langle(1,1,0), (0,-1,1)\rangle$ S-ren oinarria denez, S-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore guztien multzoa:

$\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \langle(x,y,z) \mid (1,1,0)\rangle = 0,\ \langle(x,y,z) \mid (0,-1,1)\rangle = 0\} =$

$= \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x + y = 0,\ -y + z = 0\} =$

$= \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x = -y,\ z = y\} =$

$= \{(-y,y,y) : y\in \mathbb{R}\}$.

11 (a) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,0)$ bektorea $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala den.

(b) Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-y+z=0\}$ multzoa:

(i) Eman S-ren oinarri bat.

(ii) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ S-ren oinarria den.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ ortogonala den.

Ba al dago a-ren balioren bat non $\|(1,2,-1)\|=\|(3,1,a)\|$ den?

(d) Aurkitu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle(x,y,z),(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ librea den $\forall a\in\mathbb{R}$.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,0)$ bektorea $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$-ren konbinazio lineala den.

$(1,1,0)$ bektorea $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$-ren konbinazio lineala $\Leftrightarrow$ $(A:B)=\left(\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&1&1\\-1&a&0\end{array}\right)$ bateragarria.

$\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-5\neq 0$ denez, $r(A)=2$ da. Eta $|A{:}B|=a-2$ denez,

$a\neq 2$ bada, $r(A)=2\neq 3=r(A{:}B)$, beraz, sistema bateraezina.

$a=2$ bada, $r(A)=2=r(A{:}B)$, beraz, sistema bateragarria.

$(1,1,0)$ bektorea $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$-ren konbinazio lineala $\Leftrightarrow$ $a=2$.

(b) Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-y+z=0\}$ multzoa:

(i) Eman S-ren oinarri bat.

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-y+z=0\}=\{(x,y,-3x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(1,0,-3)+y\,(0,1,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle(1,0,-3),(0,1,1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da.

Gainera librea da, $(1,0,-3)\neq a(0,1,1)$ delako. Beraz, $\langle(1,0,-3),(0,1,1)\rangle$ S-ren oinarria da.

(ii) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1),(3,1,a)\rangle$ S-ren oinarria den.

dim(S)=2 denez, $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ S-ren oinarria izateko ondoko hiru baldintzak bete beharko ditu:

(1) $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ librea; (2) $(1,2,-1)\in S$; (3) $(3,1,a)\in S$.

(1) $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = 2$ denez $\forall a$, $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ librea da a-ren balio guztietarako.

(2) $(1,2,-1)\in S \Leftrightarrow (A:B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

r(A) = 2 eta $|A{:}B| = 0$ direnez, r(A) = 2 = r($A{:}B$). Beraz, $(1,2,-1)\in S$.

(3) $(3,1,a)\in S \Leftrightarrow (A:B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

r(A) = 2 eta $|A{:}B| = a + 8$ direnez, r(A) = 2 = r($A{:}B$) $\Leftrightarrow a = -8$.

Beraz, $(1,2,-1)\in S \Leftrightarrow a = -8$.

Ondorioz, $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ S-ren oinarria da $\Leftrightarrow a = -8$.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ ortogonala den.

$\langle(1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ ortogonala $\Leftrightarrow \langle(1,2,-1) \mid (3,1,a)\rangle = 0$.

$\langle(1,2,-1) \mid (3,1,a)\rangle = 3 + 2 - a = 5 - a = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

Ba al dago a-ren balioren bat non $\|(1,2,-1)\| = \|(3,1,a)\|$ den?

$\|(1,2,-1)\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ eta $\|(3,1,a)\| = \sqrt{9+1+a^2} = \sqrt{10+a^2}$.

Eta $a^2 \geq 0$ denez, ez dago a-ren baliorik non $\sqrt{6} = \sqrt{10+a^2}$ den.

(d) Aurkitu $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle(x,y,z), (1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ librea den $\forall a\in \mathbb{R}$.

$\langle(x,y,z), (1,2,-1), (3,1,a)\rangle$ librea da $\forall a\in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 1 \\ z & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0\ \forall a\in \mathbb{R}$.

Adibidez $(x,y,z) = (0,0,1)$ hartuz, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \ \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Beraz, $\langle (0,0,1), (1,2,-1), (3,1,a) \rangle$ librea da $\forall a \in \mathbb{R}$.

12 Bira $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x - 3y + 2z = 0\}$, $B = \{x(0,1,1) + y(1,0,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

eta $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid (1,2,1)\rangle = 2\}$ multzoak.

(a) C multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

(b) Kalkulatu A-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu B-ren oinarri ortonormal bat.

(d) Kalkulatu $A \cap C$.

(e) Aurkitu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle \boldsymbol{x}, (0,1,1), (1,0,1)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat den.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid (1,2,1)\rangle = 2\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

$\langle (0,0,0) | (1,2,1) \rangle = 0 \neq 2$, hots, $\langle (0,0,0) \rangle \notin C$ eta ondorioz C ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

(b) Kalkulatu A-ren oinarri bat.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x - 3y + 2z = 0\} = \{(3y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{y(3,1,0) + z(-2,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

Honela, $\langle (3,1,0), (-2,0,1)\rangle$ A-ren sistema sortzailea da eta librea denez, A-ren oinarria.

(c) Kalkulatu B-ren oinarri ortonormal bat.

$B = \{x(0,1,1) + y(1,0,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. $\langle (0,1,1), (1,0,1)\rangle$ B-ren sistema sortzailea da eta librea denez, B-ren oinarria. Bere oinarri ortonormala lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1\|} = \frac{(1,0,1) - \left\langle (1,0,1) \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{\frac{1}{2}(2,-1,1)}{\frac{1}{2}\|(2,-1,1)\|} = \frac{(2,-1,1)}{\sqrt{6}}.$$

Beraz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \right\rangle$ B-ren oinarri ortonormala da.

(d) Kalkulatu $A \cap C$.

$A \cap C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0 , \langle \boldsymbol{x} \mid (1,2,1) \rangle = 2\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0,\ x + 2y + z = 2\}$.

Beraz, $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Sistema hau ebatziz:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$, hau da, $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 5y-z=2 \end{cases}$.

Honela, bigarren ekuaziotik $z = -2 + 5y$ eta lehen ekuaziotik, $x = 4 - 7y$. Beraz,

$A \cap C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4 - 7y,\ z = -2 + 5y\} = \{(4 - 7y, y, -2 + 5y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

(e) Aurkitu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle \boldsymbol{x}, (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat den.

$\langle (x,y,z), (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da $\mathrm{r}\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ bada,

hots, $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ bada.

Adibidez,

$\boldsymbol{x} = (0,0,1)$ hartuz, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ denez, $\langle \boldsymbol{x}, (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da.

13 (a) Aurkitu $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (2,-1,1)\rangle = 0\}$ multzoaren oinarri bat.

(b) Aurkitu $B = \{(x+z+t,\ 2x+y+3z+t,\ -x+y-2t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ multzoaren oinarri bat.

(c) Biz $\langle(1, 2, -1), (1, 3, 0)\rangle$ S azpiespazio bektorialaren oinarri bat.

(i) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a) \in S$ den.

(ii) Kalkulatu S-ren oinarri ortonormal bat.

(iii) Kalkulatu S-ren bektore guztiei ortogonala den $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ bektore bat.

(iv) $T = \{(x,0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ bada, $T \subseteq S$ al da?

EBAZPENA:

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (2,-1,1)\rangle = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x + z\} =$

$= \{(x, 2x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,2,0) + z(0,1,1) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

A-ren sistema sortzailea: $\langle(1,2,0), (0,1,1)\rangle$. $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ denez, sistema librea da eta

ondorioz $\langle(1,2,0), (0,1,1)\rangle$ A-ren oinarria.

(b) $B = \{(x+z+t,\ 2x+y+3z+t,\ -x+y-2t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,2,-1) + y(0,1,1) + z(1,3,0) + t(1,1,-2) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

B-ren sistema sortzailea: $\langle(1,2,-1), (0,1,1), (1,3,0), (1,1,-2)\rangle$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$ denez, dim(B)=2 eta B-ren oinarria lortzeko bere sistema sortzaileko

bi bektore linealki independente aukeratu beharko ditugu.

Adibidez $\langle(1,2,-1), (0,1,1)\rangle$ B-ren oinarria da.

(c) Biz $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle$ S-ren oinarria.

(i) $(1,1,a)\in S \Leftrightarrow (1,1,a)$ bektorea $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala bada $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{array}\right) \text{ sistema bateragarria bada } \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{array}\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a+2=0 \Leftrightarrow a=-2.$$

(ii) $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle$ sistemari Gram-Schmidt-en metodoa aplikatuz,

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{(1,3,0)-\left\langle (1,3,0)\left|\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}\right.\right\rangle \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(1,3,0)-\frac{7}{\sqrt{6}}\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{(1,3,0)-\frac{7}{6}(1,2,-1)}{\text{goikoaren norma}}=\frac{\frac{1}{6}(6,18,0)-\frac{7}{6}(1,2,-1)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}(-1,4,7)}{\frac{1}{6}\|(-1,4,7)\|}=\frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7).$$

Beraz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1),\frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7)\right\rangle$ S-ren oinarri ortonormala.

(iii) $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ S multzoko puntu guztiei ortogonala izateko S-ren oinarrian dauden bektoreei ortogonala izan beharko da. Beraz:

$$\langle(x,y,z)\mid(1,2,-1)\rangle=0 \text{ eta } \langle(x,y,z)\mid(1,3,0)\rangle=0.$$

Honela $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$ sistema ebatziz gero, bere soluzioak $x=3z$ eta $y=-z$ dira,

hau da, $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=3z,\ y=-z\} = \{(3z,-z,z) \mid z\in \mathbb{R}\}$. Bektore bat eskatzen

digutenez, adibidez $z=1$ hartuz, $(3,-1,1)$ S-ren bektore guztiei ortogonala da.

(iv) $T=\{(x,0,x) \mid x\in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) \mid x\in \mathbb{R}\}$ denez, bere oinarri bat $\langle(1,0,1)\rangle$ da.

Eta $\langle(1,2,-1),(1,3,0)\rangle$ S azpiespazio bektorialaren oinarri bat da.

Baina $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$ denez, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ bateraezina da. Beraz, $(1,0,1)\notin S$ eta

ondorioz $T\not\subset S$.

14 Demagun $\mathbb{R}^3$-ko lau bektore: $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,m)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (2,1,1)$, $m \in \mathbb{R}$.

(i) Ba al dago m–ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ librea den? Azaldu erantzuna.

(ii) Ba al dago m-ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ librea den? Azaldu erantzuna.

(iii) $m = 0$ izanik eta $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ sistemako bektore batzuk erabiliz, aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(iv) Demagun A $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat non bere oinarria $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ den.

(a) Kalkulatu A multzoa.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA

(i) Ba al dago m-ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ librea den? Azaldu erantzuna.

EZ, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ denez, $\mathbb{R}^3$-ko lau bektorez osatutako sistema guztiak lotuak dira.

(ii) Ba al dago m-ren balioren bat non $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ librea den?

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \text{ librea } \Leftrightarrow \ \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} = 3. \text{ Eta } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m\,.$$

Beraz, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ librea $\Leftrightarrow$ $m \neq 0$.

(iii) $m = 0$ izanik eta $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ sistemako bektore batzuk erabiliz, aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

$m = 0$ bada, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (2,1,1)$.

Aurreko apartatutik badakigu $m = 0$ denean $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ lotua dela.

Ikus dezagun $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle$:

$$|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Beraz, } \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle \ \mathbb{R}^3\text{-ren oinarria da.}$$

(iv) Demagun A $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat non bere oinarria $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ den:

(a) Kalkulatu A multzoa. $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1)$ eta $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,1)$ badira,

$$A = \{x(1,0,1) + y(3,1,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x+3y, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

A-ren $\langle(1,0,1), (3,1,1)\rangle$ oinarriari Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko diogu.

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\rangle \boldsymbol{y}_1}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(3,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle (3,1,1) \mid (1,0,1)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(3,1,1) - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(3,1,1) - \frac{4}{2}(1,0,1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(3,1,1) - (2,0,2)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}.$$

Beraz, $\left\langle \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} \right\rangle$ A-ren oinarri ortonormala.

15. a) Demagun E $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$ bere oinarri bat.

i) Kalkulatu E-ren oinarri ortonormal bat.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(2,1,1,a)\in E$?

iii) Kalkulatu E multzoa eta frogatu $E=S$ dela,

$$S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y+z=0,\ x+y-2z=0\}\ \text{ izanik.}$$

iv) Eman E-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore multzoaren oinarri bat.

b) Esan hurrengo esaldia zuzena edo okerra den, erantzuna azalduz: $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren bektore sistema ortogonala bada orduan $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da.

EBAZPENA:

a) i) E-ren oinarri ortonormal bat kalkulatzeko $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$ oinarriari Gram-schmidt-en teorema aplikatuko diogu:

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1\|}=\frac{(1,1,1,0)-\left\langle(1,1,1,0)\middle|\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\rangle\frac{1}{2}(1,1,1,1)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{(1,1,1,0)-\frac{3}{2}\frac{1}{2}(1,1,1,1)}{\text{goikoaren norma}}=\frac{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{-3}{4}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{-3}{4}\right)\right\|}=\frac{\frac{1}{4}(1,1,1,-3)}{\frac{1}{4}\|(1,1,1,-3)\|}=\frac{(1,1,1,-3)}{\sqrt{12}}.$$

E-ren oinarri ortonormala**:** $\left(\frac{1}{2}(1,1,1,1),\frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-3)\right)$**.**

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(2,1,1,a)\in E$?

$\left(2,1,1,a\right)\in E \Leftrightarrow \left(A:B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada, hau da, r(A:B)=2 bada.

Baina $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ a-ren balio guztietarako, beraz, r(A)=2 eta r(A:B)=3, hau da, sistema bateraezina. Ondorioz, ez dago a-ren baliorik non $\left(2,1,1,a\right)\in E$ den.

iii) Kalkulatu E multzoa eta frogatu $E=S$ dela,

$$S=\left\{\left(x,y,z,t\right)\in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z=0,\ x+y-2z=0\right\} \text{ izanik.}$$

$E=\left\{x\left(1,1,1,1\right)+y\left(1,1,1,0\right) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(x+y,x+y,x+y,x\right) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

S multzoa kalkulatzeko $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ sistema ebatziko dugu. Gauss-en metodoa aplikatuz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ hau da, } \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases}.$$

[2. EK] $3y-3z=0 \rightarrow y=z$.

[1. EK] $x-2y+z=0 \rightarrow x-2z+z=0 \rightarrow x=z$.

Honela, $S=\left\{\left(x,y,z,t\right)\in\mathbb{R}^4 \mid x=z, y=z\right\}=\left\{\left(z,z,z,t\right) \mid z,t\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{z\left(1,1,1,0\right)+t(0,0,0,1) \mid z,t\in\mathbb{R}\right\}$.

S-ren oinarri bat: $\left\langle\left(1,1,1,0\right),\left(0,0,0,1\right)\right\rangle$. Beraz, $\dim\left(E\right)=2=\dim\left(S\right)$

Eta gainera E-ren $\left\langle\left(1,1,1,1\right),\left(1,1,1,0\right)\right\rangle$ oinarrian dauden bi bektoreak S-n daude, S-n egoteko $x-2y+z=0$ eta $x+y-2z=0$ bi baldintzak baieztatzen dituztelako.

Beraz, $E = S$.

iv) Eman E-ren bektore guztiei ortogonalak diren bektore multzoaren oinarri bat.

(x,y,z,t) bektorea E-ren bektore guztiei ortogonala izango da E-ren oinarriko bektoreei ortogonala bada, hau da, $\langle (x,y,z,t) | (1,1,1,1) \rangle = 0$ eta $\langle (x,y,z,t) | (1,1,1,0) \rangle = 0$ betetzen badira. Beraz, ondoko sistema ebatzi beharko dugu:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Hau ebatziz, $t=0,\ x=-y-z$ soluzioak lortzen ditugu. Beraz,

$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t=0,\ x=-y-z\} = \{(-y-z,y,z,0) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ multzoa.

Bere oinarri bat: $\langle (-1,1,0,0),(-1,0,1,0) \rangle$.

b) Esan hurrengo esaldia zuzena edo okerra den, erantzuna azalduz: $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren bektore sistema ortogonala bada orduan $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da.

OKERRA da. $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren bektore sistema ortogonala librea da bektore guztiak ez nuluak badira, baina ez dakigunez $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ eta $\boldsymbol{x}_3$ zero bektoreak diren, ez du zertan $\mathbb{R}^3$-ren oinarria izan behar. Adibidez $\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,0) \rangle$ ortogonala eta lotua da.

16 a) Kalkulatu $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y+z+t=0,\ y-3t=0\}$-ren oinarri bat eta dimentsioa.

b) $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z^2\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

c) Demagun U $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle(1,2,-1),(0,1,1)\rangle$ U-ren oinarri bat.

i) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,1,a)\in U$?

ii) b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\langle(0,1,1),(2,0,b)\rangle$ U-ren oinarria dela?

iii) Kalkulatu U-ren oinarri ortonormal bat.

iv) Idatzi V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat non $\dim V=1$ eta $V\subseteq U$.

EBAZPENA:

a) $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y+z+t=0,\ y-3t=0\}$ multzoa $\begin{cases} x-2y+z+t=0 \\ y-3t=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Zuzenean ebatzi daiteke sistema mailakatua delako:

[2. EK] $y = 3t$.

[1. EK] $x = 2y - z - t = 6t - z - t = -z + 5t$.

$$S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=-z+5t,\ y=3t\}=$$

$$=\{(-z+5t,3t,z,t) \mid z,t\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{z(-1,0,1,0)+t(5,3,0,1) \mid z,t\in\mathbb{R}\}.$$

$\langle(-1,0,1,0),(5,3,0,1)\rangle$ S-ren sistema sortzaile librea denez, S-ren oinarria da.

Ondorioz, $\dim(S) = 2$.

b) T, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala izateko bi baldintza bete behar dira:

1- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in T$: $\underline{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in T}$.

2- $\forall \boldsymbol{x}\in T$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$: $\underline{\lambda\boldsymbol{x}\in T}$.

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z^2\}=\{(z^2,y,z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}.$$

$\boldsymbol{x} = (z^2, y, z)$ eta $\boldsymbol{y} = (a^2, b, a)$ T-ren bi bektore hartuz,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (z^2, y, z) + (a^2, b, a) = (z^2 + a^2, y+b, z+a) \notin T, \quad z^2 + a^2 \neq (z+a)^2 \text{ baita,}$$

eta T-n egoteko lehen osagaia hirugarrenaren karratua izan beharko litzateke.

Beraz ez du lehen baldintza betetzen eta ondorioz T ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

Hau dena kontradibide batekin ere froga daiteke:

$(4,0,2) \in T, (2,0,1) \in T$ baina $(4,0,2) + (2,0,1) = (6,0,3) \notin T$ $6 \neq 3^2$ baita. Beraz ez du lehen baldintza betetzen eta ondorioz ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

c) i) $(1,1,a) \in U \Leftrightarrow (A:B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, $\mathrm{r}(A) = 2$.

Eta $|A:B| = a+2 \to a+2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$. Beraz,

- $a \neq -2$ bada, $\mathrm{r}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}(A:B)$ $\to$ Sistema bateraezina.
- $a = -2$ bada, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A:B) = 2$ $\to$ Sistema bateragarri determinatua.

Ondorioz, $(1,1,a) \in U \Leftrightarrow a = -2$.

ii) $\dim(U) = 2$ denez, $\langle (0,1,1), (2,0,b) \rangle$ U-ren oinarria izango da librea bada eta bi bektoreak U-n badaude.

- $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = 2$ da $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ baita. Beraz, sistema librea da b-ren balio guztietarako.

- $(0,1,1) \in U \Leftrightarrow (A:B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, $\mathrm{r}(A) = 2$. Eta $|A:B| = 0$.

Beraz, r(A) = r(A:B) = 2 $\rightarrow$ Sistema bateragarri determinatua eta $(0,1,1) \in U$.

- $(2,0,b) \in U \Leftrightarrow (A:B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & b \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, r(A) = 2.

  $|A:B| = b+6 \rightarrow b+6=0 \Leftrightarrow b=-6$. Beraz,

  * $b \neq -6$ bada, r(A) = 2 $\neq$ 3 = r(A:B) $\rightarrow$ Sistema bateraezina.

  * $b = -6$ bada, r(A) = r(A:B) = 2 $\rightarrow$ Sistema bateragarri determinatua.

  Beraz, $(2,0,b) \in U \Leftrightarrow b=-6$.

Ondorioz, $\langle (0,1,1),(2,0,b) \rangle$ U-ren oinarria da $\Leftrightarrow$ $b=-6$.

iii) Gram-Schmidt-en teorema aplikatuz:

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{(1,2,-1)}{\|(1,2,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}(1,2,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1).$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1\|} = \frac{(0,1,1) - \left\langle (0,1,1) \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(0,1,1) - \frac{1}{6}(1,2,-1)}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{7}{6}\right)\right\|} = \frac{\frac{1}{6}(-1,4,7)}{\frac{1}{6}\|(-1,4,7)\|} = \frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7).$$

Beraz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1), \frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7) \right\rangle$ U-ren oinarri ortonormala.

iv) dim(V) =1 izango da V-ren oinarriak bektore bakarra badu eta $V \subseteq U$ baieztatuko da V-ren oinarriko bektorea U-n badago.

Beraz, V-ren oinarri bezala U-ren bektore bat aukeratzea nahikoa izango da.

Adibidez, $(1,2,-1) \in U$ hartuz, $V = \{x(1,2,-1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,2x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ multzoak eskatzen diren bi baldintzak baieztatzen ditu, hots, dim(V) =1 eta $V \subseteq U$.

17 Ondoko multzoak kontutan izanik: $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y+z=0,\ x+2y+t=0\}$,

$B=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-z+t=0,\ 2y+t=0\}$ eta $C=\{(x+2y,x-y,2x-3y,3x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$

i) Kalkula ezazu A-ren oinarri bat eta oinarri ortonormal bat.

ii) Kalkula ezazu B-ren oinarri bat eta aurkitu $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $\langle(x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ B-ren oinarri bat izan dadin.

iii) Kalkula ezazu $A\cap B$ multzoaren oinarri bat eta bere dimentsioa.

iv) Existitzen al da a-ren baliorik non $(1,a,9,a)\in C$?

EBAZPENA:

i) Kalkula ezazu A-ren oinarri bat eta oinarri ortonormal bat.

$A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y+z=0,\ x+2y+t=0\}$, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y+t=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, hau da, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -z+t=0 \end{cases}$.

[2. EK.] $z=t$; [1. EK.] $x=-2y-z=-2y-t$.

Honela, $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=-2y-t, z=t\}=\{(-2y-t,y,t,t)\mid y,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(y(-2,1,0,0)+t(-1,0,1,1)\mid y,t\in\mathbb{R}\}$.

A-ren oinarria: $\langle(-2,1,0,0),(-1,0,1,1)\rangle$.

A-ren oinarri ortonormala lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko diogu:

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0).$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{(-1,0,1,1)-\left\langle(-1,0,1,1)\mid\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{(-1,0,1,1)-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(-1,0,1,1)-\frac{2}{5}(-2,1,0,0)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$= \frac{\left(\frac{-1}{5},\frac{-2}{5},1,1\right)}{\left\|\left(\frac{-1}{5},\frac{-2}{5},1,1\right)\right\|} = \frac{\frac{1}{5}(-1,-2,1,1)}{\left\|\left(\frac{1}{5}(-1,-2,1,1)\right)\right\|} = \frac{\frac{1}{5}(-1,-2,1,1)}{\frac{1}{5}\|((-1,-2,1,1))\|} = \frac{(-1,-2,1,1)}{\sqrt{7}}.$$

Honela, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{7}}(-1,-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)\right\rangle$ A-ren oinarri ortonormala da.

ii) Kalkula ezazu B-ren oinarri bat eta aurkitu $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $\langle (x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ B-ren oinarri bat izan dadin.

$B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = 0,\ 2y + t = 0\}$, $\begin{cases} x - z + t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Ebatziz,

[2. EK.] $t = 2y$; [1. EK.] $x = z - t = z + 2y$.

Honela, $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y + z,\ t = 2y\} = \{(2y+z, y, z, 2y) \mid y,z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{y(2,1,0,2) + z(1,0,1,0) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle (2,1,0,2),(1,0,1,0)\rangle$ B-ren oinarria.

dim(B)=2 denez, $\langle (x,y,z,t),(3,1,1,-2)\rangle$ B-ren oinarria izateko bi bektoreak B-n egon behar dira eta linealki independente izan.

$(3,1,1,-2) \in B$, B-n egoteko baldintzak betetzen dituelako, eta adibidez $(2,1,0,2) \in B$. Honela, $\langle (2,1,0,1),(3,1,1,-2)\rangle$ B-ren oinarria da.

iii) Kalkula ezazu $A \cap B$ multzoaren oinarri bat eta bere dimentsioa.

$A \cap B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0,\ x + 2y + t = 0,\ x - z + t = 0,\ 2y + t = 0\}$ da,

hots, $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2y-2z+t=0 \\ -z+t=0 \end{cases}$. Honela,

[3. EK.] $z=t$; [2. EK.] $-2y-2z+t=0 \to -2y-t=0 \to y=\frac{-1}{2}t$; [1. EK.] $x=t-t=0$.

Hau da, $A\cap B=\left\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 \mid x=0,\ y=\frac{-1}{2}t,\ z=t\right\}=\left\{(0,\frac{-1}{2}t,t,t) \mid t\in \mathbb{R}\right\}$.

$\left\langle\left(0,\frac{-1}{2},1,1\right)\right\rangle$ $A\cap B$-ren oinarria eta dim($A\cap B$)=1

iv) Existitzen al da a-ren baliorik non $(1,a,9,a)\in C$?

$C=\{(x+2y,x-y,2x-3y,3x+y) \mid x,y\in \mathbb{R}\}=\{x(1,1,2,3)+y(2,-1,-3,1) \mid x,y\in \mathbb{R}\}$.

$$(1,a,9,a)\in C \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 9 & a \end{pmatrix}=2 \text{ bada.}$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 9 & a \end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & a-1 & 7 & a-3 \end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow a-1=3 \text{ eta } a-3=5.$$

Baina hau ezinezkoa denez, ez da existitzen a-ren baliorik non $(1,a,9,a)\in C$ den.

18 a) Demagun ondorengo oinarria duen $\mathbb{R}^4$-ren E azpiespazio bektoriala: $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$.

i) Kalkulatu E azpiespazioaren beste oinarri bat.

ii) 1 norma duen E-ko bektore bat aurkitu.

iii) Kalkulatu $(1,1,1,0)$ bektorearekiko ortogonala den eta zeroz osaturikoa ez den E-ko bektore bat.

iv) Froga ezazu ondorengoa: $E=\{(a,a,a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

v) $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako izango da $(1,a,1,2)\in E$?

b) Demagun S, $\mathbb{R}^4$-ko azpiespazio bektoriala non $\dim(S)=3$ eta $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ $\mathbb{R}^4$-ko bektore sistema linealki independentea den. Orduan, $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ S-ren oinarria al da? Arrazoitu erantzuna.

EBAZPENA:

a) Demagun ondorengo oinarria duen $\mathbb{R}^4$-ren E azpiespazio bektoriala: $\langle(1,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$

i) Kalkulatu E azpiespazioaren beste oinarri bat.

dim(E)=2 denez, E-ren oinarri bat lortzeko E-ren bi bektore linealki independente behar ditugu:

Adibidez $\langle(2,2,2,2),(2,2,2,0)\rangle$, $\langle(1,1,1,1),(0,0,0,1)\rangle$ eta $\langle(2,2,2,1),(0,0,0,-1)\rangle$ E-ren hiru oinarri dira.

ii) Aurkitu 1 norma duen E-ko bektore bat.

Adibidez 4 bektore hauek baldintza betetzen dute:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{4}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\ (0,0,0,1)\text{ eta }(0,0,0,-1).$$

iii) Kalkulatu $(1,1,1,0)$ bektorearekiko ortogonala den eta zeroz osaturikoa ez den E-ko bektore bat.

- $\boldsymbol{x}\in E \Rightarrow \boldsymbol{x}=\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,1,1,0)=(\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha)$

• Gainera $\langle \boldsymbol{x} \mid (1,1,1,0) \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle (\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha+\beta,\alpha) \mid (1,1,1,0) \rangle = 3(\alpha+\beta) = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = -\beta$.

Adibidez: $(0,0,0,1)$, $(0,0,0,-1)$, $(0,0,0,2)$,…

iv) Froga ezazu ondorengoa: $E = \{(a,a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

Lehen apartatuan ikusi dugun moduan, $\langle (1,1,1,1),(1,1,1,0) \rangle$ *E*-ren oinarria da.

Bestalde, $\{(a,a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,1,1,0) + b(0,0,0,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ denez,

$\{(a,a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ multzoaren oinarri bat $\langle (1,1,1,0),(0,0,0,1) \rangle$ da.

Bi bektoreak *E*-n daude. (1,1,1,0) hasierako oinarriaren bigarren bektorea da eta (0,0,0,1) ere

E-n dago, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ baita. *E*-ren bi bektore hauek linealki independenteak dira eta

$\dim(E) = 2$ denez $\langle (1,1,1,0),(0,0,0,1) \rangle$ *E*-ren oinarria da. Ondorioz,

$E = \{(a,a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ dela frogatua gelditzen da.

v) $a \in \mathbb{R}$ -ren zein baliotarako izango da $(1,a,1,2) \in E$?

$E = \{(a,a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ denez, $(1,a,1,2) \in E$ izateko $a = 1$ eta $b = 2$ izango dira.

b) Demagun *S*, $\mathbb{R}^4$-ko azpiespazio bektoriala non $\dim(S) = 3$ eta $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ $\mathbb{R}^4$-ko bektore sistema linealki independentea den. Orduan, $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ *S*-ren oinarria al da? Arrazoitu erantzuna.

OKERRA. Hiru bektoreak linealki independenteak dira, $\dim(S) = 3$ bezala, baina *S*-ren oinarria osatzeko hiru bektoreak *S*-koak izan behar dira.

19 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0\}$ azpiespazio bektoriala.

i) Eman *S*-ren bi bektore.

ii) *a*-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,a,2)\in S$?

iii) Kalkulatu *S*-ren dimentsioa eta oinarri bat.

iv) Hurrengo bektore sistemen artean esan (eta azaldu erantzunak) zein den eta zein ez den *S*-ren oinarria. Eta *S*-ren oinarri ortonormala?

$$\langle(1,1,-2)\rangle;\qquad \langle(0,2,1),(1,1,-2)\rangle;\qquad \langle(-1,1,0),(1,-1,1)\rangle;$$

$$\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle;\qquad \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle.$$

v) Demagun $T=\{(x+y+2z,3x+y,2x+y+z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. $T\subset S$ baieztatzen al da? Azaldu erantzuna.

<u>EBAZPENA</u>:

i) Eman $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0\}$-ren bi bektore.

$\langle(x,y,z)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ baldintza bete beharko dute. Adibidez, (0,0,0) eta (0,2,1).

$\langle(0,0,0)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ eta $\langle(0,2,1)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0+2-2=0$ baieztatzen baitira.

ii) *a*-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,a,2)\in S$?

$(1,a,2)\in S$, $\langle(x,y,z)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ baldintza baieztatzen badu, hau da, $\langle(1,a,2)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ bada. Honela, $\langle(1,a,2)\,|\,(1,1,-2)\rangle=1+a-4=0\Leftrightarrow a=3$.

iii) Kalkulatu *S*-ren dimentsioa eta oinarri bat.

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-2z=0\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=-y+2z\}=$$

$$=\{(-y+2z,y,z):\ y,z\in\mathbb{R}\}=$$

$= \{y(-1,1,0)+z(2,0,1):\ y,z\in\mathbb{R}\}$.

$\langle(-1,1,0),(2,0,1)\rangle$ *S*-ren sistema sortzaile librea denez, *S*-ren oinarria da eta dim(*S*) = 2.

iv) Hurrengo bektore sistemen artean esan (eta azaldu erantzunak) zein den eta zein ez den *S*-ren oinarria. Eta *S*-ren oinarri ortonormala?

dim(*S*) = 2 denez, *S*-ren oinarria izateko *S*-ren bi bektore linealki independiente behar ditugu.

- $\langle(1,1,-2)\rangle$ EZ, bektore bakarra delako.

  Eta ez denez *S*-ren oinarria ez da *S*-ren oinarri ortonormala izango.

- $\langle(0,2,1),(1,1,-2)\rangle$ EZ. Froga dezagun;

  Bi bektore linealki independiente dira, $(0,2,1)\neq a(1,1,-2)$ baita. *S*-n al daude?

  $(0,2,1)\in S$, $\langle(0,2,1)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ baita.

  $(1,1,-2)\notin S$, $\langle(1,1,-2)\,|\,(1,1,-2)\rangle=-2\neq 0$ baita.

  Beraz, ez da *S*-ren oinarria eta ondorioz ez da *S*-ren oinarri ortonormala izango.

- $\langle(-1,1,0),(1,-1,1)\rangle$ EZ. Froga dezagun;

  Bi bektore linealki independiente dira, $(-1,1,0)\neq a(1,-1,1)$ baita. *S*-n al daude?

  $(-1,1,0)\in S$, $\langle(-1,1,0)\,|\,(1,1,-2)\rangle=0$ baita.

  $(1,-1,1)\notin S$, $\langle(1,-1,1)\,|\,(1,1,-2)\rangle=-2\neq 0$ baita.

  Beraz, ez da *S*-ren oinarria eta ondorioz ez da *S*-ren oinarri ortonormala izango.

- $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle$. BAI. Froga dezagun;

  Bi bektore linealki independiente dira, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\neq a\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ baita.

  S-n al daude?

  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in S$, $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,|\,(1,1,-2)\right\rangle=0$ baita.

$\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\in S$, $\left\langle\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)|(1,1,-2)\right\rangle=0$ baita.

Beraz, *S*-ren oinarria da. *S*-ren oinarri ortonormala al da?

Ortonormala izateko, ortogonala izan behar da eta bakoitzaren norma 1.Baina,

$\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \middle| \left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle=\frac{3}{\sqrt{15}}\neq 0$ denez ez da *S*-ren oinarri ortonormala izango.

- $\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$. EZ, hiru bektore dituelako.

  Eta ez denez *S*-ren oinarria ez da *S*-ren oinarri ortonormala izango.

v) Demagun $T=\{(x+y+2z,3x+y,2x+y+z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. $T\subset S$ baieztatzen al da? Azaldu erantzuna.

$T=\{(x+y+2z,3x+y,2x+y+z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ = $\{x(1,3,2))+y(1,1,1)+z(2,0,1)\ |\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

$\langle(1,3,2)),(1,1,1),(2,0,1)\rangle$ *T*-ren sistema sortzaile lotua. $r\begin{pmatrix}1&3&2\\1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}=2$ denez, dim(*T*)=2 eta adibidez $\langle(1,3,2)),(1,1,1)\rangle$ *T*-ren oinarria. *T*-ren oinarrian dauden bektoreak *S*-n badaude $T\subset S$ baieztatuko da.

$(1,3,2)\in S$, $\langle(1,3,2)|(1,1,-2)\rangle=0$ baita eta $(1,1,1)\in S$, $\langle(1,1,1)|(1,1,-2)\rangle=0$ baita.

Beraz, $T\subset S$.

20 Demagun S $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1)\rangle$ bektore sistemak sortzen duen azpiespazioa.

i) Aurkitu (posible bada) (x,y,z,t) bektore bat non $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ S-ren oinarria den.

Bestalde, $(1,2,-2,0)\in S$ baieztatzen al da?

ii) Kalkulatu $T=\{\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x}$ ortogonala S-ren bektore guztiei$\}$ multzoaren oinarri bat.

iii) Kalkulatu S-ren oinarri ortonormal bat.

iv) Aurkitu bi bektore $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in \mathbb{R}^4$ non $\langle(1,0,2,1), (1,1,0,1), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ $\mathbb{R}^4$-ren oinarri bat den.

<u>EBAZPENA</u>:

i) Aurkitu (posible bada) (x,y,z,t) bektore bat non $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ S-ren oinarria den.

$\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ S-ren oinarria izateko hiru baldintza hauek bete behar dira:

(1) $(1,1,1,1)\in S$, (2) $(x,y,z,t)\in S$ eta (3) $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ librea.

$(1,1,1,1)\in S$?

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=3$$, beraz, $(1,1,1,1)\notin S$ eta ondorioz,

Ez dago (x,y,z,t) bektorerik non $\langle(1,1,1,1), (x,y,z,t)\rangle$ S-ren oinarria den.

- $(1,2,-2,0)\in S$ baieztatzen al da?

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&1&0&1\\1&2&-2&0\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&2&-4&-1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=3$$, beraz, <u>$(1,2,-2,0)\notin S$</u>.

ii) Kalkulatu $T=\{\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x}$ ortogonala S-ren bektore guztiei$\}$ multzoaren oinarri bat.

$T=\left\{x\in \mathbb{R}^4 \mid x \text{ ortogonala } S\text{-ren bektore guztiei}\right\}=$

$=\left\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 : \left\langle(x,y,z,t)\mid(1,0,2,1)\right\rangle=0,\ \left\langle(x,y,z,t)\mid(1,1,0,1)\right\rangle=0\right\}=$

$=\left\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 : x+2z+t=0,\ x+y+t=0\right\}$,

hau da, $\begin{cases}x+2z+t=0\\ x+y+t=0\end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+2z+t=0 \\ \quad y-2z=0 \end{cases}.$$

$$[2.\ \mathrm{EK}]\quad y=2z; \qquad [1.\ \mathrm{EK}]\quad x=-2z-t.$$

Beraz, $T=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=-2z-t;\ y=2z\right\}=$

$$=\left\{(-2z-t,2z,z,t) : z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{z(-2,2,1,0)+t(-1,0,0,1) : z,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Honela, T-ren oinarri bat : $\left\langle(-2,2,1,0),(-1,0,0,1)\right\rangle$.

iii) Kalkulatu S-ren oinarri ortonormal bat.

$\langle(1,0,2,1),(1,1,0,1)\rangle$ S-ren oinarria da. Gram-Schmidt-en teorema aplikatuz:

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1).$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{(1,1,0,1)-\left\langle(1,1,0,1)\left|\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)\right.\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{(1,1,0,1)-\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1)}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(1,1,0,1)-\frac{1}{3}(1,0,2,1)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(2,3,-2,2)}{\left\|\frac{1}{3}(2,3,-2,2)\right\|}=\frac{\frac{1}{3}(2,3,-2,2)}{\frac{1}{3}\left\|(2,3,-2,2)\right\|}=\frac{(2,3,-2,2)}{\sqrt{21}}.$$

Honela, $\left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1),\frac{1}{21}(2,3,-2,2)\right\rangle$ S-ren oinarri ortonormala.

iv) Aurkitu bi bektore $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^4$ non $\langle(1,0,2,1),(1,1,0,1),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ $\mathbb{R}^4$-ren oinarri bat den.

Eskatzen diguten $\mathbb{R}^4$-ren oinarria osatzeko nahikoak dira $\mathbb{R}^4$-ren 4 bektore linealki independente, horietako bi (1,0,2,1), (1,1,0,1) izanik. Honela, adibidez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ denez, $\langle (1,0,2,1), (1,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$ $\mathbb{R}^4$ -ren oinarria da.

APLIKAZIO LINEALAK

21 Bira $f(x,y)=(x+y,2x-y)$ eta $g(x,y,z)=(x+z,y-z)$ aplikazio linealak:

(i) Kalkulatu $M(f\circ g)$, $M(f^{-1}\circ g)$ eta $M(f\circ f^{-1})$ matrizeak.

(ii) Kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,1)\}$ eta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(1,1)\}$ multzoak.

(iii) Aurkitu *a* eta *b*-ren balio batzuk non:

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,2)\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,b)\}=\varnothing$ den

eta beste batzuk non:

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,2)\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,b)\}\neq\varnothing$.

EBAZPENA

$f(x,y)=(x+y,2x-y)$ eta $g(x,y,z)=(x+z,y-z)$ badira, $M(f)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$;

$M(g)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Gainera, f alderanzkarria da, $|M(f)|=-3\neq 0$ baita. Honela,

$M(f^{-1})=(M(f))^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Beraz,

(i) $M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

$M(f^{-1}\circ g)=M(f^{-1})\cdot M(g)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

$M(f\circ f^{-1})=M(f)\cdot M(f^{-1})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Azken berdintza hau zuzenean ere lor daiteke $f\circ f^{-1}$ identitate aplikazioa baita.

(ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,1)\}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da,

hau da,

$\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$ sistemaren soluzio multzoa . Ebatziz, soluzioak $x=1-z, y=1+z, z\in\mathbb{R}$ dira,

hau da:

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,1)\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1-z, y=1+z\} = \{(1-z,1+z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(1,1)\}$ bi eratan kalkula daiteke:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ebatziz, edo $M(f^{-1})\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eginez.

Modu batean edo bestean eginez, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(1,1)\} = \left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$.

(iii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,2)\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,b)\} =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+z=1, x-z=2, x+z=a, x-z=b\}$, hau da,

$$\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=2 \\ x+z=a \\ y-z=b \end{array}\right\} \text{ edo } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ sistemaren soluzio multzoa.}$$

Argi dago r(A) = 2 dela. r($A{:}B$) = 2 izango da a=1 eta b=2 direnean eta r($A{:}B$) > 2 izango da $a\neq 1$ edo $b\neq 2$ kasuetarako. Beraz,

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,2)\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,b)\}\neq\varnothing \iff$$

$$\iff AX=B \text{ bateragarria bada } \iff a=1 \text{ eta } b=2.$$

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,2)\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,b)\}=\varnothing \iff$$

$$\iff AX=B \text{ bateraezina bada } \iff a\neq 1 \text{ edo } b\neq 2.$$

22 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal hau:

$$g(x,y,z)=(x-2y+z,x+ay,5y-z).$$

(i) $a\in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(ii) $a\in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $f(1,0,2)=(3,1,-2)$?

(iii) $a,b\in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,b)\}=\varnothing$?

(iv) $a=0$ bada, kalkulatu $f^{-1}(x,y,z)$ alderantzizko aplikazioa.

<u>EBAZPENA</u>:

(i) $M(f)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$; $|M(f)|=3-a$.

Beraz, $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismoa da $\Leftrightarrow a\neq 3$ bada.

(ii) $f(x,y,z)=(x-2y+z,x+ay,5y-z)$ denez, $f(1,0,2)=(3,1,-2)$ $\forall a\in \mathbb{R}$.

(iii) $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,b)\}=$

$=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid (x-2y+z,x+ay,5y-z)=(0,0,b)\}$,

hau da, $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0\\ x+ay=0\\ 5y-z=b\end{array}\right\}$ ekuazio linealetako sistemaren soluzio multzoa.

Matrizialki, $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ b\end{pmatrix}$ edo laburtuz, $AX=B$.

$\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,b)\}=\varnothing$ izango da $AX=B$ sistema bateraezina bada,

hau da, $r(A)\neq r(A{:}B)$ bada.

$r(A)=3$ da $a\neq 3$ bada eta $r(A)=2$ da $a=3$ denean. Honela,

$a\neq 3$ bada, $r(A)=3=r(A{:}B)$, beraz $AX=B$ bateragarria da.

a=3 bada r(A)=2 da. Ikus dezagun zein izango den r(A:B):

$$\mathrm{r}(A{:}B) = \mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & b \end{array}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & b \end{array}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Beraz,

r(A:B)=3 $b\neq 0$ bada eta r(A:B)=2 $b=0$ bada.

Honela, $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,b)\right\}=\emptyset \Leftrightarrow$ a=3 eta $b\neq 0$ badira.

(iv) a=0 bada, $\left|M(f)\right| = 3 \neq 0$ denez $M(f)$ alderanzkarria da eta ondorioz f ere bai.

Gainera, $M\left(f^{-1}\right)=\left[M(f)\right]^{-1}$ denez, $M(f)$ matrizearen alderantzizkoa kalkulatzea nahikoa izango da. Horrela eginez,

$$M\left(f^{-1}\right)=\left[M(f)\right]^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ dela dugu.}$$

Beraz, $f^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{3}(3y, x-y+z, 5x-5y+2z)$.

23 Demagun $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrize elkartua daukan $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala.

(i) (a) Kalkulatu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $(1,0,-1)\in \ker(f)$ betetzen den.

(ii) a=1 eta b=0 badira, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$ multzoak.

(iii) a=0 eta b=1 badira, eta $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala hartuz, esan ondoko baieztapenak betetzea ziurra, posiblea edo ezinezkoa den (erantzunak azalduz):

(a) $n\neq 3$ bada orduan $f\circ g$ isomorfismoa da.

(b) n=3 bada orduan $g\circ f$ alderanzkarria da.

EBAZPENA:

Demagun $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrize elkartua daukan $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala.

(i) (a) Kalkulatu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denez, f isomorfismoa $\leftrightarrow |M(f)| = 2b \neq 0$ bada, hots, $b \neq 0$ bada, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $(1,0,-1)\in \ker(f)$ betetzen den.

$(1,0,-1)\in \ker(f) \leftrightarrow f(1,0,-1) = (0,0,0)$. $f(1,0,-1) = (0,-b,0)$ denez,

$$(1,0,-1)\in \ker(f) \leftrightarrow b = 0, \forall a\in \mathbb{R}.$$

(ii) a=1 eta b=0 badira, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$ multzoak.

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x,y,z) \mid (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \} =$

$= \{(x+2y+z,\ y,\ x+z) \mid x,y,z\in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x(1,0,1) + y(2,1,0) + z(1,0,1) \mid x,y,z\in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x(1,0,1) + y(2,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \}.$

$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+2y+z,\ y,\ x+z) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z = 0\ , y=0,\ x+z=0\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\ ,\ z=-x\} =$

$= \{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$

(iii) $a=0$ eta $b=1$ badira, eta $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala hartuz, esan ondoko baieztapenak betetzea ziurra, posiblea edo ezinezkoa den (erantzunak azalduz):

(a) $n\neq 3$ bada orduan $f\circ g$ isomorfismoa da.

EZINEZKOA. $f\circ g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ konposaketan $n\neq 3$ baita.

(b) $n=3$ bada orduan $g\circ f$ alderanzkarria da.

POSIBLEA. $g\circ f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ alderanzkarria izango da $|M(g\circ f)| \neq 0$ bada.

$|M(f)| = 2$ denez, $\left|M\left(g\circ f\right)\right| = \left|M\left(g\right)\right|\left|M\left(f\right)\right| = 2\left|M\left(g\right)\right|$.

Beraz, $g\circ f$ alderanzkarria $\leftrightarrow$ $|M(g)| \neq 0$.

24 Demagun $f(x,y,z)=(x+y+2z,2x+y+z,y+3z)$ aplikazio lineala.

(a) f alderanzkarria al da?

(b) Aurkitu irudi bera daukaten $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore.

(c) Aurkitu k-ren balio bat non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}\neq\varnothing$ den.

<u>EBAZPENA</u>:

Demagun $f(x,y,z)=(x+y+2z,2x+y+z,y+3z)$ aplikazio lineala.

(a) f alderanzkarria al da?

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ denez, f alderanzkarria $\Leftrightarrow |M(f)|\neq 0$ bada.

Baina $|M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ denez, f ez da alderanzkarria.

(b) Aurkitu irudi bera daukaten $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore.

Aukera asko dago. Adibidez, ker(f)-ren bi bektore (beraien irudia (0,0,0) baita).
$\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}$, hau da, $M(f)X = O$ sistemaren soluzio multzoa.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ mailakatuz, } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Beraz,

$\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-3z,\ x=z\} = \{(z,-3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, adibidez, $(1,-3,1)$ eta $(0,0,0)$ bektoreek irudi bera dute, $(0,0,0)$ bektorea.

(c) Aurkitu k-ren balio bat non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}\neq\varnothing$ den.

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}$, $M(f)X=B$ sistemaren soluzio multzoa da, $B = (2,3,k)$ izanik. Beraz,

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}\neq\varnothing \Leftrightarrow \mathrm{M}(f)X=B \text{ sistema bateragarria bada.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & k \end{array}\right) \text{ mailakatuz, } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & k \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right).$$

Ondorioz,

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,3,k)\}\neq\varnothing \Leftrightarrow M(f)X=B$ sistema bateragarria bada $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $k-1 = 0$ bada $\Leftrightarrow$ $k = 1$ bada.

25 (a) Bira $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(1,2,a) = (0,a,2a)$ den $\forall a \in \mathbb{R}$. Aurkitu ker(f)-ren bi bektore eta Im(f)-ren beste bi bektore.

(b) $g(x,y,z) = (x-2y+3z, 3x-7y+2z, -x+3y+4z)$ aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $\ker(g)$ eta $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (3,4,4)\}$ multzoa.

EBAZPENA:

(a) $\ker(f) = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\}$ hau da, irudia zero daukaten bektoreen multzoa.

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala denez, badakigu $f(0,0,0) = (0,0,0)$ dela.

$f(1,2,a) = (0,a,2a)$ bada $\forall a \in \mathbb{R}$, adibidez $a = 0$ bada, $f(1,2,0) = (0,0,0)$.

Beraz, (0,0,0) eta (1,2,0) ker(f)-ren bi bektore.

$\mathrm{Im}(f) = \{f(x,y,z) \mid (x,y,z)\in \mathbb{R}^3\}$, irudi guztien multzoa da.

$f(1,2,a) = (0,a,2a)$ bada $\forall a \in \mathbb{R}$,

adibidez $a = 1$ bada, $f(1,2,1) = (0,1,2)$ eta $a = 2$ bada, $f(1,2,2) = (0,2,4)$, beraz,

(0,1,2) eta (0,2,4) Im(f)-ren bi bektore.

(b) $\ker(g) = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$$= \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid (x-2y+3z, 3x-7y+2z, -x+3y+4z) = (0,0,0)\} =$$

$$= \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0,\ 3x-7y+2z=0,\ -x+3y+4z=0\},$$

hau da, $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 3x-7y+2z=0 \\ -x+3y+4z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beraz, $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \quad -y-7z=0 \end{cases}$.

[2. EK] $y=-7z$

[1. EK] $x=2y-3z=-14z-3z=-17z$.

$$\ker(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-17z, y=-7z\}=\{(-17z,-7z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}.$$

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(3,4,4)\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-2y+3z,3x-7y+2z,-x+3y+4z)=(3,4,4)\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=3,\ 3x-7y+2z=4,\ -x+3y+4z=4\},$$

Hau da, $\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 3x-7y+2z=4 \\ -x+3y+4z=4 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

r(A) = 2 eta r(A:B) = 3. Beraz, sistema bateraezina da eta ondorioz,

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(3,4,4)\}=\varnothing.$$

26 Demagun $f(x,y,z)=(ax+y,x+y+z,bx+y+z)$ aplikazio lineala, $a,b\in \mathbb{R}$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako ziurta daiteke $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(u,v,w)\}\neq\varnothing$ dela $\mathbb{R}^3$-ren (u,v,w) bektore guztietarako?

(b) a eta b-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(c) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(2,-1,-1)\in \ker(f)$?

(d) Aurkitu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri bat $a=b=1$ balioentzako.

<u>EBAZPENA</u>:

Demagun $f(x,y,z)=(ax+y,x+y+z,bx+y+z)$ aplikazio lineala, $a,b\in \mathbb{R}$.

(a) $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(u,v,w)\}\neq\varnothing$ da $\mathbb{R}^3$-ren (u,v,w) bektore guztietarako $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \\ M(f) \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$ sistema bateragarria bada $\mathbb{R}^3$-ren (u,v,w) bektore guztietarako.

$\mathrm{r}(M(f))=2$ bada, orduan $\mathrm{r}(M(f):B)=2$ edo 3 izan daiteke, hau da bateragarria edo bateraezina. Baina $\mathrm{r}(M(f))=3$ bada, $\mathrm{r}(M(f):B)=3$ izango da derrigorrean, hots, sistema bateragarria izango da.

Beraz,

$\mathbb{R}^3$-ren (u,v,w) bektore guztietarako $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(u,v,w)\}\neq\varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(M(f)) = 3$ bada.

$$\mathrm{r}(M(f))=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}=3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-b\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 1, \forall a\in \mathbb{R}.$$

(b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $M(f)$ alderanzkarria $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(M(f))=3 \Leftrightarrow |M(f)|\neq 0$

bada.

Aurreko apartatuan $|M(f)| = 1-b$ dela ikusi dugu. Beraz, f isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $b \neq 1, \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) $(2,-1,-1) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(2,-1,-1) = (0,0,0)$.

$f(2,-1,-1) = (2a-1, 0, 2b-2) = (0,0,0) \Leftrightarrow 2a-1 = 0$ eta $2b-2 = 0$.

Beraz, $(2,-1,-1) \in \ker(f) \Leftrightarrow a = 1/2$ eta $b = 1$.

(d) Aurkitu Im(f)-ren oinarri bat a=b=1 balioentzako, hots,

$f(x,y,z) = (x+y, x+y+z, x+y+z)$ denean.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x+y, x+y+z, x+y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1,1,1) + y(1,1,1) + z(0,1,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,1) + z(0,1,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Beraz, Im(f)-ren oinarria: $\langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$.

27 (a) Kalkulatu Im(f), $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hiru baldintza hauek baieztatzen dituen aplikazio lineala dela jakinik:

(i) (1,0,0)$\in$ker(f).

(ii) (0,1,0)$\in$ $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\right\}$.

(iii) f(0,1,2) = (3,4,5).

(b) (1,2,3)$\in$ker(g) baldintza baieztatzen duen $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala isomorfismoa izan al daiteke? Zergatik?

<u>EBAZPENA</u>:

(a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hiru baldintza hauek baieztatzen dituen aplikazio lineala bada:

(i) (1,0,0)$\in$ker(f) $\to$ f(1,0,0) = (0,0,0).

(ii) (0,1,0)$\in$ $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\right\}$ $\to$ f(0,1,0) = (1,2,3).

(iii) f(0,1,2)=(3,4,5) .

f aplizazio lineala denez, f(0,1,2)=f(0,1,0) + 2f(0,0,1).

Beraz, 2f(0,0,1) =f(0,1,2) $-$$f$(0,1,0) = (3,4,5)$-$(1,2,3) = (2,2,2).

Hau da, f(0,0,1) = (1,1,1).

Beraz, $M(f)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\2y+z\\3y+z\end{pmatrix}$ eginez,

$f(x,y,z)=(y+z,2y+z,3y+z)$.

Honela, $\operatorname{Im}(f)=\left\{(y+z,2y+z,3y+z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

(b) (1,2,3)$\in$ker(g) baldintza baieztatzen duen $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala isomorfismoa izan al daiteke? Zergatik?

- $(1,2,3) \in \ker(g) \rightarrow g(1,2,3) = (0,0,0)$.
- g aplikazio lineala $\rightarrow g(0,0,0) = (0,0,0)$.

Bi bektore desberdin ditugu irudi berdinekin, beraz, g ez da bijektiboa eta ondorioz ez da isomorfismoa izanen.

Beste era batean: $\ker(g)$, $M(g)X = O$ sistema homogenoaren soluzio multzoa da. $(1,2,3) \in \ker(g)$ bada, hau da, sistemak soluzio ez-nulurik badu, $M(g)X = O$ sistema bateragarri indeterminatua izanen da eta ondorioz, $\mathrm{r}\left(M\left(g\right)\right) < 3$. Beraz, $\left|M\left(g\right)\right| = 0$, hots, g ez da isomorfismoa.

28 Bira f eta g aplikazio linealak: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x,y)=(2x+2y,\, y,\, -x-3y)$ den eta

$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $M(g)=\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix}$ den.

(a) Aurkitu a, b eta c-ren balioak non $M(g \circ f) = I_2$ den. Balio horietarako, $g = f^{-1}$ al da?

(b) a=1 bada:

(i) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim(\ker(f \circ g)) = 2$ den.

(ii) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim(\operatorname{Im}(f \circ g)) = 2$ den.

(iii) $(f \circ g)$ isomorfismoa izatea posible al da?

<u>EBAZPENA</u>:

(a) Aurkitu a, b eta c-ren balioak non $M(g \circ f) = I_2$ den. Balio horietarako, $g = f^{-1}$ al da?

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-b & 2a-3b+1 \\ 0 & c-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ izateko,}$$

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 2a-3b+1=0 \\ c-4=1 \end{cases} \text{ sistema ebatziz, } a=1,\ b=1,\ c=5.$$

$g = f^{-1}$ al da? EZ. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ denez, ez baita alderanzkarria.

(b) a=1 bada, $M(f \circ g) = M(f)M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+2c & 2b+4 \\ 1 & c & 2 \\ -4 & -1-3c & -b-6 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{r}\left(M\left(g\circ f\right)\right) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 4 & 2+2c & 2b+4 \\ 1 & c & 2 \\ -4 & -1-3c & -b-6 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & c & 2 \\ 4 & 2+2c & 2b+4 \\ -4 & -1-3c & -b-6 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & c & 2 \\ 0 & 2-2c & 2b-4 \\ 0 & -1+c & -b+2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & c & 2 \\ 0 & 2-2c & 2b-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1\,, & c=1 \text{ eta } b=2 \text{ badira} \\ 2\,, & c\neq 1 \text{ edo } b\neq 2 \text{ badira} \end{cases}.$$

(i) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim\left(\ker\left(f\circ g\right)\right)=2$ den.

$\ker\left(f\circ g\right)$, $M\left(f\circ g\right)X$=O sistemaren soluzio multzoa da.

Beraz, $\dim\ker\left(f\circ g\right)=3-\mathrm{r}\left(f\circ g\right)$.

Honela, $\dim\left(\ker\left(f\circ g\right)\right)=3-\mathrm{r}\left(M\left(f\circ g\right)\right)=2 \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(M\left(f\circ g\right)\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=1$ eta $b=2$ direnean.

(ii) Aurkitu b eta c-ren balioak non $\dim\left(\mathrm{Im}\left(f\circ g\right)\right)=2$ den.

$\dim\left(\mathrm{Im}\left(f\circ g\right)\right)=\mathrm{r}\left(M\left(f\circ g\right)\right)=2 \Leftrightarrow c\neq 1$ edo $b\neq 2$ direnean.

(iii) $\left(f\circ g\right)$ isomorfismoa izatea posible al da? EZ.

$\mathrm{r}\left(M\left(f\circ g\right)\right)\neq 3$ denez, $\left|M\left(f\circ g\right)\right|=0$ eta ondorioz $\left(f\circ g\right)$ ez da isomorfismoa.

29 Demagun $f(x,y,z,t)=(x+2y+z+t,y+az+t,2x+3y+t)$ aplikazio lineala, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\dim(\ker(f))=1$ den.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,1,1)\}=\varnothing$ den.

(c) a=1 bada, kalkulatu Im(f) eta $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t)=(1,2,0)\}$.

EBAZPENA

Demagun $f(x,y,z,t)=(x+2y+z+t,y+az+t,2x+3y+t)$ aplikazio lineala, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\dim(\ker(f))=1$ den.

ker(f), $M(f)X$=O sistemaren soluzio multzoa da.

Lau aldagai daudenez, $\dim(\ker(f))=4-\mathrm{r}(M(f))=1\Leftrightarrow \mathrm{r}(M(f))=3$.

$\mathrm{r}(M(f))$ bi eratan kalkula daiteke: determinanteak erabiliz edo matrizea mailakatuz.

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&a&1\\2&3&0&1\end{pmatrix}.\ \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\2&3&1\end{vmatrix}=0 \text{ eta } \begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&a\\2&3&0\end{vmatrix}=-2+a \text{ direnez,}$$

$\mathrm{r}(M(f))=2$ (a=2 bada) eta $\mathrm{r}(M(f))=3$ ($a\neq 2$ bada). Emaitza bera lortzen dugu $M(f)$ mailakatuz:

$$\mathrm{r}(M(f))=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&a&1\\2&3&0&1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&a&1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&a&1\\0&0&a-2&0\end{pmatrix}.$$

Honela, $\dim(\ker(f))=4-\mathrm{r}(M(f))=1\Leftrightarrow \mathrm{r}(M(f))=3$.

Beraz, $\dim(\ker(f))=1 \Leftrightarrow a\neq 2$ bada.

(b) Kalkulatu a eta b-ren balioak non $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,1,1)\right\}=\varnothing$ den.

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,1,1)\right\}=\varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+t=b \\ y+az+t=1 \\ 2x+3y+t=1 \end{cases} \text{ bateraezina bada.}$$

Matrizialki, $(A{:}B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ hartuz,

$A=M(f)$ denez, a=2 bada , r(A)=2 eta $a\neq2$ bada r(A)=3.

Ikus dezagun r($A{:}B$) zenbat den:

$a\neq2$ bada, r(A)=3 eta r($A{:}B$)=3 (ezin da 4 izan).

a=2 bada, r(A)=2 da eta ondorioz, r($A{:}B$)-ren balioa $\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ determinantearen menpe dago.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2-2b$ denez, a=2 denean, r($A{:}B$)=2 (b=1 bada) eta r($A{:}B$)=3 ($b\neq0$ bada).

Honela, $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,1,1)\right\}=\varnothing \Leftrightarrow$ a=2 eta $b\neq1$ badira.

$(A{:}B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ mailakatuz emaitza bera lortzen da. Honela,

$$(A{:}B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1-2b \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 2-2b \end{array}\right).$$

Beraz,

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,1,1)\right\}=\varnothing \Leftrightarrow$ r(A) $\neq$ r($A{:}B$) $\Leftrightarrow$ a=2 eta $b\neq1$ badira.

(c) a=1 bada, kalkulatu Im(f) eta $\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t)=(1,2,0)\right\}$.

$\mathrm{Im}(f)=\{f(x,y,z,t)\,|\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\}=$

$=\{(x+2y+z+t,x+z+t,2x+3y+t)\,|\,x,y,z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(1,0,2)+y(2,1,3)+z(1,1,0)+t(1,1,1)\,|\,x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$

Eta $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$ denez,

$\mathrm{Im}(f)=\{x(1,0,2)+y(2,1,3)+z(1,1,0)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,f(x,y,z,t)=(1,2,0)\}$, $\begin{cases}x+2y+z+t=1\\ y+z+t=2\\ 2x+3y+t=0\end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Ebazteko, Gauss-en metodoa erabiliko dugu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&1&1&2\\2&3&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&1&1&2\\0&-1&-2&-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&1\\0&1&1&1&2\\0&0&-1&0&0\end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases}x+2y+z+t=1\\ y+z+t=2\\ -z=0\end{cases}$.

(3. ek) $z=0$.

(2. ek) $y=2-z-t=2-t$.

(1. ek) $x=1-2y-z-t=1-2(2-t)-0-t=-3+t$.

Honela,

$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,f(x,y,z,t)=(1,2,0)\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x=-3+t,y=2-t,z=0\}=$

$=\{(-3+t,2-t,0,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

30 (a) Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hurrengo hiru baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala:

$(0,1,0)\in \ker(f)$, $(2,0,0)\in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,4,6)\}$ eta $f(2,0,1)=(3,6,3)$.

Orduan, kalkulatu $M(f)$.

(b) Demagun $\boldsymbol{u}=(1-a,\ a,\ 1-a)\in \mathbb{R}^3$ eta g aplikazio lineala non $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix}$ den; $a, b\in \mathbb{R}$.

(i) Kalkulatu a eta b-ren balioak non ondoko bi baldintzak aldi berean betetzen diren: g ez da isomorfismoa eta $\boldsymbol{u}\in \mathrm{Im}(g)$.

(ii) Existitzen al dira a eta b non $\boldsymbol{u}\in \ker(g)$ den?

<u>EBAZPENA</u>:

(a) • $(0,1,0)\in \ker(f) \to f(0,1,0)=(0,0,0)$.

• $(2,0,0)\in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,4,6)\} \to f(2,0,0)=(2,4,6)$. Eta f aplikazio lineala denez, $f(1,0,0)=(1,2,3)$

• f aplikazio lineala denez, $f(2,0,1) = f(2,0,0) + f(0,0,1)$.

Beraz, $f(0,0,1)=f(2,0,1) - f(2,0,0) = (3,6,3) - (2,4,6) = (1,2,-3)$.

Honela, $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Demagun $\boldsymbol{u}=(1-a,\ a,\ 1-a)\in \mathbb{R}^3$ eta g aplikazio lineala non $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix}$ den; $a, b\in \mathbb{R}$.

(i) Kalkulatu a eta b-ren balioak non ondoko bi baldintzak aldi berean betetzen diren: g ez da isomorfismoa eta $\boldsymbol{u}\in \mathrm{Im}(g)$.

- g ez da isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $|M(g)|=0$, hau da, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2b-4 = 0$. Beraz, $\underline{b=2}$ denean.

- $\boldsymbol{u} =(1-a, a, 1-a) \in \mathrm{Im}(g) \Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1-a \\ 2 & 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1-a \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$ denez, hau gertatuko da $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = 0$ denean.

Eta $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = a$ denez, $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(g) \Leftrightarrow a = 0$ bada.

Beraz, g ez da isomorfismoa eta $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(g) \Leftrightarrow a = 0$ eta $b = 2$.

(ii) Existitzen al dira a eta b non $\boldsymbol{u} \in \ker(g)$ den?

$\boldsymbol{u} =(1-a, a, 1-a) \in \ker(g) \Leftrightarrow M(g) = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bada,

hau da, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ b & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2a \\ 4-4a \\ 3-2a+b-ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3-2a=0 \\ 4-4a=0 \\ 3-2a+b-ab=0 \end{array} \right. .$$

Eta sistema hau bateraezina denez, ez dira existitzen a eta b non $\boldsymbol{u} \in \ker(g)$ den.

31 Biz $f(x,y,z)=(x+y,x+2y+2z,ax+y-2z)$ aplikazio lineala.

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-2,1)\in \ker(f)$ den.

(b) Aurkitu a-ren balioak non $(2,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-1,1)\in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\}$ den.

(d) Aurkitu a-ren balioak non $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ den.

(e) a=2 bada, kalkula ezazu $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,4,-1)\}$ multzoa.

(f) a=2 bada, kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f\circ f)$ multzoaren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-2,1)\in \ker(f)$ den.

$(2,-2,1)\in \ker(f) \Leftrightarrow f(2,-2,1) = (0,0,0)$.

$f(2,-2,1) = (0,0,2a-4) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = 2$.

(b) Aurkitu a-ren balioak non $(2,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

$(2,1,1)\in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow (A{:}B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ a & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

$|A| = -4+2a = 0 \Leftrightarrow a = 2$; eta adibidez $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Beraz, a=2 bada r(A)=2, eta $a\neq 2$ bada r(A)=3.

$a\neq 2$ bada, r(A)=3 eta ondorioz r($A{:}B$)=3 (r($A{:}B$) ezin da 4 izan, hiru errenkada dituelako)

a=2 bada, r(A)=2 eta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Beraz, r($A{:}B$)=3.

Honela, a=2 bada, r(A)=2≠3=r($A{:}B$); $a\neq 2$ bada, r(A)=3=r($A{:}B$).

Hau da, $(A{:}B)$ bateragarria $\Leftrightarrow$ $a\neq 2$; ondorioz, $(2,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$ $\Leftrightarrow$ $a\neq 2$.

(c) Aurkitu a-ren balioak non $(2,-1,1)\in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\}$ den.

$(2,-1,1)\in \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,2,3)\} \Leftrightarrow f(2,-1,1) = (1,2,3)$.

$f(2,-1,1) = (1,2,2a-3) = (1,2,3) \Leftrightarrow 2a-3 = 3 \Leftrightarrow a = 3$.

(d) Aurkitu a-ren balioak non $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$ den.

$\ker(f)=\{(0,0,0)\} \Leftrightarrow (A{:}O)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ a & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ sistema bateragarri determinatua bada.

$|A| = -4+2a = 0 \Leftrightarrow a = 2$; eta adibidez $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Beraz, $a=2$ bada $\mathrm{r}(A)=2$ eta $a\neq 2$ bada $\mathrm{r}(A)=3$. Eta ezezagun kopurua: 3.

Honela, $AX=O$ bateragarri determinatua $\Leftrightarrow a\neq 2$, hots, $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ $\Leftrightarrow$ $a\neq 2$.

(e) $a=2$ bada, kalkula ezazu $\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,4,-1)\}$ multzoa.

$\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,4,-1)\}$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$ sistemaren soluzio multzoa da.

Gauss-en metodoa erabiliz ebatziko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y=1 \\ y+2z=3 \end{cases}$$

(2. EK) $\to$ $y = 3-2z$; (1. EK) $\to$ $x = 1-y = 1-(3-2z) = -2+2z$.

Honela,

$\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,4,-1)\} =$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-2+2z,\ y=3-2z\right\} =$

$=\left\{(-2+2z,3-2z,z) \mid z\in\mathbb{R}\right\}.$

(f) a=2 bada, kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f\circ f)$ multzoaren oinarri bat.

$$\mathrm{M}(f\circ f) = \mathrm{M}(f)\cdot\mathrm{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+2z \\ 7x+7y \\ -x+2y+6z \end{pmatrix}.$$

Honela,

$\mathrm{Im}(f\circ f) = \left\{(f\circ f)(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} =$

$= \left\{(2x+3y+2z,7x+7y,-x+2y+6z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\} =$

$= \left\{x(2,7,-1)+y(3,7,2)+z(2,0,6) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$

Eta $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2$ denez, $\mathrm{Im}(f\circ f) = \left\{x(2,7,-1)+y(3,7,2) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Beraz, $\dim(\mathrm{Im}(f\circ f)) = 2$ eta $\langle(2, 7, -1), (3,7,2)\rangle$ $\mathrm{Im}(f\circ f)$-ren oinarri bat.

32 Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ den.

(a) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako baieztatuko da:

$(-1,0,1,1)\in\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,b,0)\}$?

(c) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,2,1)\in\ker(f)$?

(d) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako baieztatuko da $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}(f))$?

(e) a=1 eta b=1 badira, kalkula ezazu $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,5,2)\}$ multzoa.

EBAZPENA:

Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ den.

(a) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ isomorfismoa $\Leftrightarrow$ n=m eta $|M(f)|\neq 0$.

Kasu honetan $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ denez, ez da isomorfismoa.

(b) $(-1,0,1,1)\in\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,b,0)\}$ $\Leftrightarrow$ $f(-1,0,1,1)=(0,b,0)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -6 \\ -1+b \end{pmatrix}$$ denez, $f(-1,0,1,1)=(a,-6,-1+b)$,

Baina $f(-1,0,1,1)=(a,-6,-1+b)=(0,b,0)\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ -6 \\ -1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ -6=b \\ -1+b=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=-6 \\ b=1 \end{cases}$

Eta sistema hau bateraezina denez ($b=-6=1$ ezinezkoa da), ez dago a eta b-ren baliorik non $f(-1,0,1,1)=(0,b,0)$.

(c) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,2,1)\in\ker(f)$?

$(1,0,2,1)\in\ker(f)\Leftrightarrow f(1,0,2,1)=(0,0,0)$. $\begin{pmatrix}0&0&a&0\\4&3&-2&0\\1&0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\0\\1+b\end{pmatrix}$ denez,

$f(1,0,2,1)=(2a,0,1+b)$. Beraz, $f(1,0,2,1)=(2a,0,1+b)=(0,0,0)\Leftrightarrow a=0$ eta $b=-1$.

(d) $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako baieztatuko da $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}(f))$?

$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ denez, $\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=4$. Beraz, $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}(f))=2$

izan beharko luke. Eta badakigu $\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{r}(M(f))$ dela.

Beraz, $a,b\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako $\mathrm{r}(M(f))=2$ den ikusi beharko dugu.

$$\mathrm{r}(M(f))=\mathrm{r}\begin{pmatrix}0&0&a&0\\4&3&-2&0\\1&0&0&b\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&0&b\\4&3&-2&0\\0&0&a&0\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&0&b\\0&3&-2&-4b\\0&0&a&0\end{pmatrix}=\begin{cases}3 & a\neq 0,\forall b\\2 & a=0,\forall b\end{cases}$$

Beraz, $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}(f))\Leftrightarrow a=0,\ \forall b$.

(e) $a=1$ eta $b=1$ badira, kalkula ezazu $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=(1,5,2)\}$ multzoa.

$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=(1,5,2)\}$, $\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&1\\4&3&-2&0&5\\1&0&0&1&2\end{array}\right)$ sistemaren soluzio multzoa da.

Gauss-en metodoa erabiliz,

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&1\\4&3&-2&0&5\\1&0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&2\\4&3&-2&0&5\\0&0&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&2\\0&3&-2&-4&-3\\0&0&1&0&1\end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases}x+t=2\\3y-2z-4t=-3\\z=1\end{cases}$.

Sistema honen soluzioak: $z=1;\ y=\dfrac{4t-1}{3}$ eta $x=2-t,\ t\in\mathbb{R}$.

Honela,

$$\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,5,2)\right\} = \left\{\left(2-t,\frac{4t-1}{3},\ 1,\ t\right)\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

33 (a) Kalkula ezazu $M(h)$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ bi baldintza hauek baieztatzen dituen aplikazio lineala izanik:

$$h(2,-1)=(3,3,1) \text{ eta } h(2,0)=(2,4,2).$$

(b) Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\-1&1&0\end{pmatrix}$ den.

(i) Aurkitu ker(f)-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(ii) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a)\in\ker(f)$ den.

(iii) Aurkitu a-ren balioak non $(1,1,a)\in\mathrm{Im}(f)$ den.

(iv) Kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,-2)\}$ multzoa.

(v) $g(x,y)=(x-y,x+y,y)$ bada, kalkulatu $(f\circ g)(2,1)$ eta $\mathrm{Im}(f\circ g)$ multzoaren dimentsioa.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) h aplikazio lineala denez, $h(2,0)=2\,h(1,0)$. Eta $h(2,0)=(2,4,2)$. Beraz, $h(1,0)=(1,2,1)$ da.

Gainera, h-ren linealtasunagatik, $(2,-1)=2(1,0)-(0,1)$ denez, $h(2,-1)=2h(1,0)-h(0,1)$ da.

Honela, $h(0,1)=2h(1,0)-h(2,-1)=(2,4,2)-(3,3,1)=(-1,1,1)$.

Ondorioz, $M(h)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&1\end{pmatrix}$.

(b) (i) ker(f) sistema homogeno honen soluzio multzoa da:

$$\left\{\begin{array}{r}x+z=0\\2x+y+3z=0\\-x+y=0\end{array}\right.,\ \text{edo matrizialki,}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&1&3&0\\-1&1&0&0\end{array}\right).$$

Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$ sistema geratzen

zaigu.

Beraz, $x = -z$ eta $y = -z$.

Honela, $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=-z, y=-z\} = \{(-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$\ker(f)$-ren oinarria: $\langle(-1,-1,1)\rangle$. $\dim(\ker(f)) = 1$.

(ii) $(1,1,a) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(1,1,a) = (0,0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $\Leftrightarrow$ $1+a = 0$ eta $3 + 3a = 0$ baldintzak baieztatzen

badira, hau da $a = -1$ bada.

(iii) $(1,1,a) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & a \end{array}\right)$ sistema bateragarria bada.

Mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$ da, beraz, $(1,1,a) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow a = -2$.

(iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,-2)\}$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$ sistemaren soluzio multzoa da:

Mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Beraz, $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$ sistema geratzen zaigu. Ebatziz, $x = 1-z$ eta $y = -1-z$.

Honela,

$$\left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,-2)\right\} = \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=1-z, y=-1-z\right\} =$$

$$=\left\{(1-z,-1-z,z) \mid z\in \mathbb{R}\right\}.$$

(v) $M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

- $(f\circ g)(2,1) \;\to\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\to (f\circ g)(2,1)=(2,8,2)$.

- $\dim\left(\operatorname{Im}(f\circ g)\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2.$

34 Biz $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ den.

(i) Aurkitu a-ren balioak f isomorfismoa izateko.

(ii) Aurkitu a eta b-ren balioak $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,b,2)\}=\varnothing$ izateko.

(iii) $a = 1$ bada, kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,-3,4)\}$ multzoa.

(iv) $a = 2$ bada, kalkulatu $(f\circ f)(1,-1,2)$.

(v) $a = -1$ bada, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri bana.

<u>EBAZPENA</u>:

(i) Aurkitu a–ren balioak f isomorfismoa izateko.

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denez, f isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $|M(f)| \neq 0$ bada.

$$|M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(1+a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1.$$

(ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,b,2)\}=\varnothing \Leftrightarrow M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ bateraezina bada,

hau da, $(A{:}B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ -2 & 0 & 3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ bateraezina bada.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(1+a)$ denez, $a \neq -1$ bada $\mathrm{r}(A) = 3$ eta $a = -1$ bada $\mathrm{r}(A) = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

baita.

Honela, $a \neq -1$ bada, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A{:}B) = 3$.

$a = -1$ bada, $(A{:}B)$ -ren 1., 2. eta 4. zutabeak hartuz, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\; \forall b \in \mathbb{R}$.

Beraz, $a = -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$, r(A) = 2 eta r($A{:}B$) = 3, hau da, sistema bateraezina.

Ondorioz,

$$a = -1,\ \forall b \in \mathbb{R},\ \left\{ \left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(x, y, z\right) = \left(1, b, 2\right) \right\} = \varnothing .$$

(iii) $a = 1$ bada, kalkulatu $\left\{ \left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(x, y, z\right) = \left(2, -3, 4\right) \right\}$ multzoa.

$\left\{ \left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(x, y, z\right) = \left(2, -3, 4\right) \right\}$, $M(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Gauss-en metodoa aplikatzeko, $(A{:}B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ mailakatuko dugu.

Honela:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$. Beraz, $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 5z = 1 \\ -2z = 2 \end{cases}$. Ebatziz,

[3. EK.] $z = -1$.

[2. EK.] $2y = 1 - 5z = 1 + 5 = 6 \rightarrow y = 3$.

[1. EK.] $x = 2 - y - z = 2 - 3 + 1 = 0 \rightarrow x = 0$.

Beraz, $a = 1$ bada, $\left\{ \left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(x, y, z\right) = \left(2, -3, 4\right) \right\}$ multzoa $\left\{ \left(0, 3, -1\right) \right\}$ da.

(iv) $a = 2$ bada, kalkulatu $\left(f \circ f\right)(1, -1, 2)$.

$\left(f \circ f\right)(1, -1, 2)$ lortzeko $\left(M(f)\right) \cdot \left(M(f)\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kalkulatuko dugu.

$$\left(M(f)\right)\cdot\left(M(f)\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&1&-7\\-2&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-14\\10\end{pmatrix}.$$

Beraz, $\left(f\circ f\right)(1,-1,2)=(4,-14,10)$.

(v) $a=-1$ bada, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri bana.

$a=-1$ bada, $M(f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&0&3\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-z\\-2x+3z\\x+y-z\end{pmatrix}$. Beraz,

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\left(x+y-z,-2x+3z,x+y-z\right)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x\left(1,-2,1\right)+y\left(1,0,1\right)+z\left(-1,3,-1\right)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\mathrm{r}\left(M(f)\right)=2$ eta adibidez $\begin{vmatrix}1&1\\-2&0\end{vmatrix}\neq 0$ denez, bi lehenengo bektoreak linealki independienteak dira.

Beraz, $\mathrm{Im}(f)=\left\{x\left(1,-2,1\right)+y\left(1,0,1\right)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ eta

$\left\langle\left(1,-2,1\right),\left(1,0,1\right)\right\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarria.

$\ker(f)$, $M(f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Gauss-en metodoa aplikatzeko, $(A{:}B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\-2&0&3&0\\1&1&-1&0\end{array}\right)$ mailakatuko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\-2&0&3&0\\1&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right).\ \text{Beraz,}\ \begin{cases}x+y-z=0\\2y+z=0\end{cases}.$$

Ebatziz:

[2. EK.] $z = -2y$

[1. EK.] $x = -y + z = -3y \rightarrow x = -3y$

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y, z = -2y\} = \{(-3y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(-3,1,-2) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Honela, $\langle(-3,1,-2)\rangle$ ker(f)-ren oinarria.

35 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x,y,z)=(ax,by+z,cy+z)$; $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) $a=0,\ b=1,\ c=1$ badira, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri ortonormal bana.

b) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(1,1,1)\in\ker(f)$ den.

c) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$ den.

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio lineala, $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(g\circ f)(0,1,1)=(2,0)$ baieztatzen den.

EBAZPENA:

a) $a=0,\ b=1,\ c=1$ badira, $f(x,y,z)=(0,y+z,y+z)$.

- $\mathrm{Im}(f)=\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\{(0,y+z,y+z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=$

  $=\{y(0,1,1)+z(0,1,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(0,1,1)\mid y\in\mathbb{R}\}$.

  $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarria: $\langle(0,1,1)\rangle$. $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri ortonormala: $\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right\rangle$

- $\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y+z=0\}=$

  $=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=-y\}=\{(x,y,-y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=$

  $=\{x(1,0,0)+y(0,1,-1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

  $\ker(f)$-ren oinarria: $\langle(1,0,0),(0,1,-1)\rangle$. Eta sistema ortogonala denez:

  $\ker(f)$-ren oinarri ortonormala: $\left\langle(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\rangle$.

b) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(1,1,1)\in\ker(f)$ den.

$(1,1,1)\in\ker(f)\ \Leftrightarrow\ f(1,1,1)=(0,0,0)$.

$f(1,1,1)=(a,b+1,c+1)=(0,0,0)\Leftrightarrow a=0,\ b=-1,\ c=-1$.

c) Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$ den.

$$\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{r}(M(f))=\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & c & 1\end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} [a=0 \text{ eta } b\neq c] \\ \text{edo} \\ [a\neq 0 \text{ eta } b=c] \end{cases}$$

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio lineala, $g(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Kalkulatu $a,\ b,\ c$-ren balioak non $(g\circ f)(0,1,1)=(2,0)$ baieztatzen den.

$$(g\circ f)(0,1,1)=(2,0) \Leftrightarrow (M(g))(M(f))\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Honela:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & 1\\ a & c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+1\\c+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=1 \text{ eta } c=-1.$$

36 Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua

$$\mathrm{M}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \text{ den, } a\in\mathbb{R}.$$

(i) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,3,1)\in\ker(f)$?

(ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $\dim(\ker(f))=1$?

(iii) $a=5$ bada, kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ multzoaren oinarri bat.

(iv) $a=1$ bada kalkulatu $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x})=(3,5,0)\}$ multzoa.

(v) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ aplikazioa non $g(x,y,z)=x-y+3z$ den. $a=1$ baliorako kalkulatu $(g\circ f)(2,0,1)$.

EBAZPENA:

i) $(b,3,1)\in\ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}b+4\\ 2b+3+a\\ b+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

Hau da, $\begin{cases} b+4=0\\ 2b+3+a=0\end{cases}$ baieztatzen bada.

Beraz, $b=-4$ eta $a=5$ direnean, $(b,3,1)\in\ker(f)$.

ii) $\ker(f)$, $M(f)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Eta sistema honek 3 aldagai ditu, $M(f)$-k 3 zutabe dituelako. Beraz,

$$\dim(\ker(f))=3-\mathrm{r}(M(f)).$$

Ondorioz, $\dim(\ker(f))=1\Leftrightarrow \mathrm{r}(M(f))=2.$

$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ denez, $\mathrm{r}(M(f))\geq 2$ eta $|M(f)|=5-a.$

Honela, $\mathrm{r}(M(f))=2\Leftrightarrow a=5$.

iii) $\text{Im}(f)=\left\{f\left(x,y,z\right) \mid \left(x,y,z\right)\in \mathbb{R}^3\right\}$.

$$M(f)X=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&5\\1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\2x+y+5z\\x+2y-2z\end{pmatrix} \text{ denez,}$$

$$\text{Im}(f)=\left\{f\left(x,y,z\right) \mid \left(x,y,z\right)\in \mathbb{R}^3\right\}=$$

$$=\left\{(x+y+z,\ 2x+y+5z,\ x+2y-2z) \mid x,y,z\in \mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x(1,2,1)+y(1,1,2)+z(1,5,-2) \mid x,y,z\in \mathbb{R}\right\}$$

$\left\langle(1,2,1),(1,1,2),(1,5,-2)\right\rangle$ Im(f)-ren sistema sortzailea da.

ii) apartatuan ikusi dugun bezala, $\text{r}\left(M\left(f\right)\right)=\text{r}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&5\\1&2&-2\end{pmatrix}=2$ da, beraz,

$\dim\left(\text{Im}\left(f\right)\right)=2$. Honela, adibidez $\left\langle(1,2,1),(1,1,2)\right\rangle$ Im(f)-ren oinarria da.

iv) $\left\{\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^3 \mid f\left(\boldsymbol{x}\right)=\left(3,5,0\right)\right\}$ multzoa, $\left(M(f)\right)X=B$ sistemaren soluzio multzoa da,

non B = (3,5,0) den, hots, $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&1&5\\1&2&-2&0\end{array}\right)$ sistemaren soluzio multzoa.

Gauss-en metodoa erabiliz ebatziko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&1&5\\1&2&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-1&-1&-1\\0&1&-3&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&-4&-4\end{array}\right)\to\begin{cases}x+y+z=3\\-y-z=-1\\-4z=-4\end{cases}.$$

Ezker aldeko aldagaiak askatuz,

[3. EK] $z = 1$.

[2. EK] $y = 1 - z = 0$.

[1. EK] $x = 3-y-z = 2$.

Honela, $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f\left(\boldsymbol{x}\right)=\left(3,5,0\right)\right\}=\left\{\left(2,0,1\right)\right\}$.

v) $g\circ f$ matrizialki lortzeko $M\left(g\right)M\left(f\right)$ biderkaketa egingo dugu. Honela:

$$M\left(g\right)\cdot M\left(f\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=-2\,.$$

Beraz, $\left(g\circ f\right)(2,0,1)=-2$.

37 (a) Kalkula ezazu $M(g)$, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ondoko baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala dela jakinik:

i) $(1,-2) \in \ker(g)$. ii) $g(0,1) = (1,-1,2)$.

(b) Demagun f aplikazio lineala eta $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

i) Kalkulatu *a* eta *b*-ren zein baliotarako f ez den isomorfismoa eta gainera $f(1,b,0) = (0,-2,2)$.

ii) $a = 2$ baliorako, kalkula itzazu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa

iii) $a = -2$ baliorako, kalkula itzazu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa.

iv) Kalkula ezazu zein *a*-ren baliorako beteko den $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing$.

v) Kalkulatu $(f \circ g)(2,-4)$.

EBAZPENA

(a) Kalkula ezazu $M(g)$, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ondoko baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala dela jakinik:

i) $(1,-2) \in \ker(g)$. ii) $g(0,1) = (1,-1,2)$.

$(1,-2) \in \ker(g) \Leftrightarrow g(1,-2) = (0,0,0)$. g aplikazio lineala denez, $g(1,-2) = g(1,0) - 2g(0,1)$.

Orduan, $g(1,0) = g(1,-2) + 2g(0,1) = (0,0,0) + (2,-2,4) = (2,-2,4)$.

Beraz, $M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Demagun f aplikazio lineala eta $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

i) Kalkulatu *a* eta *b*-ren zein baliotarako f ez den isomorfismoa eta gainera $f(1,b,0) = (0,-2,2)$.

f ez da isomorfismoa $|M(f)| = 0$ bada.

$$|M(f)| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ edo } -2.$$

$f(1,b,0) = (0,-2,2)$ izateko, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-b \\ a \\ 4+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

hau da, $\begin{cases} -2-b=0 \\ a=-2 \\ 4+b=2 \end{cases}$. Beraz, $a=-2$ eta $b=-2$.

ii) $a = 2$ baliorako, kalkula ezazu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa.

$\ker(f)$, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Mailakatuz,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{cases}$.

[2. EK.] $y = 4z$; [1. EK.] $-2x = y - 2z = 4z - 2z = 2z \to x = -z$;

Beraz, $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z,\ y = 4z\} = \{(-z,4z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$\ker(f)$-ren oinarria:$\langle(-1,4,1)\rangle$. Eta dimentsioa, 1.

iii) $a = -2$ baliorako, kalkula itzazu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y-2z \\ -2x+2z \\ 4x+y \end{pmatrix}.$$

Beraz,

$$\operatorname{Im}(f) = \{(-2x-y-2z, -2x+2z, 4x+y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(-2,-2,4) + y(-1,0,1) + z(-2,2,0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

$a=-2$ denean $\mathrm{r}(M(f)) = 2$ dela ikusi dugu. Beraz,

$$\operatorname{Im}(f) = \{x(-2,-2,4) + y(-1,0,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\langle(-2,-2,4),(-1,0,1)\rangle$ $\operatorname{Im}(f)$-ren oinarri bat eta $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$.

iv) Kalkula ezazu zein a-ren baliorako beteko den $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing$.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bateraezina bada.}$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} -2 & -1 & a \\ a & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, & a = 2 \text{ edo } a = -2 \text{ denean} \\ 3, & \text{bestela} \end{cases}.$$

$$a = 2 \text{ bada, } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad a = -2 \text{ bada, } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$\text{Beraz } \begin{cases} a \neq -2 \text{ bada, sistema bateragarria.} \\ a = -2 \text{ bada, sistema bateraezina.} \end{cases}$$

Ondorioz, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,0)\} = \varnothing \Leftrightarrow a = -2.$

v) Kalkulatu $(f \circ g)(2,-4)$.

$$M\left(f\circ g\right)=M\left(f\right)M\left(g\right)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4a & -1+2a\\ 2a+8 & a+4\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}-2+4a & -1+2a\\ 2a+8 & a+4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Beraz, $\left(f\circ g\right)\left(2,-4\right)=\left(0,0,0\right)$.

38 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondorengo aplikazio lineala:

$$f(x,y,z)=(ax+by+z,\,y+cz,\,2x),\; a,b,c\in\mathbb{R}.$$

a) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako izango den f isomorfismoa.

b) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako betetzen diren ondorengo bi baldintzak (biak batera) $(0,1,1)\in\ker(f)$ eta $f(1,1,1)=(0,0,2)$.

c) $a=0,\; b=1,\; c=1,$ balioentzat

c1) Kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$ multzoen oinarri ortonormal bana.

c2) Kalkula ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,2)\}$ multzoa.

c3) Kalkulatu zein d-ren baliotarako betetzen den ondorengoa:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,d,1)\}=\varnothing.$$

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ non $g(x,y,z)=(x+z,y)$. Kalkula itzazu *a, b* eta c-ren balioak non $(g\circ f)(1,1,1)=(3,1)$.

<u>EBAZPENA</u>:

a) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako izango den f isomorfismoa.

$$f \text{ isomorfismoa} \Leftrightarrow |M(f)|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2bc-2\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a,b,c\in\mathbb{R} \text{ non } b\cdot c\neq 1 \text{ eta } \forall a\in\mathbb{R}.$$

b) Kalkulatu a, b eta c-ren zein baliotarako betetzen diren ondorengo bi baldintzak (biak batera) $(0,1,1)\in\ker(f)$ eta $f(1,1,1)=(0,0,2)$.

$$(0,1,1)\in\ker(f) \Leftrightarrow f(0,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow (b+1,1+c,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b=c=-1 \text{ eta } \forall a\in\mathbb{R}.$$

Gainera $f(1,1,1)=(0,0,2) \Leftrightarrow (a+b+1,1+c,2)=(0,0,2)$. Aurreko kontutan hartuta, hots, $b=c=-1$, orduan $a=0$.

c) $a=0,\ b=1,\ c=1$, balioentzat,

c1) Kalkula ezazu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$ multzoen oinarri ortonormal bana.

$\mathrm{Im}(f)=\{(y+z,y+z,2x) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\{x(0,0,2)+y(1,1,0)+z(1,1,0) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle(0,0,2),(1,1,0),(1,1,0)\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$-ren sistema sortzailea da, baina lotua.

$\langle(0,0,2),(1,1,0)\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarria da.

Eta sistema ortogonala denez, $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),(0,0,1)\right\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$ -ren oinarri ortonormala da.

$\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y+z,y+z,2x)=(0,0,0)\}$, hau da,

$\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

Ebatziz, bere soluzioak: $x=0,\ y=-z,\ z\in\mathbb{R}$.

Beraz, $\ker(f)=\{(0,y,-y) \mid y\in\mathbb{R}\}$.

Honela,

$\langle(0,1,-1)\rangle$ $\ker(f)$ -ren oinarria eta $\left\langle\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$ $\ker(f)$ -ren oinarri ortonormala.

c2) Kalkula ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,2)\}$ multzoa.

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,2)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y+z,y+z,2x)=(3,3,2)\}$,

hau da, $\begin{cases} y+z=3 \\ y+z=3 \\ 2x=2 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

Ebatziz, bere soluzioak: $x=1,\ y=3-z,\ z\in\mathbb{R}$.

Beraz,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,2)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1,\ y=3-z\right\}=$$

$$=\left\{(1,3-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(1,3,0)+(0,-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\right\}.$$

c3) Kalkulatu zein *d*-ren baliotarako betetzen den ondorengoa:

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,d,1)\right\}=\varnothing$. Hau da,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,d,1)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y+z,y+z,2x)=(1,d,1)\right\}=\varnothing$$

Beraz, $\begin{cases} y+z=1 \\ y+z=d \\ 2x=1 \end{cases}$ bateraezina izan beharko da. Eta hori $d\neq 1$ denean gertatuko da.

d) Demagun $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ non $g(x,y,z)=(x+z,y)$. Kalkula itzazu *a, b* eta *c*-ren balioak non $(g\circ f)(1,1,1)=(3,1)$ den.

$(g\circ f)(1,1,1)=g\left(f(1,1,1)\right)=g(a+b+1,1+c,2)=(a+b+3,1+c)=(3,1)$.

Beraz, $(g\circ f)(1,1,1)=(3,1)$ beteko da $a+b=0$ eta $c=0$ direnean.

39 a) Demagun f aplikazio lineala non bere matrize elkartua $M(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den.

i) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ -ren dimentsioa eta oinarri bat. Frogatu $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ dela.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,a)\in \ker(f)$?

iii) $h(x,y)=(x+y,y,2x+y)$ aplikazio lineala hartuz, existituko al da $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ bektore bat non $h(x,y)=(0,1,1)$ den? Eta $h(x,y)=(1,1,1)$ baieztatzen duena? Erantzuna baiezkoa den kasurako, kalkulatu bektoreak.

iv) Kalkulatu $f\circ h$ konposaketari elkartutako matrizea. $f\circ h$ lineala eta alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu $(f\circ h)^{-1}$.

b) Kalkulatu $M(g)$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ honako baldintza hauek betetzen dituen aplikazio lineala izanik:

$g(0,0,2)=(2,4,0)$, $g(1,1,-1)=(1,3,1)$ eta $(x,0,-x)\in \ker(g)$ $x\in\mathbb{R}$ guztietarako.

EBAZPENA:

a) i) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ -ren dimentsioa eta oinarri bat. Frogatu $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ dela.

$$M(f)X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Beraz,

$\mathrm{Im}(f)=\{(2x+z,x+y+z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\{x(2,1)+y(0,1)+z(1,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2$ denez,

$\mathrm{Im}(f)=\{x(2,1)+y(0,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$. $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$ eta $\langle(2,1),(0,1)\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarria.

Gainera, $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ denez, $\mathbb{R}^2$ -ren oinarria osatuko du $\mathbb{R}^2$ -ren edozein bi bektore linealki independenteen sistemak, adibidez, $\langle(2,1),(0,1)\rangle$. Sistema honek $\mathrm{Im}(f)$ eta $\mathbb{R}^2$ sortzen baditu, bi multzo hoiek berdinak direla esan nahi du, hots, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$ dela.

ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,0,a)\in \ker(f)$?

$(1,0,a)\in \ker(f) \;\Leftrightarrow\; f(1,0,a)=(0,0)$.

Baina $M(f)\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1+a\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Beraz, ez dago a-ren baliorik non $(1,0,a)\in \ker(f)$ den.

iii) $h(x,y)=(x+y,y,2x+y)$ aplikazio lineala hartuz, existituko al da $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ bektore bat non $h(x,y)=(0,1,1)$ den? Eta $h(x,y)=(1,1,1)$ baieztatzen duena? Erantzuna baiezkoa den kasurako, kalkulatu bektoreak.

- $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ bektoreen multzoa non $h(x,y)=(0,1,1)$ den, $M(h)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\left(M(h):B\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\2&1&1\end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{array}\right)$.

Beraz, $\mathrm{r}\left(M(h)\right)\neq\mathrm{r}\left(M(h):B\right)$, hau da, sistema bateraezina.

Ondorioz, ez dago $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ bektorerik non $h(x,y)=(0,1,1)$ den.

- $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ bektoreen multzoa non $h(x,y)=(1,1,1)$ den, $M(h)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\left(M(h):B\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\2&1&1\end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right)$.

Beraz, r(M(h)) = r(M(h):B) = 2, hau da, sistema bateragarri determinatua.

Dagokion sistema ebatziz:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \text{ [2. EK] } y=1; \text{ [1. EK] } x=1-y=1-1=0.$$

Soluzio bakarra: $(x,y)=(0,1)$.

iv) Kalkulatu $f\circ h$ konposaketari elkartutako matrizea. $f\circ h$ lineala eta alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu $(f\circ h)^{-1}$.

- $M(f\circ h)=M(f)M(h)=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}.$

- f eta h aplikazio linealak dira eta aplikazio linealen konposaketa ere lineala denez, $f\circ h$ aplikazio lineala izango da.

- $f\circ h:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ aplikazio lineala denez, alderanzkarria izango da $|M(f\circ h)|\neq 0$ bada.

  Eta $|M(f\circ h)|=\begin{vmatrix}4&3\\3&3\end{vmatrix}=12-9=3\neq 0$ denez, $f\circ h$ alderanzkarria da.

- $(f\circ h)^{-1}$ kalkulatzeko $M(f\circ h)$-ren alderantzizkoa kalkulatu behar da, hots, $\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}^{-1}$.

  $\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}$ irauliz, $\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}$. Eta bere osagarria: $\begin{pmatrix}3&-3\\-3&4\end{pmatrix}$.

  Beraz,

$$\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}3&-3\\-3&4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-3\\-3&4\end{pmatrix}.$$

Baieztapena: $\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-3\\-3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\3&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$

Honela,

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x-3y \\ -3x+4y \end{pmatrix} \text{ eta ondorioz } \left(f \circ h\right)^{-1}\left(x,y\right) = \frac{1}{3}\left(3x-3y,-3x+4y\right).$$

b) Kalkulatu $M(g)$, $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ honako baldintza hauek betetzen dituen aplikazio lineala izanik:

$g(0,0,2)=(2,4,0)$, $g(1,1,-1)=(1,3,1)$ eta $\left(x,0,-x\right)\in \ker\left(g\right)$ $x\in\mathbb{R}$ guztietarako.

Hasi aurretik, $\left(x,0,-x\right)\in \ker\left(g\right)$ $x\in\mathbb{R}$ guztietarako bada, $g\left(x,0,-x\right)=(0,0,0)$ $x\in\mathbb{R}$ guztietarako izango da, eta adibidez x=1 hartuz, $g\left(1,0,-1\right)=(0,0,0)$.

$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denez, $M(g)$-ren zutabeak $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoaren irudiak izango dira.

$g(0,0,2)=(2,4,0)$ eta g aplikazio lineala denez,

$g(0,0,1)=\frac{1}{2}g(0,0,2)=\frac{1}{2}(2,4,0)=(1,2,0)$.

(1,1,−1) − (1, 0,−1) =(0,1,0), eta g aplikazio lineala denez, g(1,1,−1) − g (1, 0,−1) = g (0,1,0).

Beraz, $g(0,1,0)=g(1,1,-1)-g(1,0,-1)=(1,3,1)-(0,0,0)=(1,3,1)$

(1,0,0) = (1,0,−1)+(0,0,1), eta g aplikazio lineala denez, g(1,0,0)=g (1,0,−1)+g (0,0,1).

Beraz, $g(1,0,0)=g(1,0,-1)+g(0,0,1)=(0,0,0)+(1,2,0)=(1,2,0)$.

Ondorioz, $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

40 (a) Demagun f aplikazio lineala:

$$f: \ \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \rightarrow (x+2y-z, 2x+3y+z, 3y-9z)$$

i) f alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu f^{-1} aplikazioa.

ii) Aurkitu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ non $f(x,y,z) = (1,2,0)$ den. Existituko al da $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ bektore bat non $f(x,y,z) = (1,1,0)$ den?

iii) Kalkulatu Im(f) eta ker(f)-ren oinarri bana.

iv) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$?

a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1) \in \ker(f)$?

(b) Aurkitu $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal bat non $f(2,0,0) = (4,2,2)$ eta $f(1,1,0) = (1,1,0)$ baieztatzen diren.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ denez, alderanzkarria da $|M(f)| \neq 0$ bada.

$|M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ denez, f ez da alderanzkarria eta ez da existitzen f^{-1} aplikazioa.

ii) Aurkitu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ non $f(x,y,z) = (1,2,0)$ den.

Baldintza hori betetzen duen bektorea, $(M(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzioa izango da.

Ebatziz:

$$(M(f):B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+3z=0 \end{cases}$.

[2. EK] $y=3z$; [1. EK] $x=1-2y+z=1-5z$.

Soluzio multzoa: $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1-5z, y=3z\right\}=\left\{(1-5z,3z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

Ondorioz, edozein z hartuz, $f(1-5z,3z,z)=(1,2,0)$ da.

- Existituko al da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektoreren bat non $f(x,y,z)=(1,1,0)$ den?

  Baldintza hori betetzen duen bektorea, $\left(M(f)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzioa izango da. Ebatziz:

  $\left(M(f):B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$. Bateraezina

  da, eta ondorioz ez da existituko $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorerik non $f(x,y,z)=(1,1,0)$ den.

iii) Kalkulatu Im(f) eta ker(f)-ren oinarri bana.

- $\operatorname{Im}(f)=\left\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(x+2y-z,2x+3y+z,3y-9z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$

  $=\left\{x(1,2,0)+y(2,3,3)+z(-1,1,-9)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

  Eta $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}=2$ denez, adibidez, $\operatorname{Im}(f)=\left\{x(1,2,0)+y(2,3,3)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

  Honela, Im(f)-ren oinarri bat: $\left\langle(1,2,0),(2,3,3)\right\rangle$.

- $\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=$

  $=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0,\ 2x+3y+z=0,\ 3y-9z=0\right\}$, hau da, $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3y-9z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

Ebatziz,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Beraz, $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$.

[2. EK] $y=3z$; [1. EK] $x=-2y+z=-5z$.

$\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-5z, y=3z\right\}=\left\{(-5z,3z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(-5,3,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

Honela, ker(f)-ren oinarri bat: $\left\langle(-5,3,1)\right\rangle$.

iv) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$?

$$(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{r}\left(M(f)\right)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{c|c} M(f) & \begin{matrix} a \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

$$\mathrm{r}\left(M(f)\right)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}=2.$$

$$\mathrm{r}\left(\begin{array}{c|c} M(f) & \begin{matrix} a \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 1-2a \\ 0 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right)=$$

$$=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 4-6a \end{array}\right)=2 \iff 4-6a=0 \iff a=\frac{2}{3}.$$

Honela, $(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f) \iff a=\dfrac{2}{3}$.

- a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(a,1,1)\in \ker(f)$?

  $(a,1,1)\in \ker(f) \Leftrightarrow f(a,1,1)=(0,0,0)$.

  $f(a,1,1)=(a+1,2a+4,-6)\neq(0,0,0)$.

  Beraz, ez dago a-ren baliorik non $(a,1,1)\in \ker(f)$ den.

(b) Aurkitu $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio lineal bat non $f(2,0,0)=(4,2,2)$ eta $f(1,1,0)=(1,1,0)$ baieztatzen diren.

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ denez, $M(f)$-ren hiru zutabeak $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ eta $f(0,0,1)$ izango dira.

f aplikazio lineala denez, $f(2,0,0)=2f(1,0,0)=(4,2,2)$. Beraz, $f(1,0,0)=(2,1,1)$.

f aplikazio lineala denez, $f(1,1,0)=f(1,0,0)+f(0,1,0)$. Beraz,

$f(0,1,0)=f(1,1,0)-f(1,0,0)=(1,1,0)-(2,1,1)=(-1,0,-1)$.

Gure aplikazioak bi baldintza hauek bete behar ditu. Ondorioz, bere bi lehen zutabeak ditugu eta hirugarrena edozein izan daiteke:

Adibidez $M(f)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ bada, $\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y+z\\x+z\\x-y+z\end{pmatrix}$.

Beraz,. $f(x,y,z)=(2x-y+z,x+z,x-y+z)$.

INTEGRAZIOA

41 Sailkatu eta kalkulatu (posible bada) hurrengo bi integralak:

$$\text{(i)} \int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx \quad ; \qquad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx .$$

EBAZPENA:

(i) $\int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx$. Integral propioa. Aldagai aldaketa metodoa erabiliz ebatziko dugu.

Aldagai aldaketa: $x^2+1=u$. Beraz, $2xdx = du$. $x = 1$ bada, $u = 2$; $x = 4$ bada, $u = 17$.

$$\int_1^4 \frac{2x}{\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx = \int_2^{17} \frac{1}{\sqrt[5]{u}}\,du = \int_2^{17} u^{-1/5}\,du = \left.\frac{u^{\frac{-1}{5}+1}}{\frac{-1}{5}+1}\right]_2^{17} = \left.\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right]_2^{17} = \left.\frac{5}{4}\sqrt[5]{u^4}\right]_2^{17} = \frac{5}{4}\left(\sqrt[5]{17^4}-\sqrt[5]{2^4}\right).$$

(ii) $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx$. Lehen eta bigarren motako integral inpropio nahasia da, $(-\infty,3]$ integrazio tarte ez-bornatuan funtzioa ez baita bornatua (ez dago bornatua $x = 2$ puntuan).

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^5}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 .$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right]_t^0 = \frac{-1}{4}\lim_{t\to-\infty} \left.\frac{1}{(x-2)^4}\right]_t^0 =$$

$$= \frac{-1}{4}\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{(0-2)^4}-\frac{1}{(t-2)^4}\right) = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{16}-0\right) = \frac{-1}{64}.$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \int_0^t \frac{1}{(x-2)^5}\,dx = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left.\frac{(x-2)^{-4}}{-4}\right]_0^t = \frac{-1}{4}\lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left.\frac{1}{(x-2)^4}\right]_0^t =$$

$$= \frac{-1}{4}\lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left(\frac{1}{(t-2)^4} - \frac{1}{(0-2)^4}\right).$$

Limite hau ez denez existitzen, integral osoa dibergentea da.

Beraz, $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(x-2)^5}\,dx$, lehen eta bigarren motako integral inpropio dibergentea da.

42 (i) Kalkula ezazu hurrengo integrala:

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx\,.$$

(ii) a) Sailkatu ondoko integralak $a \in \mathbb{R}$ -ren balio desberdinen arabera:

$$\int_0^1 x^a\,dx \quad ; \quad \int_1^\infty x^a\,dx$$

b) Kalkulatu aurreko integralak, posible bada, $a = 2$ baliorako.

c) Kalkulatu aurreko integralak, posible bada, $a = -2$ baliorako.

EBAZPENA:

(i) $\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$ integral propioa da. Ebazteko aldagai aldaketa metodoa erabiliko dugu:

$u = 1-x$ eginez, $du = -dx$ dugu (gainera, $x = 0$ bada $u = 1$ eta $x = 1$ bada $u = 0$).

Ordezkatuz,

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx = -\int_1^0 (1-u)u^5\,du = \int_0^1 (1-u)u^5\,du = \int_0^1 \left(u^5 - u^6\right)du = \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^7}{7}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}\,.$$

Berdin ebatz daiteke zatikako metodoa erabiliz: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

$u = x$ eta $dv = (1-x)^5 dx$ hartuz, $du = dx$ eta $v = -\dfrac{(1-x)^6}{6}$ izango dira. Beraz,

$$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx = -x\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^6}{6}dx = -x\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^6}{6}dx =$$

$$= -x\frac{(1-x)^6}{6}\Bigg]_0^1 - \frac{1}{6}\frac{(1-x)^7}{7}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{42}\,.$$

(ii) a) Sailkatu $\int_0^1 x^a\,dx$.

$a \geq 0$ bada, funtzio bornatua tarte bornatuan: integral propioa.

$a<0$ bada, funtzio ez-bornatua ($x=0$ puntuan) tarte bornatuan: 2. motako integral inpropioa.

Sailkatu $\int_1^{\infty} x^a dx$.

x^a funtzio bornatua da $[1,t]$ tartean $\forall t > 1$. Beraz funtzio bornatua $[1,\infty)$ tarte ez-bornatuan, hau da, 1. motako integral inpropioa $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) $a=2$ bada, $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. (Integral propioa)

$$\int_1^{\infty} x^2 dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2 dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right].$$

Limite hau ez denez existitzen, 1. motako integral inpropio dibergentea.

c) $a=-2$ bada, $\int_0^1 x^{-2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to 0}\left[\frac{-1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0}\left[-1+\frac{1}{t}\right].$

Limite hau ez denez existitzen, 2. motako integral inpropio dibergentea.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{t}+1\right] = 1.$$

Beraz, 1. motako integral inpropio konbergentea.

43 (i) Sailkatu $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-a}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

(ii) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ eta $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ integralak.

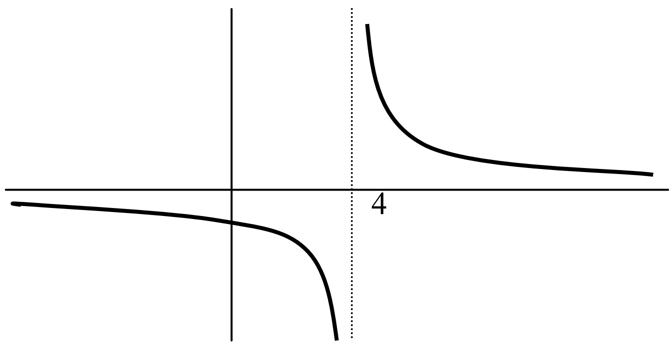
EBAZPENA:

(i) Sailkatu $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-a}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

$a\in[0,2]$ bada, funtzio ez bornatua $[0,2]$ tarte bornatuan: 2. motako integral inpropioa.

$a\notin[0,2]$ bada, funtzio bornatua $[0,2]$ tarte bornatuan: integral propioa.

(ii) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ eta $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ integralak.



$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$: funtzio ez-bornatua $[0,4]$ tarte bornatuan: 2. motako integral inpropioa.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \lim_{t\to 4^-}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \lim_{t\to 4^-}\int_0^4 (x-4)^{\frac{-1}{3}}\,dx = \lim_{t\to 4^-}\left.\frac{(x-4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^t = \frac{3}{2}\lim_{t\to 4^-}\left.\sqrt[3]{(x-4)^2}\right]_0^t =$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to 4^-}\left(\sqrt[3]{(t-4)^2}-\sqrt[3]{(0-4)^2}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}.$$ 2. motako integral inpropio konbergentea.

$\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$: funtzio ez-bornatua $(-\infty,4]$ tarte ez-bornatuan: 1 eta 2. motako integral inpropioa.

$$\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} + \int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16}\,.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \frac{3}{2}\lim_{t\to-\infty}\left.\sqrt[3]{(x-4)^2}\right]_t^0 = \frac{3}{2}\lim_{t\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(0-4)^2} - \sqrt[3]{(t-4)^2}\right).$$

Eta limite hau ez denez existitzen, $\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ 1. eta 2. motako integral inpropio dibergentea da.

44 (a) Kalkulatu $\int_1^3 (2x-1)e^{x+1}dx$ eta $\int_2^5 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ integralak.

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}dx$ integrala.

<u>EBAZPENA</u>:

(a) Kalkulatu $\int_1^3 (2x-1)e^{x+1}dx$ eta $\int_2^5 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ integralak.

- $\int_1^3 (2x-1)e^{x+1}dx$ <u>zatikako metodoa</u> erabiliz ebatziko dugu $\left(\int_a^b udv = uv\Big]_a^b - \int_a^b vdu\right)$:

  $u = 2x-1$ bada, orduan $du = 2dx$; dv= $e^{x+1}dx$ bada, orduan v=e^{x+1}.

  Honela,

  $$\int_1^3 (2x-1)e^{x+1}dx = (2x-1)e^{x+1}dx\Big]_1^3 - \int_1^3 2e^{x+1}dx = (2x-1)e^{x+1}dx\Big]_1^3 - 2e^{x+1}dx\Big]_1^3 =$$

  $$=(2x-3)e^{x+1}dx\Big]_1^3 = 3e^4 + e^2.$$

- $\int_2^5 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ ebazteko aldagai aldaketa metodoa erabiliko dugu:

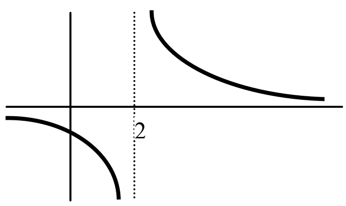
  Aldaketa: $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$. Integrazio tarte berriak: $x = 2$ bada, $u = 5$ eta $x = 5$ bada, $u = 26$.

  Honela,

  $$\int_2^5 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_5^{26} \sqrt{u}\,du = \int_5^{26} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_5^{26} = \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Bigg]_5^{26} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{26^3} - \sqrt{5^3}\right).$$

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}dx$ integrala.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}$ irudikatuz:



$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx$ integralaren sailkapena: $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}$ funtzio ez bornatua $[0,+\infty)$ tarte ez bornatuan, beraz, lehen eta bigarren motako integral inpropioa.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx = \int_0^{2} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx + \int_2^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3.$$

Eta $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx = \int (x-2)^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x-2)^4}$. Beraz,

$$\mathrm{I}_3=\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_3^{t} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx = \frac{5}{4}\lim_{t\to+\infty}\sqrt[5]{(x-2)^4}\Big]_3^t = \frac{5}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt[5]{(t-2)^4}-\sqrt[5]{(3-2)^4}\right),$$

Limite hau ez denez existitzen, integrala dibergentea da.

Beraz, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}\,dx$ lehen eta bigarren motako integral inpropio dibergentea.

45 (a) Kalkulatu $\int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx$ integrala.

(b) Sailkatu $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^p}\,dx$ integrala p-ren balio desberdinentzako eta kalkulatu integrala, posible bada, p=2 denean.

EBAZPENA:

(a) Kalkulatu $\int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx$. Aldagai aldaketa erabiliz, $u = x^2 - 1$ eta du = 2xdx. Beraz,

$$\int_1^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int_0^{15} \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{15} u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{15} = \left[\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\right]_1^{15} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{15^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{15^3} - 1\right).$$

(b) Sailkatu $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^p}\,dx$ integrala p-ren balio desberdinentzako eta kalkulatu integrala, posible bada, $p = 2$ denean.

[0, +∞) tarte ez bornatua denez, gutxienez lehen motakoa izango da. Ikus dezagun bigarren motakoa den ala ez:

$\frac{1}{(2x-1)^p}$ funtzioa ez da bornatua $x = \frac{1}{2}$ puntuan p positiboa denean.

Beraz,

$p < 0$ bada, $\frac{1}{(2x-1)^p}$ funtzio bornatua [0, +∞) tarte ez bornatuan, beraz,

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^p}\,dx$ lehen motako integral inpropioa.

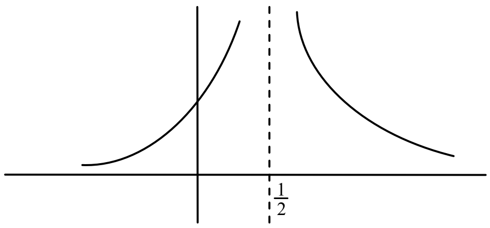
$p \geq 0$ bada, $\dfrac{1}{(2x-1)^p}$ funtzio ez bornatua $\dfrac{1}{2}$ puntuan, beraz,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^p}\, dx$ lehen eta bigarren motako integral inpropioa.

$p = 2$ denean, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$, $\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ funtzio ez bornatua $\dfrac{1}{2}$ puntuan, beraz,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$ lehen eta bigarren motako integral inpropioa. Kalkula dezagun:

$f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ funtzioa irudikatzen badugu:



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3.$$

$$\int \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \int (2x-1)^{-2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + \mathrm{k} = \frac{-1}{2(2x-1)} + \mathrm{k}.$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-} \int_0^{t} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-} \left(\frac{-1}{2(2x-1)} \right]_0^t =$$

$= \lim_{t \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{-1}{2(2t-1)} - \frac{-1}{2(0-1)} \right)$ eta limite hau ez da existitzen, beraz, integral osoa ere dibergentea izango da. Hau da,

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\, dx$, lehen eta bigarren motako integral inpropio dibergentea.

46 (a) Kalkulatu $\int_1^2 xe^{(x^2-1)}dx$ integrala.

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_{-\infty}^{5} f(x)dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & ; \quad x<-1 \\ 5 & ; \quad x=-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad x>-1 \end{cases} \quad \text{izanik.}$$

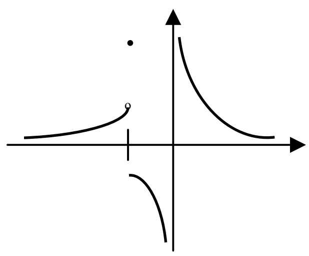
EBAZPENA:

(a) Kalkulatu $\int_1^2 xe^{(x^2-1)}dx$ integrala. Aldagai aldaketa metodoa erabiliko dugu, $u = x^2 - 1$ aldaketa eginez. Honela, $u = x^2 - 1$ bada, $du = 2x dx$. Beraz,

$$\int_1^2 xe^{(x^2-1)}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(e^3-1\right).$$

(b) Sailkatu eta kalkulatu, posible bada, $\int_{-\infty}^{5} f(x)dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & ; \quad x<-1 \\ 5 & ; \quad x=-1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad x>-1 \end{cases} \quad \text{funtzioa irudikatuz,}$$



$f(x)$ funtzioa ez dago bornatua $(-\infty,5]$ tarte ez bornatuan, beraz, 1. eta 2. motako integral inpropioa.

$$\int_{-\infty}^{5} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right) = 1.$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \int_{-1}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \int_{-1}^{t} x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{t} = \frac{3}{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \left[\sqrt[3]{x^2}\right]_{-1}^{t} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \left(\sqrt[3]{t^2} - \sqrt[3]{(-1)^2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$$I_3 = \int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{0}^{5} x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{5} = \frac{3}{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left[\sqrt[3]{x^2}\right]_{0}^{5} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{t^2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{25}.$$

Honela, $\int_{-\infty}^{5} f(x)dx = I_1 + I_2 + I_3 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{25} = \frac{1}{2}\left(3\sqrt[3]{25} - 1\right)$,

1. eta 2. motako integral inpropio konbergentea.

47 (a) Bete hurrengo hutsuneak $\int_{\square}^{\square}(x-4)^{\square}(x+2)^{\square}dx$ integrala:

(i) Propioa izateko.

(ii) Lehen motako integral inpropioa izateko.

(iii) Bigarren motako integral inpropioa izateko.

(b) $f(x)=x(x-1)^8$ integragarria al da $[0,b]$ tartean, $\forall b\in\mathbb{R}$?

(c) Kalkulatu $b\in\mathbb{R}$ non $\int_0^b x(x-1)^8dx=\frac{1}{90}$ den.

EBAZPENA:

(a) Bete hurrengo hutsuneak $\int_{\square}^{\square}(x-4)^{\square}(x+2)^{\square}dx$ integrala:

(i) Propioa izateko. Adibidez $\int_1^3 (x-4)^2(x+2)^2dx$.

$[1,3]$ tarte bornatuan $f(x)=(x-4)^2(x+2)^2$ funtzio bornatua baita.

(ii) Lehen motako integral inpropioa izateko. Adibidez $\int_7^{+\infty}(x-4)^{-1}(x+2)^{-1}dx$.

$[7,+\infty)$ tarte ez bornatuan $f(x)=(x-4)^{-1}(x+2)^{-1}$ funtzio bornatua baita (f ez da bornatua 4 eta -2 puntuetan baina hauek ez daude $[7,+\infty)$ tartean).

(iii) Bigarren motako integral inpropioa izateko: $\int_0^7(x-4)^{-1}(x+2)^{-1}dx$.

$[0,7]$ tarte bornatuan $f(x)=(x-4)^{-1}(x+2)^{-1}$ funtzio ez bornatua baita (f ez dago bornatua $x=4\in[0,7]$ puntuan).

(b) $f(x)=x(x-1)^8$ integragarria al da $[0,b]$ tartean, $\forall b\in\mathbb{R}$?

BAI, $f(x)=x(x-1)^8$ bornatua eta jarraia baita $[0,b]$ tartean, $\forall b\in\mathbb{R}$.

(c) Kalkulatu $b\in\mathbb{R}$ non $\int_0^b x(x-1)^8dx=\frac{1}{90}$ den.

$u = x-1$ aldagai aldaketa eginen dugu. Honela, $du=dx$ eta $x= u+1$ direnez,

$$\int_0^b x(x-1)^8\,dx = \int_{-1}^{b-1} (u+1)u^8 du = \int_{-1}^{b-1} \left(u^9+u^8\right)du = \left(\frac{u^{10}}{10}+\frac{u^9}{9}\right]_{-1}^{b-1} =$$

$$= \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}-\left(\frac{(-1)^{10}}{10}+\frac{(-1)^9}{9}\right) = \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}-\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}-\left(\frac{-1}{90}\right) = \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}+\frac{1}{90}.$$ Beraz,

$$\int_0^b x(x-1)^8\,dx = \frac{1}{90} \iff \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}+\frac{1}{90}=\frac{1}{90} \iff \frac{(b-1)^{10}}{10}+\frac{(b-1)^9}{9}=0 \iff \underline{b=1}.$$

48 Biz $f(x)=x\left(1-x^2\right)^{1/p}$ funtzioa, $p\neq 0$.

(a) Sailkatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala p-ren balio ez-nulu desberdinentzako.

(c) Kalkulatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala $p=-1$ eta $p=-2$ direnean.

EBAZPENA:

Biz $f(x)=x\left(1-x^2\right)^{1/p}$ funtzioa, $p\neq 0$.

(a) Sailkatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala p-ren balio ez-nulu desberdinentzako.

- $p>0$ bada, $f(x)=x\left(1-x^2\right)^{1/p}$ funtzio bornatua $[-1,1]$ tarte bornatuan $\rightarrow$ integral propioa.
- $p<0$ bada, $f(x)=x\left(1-x^2\right)^{1/p}$ funtzio ez bornatua $[-1,1]$ tarte bornatuan (ez da bornatua $x=-1$ eta $x=1$ puntuetan $\rightarrow$ Bigarren motako integral inpropioa.

(b) Kalkulatu $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ integrala $p=-1$ eta $p=-2$ direnean.

- $p=-1$. $\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\left(1-x^2\right)}dx$. $\frac{x}{\left(1-x^2\right)}$ funtzioa ez dago bornatua $[-1,1]$ tartean ($x=-1$ eta $x=1$ puntuetan) $\rightarrow$ 2. motako integral inpropioa. Gainera, integrala kalkulatzeko orduan, bi zatitan banatu beharko dugu:

$$\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx+\int_{0}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

$$\mathrm{I}_1=\int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\left(1-x^2\right)}dx=\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\int_t^0\frac{x}{\left(1-x^2\right)}dx=(*)$$

$(-1,0]$ tartean $u=1-x^2$ aldagai aldaketa eginez, $du=-2x\,dx$ izanen da, beraz,

$$\int x\left(1-x^2\right)^{-1}dx=\frac{-1}{2}\int u^{-1}du=\frac{-1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}|u|=\frac{-1}{2}\mathrm{Ln}\left|1-x^2\right|+\mathrm{K}.$$

Honela,

$(*) = \dfrac{-1}{2}\lim\limits_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\left(\mathrm{Ln}\left(1-x^2\right)\right]_t^0 = \dfrac{-1}{2}\lim\limits_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\left(\mathrm{Ln}\left(1\right)-\mathrm{Ln}\left(1-t^2\right)\right)$. Limite hau ez denez existitzen,

I_1 dibergentea da eta ondorioz integral osoa ere. Beraz,

$$\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1} dx, \text{ 2. motako integral inpropio dibergentea.}$$

- $p=-2.$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funtzioa ez dago bornatua $[-1,1]$

tartean ($x=-1$ eta $x=1$ puntuetan) $\to$ 2. motako integral inpropioa. Gainera, integrala kalkulatzeko orduan, bi zatitan banatu beharko dugu:

$$\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx + \int_{0}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\int_{t}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx \quad \lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\int_{t}^{0} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = (*)$$

(-1,0] tartean $u=1-x^2$ aldagai aldaketa eginez, $du=-2x dx$ izanen da, beraz,

$$\int x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \frac{-1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{-1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2} + \mathrm{K}.$$

$$(*) = -\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\left(\sqrt{\left(1-x^2\right)}\right]_t^0 = -\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\left(1-t^2\right)}\right) = -1.$$

Aldagai aldaketa berak balioko digu I_2 integrala kalkulatzeko:

$$I_2 = \int_{0}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\int_{0}^{t} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = -\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\left(\sqrt{\left(1-x^2\right)}\right]_0^t = -\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\left(\sqrt{\left(1-t^2\right)}-\sqrt{1}\right) = 1.$$

Beraz, $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = I_1 + I_2 = 0$, 2. motako integral inpropio konbergentea.

49 (a) Kalkulatu $\int_1^4 xe^{2x}dx$ integrala.

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx$ integrala.

EBAZPENA:

(a) $\int_1^4 xe^{2x}dx$. Zatikako metodoa erabiliko dugu:

$u = x$ eta $dv = e^{2x}dx$ hartuz, $du = dx$ eta $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ ditugu. Honela:

$$\int_1^4 xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_1^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_1^4 = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}e^8\left(4-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}e^2\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}e^8 - \frac{1}{4}e^2.$$

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx$ integrala.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}$ funtzio ez bornatua da $[-5,10]$ tarte bornatuan (funtzioa ez dago bornatua

x=0 puntuan). Beraz, $\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx$ 2. motako integral inpropioa da.

$$\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx = \int_{-5}^{0} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx + \int_{0}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

$x \neq 0$ denean, $\int \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx = \int (5x)^{-1/5}dx = \frac{1}{5}\frac{(5x)^{4/5}}{4/5} + \mathrm{k} = \frac{1}{4}\sqrt[5]{(5x)^4} + \mathrm{k}.$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-5}^{0} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \int_{-5}^{t} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{1}{4}\sqrt[5]{(5x)^4}\Big|_{-5}^{t} = \frac{1}{4}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\left(\sqrt[5]{(5t)^4} - \sqrt[5]{(-25)^4}\right) = \frac{-1}{4}\sqrt[5]{(-25)^4}.$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}\,dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{4}\sqrt[5]{(5x)^4}\Big|_t^{10} = \frac{1}{4}\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\left(\sqrt[5]{(50)^4} - \sqrt[5]{(5t)^4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{(50)^4}\,.$$

Beraz, $\int_{-5}^{10} \frac{1}{\sqrt[5]{5x}}\,dx = \frac{-1}{4}\sqrt[5]{(-25)^4} + \frac{1}{4}\sqrt[5]{(50)^4}$. 2. motako integral inpropio konbergentea.

50 (a) Sailkatu hurrengo integralak p-ren balioen arabera, $p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ izanik:

$$\int_0^p \frac{1}{(2-x)^p}\,dx \quad \text{eta} \quad \int_0^p \frac{1}{(2-x)^{-p}}\,dx\,.$$

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx$ integrala.

EBAZPENA:

(a) Sailkatu hurrengo integralak p-ren balioen arabera, $p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ izanik:

$\int_0^p \frac{1}{(2-x)^p}\,dx$: $p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ denez, p positiboa da, beraz, $\frac{1}{(2-x)^p}$ bornatua da $x = 2$ puntuan izan ezik.

$p = 1$ bada, $\frac{1}{(2-x)^1}$ funtzio bornatua [0, 1] tarte bornatuan, hots, $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)^1}\,dx$ integral propioa.

$p > 1$ bada, $\frac{1}{(2-x)^p}$ funtzio ez bornatua [0, p] tarte bornatuan, hots, $\int_0^p \frac{1}{(2-x)^p}\,dx$ 2. motako integral inpropioa.

$\int_0^p \frac{1}{(2-x)^{-p}}\,dx$: $p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ denez, p positiboa da $\frac{1}{(2-x)^{-p}}=(2-x)^p$, hau da, $\forall\, p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ funtzio bornatua tarte bornatuan, hots, $\int_0^p (2-x)^{-p}\,dx$ integral propioa $\forall\, p\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx$ integrala.

$\dfrac{1}{(2-x)^2}$ funtzio ez bornatua da $[0,3]$ tarte bornatuan (ez da bornatua $x = 2$ puntuan).

Beraz, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx$ 2. motako integral inpropioa.

$$\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

$x \neq 2$ denean, $\displaystyle\int \frac{1}{(2-x)^2}\,dx = \int (2-x)^{-2}\,dx = \frac{(2-x)^{-1}}{-1}(-1) + \mathrm{k} = \frac{1}{(2-x)} + \mathrm{k}.$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^2 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \int_0^t \frac{1}{(2-x)^2}\,dx = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left(\frac{1}{(2-x)} \right]_0^t = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left(\frac{1}{(2-t)} - \frac{1}{(2-0)} \right).$$

Eta limite hau ez denez existitzen, I_1 dibergentea da.

Honela, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(2-x)^2}\,dx$, 2. motako integral inpropio dibergentea.

51 Biz $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & ; \quad x<a \\ e^{2x} & ; \quad x \ge a \end{cases}$ funtzioa, $a \in \mathbb{R}$.

(a) a=1 bada, sailka ezazu $\int_0^3 f(x)dx$ integrala.

(b) a-ren zein baliotarako (a≥0) izango da $\int_0^3 f(x)dx$ integral inpropioa?

(c) a=3 bada kalkula ezazu, posible bada, $\int_0^3 f(x)dx$.

EBAZPENA:

(a) $a=1$ denean, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_1^3 e^{2x}dx$ da.

$\frac{1}{(x-2)^2}$ funtzio bornatua da [0,1] tarte bornatuan eta e^{2x} funtzio bornatua da [1,3] tarte bornatuan. Beraz, $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}dx$ eta $\int_1^3 e^{2x}dx$ bi integral propio dira eta ondorioz $\int_0^3 f(x)dx$ ere integral propioa da.

(b) a-ren zein baliotarako (a≥0) izango da $\int_0^3 f(x)dx$ integral inpropioa?

$a \le 0$ bada, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 e^{2x}dx$ da $\rightarrow$ e^{2x} bornatua [0,3] tarte bornatuan, beraz integral propioa.

0< a< 2 bada, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^a \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_a^3 e^{2x}dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(x-2)^2}$ funtzio bornatua [0,a] tarte bornatuan eta e^{2x} funtzio bornatua [a,3] tarte bornatuan, beraz $\int_0^3 f(x)dx$ integral propioa.

$2 \le a \le 3$ bada, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^a \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_a^3 e^{2x}dx$. $\to$ $\frac{1}{(x-2)^2}$ funtzio ez bornatua $[0,a]$ tarte bornatuan eta e^{2x} funtzio bornatua $[a,3]$ tarte bornatuan, beraz $\int_0^3 f(x)dx$ 2. motako integral inpropioa.

$a > 3$ bada, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$. $\to$ $\frac{1}{(x-2)^2}$ funtzio ez bornatua $[0,3]$ tarte bornatuan beraz $\int_0^3 f(x)dx$ 2. motako integral inpropioa.

Ondorioz, $\int_0^3 f(x)dx$ integral inpropioa $a \ge 2$ denean.

(c) a=3 bada kalkula ezazu, posible bada, $\int_0^3 f(x)dx$.

a=3 bada, $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$. $\frac{1}{(x-2)^2}$ funtzio ez bornatua $[0,3]$ tarte bornatuan

beraz $\int_0^3 f(x)dx$ 2. motako integral inpropioa.

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}dx = \int (x-2)^{-2}dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{-(x-2)} = \frac{-1}{x-2}.$$ Beraz,

$$\mathrm{I}_1 = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \int_0^t \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left.\frac{-1}{(x-2)}\right]_0^t = \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}} \left(\frac{-1}{(t-2)} - \frac{-1}{(0-2)} \right).$$

Eta limite hau ez denez existitzen, $\int_0^3 f(x)dx$ 2. motako integral inpropio dibergentea da.

52 Sailkatu eta kalkulatu hurrengo integralak

$$\text{(a)} \int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx\,; \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}dx\,; \qquad \text{(c)} \int_0^\infty 4e^{-2x}dx\,.$$

EBAZPENA:

(a) $\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx$ integral propioa da, $f(x)=5x^2\left(x^3-1\right)^4$ funtzio bornatua baita [0,1] tarte bornatuan.

$u=x^3-1$ aldagai aldaketa hartuz, $du=3x^2dx$ izango da. Beraz,

$$\int 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx = \int \frac{5}{3}u^4du = \frac{5}{3}\frac{u^5}{5}+k = \frac{5}{3}\frac{\left(x^3-1\right)^5}{5}+k = \frac{1}{3}\left(x^3-1\right)^5+k\,.$$

Honela, $\displaystyle\int_0^1 5x^2\left(x^3-1\right)^4 dx = \left.\frac{\left(x^3-1\right)^5}{3}\right]_0^1 = 0-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}.$

(b) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ Bigarren motako integral inpropioa da. $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}$ funtzio ez bornatua [0,1] tarte bornatuan.

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\int_0^t \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\int_0^t 2\left(x-1\right)^{\frac{-1}{3}}dx = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} 2\left.\frac{\left(x-1\right)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}\right]_o^t =$$

$$= \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} 2\left.\frac{\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_o^t = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} 3\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}\Big]_0^t = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\left(3\sqrt[3]{\left(t-1\right)^2}-3\sqrt[3]{\left(0-1\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\left(3\sqrt[3]{\left(t-1\right)^2}-3\right) = 0-3=-3.$$

(c) $\int_0^{\infty} 4e^{-2x}dx$ lehen motako integral inpropioa da, $f(x) = 4e^{-2x}$ funtzio bornatua baita $[0,+\infty)$ tarte ez bornatuan.

$$\int_0^{\infty} 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to\infty} -2e^{-2x}\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(-2e^{-2t} + 2e^{0}\right) = 2.$$

53 Biz $f(x)=\begin{cases} 2+e^x & \text{si } x\le a \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si } x>a \end{cases}$ $(a\in \mathbb{R})$.

a) Sailkatu $\displaystyle\int_a^{a+2} f(x)dx$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

b) $a = 0$ bada, sailkatu eta kalkulatu hurrengo integralak:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$; (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

EBAZPENA

Biz $f(x)=\begin{cases} 2+e^x & x\le a \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & x>a \end{cases}$ $(a\in \mathbb{R})$.

a) $x>a$ denean $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ denez, integrala $\displaystyle\int_a^{a+2} f(x)dx=\int_a^{a+2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ izango da.

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ez da bornatua $x = 0$ denean, beraz, $[a, a+2\,]$ tartean ez da bornatua izango

$0\in[a, a+2\,]$ bada $\Leftrightarrow$ $a\le 0\le a+2$ bada $\Leftrightarrow$ $0\le -a\le 2$ bada $\Leftrightarrow$ $-2\le a\le 0$ bada.

Honela, $-2\le a\le 0$ denean, $\displaystyle\int_a^{a+2} f(x)dx=\int_a^{a+2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ 2. motako integral inpropioa.

Beste kasuetan integral propioa izango da, hots, $a<-2$ edo $a>0$ denean.

b) $a = 0$ denean, $f(x)=\begin{cases} 2+e^x & x\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & x>0 \end{cases}$.

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2+e^x)dx$ integral propioa da, $2 + e^x$ funtzio bornatua baita $[-1,0]$ tarte bornatuan.

$$\int_{-1}^{0}(2+e^x)dx = \left(2x+e^x\right)\Big]_{-1}^{0} = 0+e^0-\left(-2+e^{-1}\right)=1+2-e^{-1}=3-\frac{1}{e}.$$

- $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(2+e^x)dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$, eta $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ez da bornatua $x=0$ denean, beraz, $f(x)$ funtzio

ez bornatua da $[-1,1]$ tarte bornatuan. Ondorioz, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 2. motako integral inpropioa

da.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(2+e^x)dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

$\mathrm{I}_1 = 3-\frac{1}{e}$ (lehen ikusia).

$$\mathrm{I}_2 = \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}x^{-1/3}dx = \lim_{t\to 0^+}\frac{x^{2/3}}{2/3}\Bigg]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Bigg]_t^1 =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\sqrt[3]{1^2}-\sqrt[3]{t^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ondorioz, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 3-\frac{1}{e}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{e}$, 2. motako integral inpropio

konbergentea.

54 Biz $f(x)=\begin{cases} 3e^{2x} & ;\ x\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}} & ;\ x>0 \end{cases}$ funtzioa.

(a) Sailkatu eta kalkulatu $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$ eta $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralak.

(b) Kalkulatu, zatikako metodoa erabiliz, $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$ integrala.

EBAZPENA:

Biz $f(x)=\begin{cases} 3e^{2x} & ;\ x\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}} & ;\ x>0 \end{cases}$ funtzioa.

(a) Sailkatu eta kalkulatu $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$ eta $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralak.

$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx$. $f(x) = 3e^{2x}$ funtzio bornatua $(-\infty,0]$ tarte ez bornatuan, beraz, 1.

motako integral inpropioa.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{0} 3e^{2x}dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{2}3e^{2x}\right]_{t}^{0} = \frac{3}{2}\lim_{t\to-\infty}\left(e^{0}-e^{2t}\right) = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}.$$

Beraz, 1. motako integral inpropio konbergentea.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 3e^{2x}dx + \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx + \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = I_1 + I_2 + I_3 .$$

$(-\infty, +\infty)$ tarte ez bornatuan $f(x)$ funtzio ez bornatua (ez da bornatua x=0 puntuaren inguruan. Beraz, 1. eta 2. motako integral inpropioa.

$I_1 = \frac{3}{2}$ (lehen kalkulatua).

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \int (4x)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{4}\frac{(4x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(4x)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x)^2} + \text{k}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \frac{3}{8}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\sqrt[3]{(4x)^2}\right]_t^1 = \frac{3}{8}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{(4t)^2}\right) = \frac{3}{8}\left(2\sqrt[3]{2} - 0\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}dx = \frac{3}{8}\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(4x)^2}\right]_1^t = \frac{3}{8}\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(4t)^2} - \sqrt[3]{(4)^2}\right)$$ eta limite hau

ez da existitzen. Beraz, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 1. eta 2. motako integral inpropio dibergentea.

(b) Kalkulatu, zatikako metodoa erabiliz, $\int_1^e x\ln x dx$ integrala.

$u = \ln x$	$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}dx$
$\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$	$v = \frac{x^2}{2}$

Zatikako metodoa: $\int_a^b u dv = (uv]_a^b - \int_a^b v du$.

$$\int_1^e x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left(\frac{x^2}{4}\right]_1^e =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

55 a) Bete hutsuneak $\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ integralean hurrengo integral mota izateko:

(i) Propioa.

(ii) Lehen motako integral inpropioa.

(iii) Bigarren motako integral inpropioa.

(iv) Lehen eta bigarren motako integral inpropio nahasia.

b) Sailkatu $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx$ integrala $a \in \mathbb{R}$-ren balio desberdinetarako eta kalkulatu $a=1$ denean.

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-2}^{2} \frac{x}{(x^2-5)^2}\,dx$ integrala.

EBAZPENA:

a) Bete hutsuneak $\int_{\square}^{\square} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ integralean hurrengo integral mota izateko:

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ funtzioa ez dago bornatua 1 puntuan. Beraz,

(i) Propioa. $\int_{\boxed{3}}^{\boxed{5}} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Funtzio bornatua [3,5] tarte bornatuan (ez baita $1 \in [3,5]$ betetzen)

(ii) Lehen motako integral inpropioa. $\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Funtzio bornatua $[3,+\infty)$ tarte ez-bornatuan (ez baita $1 \in [3+\infty)$ betetzen)

(iii) Bigarren motako integral inpropioa. $\int_{0}^{5} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Funtzio ez-bornatua [0,5] tarte bornatuan ($1 \in [0,5]$ baita).

(iv) Lehen eta bigarren motako integral inpropio nahasia. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

Funtzio ez-bornatua $[0,+\infty)$ tarte ez-bornatuan ($1\in[0,+\infty)$ baita).

b) Sailkatu $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx$ integrala $a\in\mathbb{R}$-ren balio desberdinetarako eta kalkulatu $a=1$ denean.

$\frac{1}{(x-a)^2}$ funtzioa ez dago bornatua a puntuan. Beraz, a puntua integrazio tartean badago, funtzioa ez da bornatua egongo eta bestela bai. Honela,

- $a\in[-2,2]$ bada, funtzio ez-bornatua $[-2,2]$ tarte bornatuan, bigarren motako integral inpropioa.
- $a\notin[-2,2]$ bada, funtzio bornatua $[-2,2]$ tarte bornatuan, integral propioa.

$a=1$, $\frac{1}{(x-1)^2}$ funtzio ez-bornatua $[-2,2]$ tarte bornatuan, bigarren motako integral inpropioa. Ez dago bornatua 1 puntuan, beraz,

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+k = \frac{-1}{(x-1)}+k$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-2}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to1^-}\int_{-2}^{t} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to1^-}\left.\frac{-1}{(x-1)}\right]_{-2}^{t} = \lim_{t\to1^-}\left(\frac{-1}{(t-1)}-\frac{-1}{(-2-1)}\right).$$

Eta limite hau ez denez existitzen, $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$, bigarren motako integral inpropio dibergentea.

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-5\right)^2}\, dx$ integrala.

$\frac{x}{\left(x^2-5\right)^2}$ ez dago bornatua $\pm\sqrt{5}$ puntuetan, baina puntu hauek ez daude $[-2,2]$ tartean.

Beraz, funtzioa bornatua denez $[-2,2]$ tarte bornatuan, integral propioa da.

Kalkulatzeko, aldagai aldaketa metodoa erabiliz, $u = x^2 - 5 \ eta \ du = 2xdx$.

$$\int \frac{x}{\left(x^2-5\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2-5\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1} + \mathrm{k} =$$

$$= \frac{-1}{2u} + k = \frac{-1}{2\left(x^2-5\right)} + k .$$

Beraz, $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-5\right)^2}\, dx = \left.\frac{-1}{2\left(x^2-5\right)}\right]_{-2}^{2} = \frac{-1}{2\left(2^2-5\right)} - \frac{-1}{2\left((-2)^2-5\right)} = 0.$

56 a) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}dx$ integrala $a=-3$ baliorako.

b) Sailkatu $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}dx$ integrala $a \in \mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^1 3xe^{1-x^2}dx$.

EBAZPENA:

a) $a=-3$ denean $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx$ dugu.

[0,6] tarte bornatuan $f(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}$ funtzio ez bornatua da (ez dagoelako bornatua 6 puntuan).

Beraz, $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx$ 2. motako integral inpropioa da.

$$\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx = \lim_{t\to 6^-}\int_0^t \frac{4}{\sqrt[3]{x-6}}dx = \lim_{t\to 6^-}\int_0^t 4(x-6)^{-1/3}dx = \lim_{t\to 6^-} 4\frac{(x-6)^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1}\Bigg]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 6^-} 4\frac{(x-6)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg]_0^t = \lim_{t\to 6^-} 6\sqrt[3]{(x-6)^2}\Bigg]_0^t = \lim_{t\to 6^-}\left(6\sqrt[3]{(t-6)^2}-6\sqrt[3]{36}\right) = -6\sqrt[3]{36}.$$

b) Sailkatu $\int_0^6 \frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}dx$ $a \in \mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

$\frac{4}{\sqrt[3]{x+2a}}$ ez da bornatua izendatzailea zero denean.

$x+2a=0 \Leftrightarrow x=-2a$. Beraz, ez da bornatua $x=-2a$ puntuan.

$[0,6]$ tartean, $-2a \in [0,6] \Leftrightarrow -a \in [0,3] \Leftrightarrow a \in [-3,0]$ denean.

Honela,

- $a \in [-3,0]$ denean, funtzio ez-bornatua [0,6] tarte bornatuan,

  beraz, 2. motako integral inpropioa.

- $a \notin [-3,0]$ denean, funtzio bornatua [0,6] tarte bornatuan, beraz, integral propioa

c) Sailkatu eta kalkulatu $\int_0^1 3xe^{1-x^2}\,dx$.

$\int_0^1 3xe^{1-x^2}\,dx$ integral propia da (funtzio bornatua baita tarte bornatuan).

Aldagai aldaketa metodoa erabiliz, $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2xdx$.

$$\int 3xe^{1-x^2}\,dx = \int \frac{-3}{2} e^u dt = \frac{-3}{2} e^u + k = \frac{-3}{2} e^{1-x^2} + k$$

Beraz, $\int_0^1 3xe^{1-x^2}\,dx = \left.\frac{-3}{2} e^{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{-3}{2} e^0 + \frac{3}{2} e^1 = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2} e$.

57 a) Sailkatu $\int_a^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala $a<0$ balio desberdinentzat.

b) Sailkatu $\int_0^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala $b>0$ balio desberdinentzat.

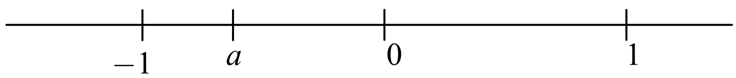
c) Kalkulatu a eta b balioak $(a<b)$ non $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala propioa den.

d) Kalkulatu $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala.

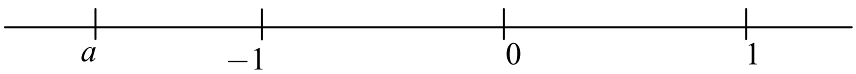
<u>EBAZPENA</u>:

a) Sailkatu $\int_a^0 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala $a<0$ balio desberdinentzat.

$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzioa ez da bornatua -1 eta 1 puntuetan:

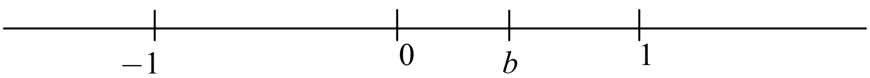


$-1<a<0$ bada, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio bornatua da $[a,0]$ tarte bornatuan, beraz, integral propioa.

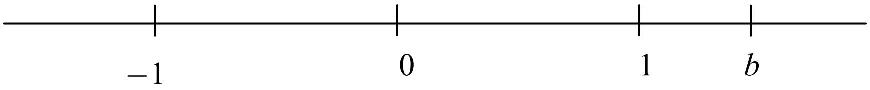


$a\le -1$ bada, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio ez bornatua da $-1\in[a,0]$ tarte bornatuan, beraz, 2. motako integral inpropioa.

b) Sailkatu $\int_0^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ integrala $b>0$ balio ezberdinentzat.



$1 > b > 0$ bada, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio bornatua da $[0,b]$ tarte bornatuan, beraz, integral propioa.



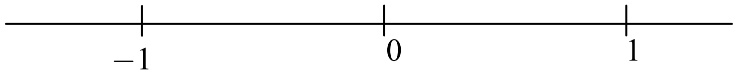
$b \geq 1$ bada, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio ez bornatua da $1 \in [0,b]$ tarte bornatuan, beraz, 2. motako integral inpropioa.

c) Kalkulatu a eta b balioak $(a < b)$ non $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala arrunta (propioa) den.

$-1 < a < b < 1$ bada, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio bornatua da $[a,b]$ tarte bornatuan, beraz, integral propioa.

Bestela, hots, $a \leq -1$ edo $b \geq 1$ badira, $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio ez bornatua da $[a,b]$ tarte bornatuan, beraz, 2. motako integral inpropioa.

d) Kalkula ezazu $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrala.



$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ funtzio ez bornatua da $-1, 1 \in [-1,1]$ tarte bornatuko puntuetan, beraz, 2. motako integral inpropioa.

$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ aldagai aldaketa metodoa erabiliz kalkulatuko dugu:

$u = 1 - x^2$ bada, orduan $du = -2x dx$. Honela,

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \int \frac{\frac{-1}{2} du}{\sqrt[3]{u}} = \int \frac{-1}{2} u^{-1/3} du = \frac{-1}{2} \frac{u^{2/3}}{2/3} + k = \frac{-3}{4} \sqrt[3]{u^2} + k = \frac{-3}{4} \sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2} + k \, .$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

$$\mathrm{I}_1=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\operatorname*{Lim}_{t\to -1^+}\int_{t}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\operatorname*{Lim}_{t\to -1^+}\left(\frac{-3}{4}\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}\,\right]_t^0=$$

$$=\frac{-3}{4}\operatorname*{Lim}_{t\to -1^+}\left(\sqrt[3]{\left(1-0^2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-t^2\right)^2}\right)=\frac{-3}{4}.$$

$$\mathrm{I}_2=\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\operatorname*{Lim}_{t\to 1^-}\int_{0}^{t}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\operatorname*{Lim}_{t\to 1^-}\left(\frac{-3}{4}\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}\,\right]_0^t=$$

$$=\frac{-3}{4}\operatorname*{Lim}_{t\to -1^+}\left(\sqrt[3]{\left(1-t^2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-0^2\right)^2}\right)=\frac{3}{4}.$$

Honela, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx=\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}=0.$

Beraz, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$ 2. motako integral inpropio konbergentea.

58 a) Sailkatu $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^a}$ integrala $a\in \mathbb{R}$ balio ezberdinen arabera.

b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases} e^{2+2x} & ; \quad x<-1 \\ 3x & ; \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad \text{izanik.}$$

<u>EBAZPENA</u>:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^a}$. [0,1] integrazio tartea bornatua da. Funtzioa aztertuz gero:

$a>0$ bada, funtzioa ez da bornatua $x=1\in[0,1]$ puntuan eta ondorioz 2. motako integral inpropioa.

$a\le 0$ bada, funtzioa bornatua da eta ondorioz integral propioa da.

b) Sailkatu eta kalkulatu $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ integrala,

$$f(x)=\begin{cases} e^{2+2x} & ; \quad x<-1 \\ 3x & ; \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} & ; \quad x>1 \end{cases} \qquad \text{izanik.}$$

$$\int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x}dx + \int_{-1}^{1} 3xdx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx :$$

- $\int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x}dx$, 1. motako integral inpropioa da, funtzioa bornatua baita $(-\infty,-1]$ tarte ez bornatuan.

- $\int_{-1}^{1} 3x dx$, integral propioa da (funtzio bornatua $[-1,1]$ tarte bornatuan).

- $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$, integral propioa da (funtzio bornatua $[1,2]$ tarte bornatuan).

Beraz, $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx$ 1. motako integral inpropioa da.

$$\int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x} dx + \int_{-1}^{1} 3x dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3.$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} e^{2+2x} dx = \operatorname*{Lim}_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} e^{2+2x} dx = \operatorname*{Lim}_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2+2x} \right]_t^{-1} = \frac{1}{2} \operatorname*{Lim}_{t\to-\infty} \left(e^0 - e^{2+2t} \right) = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} 3x dx = \left(\frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$I_3 = \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int_{1}^{2} x^{-\frac{1}{4}} dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \right]_1^2 = \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \right]_1^2 = \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} \right]_1^2 = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{2^3} - \sqrt[4]{1^3} \right) = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{8} - 1 \right).$$

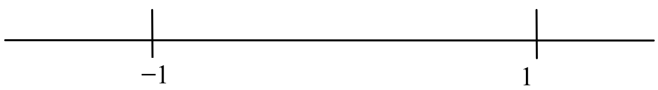
Beraz, $\int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{8} - 1 \right).$

59 a) Sailkatu $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.

b) Kalkulatu $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a=-1$ eta $a=2$ direnean.

<u>EBAZPENA</u>:

a) Sailkatu $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a\in\mathbb{R}$ -ren balio desberdinentzako.



$a\in[-1,1]$ bada, $a^2\in[0,1]$ eta $\frac{1}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ funtzioa ez bornatua da $[-1,1]$ tarte bornatuan.

$a>1$ bada, $a^2>1$ eta $\frac{1}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ funtzioa bornatua da $[-1,1]$ integrazio tarte bornatuan.

$a<-1$ bada, $a^2>1$ eta $\frac{1}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ funtzioa bornatua da $[-1,1]$ integrazio tarte bornatuan.

Beraz, $a\in[-1,1]$ bada, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ 2. motako integral inpropioa.

$a\notin[-1,1]$ bada, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integral propioa.

b) Kalkulatu $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}}$ integrala $a=-1$ eta $a=2$ direnean.

$a=-1$ bada, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ 2. motako integral inpropioa, funtzioa ez bornatua

baita 1 puntuan.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t\to1^-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t\to1^-}\int_{-1}^{t}(x-1)^{-1/3}dx = \lim_{t\to1^-}\left(\frac{(x-1)^{2/3}}{2/3}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to1^-}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_{-1}^{t} =$$

$$= \lim_{t\to1^-}\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(t-1)^2}-\sqrt[3]{(-1-1)^2}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\,.$$

$a=2$ bada, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-a^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ integral propioa da, funtzioa bornatua baita $[-1,1]$ tartean.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \int_{-1}^{1}(x-4)^{-1/3}dx = \left(\frac{(x-4)^{2/3}}{2/3}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-4)^2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(1-4)^2}-\sqrt[3]{(-1-4)^2}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{25}\right).$$

60 i) Sailkatu (kalkulatu gabe) $\int_{-a}^{a} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$ integrala a-ren balio desberdinentzako ($a>0$).

ii) Kalkulatu aurreko integrala $a = 1/2$ eta $a=2$ direnean.

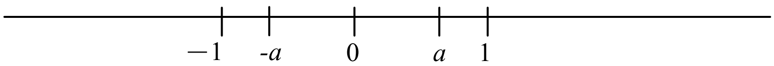
EBAZPENA:

i) Sailkatu (kalkulatu gabe) $\int_{-a}^{a} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$ integrala a-ren balio desberdinentzako ($a>0$).

[-a,a] tarte bornatua denez, ez da lehen motako integral inpropioa.

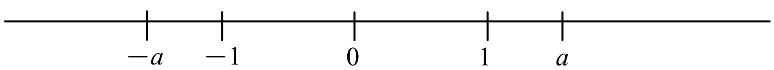
Bestalde, $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ ez dago bornatua -1 eta 1 puntuetan. Beraz, ikusi beharko da a-ren zein baliotarako egongo den puntu horietakoren bat [$-a,a$] tartean.

- $a<1$ bada, -1 eta 1 puntuak ez daude [$-a,a$] tartean:



$f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ bornatua dago [-a,a] tartean eta ondorioz $\int_{-a}^{a} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$ integral propioa da.

- $a \geq 1$ bada, -1 eta 1 puntuak [$-a,a$] tartean daude:



$f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ ez dago bornatua [$-a,a$] tartean, $\int_{-a}^{a} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3} dx$ 2. motako integral inpropioa da.

ii) Kalkulatu aurreko integrala $a = \frac{1}{2}$ eta $a = 2$ direnean.

- $a = \frac{1}{2}$ denean, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx$ integral propioa da.

$\displaystyle\int \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx$ kalkulatzeko aldagai aldaketa erabiltzen badugu, $\boxed{u = x^2 - 1;\ du = 2xdx}$

$$\int \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^3} = \int \frac{1}{2}u^{-3}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + \mathrm{k} = \frac{-1}{4u^2} + \mathrm{k} = \frac{-1}{4\left(x^2-1\right)^2} + \mathrm{k}.$$

Orduan, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx = \left.\frac{-1}{4\left(x^2-1\right)^2}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{-1}{4\left(\frac{1}{4}-1\right)^2} - \frac{-1}{4\left(\frac{1}{4}-1\right)^2} = 0.$

- $a = 2$ denean, $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx$ 2. motako integral inpropioa da, $[-2,2]$ tarte bornatuan

$f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$ funtzio ez bornatua baita (ez da bornatua -1 eta 1 puntuetan).

Integrala 4 integralen batuketan banatu behar dugu, integral bakoitzean limite bakarra izateko:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx + \int_{-1}^{0} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx + \int_{1}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}dx =$$

$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4.$$

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx = \lim_{t\to -1^-} \int_{-2}^{t} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx = \lim_{t\to -1^-} \left(\left[\frac{-1}{4\left(x^2-1\right)^2} \right]_{-2}^{t} \right) =$$

$\lim_{t\to -1^-} \left(\frac{-1}{4\left(t^2-1\right)^2} - \frac{-1}{4\left(4-1\right)^2} \right)$ eta limite hau ez da existitzen. Beraz, I_1 dibergentea da eta ondorioz $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx$ ere.

Honela, $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx$, 2. motako integral inpropio dibergentea da.