EKONOMIAKO MATEMATIKA I
AZTERKETAK

Josune Albizuri • Arritokieta Chamorro • Xabier Lasaga
Txus Ortells • Luisma Zupiria

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.argitalpenak.ehu.es
ISBN: 978-84-694-4007-0

Aurkibidea

Sarrera

Matematika I-Ekonomia aljebra linealaren elementuak barneratzen dituen lau hileko ikasgai bat da, azken urteetan Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko lehenengo urtean irakatsi dena, Ekonomiako lizentziaturan. Gainera, oraindik beste lau deialdietako azterketak egingo dira.

Publikazio honetan Matematika I-eko ikasgaian 2001. urtetik 2010. urtera egin diren azterketetan planteatutako problemak jasotzen dira, ekaineko eta iraileko deialdiak.

Ikasgai honetan ikusitako gaiak hauek dira:

1. MATRIZEAK

   Oinarrizko definizioak

   Matrizeen arteko eragiketak

   Matrize baten iraulia

   Matrize mailakatuak

   Matrize baten heina

2. DETERMINANTEAK

   Matrize karratuen determinantea

   Determinanteen garapena lerro baten elementuekiko

   Propietateak

   Determinanteen aplikazioak

3. EKUAZIO LINEALEKO SISTEMAK. GAUSS-EN METODOA

   Oinarrizko definizioak

   Adierazpen matriziala

   Sistema homogenoak

   Gauss-en metodoa

   Rouché-ren teorema

   Cramer-en erregela

   Interpretazio geometrikoa

4. ESPAZIO BEKTORIALAK

   Azpiespazio bektorialak

   Sistema libreak eta sortzaileak

   Oinarriak

   Barietate lineala

5. ESPAZIO EUKLIDEARRA

   Barne biderkaketa

   Norma

   Bi bektoreen arteko angelua

   Sistema ortogonalak

   Oinarri ortonormalak

   Gram-Schmidt-en teorema

6. APLIKAZIO LINEALAK

   Oinarrizko definizioak

   Aplikazio lineal baten adierazpen matriziala

   Aplikazio linealen konposaketa

   Isomorfismoak

7. DIAGONALIZAZIOA

   Balio eta bektore propioak

   Polinomio karakteristikoa

   Diagonalgarritasun baldintzak

   Diagonalizaziorako metodo operatiboa

   Matrize simetrikoen diagonalizazioa

Gai hauen garapen teorikoa bibliografia honetan aurkitu daiteke:

- Álgebra lineal y geometría cartesiana. Juan de Burgos, MCGraw-Hill argitaletxea, 2000.
- Álgebra Lineal y Teoría de Matrices. Barbolla eta Sanz, Prentice Hall argitaletxea, 1998.
- Matemáticas para el Análisis Económico. Sydsaeter eta Hammond, Prentice Hall argitaletxea, 1996.

Ikasgai hau Ekonomiako eta Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturetako ikasgai bat izateaz gain, orain ezarri berri diren bost graduetako lehenengo ikasturteko Matematika I ikasgaiaren zati handi bat ere bada, beraz publikazio honetako problemak bost gradu berri hauen ikasleentzat ere oso baliagarriak dira. Jarraian ikus daitekeenez publikazio honetako problemek graduetako Matematika I-eko ikasgaiko azken bost gaiak jasotzen ditu. Graduetako Matematika I-eko ikasgaiko gaiak hauek dira:

ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN KALKULU DIFERENTZIALA ETA INTEGRALA

1. ALDEZ AURRETIKO KONTZEPTUAK

   Zenbakiak: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$

   Zuzen erreala

   Ordena $\mathbb{R}$ -n

$\mathbb{R}^2$ planoa

2. ALDAGAI BATEKO FUNTZIO ERREALAK
   Aldagai bateko funtzio errealen oinarrizko ezagutza
   Adierazpen grafikoa
   Oinarrizko funtzioak
   Aldagai bateko funtzioen propietate batzuk
   Jarraitasuna

3. KALKULU DIFERENTZIALA
   Deribatuaren definizioa
   Puntu batean funtzio baten deribatuaren zeinu eta magnitudearen interpretazioa
   Hurbilketa lineala
   Deribatuaren kalkulua
   Katearen erregela
   Ekuazio baten bitartez inplizituki definitutako funtzio baten deribatua
   Deribatuaren batezbesteko balioaren teorena
   Goi ordenako deribatuak
   Bigarren ordenako hurbilketa
   Funtzio baten maximo eta minimo lokalak eta globala, Baldintza beharrezkoak eta nahikoak
   Funtzioen azterketa eta adierazpen grafikoa

4. KALKULU INTEGRALA
   Osoaren kalkulua tasatik abiatuz
   Jatorrizkoen kalkulua
   Integral mugatua. Barrow-en erregela
   Integral inpropioak

ALGEBRA LINEALA

5. BEKTOREAK: SARRERA
   Bektoreak planoan eta espazioan
   Bektoreen interpretazio geometrikoa
   Eragiketak bektoreekin
   Bektoreen konbinazio linealak
   Biderketa eskalarra

6. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK ETA MATRIZEAK
   Bi aldagai eta bi ekuazioko sistemak
   n aldagai eta m ekuazioko sistemak
   Gauss-en metodoa: sarrera
   Matrizeen definizioa
   Matrize mota batzuk
   Eragiketak matrizeekin
   Matrize baten iraulia
   Matrize baten alderantzizkoa
   Matrize mailakatuak eta sistema mailakatuak
   Gauss-en metodoa
   Sistema homogenoak

7. ESPAZIO BEKTORIALAK
   $\mathbb{R}^n$ espazio bektoriala
   Menpekotasun eta independentzia lineala
   Oinarria eta dimentsioa
   Matrize baten eta bektore sistema baten heina
   Azpiespazio bektorialak

8. DETERMINANTEAK
   Definizioak eta propietateak
   Determinanteen propietateak
   Matrize baten alderantzizkoa
   Matrize baten eta bektore sistema baten heinaren kalkulua
   Ekuazio linealetako sistemen sailkapen

9. MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA
   Balio eta bektore propioak
   Matrizeen diagonalizazioa

Lana hiru zatitan banatua dago: espazio bektorialak, aplikazio linealak eta diagonalgarritasuna. Modu honetan irakurleek gaia menperatzen duten edo ez froga dezakete problemak eginez.

Lehenengo zatian azterketetako problemen enuntziatuak daude aurkibide moduan, problema bakoitza zein azterketakoa den adierazten delarik. Bigarren zatian problema hauen ebazpenak daude.

Problema hauek egin aurretik, ikasleek materiaren kontzeptuak menperatzea oinarrizkoa da. Gomendagarria da baita ere bakoitzak problema bakoitzeko galderak ebazteko beharrezkoa den esfortzua egin aurretik problemen ebazpenak ez begiratzea. Modu honetan gai bakoitzeko kontzeptuak menperatzen dituzten edo ez frogatu ahal izango dute.

ENUNTZIATUAK

ESPAZIO BEKTORIALAK

1 (i) Demagun $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0, ax+by+cz=d\}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Eman *a,b,c* eta *d*-ren balio zehatz batzuk non:

(a) *A* multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala den.

(b) $A=\varnothing$ den.

(ii) a=1, b=0 , c=1 eta d=0 direnean:

(a) Eman *A*-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Kalkulatu $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle = 0 \ \ \forall \boldsymbol{y}\in A\}$ multzoa.

[2001eko urtarrilaren 22ko azterketa]

2 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x+a\}$, $a\in\mathbb{R}$.

(i) *a*-ren zein baliotarako beteko da $(1,1,0)\in S$?

(ii) *a*-ren zein baliotarako izango da *S* $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala? Horrela den kasurako eman *S*-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(iii) a=0 bada, esan (erantzunak azalduz) hurrengo lau bektore sistemak:

$\langle(2,0,2),(0,1,0)\rangle$; $\langle(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\rangle$; $\langle(0,1,0),(1,1,1)\rangle$; $\langle(1,1,1)\rangle$;

(a) *S*-ren sistema sortzaileak diren.

(b) *S*-ren oinarriak diren.

(iv) Aurkitu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle(1,0,1),(0,1,0),(x,y,z)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria den.

[2001eko ekainaren 8ko azterketa]

3 (a) Demagun $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3\in\mathbb{R}^4$ non

$\{a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3+a_4\boldsymbol{x}_4 \mid a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}\}=\{b_1\boldsymbol{y}_1+b_2\boldsymbol{y}_2+b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}\}$ betetzen den.

(i) $\langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\rangle$ librea izatea posible al da? Zergatik?

(ii) $\langle y_1, y_2, y_3\rangle$ sistema $\{b_1 \boldsymbol{y_1} + b_2 \boldsymbol{y_2} + b_3 \boldsymbol{y_3} \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$ -ren oinarria izatea posible al da? Zergatik?

(b) Kalkulatu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x - y\}$ multzoaren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

[2002ko urtarrilaren 24ko azterketa]

4 Demagun $A=\langle(1,2,-1,1),(1,0,1,0)\rangle$ espazio bektoriala.

(a) Aurkitu A-ren oinarri ez ortogonal bat.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

(c) $(1,-2,3,1)\in A$ baieztatzen al da?

(d) $B=\langle(1,4,-3,a)\rangle$ bada, aurkitu a-ren balio bat non $B\subset A$ den.

[2002ko ekainaren 21ko azterketa]

5 (a) Demagun $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$ eta $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoaren bi bektore eta

$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle \text{ sistema lotua den}\}$ multzoa. S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da ?

(b) (1,5,4,2) bektorea $\langle(1,2,1,-1), (2,1,-1,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala al da? $(1,2,1,-1)$ bektorea $\langle(1,5,4,2), (2,1,-1,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala al da?

(c) Aurkitu a, b eta c-ren balioak non (a,b,c) bektorea $\langle(1,2,1), (1,1,2), (2,3,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala den.

[2003ko urtarrilaren 17ko azterketa]

6 Demagun $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$.

(a) Aurkitu S-ren bi oinarri, bat ortonormala eta bestea ez ortogonala.

(b) Aurkitu A eta B, ondoko baldintzak betetzen dituzten $\mathbb{R}^3$-ren bi azpiespazio bektorial:

(i) $A\not\subset S$ eta $\dim(A)=1$.

(ii) $B\not\subset S$ eta $\dim(B)=2$.

(c) Aurkitu $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in S,\ x - y + z = 0\}$ multzoaren oinarri bat.

[2003ko ekainaren 10eko azterketa]

7 Demagun $S=\{(ax-y+az, x+3z, 2x+y+2z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a-ren balioak non dim(S)=2 den.

(b) Aurkitu a-ren balioak non $(-3,1,3)\in S$ den.

(c) Aurkitu $T=\{x(2,1,-2)+y(1,0,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ -ren oinarri ortonormal bat.

(d) Aurkitu S, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat, non dim(S)=2, $(1,1,1)\notin S$ eta $(1,0,0)\notin S$ betetzen diren. Azaldu erantzuna.

[2004ko urtarrilaren 20ko azterketa]

8 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x-z\}$.

(a) Aurkitu S-ren oinarri bat.

(b) Esan zuzenak edo okerrak diren ondoko baieztapenak eta azaldu erantzunak :

(i) $(1,-1,1)\in S$.

(ii) $\langle(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da.

(iii) $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ S-ren oinarria da.

(c) Biz $T=\{(x,y,z)\in S \mid z=y-4z\}$. Aurkitu (0,0,0) ez diren T-ren bi bektore. Zein da T-ren dimentsioa?

[2004ko ekainaren 3ko azterketa]

9 (i) Aurkitu hurrengo hiru azpiespazio bektorialen oinarriak:

(a) $S=\{(a-2b, a+b+c, 3b+c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

(b) $T=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid (2,-1,0)\rangle=0\}$.

(c) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-z+t=0, x+y-t=0\}$.

(ii) Demagun V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle(2,-1,0), (1,2,1)\rangle$ bere oinarri bat:

(a) Aurkitu V-ren oinarri ortonormal bat.

(b) a-ren zein baliotarako izango da $\langle(3,1,1), (1,a,-1)\rangle$ sistema V-ren oinarri bat?

(iii) Demagun $W=\{x(1,1,2,1)+y(2,3,3,5)+z(2,1,a,1)+t(1,2,1,b)\mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Kalkulatu *W*-ren dimentsioa *a* eta *b*-ren baliotarako.

[2005eko otsailaren 11ko azterketa]

10 (i) Esan $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ bektore sistema ondoko multzoen oinarria den ala ez (erantzunak azalduz):

(a) $S=\{x(3,1,0)+y(0,0,1)+z(1,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

(b) $T=\{(a,-2a,-a)\mid a\in\mathbb{R}\}$.

(c) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=1\}$.

(d) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\rangle=0\}$, $\boldsymbol{v}=(1,-3,1)$ izanik.

(ii) Biz $W=\{x(1,1,-1,0)+y(2,1,0,-1)+z(1,2,-1,a)+t(0,1,-2,3)\mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}$.

Kalkulatu *W*-ren dimentsioa *a*-ren balio desberdinentzako.

(iii) Kalkulatu $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x+y-z=0,x-2y-z+t=0\}$ multzoaren oinarri bat.

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

11 Demagun $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y-3z=0\}$ eta $B=\{x(0,1,3)+y(1,1,3)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoak.

(a) $\langle(4,1,2),(1,1,1)\rangle$ *A*-ren oinarria al da?

(b) $\langle(-2,1,3),(1,2,3)\rangle$ *B*-ren oinarria al da?

(c) Aurkitu *B*-ren oinarri ortonormal bat.

(d) *A*=*B* al da?

(e) Aurkitu $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore, $\boldsymbol{u}$ eta $\boldsymbol{v}$, non $\dim(\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{u}\mid x,y,z\in\mathbb{R}\})=2$ eta $\dim(\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{v}\mid x,y,z\in\mathbb{R}\})=3$ diren.

[2006ko urtarrilaren 17ko azterketa]

12 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y+z=0,ax+by+z=c\}$ multzoa hartuz, $a,b,c\in\mathbb{R}$,

(a) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non A multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala den.

(b) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non $A=\varnothing$ den.

(c) a=1, b=0 eta c=0 badira:

(i) Aurkitu A-ren bi oinarri, haietako bat ortonormala.

(ii) Kalkulatu $B=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \left\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\right\rangle = 0 \ \ \forall \boldsymbol{y}\in A\right\}$ multzoaren oinarri bat.

[2006ko ekainaren 19ko azterketa]

13 Bira S={$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (1,-2,1)\rangle=0$} eta T={$(2x+y,\ y+z,\ x+y+z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}$ }.

(a) Kalkulatu S eta T-ren oinarri bana.

(b) $(2,1,0)\in S$? $(2,1,0)\in T$?

[2007ko urtarrilaren 24ko azterketa]

14 Demangun S={$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y+2z$}.

(a) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

(b) a-ren zein baliotarako beteko da $(a^2,a,1)\in S$?

(c) a-ren zein baliotarako izango da $\langle (a^2,a,1),\ (-1,1,-1)\rangle$ S-ren oinarri bat.

(d) a-ren zein baliotarako izango da $\langle (a^2,a,1),\ (-1,1,-1),\ (1,0,0)\rangle$ sistema $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat?

[2007ko ekainaren 19ko azterketa]

15 Demagun $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x-y+z=0\right\}$.

(i) S multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, kalkulatu bere oinarri bat eta dimentsioa.

(ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $(1,a,0)\notin S$?

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left\langle (1,1,b),(a,5,b)\right\rangle$ bektore sistema S-ren oinarria dela?

(iv) $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=z\right\}$ bada, kalkulatu $S\cap H$ -ren oinarri ortonormal bat.

[2008ko otsailaren 5eko azterketa]

16 Bira $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\right\}$, $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\right\}$ eta $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+3y-2z=0\right\}$ multzoak.

(a) Frogatu $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$ badira orduan $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$ baieztatzen dela.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

(c) Aurkitu $A\cap B$-ren bi oinarri.

(d) Aurkitu A-ri ortogonalak diren bektore guztien multzoaren oinarri bat.

(e) Aurkitu a-ren balioak non $(2,1,a)\in A\cap C$ den.

[2008ko ekainaren 2ko azterketa]

17 Demagun $\left\langle(1,1,1),(1,-1,0)\right\rangle$, A azpiespazio bektorialaren oinarria.

(i) Aurki ezazu A–ren oinarri ortonormal bat.

(ii) Aurki ezazu, posiblea bada, $\boldsymbol{u}$ bektorea non $\left\langle(0,1,1),\boldsymbol{u}\right\rangle$ A–ren oinarria den.

(iii) Aurki ezazu, posiblea bada, $\boldsymbol{v}$ bektorea non $\left\langle(3,1,2),\boldsymbol{v}\right\rangle$ A–ren oinarria den.

[2009ko otsaileko azterketa]

18 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=z\}$, $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\}$ eta $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0\right\}$.

(i) Kalkula itzazu azpiespazio bektorial hauen dimentsioa eta oinarri bat.

(ii) $T\subset V$ beteko al da? Eta $T\subset S$?

(iii) $a\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $(a,a,a)\in V$?

[2009ko ekaineko azterketa]

19 (a) Esan $\left\langle(1,-1,2),(1,0,1)\right\rangle$ bektore sistema azpiespazio bektorial hauen oinarria den ala ez eta zergatik:

(i) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-z=0,\ y+z-x=0\}$.

(ii) $B=\{(x+z,-x-y,2x+y+z) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

(b) Aurreko apartatuko azpiespazio bektorialak kontutan hartuta:

(i) Kalkula ezazu A-ren oinarri ortonormala.

(ii) Kalkula ezazu *A*-ren edozein bektoreri ortogonala zaion $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bektorea.

(iii) $A \subset B$ betetzen al da?

[2010eko urtarrilaren 19ko azterketa]

20 Demagun $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) \mid (1, -1, 2) \rangle = 0\}$ azpiespazio bektoriala.

(i) Aurki itzazu *S*-ko bi bektore.

(ii) *a*-ren zein baliotarako beteko da $(1, -3, a) \in S$?

(iii) Eman itzazu *S*-ren dimentsioa eta oinarri bat.

(iv) Bektore sistema hauetatik esan zein den *S*-ren oinarria eta zein ez (erantzuna ondo azalduz). Zein da *S*-ren oinarri ortonormala?

$$\langle (1,1,0) \rangle ; \quad \langle (0,2,1), (2,0,-1) \rangle ; \quad \langle (1,-1,-1), (-1,1,0) \rangle ;$$

$$\left\langle \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle ; \quad \langle (1,1,0), (2,0,-1), (0,2,1) \rangle .$$

(v) Demagun $T = \{(x + 2y + z, 3x + 2y + z, x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. Betetzen al da $T \subset S$?

[2010eko ekaineko azterketa]

APLIKAZIO LINEALAK

21 (i) Demagun $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non :

$$f(0,1,0) = (1,1,-1) \ ; \ f(0,0,2) = (2,0,2) \ ; \ f(1,1,1) = (2,1,-1)$$

betetzen diren. Kalkulatu *f*-ri elkartutako matrizea, hots, $M(f)$.

(ii) Biz $f(x, y, z) = (x + y + z, ax + y, -x - y + z)$ aplikazio lineala, $a \in \mathbb{R}$.

(a) *a*-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) *a*=1 bada, eman $\mathrm{Im}(f)$ multzoaren oinarri bat eta dimentsioa.

(c) *a*-ren zein baliotarako beteko da $(1,0,-1) \in \ker(f)$?

(d) Existituko al da *a*-ren balioren bat non $\ker(f) = \varnothing$ den ?

[2001eko urtarrilaren 22ko azterketa]

22 (i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ isomorfismoa bada, kalkulatu $\mathrm{r}(M(f^{-1}))$, $\ker(f)$ eta $\ker(f\circ f)$.

(ii) Demagun $f\left(x,y,z\right)=\left(x-y+2z, y+z, x+y+az\right)$ aplikazio lineala:

(a) a-ren zein baliotarako beteko da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,2)\right\}=\varnothing$?

(b) a-ren zein baliotarako beteko da $f(0,1,2)=(3,3,0)$?

(c) a=4 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(4,-1,2)\right\}$.

[2001eko ekainaren 8ko azterketa]

23 Demagun $f\left(x,y\right)=\left(x+y,2x-y\right)$.

(a) Frogatu f aplikazio lineala dela.

(b) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri ortonormal bat.

(c) $g\left(x,y,z\right)=\left(x+y-z\ ,\ y+2z\right)$ aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $\ker(f\circ g)$.

(d) Kalkulatu f^{-1} alderantzizko aplikazioa.

[2002ko urtarrilaren 24ko azterketa]

24 Bira $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio linealak, $f\left(x,y,z\right)=\left(x+2z, x+y+z, y-z\right)$ eta g hurrengo baldintzak betetzen dituena: $g(1,0,0)=(1,0,0)$, $g(0,1,0)=(1,-1,0)$, $g(0,0,1)=(1,1,1)$.

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) Aurkitu $\mathrm{Im}(f)$-ren sistema sortzaile bat.

(c) Aurkitu $\ker(g\circ f)$ multzoa eta eman bere oinarri bat.

[2002ko ekainaren 21eko azterketa]

25 Bira $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ non $f\left(x,y\right)=\left(ax,\ y,\ b\right)$ den, $a,b\in\mathbb{R}$, eta $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ondoko aplikazio lineala, $g\left(x,y,z\right)=\left(x-z,\ y-z\right)$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako izanen da f aplikazio lineala?

(b) Aurkitu $\ker(f\circ g)$-ren oinarri bat eta dimentsioa a=1 eta b=0 direnean.

(c) Kalkulatu $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)\left(x,y,z\right)=\left(0,0,1\right)\right\}$ multzoa a=1 eta b=0 direnean.

[2003ko urtarrilaren 17ko azterketa]

26 (a) Biz $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondoko hiru baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala.

(i) $f(1,0,0)=(3,-2,2)$ eta $f(0,1,0)=(-2,2,0)$.

(ii) $M(f)$ matrize simetrikoa da.

(iii) $(2,-2,-1)$ $M(f)$-ren bektore propioa da.

Hau dena kontutan hartuta, kalkulatu $M(f)$.

(b) $g(x,y,z)=(x+2y+z,-x+2z,-x+2y+3z)$ eta $h(x,y)=(2x+5y,\ x+4y)$ aplikazio linealak hartuz, kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,-1,1)\}$ multzoa eta $h^{-1}(x,y)$ aplikazioa.

[2003ko ekainaren 10eko azterketa]

27 Bira $f(x,y)=(ax-y,x+3y,bx)$ eta $g(x,y)=(3x,2x+y)$ bi aplikazio lineal, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non $f(1,1)=(1,4,3)$ den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\dim(\ker(f))=1$ den.

(c) Aurkitu a eta b-ren balioak non $(1,0,0)\in\mathrm{Im}(f)$ den.

(d) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0,1)\}=\varnothing$ den.

(e) $a=0$ eta $b=1$ badira, kalkulatu $(f\circ g)(1,-1)$ eta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (f\circ g)(x,y)=(-1,3,0)\}$.

[2004ko urtarrilaren 20ko azterketa]

28 (i) Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in M_3$ den, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\}=\varnothing$ den.

(c) $a=0$ eta $b=5$ badira, aurkitu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri bana.

(d) $g(1,3)=(1,4,6)$ eta $g(2,1)=(2,3,2)$ baieztatzen duen g aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $M(g)$. Gainera, $a=0$ eta $b=5$ diren kasurako, kalkulatu $(f\circ g)(1,3)$.

(ii) Aurkitu isomorfismoa ez den $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $f(1,1) = (2,3)$ den. Azaldu erantzuna.

[2004ko ekainaren 3ko azterketa]

29 (i) Biz f aplikazio lineala non $f(1,2) = f(2,1) = (3,-3)$ den. Kalkulatu $f(x,y)$.

(ii) Demagun g aplikazio lineala non $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den.

(a) Kalkulatu $\ker(g)$ multzoa, bere oinarri bat eta dimentsioa.

(b) Kalkulatu $\mathrm{Im}(g)$-ren oinarri bat. Aurkitu $\mathrm{Im}(g)$ multzoan ez dagoen $\mathbb{R}^3$-ren bektore bat.

(c) $a \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = (a,0,2)\} = \varnothing$?

(d) Aurkitu $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $(h \circ g)(1,1,0)=(3,1)$ betetzen den.

[2005eko otsailaren 11ko azterketa]

30 Bira hurrengo aplikazio linealak:

$$f(x,y,z) = (y+z, x-y+z, x+2z) \text{ eta } g(x,y,z) = (2x-y+z, y-3z).$$

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) Kalkulatu $(g \circ f)(1,0,-1)$.

(c) Kalkulatu $\ker(g)$ multzoaren oinarri bat.

(d) $(1,-2) \in \mathrm{Im}(\mathrm{g})$ baieztatzen al da?

(e) Kalkulatu $\ker(f)$ eta $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazio bektorialen dimentsioak.

(f) $a \in \mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $(a,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$?

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

31 (a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismoa hartuz, kalkulatu $\mathrm{r}(M(f))$, $\ker(f)$ eta $\ker(f \circ f)$.

(b) Demagun $g(x,y,z) = (x-y+2z, y+z, x+y+az)$ aplikazio lineala, $a \in \mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako beteko da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,1,2)\right\}=\varnothing$?

(ii) a-ren zein baliotarako beteko da $\dim(\ker(g))=1$?

(iii) a=4 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(4,1,2)\right\}$ eta $\mathrm{Im}(g)$.

[2006ko urtarrilaren 17ko azterketa]

32 Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ den.

(a) b-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa ?

(b) b-ren zein baliotarako izango da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,0,1)\right\}=\varnothing$?

(c) b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,0,1)\in\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(5,3,5)\right\}$?

(b) b=1 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,3)\right\}$ eta ker(f)-ren oinarri ortonormal bat.

[2006ko ekainaren 19ko azterketa]

33 Demagun $f(x,y,z)=(x+y,\ ay-z)$ eta $g(x,y)=(x,\ x+y,\ y)$ aplikazio linealak, $a\in\mathbb{R}$.

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) a-ren zein baliotarako izango da $f\circ g$ isomorfismoa?

(c) a-ren zein baliotarako existituko da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektoreren bat non $f(x,y,z)=(1,1)$ den?

(d) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $f(1,1,2)=(2,0)$?

(e) a=1 bada, kalkula ezazu ker(f)-ren oinarri bat.

[2007ko urtarrilaren 24ko azterketa]

34 Demagun $f(x,y,z)=(2x+y+z,\ x\text{-}y+z,\ -3y+az)$, $a\in\mathbb{R}$ aplikazio lineala.

(a) a-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) a-ren zein baliotarako ez da existituko $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorerik non $f(x,y,z)=(0,0,1)$ den?

(c) a-ren zein baliotarako beteko da $f(0,1,1)=(2,0,0)$?

(d) a=1 denean, kalkulatu ker(f) eta Im(f) azpiespazio bektorialen dimentsioak.

[2007ko ekainaren 28ko azterketa]

35 Demagun f aplikazio lineala eta $M\left(f\right)=\begin{pmatrix} 1 & a & o \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ bere matrize elkartua; $a\in\mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako baieztatuko dim(Im(f))≠ 3?

(ii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left(0,1,b\right)\in\ker\left(f\right)$?

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left(b,0,1\right)\in\mathrm{Im}(f)$?

(iv) $a=1$ bada, kalkulatu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(v) $a=1$ bada, existitzen al da $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio linealen bat non $\left(g\circ f\right)\left(1,-1,1\right)\neq\left(0,0\right)$ baieztatzen den? Azaldu erantzuna.

[2008ko otsailaren 5eko azterketa]

36 Demagun $f(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y-3z)$ eta $g(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y)$ aplikazio linealak.

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,a,1)\in\mathrm{Im}(f)$ den.

(b) Aurkitu $\ker(f)$-ren oinarri bat.

(c) $\ker(f)\subset\mathrm{Im}(f)$ baieztatzen al da?

(d) g alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu g^{-1} aplikazioa.

(e) Kalkulatu (x,y,z) bektoreen multzoa non $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ den.

[2008ko ekainaren 2ko azterketa]

37 Demagun ondoko aplikazio lineala: $f(x,y,z)=(x+2y,x+3z,y-z)$.

(i) Aurki ezazu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,4,5)\right\}$. $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

(ii) f isomorfismoa al da? Hala bada, aurki ezazu f^{-1} alderantzizko funtzioa.

(iii) Aurki ezazu $\mathrm{Im}(f)$ –ren oinarri bat. Betetzen al da $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^3$? Eta $\mathbb{R}^3\subset\mathrm{Im}(f)$?

[2009ko otsaileko azterketa]

38 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala

$$f(2,0,0)=(2,0,-2),\quad f(0,1,0)=(-1,1,-1),\quad f(0,0,1)=(0,1,-2)$$

izanik.

(i) Aurki ezazu $M(f)$.

(ii) Aurki ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,-2)\}$.

(iii) Aurki ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}$. Zein da bere dimentsioa?

[2009ko ekaineko azterketa]

39 (a) Kalkula ezazu $h(1,-1)=(2,1,2)$ eta $h(0,2)=(-2,2,2)$ betetzen duen $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio linealaren matrize elkartua.

(b) Demagun f aplikazio lineala, $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bere matrize elkartua izanik.

(i) Kalkula ezazu $\ker(f)$-ren oinarria eta bere dimentsioa.

(ii) Aurki itzazu a-ren balioak non $(1,1,a)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

(iii) $g(x,y)=(x,y,x-y)$ izanik, kalkulatu $(f\circ g)(2,1)$ eta $\mathrm{Im}(f\circ g)$ multzoaren dimentsioa.

[2010eko urtarrilaren 19ko azterketa]

40 (i) Aurki ezazu $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio linealari elkartutako matrizea, baldintza hauek betetzen dituelarik:

$$h(0,-1,0)=(1,-1),\ h(3,0,0)=(3,6) \ \text{ eta } \ h(2,3,1)=(0,0).$$

(ii) Demagun $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrize elkartua duen f aplikazio lineala.

(a) a-ren zein baliotarako beteko da $(2,a,-1)\in\ker(f)$?

(b) Aurki itzazu a-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,a,0)\}=\varnothing$ den.

(c) $g(x,y,z)=(x+z,x-y)$ izanik, aurki ezazu $(g\circ f)(1,-1,0)$ eta $\ker(g\circ f)$ multzoaren dimentsioa.

[2010eko ekaineko azterketa]

DIAGONALGARRITASUNA

41 Demagun $p_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda+a)$ $A\in M_3$ matrize baten polinomio karakteristikoa.

(i) a-ren zein baliotarako ziurta dezakegu A diagonalgarria dela ?

(ii) a-ren zein baliotarako ziurta dezakegu A ez dela diagonalgarria ?

(iii) Ezagutu al daiteke A^2 matrizearen balio propiorik? Zergatik?

[2001eko urtarrilaren 22ko azterketa]

42 Demagun $A=\begin{pmatrix} a^2 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea, $a, b\in\mathbb{R}$.

(i) a eta b-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

(ii) $a=1$ bada, aurkitu b-ren balioak non $(1,0,b)$ A-ren bektore propioa den.

[2001eko ekainaren 8ko azterketa]

43 Bira ondoko matrizeak: $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Kalkulatu A matrizearen balio propio bat.

(b) Kalkulatu B matrizearen bektore propio bat.

(c) C matrize diagonalgarria al da? Zergatik?

(d) Kalkulatu D-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$ -ren oinarri bat.

(e) Aurkitu E-ren antzeko bi matrize diagonal.

[2002ko urtarrilaren 24ko azterketa]

44 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ matrizea.

(a) Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a eta b-ren balio desberdinen arabera.

(b) $a=-1$ bada, esan b-ren zein baliotarako izango den $(0,3,3)$ A-ren bektore propioa.

[2002ko ekainaren 21eko azterketa]

45 (a) Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ matrizea. Aurkitu a, b eta c-ren balioak ondoko bi baldintzak baieztatzeko: $\lambda=2$ A-ren balio propia da eta $S_A(2)=\{x(1,-1,0)+y(1,1,-2) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoa $\lambda=2$ balioari elkartutako azpiespazio espektrala da.

(b) $a=1$, $b=3$ eta $c=3$ direnean, A matrize diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

[2003ko urtarrilaren 17ko azterketa]

46 (a) Aurkitu $A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ -b & b \end{pmatrix}\in M_2$ matrizea non (1,2) A-ren bektore propioa den eta $\lambda=3$ bere balio propio elkartua.

(b) Biz $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\in M_2$ matrizea:

(i) Aurkitu B-ren antzeko matrize diagonal guztiak.

(ii) Aurkitu B-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$-ren oinarri bat.

[2003ko ekainaren 10eko azterketa]

47 (i) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\lambda=3$ A-ren balio propioa den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non (0,1,1) A-ren bektore propioa den.

(c) $a=0$ baliorako, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

(d) $a=b=0$ badira, aurkitu $\lambda=0$ balio propioari elkartutako bektore propio guztien multzoa.

(ii) Aurkitu $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$-ren antzeko matrize ez-diagonal bat. Azaldu erantzuna.

[2004ko urtarrilaren 20ko azterketa]

48 Biz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) $a = 2$ eta $b = 0$ badira, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

[2004ko ekainaren 3ko azterketa]

49 Demagun $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) $a = 1$ bada, kalkulatu A-ren antzeko matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non $\lambda=4$ A-ren balio propioa den.

[2005eko otsailaren 11ko azterketa]

50 Biz $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\lambda = -3$ A-ren balio propioa den.

(b) Kalkulatu a-ren balioak non $(0,1,1)$ A-ren bektore propioa den.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

[2005eko ekainaren 14ko azterketa]

51 Demagun $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 4 & 3 & -2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a \in \mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea ?

(b) $a=1$ bada, kalkulatu:

(i) b-ren balioak non $(b,1,b)$ A-ren bektore propioa den.

(ii) A-ren antzeko matrize diagonal bat.

(iii) A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(iv) $\lambda=3$ balio propioari elkartutako A-ren bi bektore propio.

[2006ko urtarrilaren 17ko azterketa]

52 (a) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a,b,c \in \mathbb{R}$. Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a, b eta c-ren balio desberdinetarako.

(b) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da $(1,-2,0)$ A-ren bektore propioa?

(c) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da $\lambda=3$ A-ren balio propioa?

(d) $a= 2$,$b=0$ eta $c=1$ badira, kalkulatu A-ren bektore propioak.

[2006ko ekainaren 19ko azterketa]

53 Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,}\ a \in \mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da $\lambda=2$ A-ren balio propioa?

(b) a-ren zein baliotarako izango da $(1,0,1)$ A-ren bektore propioa?

(c) a-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

[2007ko urtarrilaren 24ko azterketa]

54 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix} \in M_{3,}\ a,b \in \mathbb{R}$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako da A diagonalgarria?.

(b) $a=1$ y $b=1$ denean, kalkulatu A-ren antzeko D matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

[2007ko ekainaren 28ko azterketa]

55 Demagun $A=\begin{pmatrix}3&0&a\\1&2&b\\4&0&c\end{pmatrix}$ matrizea. Badakigu $\lambda=3$ A-ren balio propio dela eta $(1,1,4)\in S_A(3)$ baieztatzen dela.

(i) Kalkulatu a, b eta c.

(ii) a=b=0 eta c=2 badira, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu bere balio eta bektore propioak, antzeko D matrize diagonal bat eta dagokion P aldaketa matrizea.

[2008ko otsailaren 5eko azterketa]

56 Demagun $A=\begin{pmatrix}2&-2&6\\0&a&4-a\\0&a&-a\end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) a = 4 bada, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal guztiak.

[2008ko ekainaren 2ko azterketa]

57 Demagun $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&-2&a\\3&0&1\end{pmatrix}$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$ izanik.

(i) Aurki itzazu a-ren balioak non -2 A-ren balio propioa den eta elkartutako azpiespazio espektrala.

(ii) Aurki itzazu a-ren balioak non $(1,5,-1)$ bektorea 4 balio propioari elkartutakoa den.

(iii) $a=3$ denean, diagonalgarria al da A matrizea?

[2009ko otsaileko azterketa]

58 Demagun $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\2&1&2\\a&0&0\end{pmatrix}$ matrizea.

(i) a-ren zein baliotarako da A diagonalgarria?

(ii) a=0 denean, aurki ezazu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

[2009ko ekaineko azterketa]

59 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Diagonalgarria al da A matrizea? Hala bada, kalkula itzazu P eta D matrizeak, $P^{-1}AP = D$ izanik.

(b) a-ren balioren bat existitzen al da non $(3,-6,a)$ A-ren bektorea propioa den?

[2010eko urtarrilaren 19ko azterketa]

60 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea.

(i) $a=2$ baliotarako, diagonalgarria al da A matrizea? Hala bada, aurki ezazu A-ren antzeko D matrize diagonala.

(ii) Existitzen al da a-ren balioren bat non 4 A-ren balio propioa den?

[2010eko ekaineko azterketa]

EBAZPENAK

ESPAZIO BEKTORIALAK

1 (i) Demagun $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0, ax+by+cz=d\right\}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Eman *a,b,c* eta *d*-ren balio zehatz batzuk non:

(a) *A* multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala den.

(b) $A=\varnothing$ den.

(ii) a=1, b=0 , c=1 eta d=0 direnean:

(a) Eman *A*-ren oinarri ortonormal bat.

(b) Kalkulatu $B=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \left\langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\right\rangle=0 \ \ \forall\boldsymbol{y}\in A\right\}$ multzoa.

EBAZPENA:

(i) $A=\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0,\ ax+by+cz=d \right\}$,

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ ax+by+cz=d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow MX=B \text{ sistemaren soluzio multzoa da.}$$

Honela:

(a) *A* multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala izateko, d=0 (sistema homogenoa izan dadin).

Eta dim(A)=3 – r(M) denez, dim(A)=1 $\Leftrightarrow$ r(M)=2 bada. Adibidez, a=b=c=1 direnean.

(b) $A=\varnothing \Leftrightarrow MX=B$ sistema bateraezina bada, hots, r(M)≠r(M:B) bada.

Adibidez, a=1; b=2; c= – 1 eta d=2 direnean.

(ii) a=1, b=0 , c=1 eta d=0 direnean:

(a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0,\ x+z=0\right\}$, $\left.\begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$ sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz,

$$A=\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-x,\ z=-x\right\}=\left\{(x,-x,-x)\mid x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,-1,-1)\mid x\in\mathbb{R}\right\}.$$

A-ren oinarria: $\langle(1,-1,-1)\rangle$. A-ren oinarri ortonormala: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\rangle$.

(b) $B=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y}\rangle=0\ \ \forall \boldsymbol{y}\in A\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)\mid(1,-1,-1)\rangle=0\right\}=$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y-z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y+z\right\}=$$

$$=\left\{(y+z,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y(1,1,0)+z(1,0,1) : y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

2 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x+a\}$, $a\in\mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako beteko da $(1,1,0)\in S$?

(ii) a-ren zein baliotarako izango da S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala? Horrela den kasurako eman S-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(iii) a=0 bada, esan (erantzunak azalduz) hurrengo lau bektore sistemak:

$\langle(2,0,2),(0,1,0)\rangle$; $\langle(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\rangle$; $\langle(0,1,0),(1,1,1)\rangle$; $\langle(1,1,1)\rangle$;

(a) S-ren sistema sortzaileak diren.

(b) S-ren oinarriak diren.

(iv) Aurkitu $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektore bat non $\langle(1,0,1),(0,1,0),(x,y,z)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria den.

EBAZPENA:

(i) $(1,1,0)\in S \Leftrightarrow 0=1+a \Leftrightarrow a=-1$.

(ii) $a\neq 0$ denean, $(0,0,0)\notin S$ eta ondorioz S ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala.

a=0 bada:

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x\}=\{(x,y,x)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)+y(0,1,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da. Bere oinarri bat $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$ da eta $\dim(S)=2$.

(iii) Dakigunez, a=0 bada, $S=\{x(1,0,1)+y(0,1,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

- $\{x(2,0,2)+y(0,1,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=S$ da, $(2,0,2)\in S$, $(0,1,0)\in S$ eta $\dim(\{x(2,0,2)+y(0,1,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\})=2$ baieztatzen direlako. Beraz, $\langle(2,0,2),(0,1,0)\rangle$ S-ren sistema sortzailea eta S-ren oinarria.
- $\{x(1,0,1)+y(0,1,0)+z(1,1,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)+y(0,1,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=S$. Eta $\langle(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\rangle$ lotua. Beraz, $\langle(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da baina ez da S-ren oinarria.
- $\{x(1,0,1)+y(1,1,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=S$ da, $(0,1,0)\in S$, $(1,1,1)\in S$ eta $\dim(\{x(1,0,1)+y(1,1,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\})=2$ baieztatzen direlako. Beraz, $\langle(0,1,0),(1,1,1)\rangle$ S-ren sistema sortzailea eta S-ren oinarria.

- $\dim\left(\left\{x(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\right\}\right) = 1$ denez, $\langle(1,1,1)\rangle$ ez da ez *S*-ren sistema sortzailea ezta S-ren oinarria ere.

(iv) $\left\langle(1,0,1),(0,1,0),(x,y,z)\right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria izateko, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ eta $(x,y,z) \notin \left\{x(1,0,1)+y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\right\}$ baldintzak bete behar dira. Adibidez, $(x,y,z)=(0,0,1)$ bektoreak bi baldintza horiek betetzen ditu.

3 (a) Demagun $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \in \mathbb{R}^4$ non

$$\{a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} = \{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$$

betetzen den.

(i) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ librea izatea posible al da? Zergatik?

(ii) $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle$ sistema $\{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$ -ren oinarria izatea posible al da? Zergatik?

(b) Kalkulatu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x - y\}$ multzoaren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA:

(a) Demagun $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \in \mathbb{R}^4$ non

$$\{a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} = \{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$$

betetzen den.

(i) $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ librea izatea posible al da? Zergatik?

EZ.

$$\{a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} = \{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$$

denez, orduan

$$\dim\left(\{a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + a_3\boldsymbol{x}_3 + a_4\boldsymbol{x}_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}\right) =$$
$$= \dim\left(\{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}\right) \leq 3.$$

Beraz, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ sistema lotua da.

(ii) $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle$ sistema $\{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$ -ren oinarria izatea posible al da? Zergatik?

BAI. $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \rangle$, $\{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$ -ren sistema sortzailea da. Librea bada, $\{b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + b_3\boldsymbol{y}_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\}$ -ren oinarria izango da eta lotua bada, orduan ez. Beraz, bai, posible da.

(b) Kalkulatu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x - y\}$ multzoaren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x - y\} = \{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,-1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Beraz, $\langle(1,0,1),(0,1,-1)\rangle$ S-ren oinarria da. Gram-Schmidt-en teorema aplikatuz, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) \right\rangle$ S-ren oinarri ortonormala lortzen da.

-

4 Demagun $A=\langle(1,2,-1,1),(1,0,1,0)\rangle$ espazio bektoriala.

(a) Aurkitu A-ren oinarri ez ortogonal bat.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

(c) $(1,-2,3,1)\in A$ baieztatzen al da?

(d) $B=\langle(1,4,-3,a)\rangle$ bada, aurkitu a-ren balio bat non $B\subset A$ den.

EBAZPENA:

$\langle(1,2,-1,1),(1,0,1,0)\rangle$ bektore sistema A-ren oinarri ortogonala da.

(a) $\langle(1,2,-1,1),\ (1,2,-1,1)+(1,0,1,0)\rangle$ hartuz, $\langle(1,2,-1,1),\ (2,2,0,1)\rangle$ A-ren oinarri ez ortogonal bat da.

(b) $\langle(1,2,-1,1),(1,0,1,0)\rangle$ A-ren oinarri ortogonala $\Rightarrow \left\langle \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)\right\rangle$ A-ren oinarri ortonormala.

(c) $$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&2&-1&1\\1&-2&3&1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&-2&1\\0&-2&2&1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&-2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=3$$

denez, orduan $(1,-2,3,1)\notin A$.

(d) $B=\langle(1,4,-3,a)\rangle\subset A \Leftrightarrow (1,4,-3,a)\in\langle(1,2,-1,1),(1,0,1,0)\rangle$.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&2&-1&1\\1&4&-3&a\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&-2&1\\0&4&-4&a\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&-2&1\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow a=2.$$

Beraz, $B\subset A \Leftrightarrow a=2$.

5 (a) Demagun $\boldsymbol{e}_1$=(1,0,0) eta $\boldsymbol{e}_3$=(0,0,1) $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoaren bi bektore eta $S=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\rangle \text{ sistema lotua den}\right\}$ multzoa. S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da ?

(b) (1,5,4,2) bektorea ⟨(1,2,1, – 1), (2,1, – 1,0)⟩ sistemaren konbinazio lineala al da? (1,2,1, – 1) bektorea ⟨(1,5,4,2), (2,1, – 1,0)⟩ sistemaren konbinazio lineala al da?

(c) Aurkitu a, b eta c-ren balioak non (a,b,c) bektorea ⟨(1,2,1), (1,1,2), (2,3,1)⟩ sistemaren konbinazio lineala den.

EBAZPENA:

(a) Demagun $\boldsymbol{e}_1$=(1,0,0) eta $\boldsymbol{e}_3$=(0,0,1) $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoaren bi bektore eta ⟨ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$⟩ sistema lotua. ⟨(x,y,z), (1,0,0), (0,0,1)⟩ sistema lotua denez $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ bada. Beraz,

$$S=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\rangle \text{ sistema lotua den}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\right\}=\left\{(x,0,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x(1,0,0)+z(0,0,1)\mid x,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Eta S bi bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa denez, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.

(b) • (1,5,4,2) bektorea ⟨(1,2,1,−1),(2,1,−1,0)⟩ sistemaren konbinazio lineala da $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ bateragarria bada. Matrizea mailakatuz,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Honela, $r(A) = 2 \neq 3 = r(A{:}B)$, beraz,

(1,5,4,2) bektorea ez da $\langle(1,2,1,-1),(2,1,-1,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala.

- **(**1,2,1,−1) bektorea $\langle(1,5,4,2),(2,1,-1,0)\rangle$-ren konbinazio lineala da $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

bateragarria bada. Matrizea mailakatuz,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Honela, $r(A) = 2 \neq 3 = r(A{:}B)$, beraz,

(1,2,1, −1) bektorea ez da $\langle(1,5,4,2),(2,1,-1,0)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala.

(c) (a,b,c) bektorea $\langle(1,2,1), (1,1,2), (2,3,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala da $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \end{array}\right)$

sistema bateragarria bada. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ denez, $r(A)=r(A{:}B)=3$, beraz, (a,b,c) bektorea

$\langle(1,2,1), (1,1,2), (2,3,1)\rangle$ sistemaren konbinazio lineala da $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

6 Demagun $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2z=0\right\}$.

(a) Aurkitu S-ren bi oinarri, bat ortonormala eta bestea ez ortogonala.

(b) Aurkitu A eta B, ondoko baldintzak betetzen dituzten $\mathbb{R}^3$-ren bi azpiespazio bektorial:

(i) $A\not\subset S$ eta $\dim(A)=1$.

(ii) $B\not\subset S$ eta $\dim(B)=2$.

(c) Aurkitu $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\in S,\ x-y+z=0\right\}$ multzoaren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-2z\right\}=\left\{(-2z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{z(-2,0,1)+y(0,1,0)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

S-ren oinarria $\langle(-2,0,1),(0,1,0)\rangle$ ortogonala da, beraz, S-ren oinarri ortonormala lortzeko bektore bakoitzari bere norma zatitzea nahikoa izanen da.

S-ren oinarri ortonormala: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2,0,1\right),\left(0,1,0\right)\right\rangle$.

S-ren oinarri ez ortogonala: $\langle(-2,0,1),\ (-2,0,1)+(0,1,0)\rangle$, hau da, $\langle(-2,0,1),\ (-2,1,1)\rangle$.

(b) Aurkitu A eta B, ondoko baldintzak betetzen dituzten $\mathbb{R}^3$-ren bi azpiespazio bektorial:

(i) $A\not\subset S$ eta $\dim(A)=1$. $A=\{a(1,0,0)\mid a\in\mathbb{R}\}\not\subset S$, $(1,0,0)\notin S$ baita, eta $\dim(A)=1$.

(ii) $B\not\subset S$ eta $\dim(B)=2$. $B=\{a(1,0,0)+b(0,1,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\not\subset S$, $(1,0,0)\notin S$ baita, eta $\dim(B)=2$.

(c) $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\in S,\ x-y+z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2z=0,\ x-y+z=0\right\}$.

$x+2z=0\rightarrow x=-2z$.
$x-y+z=0\rightarrow y=x+z=-2z+z=-z$.

Beraz, $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-2z,\ y=-z\right\}=\left\{(-2z,-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(-2,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

C-ren oinarria: $\langle(-2,\ -1,1)\rangle$.

7 Demagun $S=\{(ax-y+az, x+3z, 2x+y+2z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a-ren balioak non dim(S)=2 den.

(b) Aurkitu a-ren balioak non $(-3,1,3)\in S$ den.

(c) Aurkitu $T=\{x(2,1,-2)+y(1,0,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ -ren oinarri ortonormal bat.

(d) Aurkitu S, $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektorial bat, non dim(S)=2, $(1,1,1)\notin S$ eta $(1,0,0)\notin S$ betetzen diren. Azaldu erantzuna.

EBAZPENA:

(a) $S=\{(ax-y+az, x+3z, 2z+y+2z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(a,1,2)+y(-1,0,1)+z(a,3,2)\}$ denez,

$$\dim(S)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & a\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2(a+2)=0, \text{ hau da, } a=-2 \text{ bada.}$$

(b) $$(3,1,3)\in S \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a & -3\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

$$a\neq-2 \text{ bada, } \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=3 \text{ eta ondorioz } \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a & -3\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=3.$$

$$a=-2 \text{ bada, } \mathrm{r}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=2 \text{ eta } \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & a & -3\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=2.$$

Beraz, $(-3,1,3)\in S$ $\forall a\in\mathbb{R}$.

(c) $T=\{x(2,1,-2)+y(1,0,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ denez, $\langle(2,1,-2),(1,0,1)\rangle$ izanen da T-ren oinarri bat. Gran-Schmidt-en teorema aplikatuz, $\left\langle \frac{1}{3}(2,1,-2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\rangle$ T-ren oinarri ortonormala da.

(d) Adibidez, $S = \{x(0,1,0)+y(0,0,1) | x, y \in \mathbb{R}\}$ hartuz, $\dim(S)=2$, $\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ librea baita, $(1,1,1)\notin S$ eta $(1,0,0)\notin S$ (Bistakoa baita (1,1,1) eta (1,0,0) ez direla $\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$-ren konbinazio linealak).

8 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x-z\}$.

(a) Aurkitu S-ren oinarri bat.

(b) Esan zuzenak edo okerrak diren ondoko baieztapenak eta azaldu erantzunak :

(i) $(1,-1,1)\in S$.

(ii) $\langle(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da.

(iii) $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ S-ren oinarria da.

(c) Biz $T=\{(x,y,z)\in S \mid z=y-4z\}$. Aurkitu (0,0,0) ez diren T-ren bi bektore. Zein da T-ren dimentsioa?

EBAZPENA:

Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x-z\}$.

(a) Aurkitu S-ren oinarri bat.

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x-z\}=\{(x,2x-z,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,2,0)+z(0,-1,1)\mid x,z\in\mathbb{R}\}.$$

S-ren oinarri bat: $\langle(1,2,0), (0,-1,1)\rangle$ eta $\dim(S)=2$.

(b) Esan zuzenak edo okerrak diren ondoko baieztapenak eta azaldu erantzunak :

(i) $(1,-1,1)\in S$. OKERRA. ($y=2x-z$ baldintza ez du betetzen) $-1\neq 2-1$.

(ii) $\langle(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da. ZUZENA.

$\dim(S)=2$ denez, S-ren sistema sortzailea izateko, (1) bektore guztiak S-n egon behar dira, (2) gutxienez bi bektore egon behar dira eta (3) bi linealki independiente izan behar dira.

$(1,1,1)\in S$, $(3,4,2)\in S$, $(-1,-5,3)\in S$, hiru bektore hauek $y=2x-z$ baldintza betetzen dutelako.

Eta adibidez (1,1,1) eta (3,4,2) linealki independienteak direnez,

$\langle(1,1,1), (3,4,2), (-1,-5,3)\rangle$ S-ren sistema sortzailea da.

(iii) $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ S-ren oinarria da. ZUZENA.

$\dim(S)=2$ denez, S-ren sistema oinarria izateko, S-ren bi bektore linealki independiente behar ditugu. $(-2,-5,1)\in S$, $(2,0,4)\in S$, bi bektore hauek $y=2x-z$ baldintza betetzen dutelako.

Eta linealki independienteak direnez, $(-2,-5,1)\neq a(2,0,4)$, $\langle(-2,-5,1), (2,0,4)\rangle$ S-ren oinarria da.

(c) Biz $T=\{(x,y,z)\in S \mid z=y-4z\}$. Aurkitu (0,0,0) ez diren T-ren bi bektore. dim(T)=?

T multzoan egoteko, (1) S-n egon behar da, hots, $y = 2x - z$ baldintza bete, eta (2) $z = y - 4x$ baldintza bete behar da. Beraz, $T=\{(x,y,z)\in S \mid z=y-4z\}=$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x-z, z=y-4x\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y-z=0, 4x-y+z=0\}$,

hots, $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 4x-y+z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

Sistema ebatziz, bere soluzioak $y=3x$ eta $z=-x$ dira. Beraz,

$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=3x, z=-x\}=\{(x,3x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,3,-1) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Honela, dim(T)=1.

Eta (0,0,0) ez diren T-ren bi bektore, adibidez $(1,3,-1)$ eta $(2,6,-2)$.

9 (i) Aurkitu hurrengo hiru azpiespazio bektorialen oinarriak:

(a) $S=\left\{\left(a-2b,a+b+c,3b+c\right)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

(b) $T=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\left\langle\boldsymbol{x}\mid(2,-1,0)\right\rangle=0\right\}$.

(c) $U=\left\{\left(x,y,z,t\right)\in\mathbb{R}^4\mid x-z+t=0,\ x+y-t=0\right\}$.

(ii) Demagun V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle(2,-1,0),\ (1,2,1)\rangle$ bere oinarri bat:

(a) Aurkitu V-ren oinarri ortonormal bat.

(b) a-ren zein baliotarako izango da $\langle(3,1,1),\ (1,a,-1)\rangle$ sistema V-ren oinarri bat?

(iii) Demagun $W=\left\{x\left(1,1,2,1\right)+y\left(2,3,3,5\right)+z\left(2,1,a,1\right)+t\left(1,2,1,b\right)\mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Kalkulatu W-ren dimentsioa a eta b-ren baliotarako.

EBAZPENA:

(i) Aurkitu hurrengo hiru azpiespazio bektorialen oinarriak:

(a) $S=\left\{\left(a-2b,a+b+c,3b+c\right)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{a(1,1,0)+b(-2,1,3)+c(0,1,1)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

$\langle(1,1,0),\ (-2,\ 1,3),\ (0,1,1)\rangle$ lotua da, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$ baita. Eta $\langle(1,1,0),\ (-2,\ 1,3)\rangle$

librea denez, $S=\left\{a(1,1,0)+b(-2,1,3)+c(0,1,1)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{a(1,1,0)+b(-2,1,3)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

Beraz, $\langle(1,1,0),\ (-2,\ 1,3)\rangle$ S-ren oinarria.

(b) $T=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\left\langle\boldsymbol{x}\mid(2,-1,0)\right\rangle=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left\langle(x,y,z)\mid(2,-1,0)\right\rangle=0\right\}=$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x-y=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:y=2x\right\}=\left\{(x,2x,z):x,z\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x(1,2,0)+z(0,0,1):x,z\in\mathbb{R}\right\}$.

Beraz, $\langle(1,2,0),\ (0,\ 0,1)\rangle$, T-ren oinarria.

(c) $U=\left\{\left(x,y,z,t\right)\in\mathbb{R}^4\mid x-z+t=0,\ x+y-t=0\right\}$, $\begin{cases}x-z+t=0\\ x+y-t=0\end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$,

beraz, $\begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$

(2.EK) $y = -z + 2t$; (1.EK) $x = z - t$. Honela,

$U = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z - t,\ y = -z + 2t \right\} =$

$= \left\{ (z - t, -z + 2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z(1,-1,1,0) + t(-1,2,0,1) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Beraz, $\langle (1, -1,1,0), (-1, 2,0,1) \rangle$ U-ren oinarria.

(ii) Demagun V $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala eta $\langle (2,-1,0), (1,2,1) \rangle$ bere oinarri bat:

(a) Aurkitu V-ren oinarri ortonormal bat.

$\langle (2,-1,0) \mid (1,2,1) \rangle = 0$ denez, $\langle (2,-1,0), (1,2,1) \rangle$ ortogonala da. Beraz, V-ren oinarri ortonormala lortzeko bektore bakoitza bere normarekin zatitzea nahikoa izanen da. Honela, $\left\langle \dfrac{(2,-1,0)}{\sqrt{5}}, \dfrac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} \right\rangle$ V-ren oinarri ortonormala da.

(b) a-ren zein baliotarako izango da $\langle (3,1,1), (1,a,-1) \rangle$ sistema V-ren oinarri bat?

dim(V)=2 denez, $\langle (3,1,1), (1,a,-1) \rangle$ V-ren oinarria izateko hurrengo 3 baldintzak bete behar dira; • $\langle (3,1,1), (1,a,-1) \rangle$ librea; • $(3,1,1) \in V$; • $(1,a,-1) \in V$.

• $\langle (3,1,1), (1,a,-1) \rangle$ librea da, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$=2 bada. BAI.

• $(3,1,1) \in V$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$=2 bada. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ denez, BAI.

• $(1,a, -1) \in V$, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$=2 bada. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

Honela, $\langle (3,1,1), (1,a,-1) \rangle$ sistema V-ren oinarria izanen da $a = -3$ bada.

(iii) Demagun $W = \left\{ x(1,1,2,1) + y(2,3,3,5) + z(2,1,a,1) + t(1,2,1,b) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Kalkulatu W-ren dimentsioa a eta b-ren baliotarako.

$$\dim(W)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&3&3&5\\2&1&a&1\\1&2&1&b\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&3\\0&-1&a-4&-1\\0&1&-1&b-1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&a-5&2\\0&0&0&b-4\end{pmatrix}.$$ Beraz,

$b=4$ bada, $\dim(W)=3 \ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

$b\neq 4$ bada, bi kasu daude: • $a=5$ bada, $\dim(W)=3$; • $a\neq 5$ bada, $\dim(W)=4$.

10 (i) Esan $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ bektore sistema ondoko multzoen oinarria den ala ez (erantzunak azalduz):

(a) $S=\{x(3,1,0)+y(0,0,1)+z(1,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

(b) $T=\{(a,-2a,-a)\mid a\in\mathbb{R})\}$.

(c) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=1\}$.

(d) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\rangle=0\}$, $\boldsymbol{v}=(1,-3,1)$ izanik.

(ii) Biz $W=\{x(1,1,-1,0)+y(2,1,0,-1)+z(1,2,-1,a)+t(0,1,-2,3)\mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}$. Kalkulatu W-ren dimentsioa a-ren balio desberdinentzako.

(iii) Kalkulatu $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x+y-z=0, x-2y-z+t=0\}$ multzoaren oinarri bat.

EBAZPENA:

(i) $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ sistema librea denez, $\dim(\{x(1,0,-1)+y(2,1,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\})=2$.

(a) $S=\{x(3,1,0)+y(0,0,1)+z(1,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$. $\mathrm{r}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=3$ denez, sistema librea da eta dim(S)=3. Beraz, $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ ezin da S-ren oinarria izan.

(b) $T=\{(a,-2a,-a)\mid a\in\mathbb{R})\}=\{a(1,-2,-1)\mid a\in\mathbb{R}\}$, hau da, dim($T$)=1. Beraz, $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ ezin da T-ren oinarria izan.

(c) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=1\}$. (0,0,0)$\notin U$ eta ondorioz U ez da espazio bektoriala (barietate lineala izango da). Beraz, U-k ez dauka oinarririk.

(d) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{v}\rangle=0\}$, $\boldsymbol{v}=(1,-3,1)$ izanik.

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z)\mid(1,-3,1)\rangle=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x-3y+z=0\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x=3y-z\}=\{(3y-z,y,z):y,z\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{y(3,1,0)+z(-1,0,1):y,z\in\mathbb{R}\}.$$

$(1,0,-1)\in V$, $(2,1,1)\in V$, $\langle(1,0,-1),(2,1,1)\rangle$ librea da eta dim(V)=2, beraz,

$\langle(1,0,-1),\ (2,1,1)\rangle$, V-ren oinarria da.

(ii) Biz $W=\{x(1,1,-1,0)+y(2,1,0,-1)+z(1,2,-1,a)+t(0,1,-2,3)\mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$, $a\in\mathbb{R}$.

Kalkulatu W-ren dimentsioa a-ren balio desberdinentzako.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&2\\-1&0&-2&-1\\0&-1&3&a\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&2&-2&0\\0&-1&3&a\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&0&2\\0&0&2&a-1\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&2&a-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=4.$$

Beraz, dim(W)= 4 $\forall a\in\mathbb{R}$.

(iii) $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x+y-z=0;\ x-2y-z+t=0\}$. $\begin{cases}x+y-z=0\\x-2y-z+t=0\end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz, $X=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x=z-y, t=3y\}=$

$=\{(z-y,y,z,3y)\mid \text{y,z}\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,0,3)+z(1,0,1,0)\mid \text{y,z}\in\mathbb{R}\}$.

Honela, $\langle(-1,1,0,3),(1,0,1,0)\rangle$ X-en oinarria da.

11 Demagun $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\right\}$ eta $B=\left\{x(0,1,3)+y(1,1,3)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ multzoak.

(a) $\langle(4,1,2),\ (1,1,1)\rangle$ *A*-ren oinarria al da?

(b) $\langle(-2,1,3),\ (1,2,3)\rangle$ *B*-ren oinarria al da?

(c) Aurkitu *B*-ren oinarri ortonormal bat.

(d) *A*=*B* al da?

(e) Aurkitu $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore, $\boldsymbol{u}$ eta $\boldsymbol{v}$, non $\dim\left(\left\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{u}\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\right)=2$

eta $\dim\left(\left\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{v}\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\right)=3$ diren.

<u>EBAZPENA:</u>

Demagun $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\right\}$ eta $B=\left\{x(0,1,3)+y(1,1,3)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ multzoak.

(a) $\langle(4,1,2),\ (1,1,1)\rangle$ *A*-ren oinarria al da? BAI

Lau gauza ikusi behar dira: • $\langle(4,1,2),\ (1,1,1)\rangle$ librea; • dim(*A*)=2; • $(4,1,2)\in A$; • $(1,1,1)\in A$.

- $\langle(4,1,2),\ (1,1,1)\rangle$ librea, $(4,1,2)\neq a(1,1,1)$ baita.
- $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-2y+3z\}=$

  $=\left\{(-2y+3z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y(-2,1,0)+z(3,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}.$

  Beraz, dim(*A*)=2.
- $(4,1,2)\in A$ betetzen da, $x+2y-3z=0$ ekuazioa baieztatzen duelako $(4+2-6=0)$
- $(1,1,1)\in A$ betetzen da, $x+2y-3z=0$ ekuazioa baieztatzen duelako $(1+2-3=0)$

(b) $\langle(-2,1,3),\ (1,2,3)\rangle$ *B*-ren oinarria al da? EZ

Lau gauza ikusi behar dira: • $\langle(-2,1,3),(1,2,3)\rangle$ librea; • dim(*B*)=2; • $(-2,1,3)\in B$;

• $(1,2,3)\in B$.

- $\langle(-2,1,3),\ (1,2,3)\rangle$ librea da $(-2,1,3)\neq a(1,2,3)\rangle$ baita.
- dim(*B*)=dim($\langle(0,1,3),\ (1,1,3)\rangle$)=2.
- $(-2,1,3)\in B$, betetzen da, $\begin{vmatrix}0&1&3\\1&1&3\\-2&1&3\end{vmatrix}=0$ baita.

- $(1,2,3)\notin B$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ baita.

(c) Aurkitu B-ren oinarri ortonormal bat.

$B=\langle(0,1,3),(1,1,3)\rangle$ denez, $\langle(0,1,3),(1,1,3)\rangle$ B-ren oinarria da. Bere oinarri ortonormala lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{(0,1,3)}{\sqrt{0^2+1^2+3^2}} = \frac{(0,1,3)}{\sqrt{10}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 | \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1\|} = \frac{(1,1,3) - \left\langle (1,1,3) \middle| \frac{(0,1,3)}{\sqrt{10}} \right\rangle \frac{(0,1,3)}{\sqrt{10}}}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(1,1,3) - \frac{10}{\sqrt{10}} \frac{(0,1,3)}{\sqrt{10}}}{\text{goikoaren norma}} =$$

$$= \frac{(1,1,3) - \frac{10}{10}(0,1,3)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(1,1,3)-(0,1,3)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = (1,0,0).$$

Beraz, $\left\langle \frac{(0,1,3)}{\sqrt{10}}, (1,0,0) \right\rangle$ B-ren oinarri ortonormala.

(d) A=B al da? EZ

Bi baldintza bete beharko lirateke: (1) dim(A)=dim(B)=2 (betetzen da) eta (2) A-ren oinarrian dauden bektoreak B multzoan egotea edo B-ren oinarrian dauden bektoreak A multzoan egotea. Kasu honetan $(0,1,3)\notin A$, $x+2y-3z=0$ ekuazioa baieztatzen ez duelako ($0+3-9\neq 0$ baita). Beraz, $A\neq B$.

(e) Aurkitu $\mathbb{R}^3$-ko bi bektore, $\boldsymbol{u}$ eta $\boldsymbol{v}$, non $\dim\left(\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{u} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}\right)=2$ eta $\dim\left(\{x(0,1,3)+y(1,1,3)+z\boldsymbol{v} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}\right)=3$ diren.

$\dim\left(\{x(0,1,3)+y(1,1,3) \mid x,y\in\mathbb{R}\}\right)=2$ denez,

adibidez $\boldsymbol{u}=(1,2,6)$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$ baita eta $\boldsymbol{v}=(0,0,1)$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\neq 0$ baita.

12 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0, ax+by+z=c\}$ multzoa hartuz, $a,b,c\in\mathbb{R}$,

(a) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non A multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala den.

(b) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non $A=\varnothing$ den.

(c) a=1, b=0 eta c=0 badira:

(i) Aurkitu A-ren bi oinarri, haietako bat ortonormala.

(ii) Kalkulatu $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle = 0 \ \forall \boldsymbol{y}\in A\}$ multzoaren oinarri bat.

<u>EBAZPENA:</u>

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0, ax+by+z=c\}$ multzoa hartuz, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non A multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala den.

A, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ ax+by+z=c \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Matrizialki, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & b & 1 & c \end{array}\right)$.

Soluzioa espazio bektoriala izateko sistema homogenoa izan behar da, hots, c=0. Gainera, dim(A)=$3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}=1 \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}=2$. Eta hau gertatzeko, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}\neq 0$ edo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ edo $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ izan behar dira. Honela, A multzoa 1 dimentsioko $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala izateko: c=0 eta [$b\neq 2a$ edo $a\neq 1$ edo $b\neq 2$].

(b) Aurkitu a,b eta c-ren balioak non $A=\varnothing$ den.

$A=\varnothing \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}=1\neq 2=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & b & 1 & c \end{array}\right)$. Eta hau gertatzeko, a=1, b=2 eta $c\neq 0$.

(c) a=1, b=0 eta c=0 badira:

(i) Aurkitu A-ren bi oinarri, haietako bat ortonormala.

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0, x+z=0\}$. $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa da. Matrizialki, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$, hots, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2y=0 \end{cases}$. Honela, $y=0$ eta $z=-x$.

$\mathrm{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0, z=-x\}=\{(x,0,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

A-ren oinarri bat: $\langle(1,\ 0,\ -1)\rangle$. *A*-ren oinarri ortonormal bat: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\rangle$.

(ii) Kalkulatu $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle=0\ \forall \boldsymbol{y}\in A\}$ multzoaren oinarri bat.

$\langle(1, 0, -1)\rangle$ *A*-ren oinarria denez,

$$B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}\rangle=0\ \forall \boldsymbol{y}\in A\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (1,\ 0,\ -1)\rangle=0\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x\}=\{(x,y,x) : x\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{x(1,0,1)+y(0,1,0) \mid x,y\in\mathbb{R}\}.$$

B-ren oinarri bat: $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle$.

13 Bira $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (1,-2,1)\rangle =0\}$ eta $T=\{(2x+y,\ y+z,\ x+y+z) \mid x,y,z\in \mathbb{R}\}$.

(a) Kalkulatu S eta T-ren oinarri bana.

(b) $(2,1,0)\in S$? $(2,1,0)\in T$?

EBAZPENA:

(a) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (1,-2,1)\rangle =0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x-2y+z=0\} =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x=2y-z\} = \{(2y-z,\ y,\ z)\ :\ y, z\in\mathbb{R}\} =$

$=\{y(2,1,0) + z(-1,0,1)\ :\ y, z\in\mathbb{R}\}$.

S-ren sistema sortzailea: $\langle (2,1,0), (-1,0,1)\rangle$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2$ denez, $\langle (2,1,0), (-1,0,1)\rangle$ librea da, beraz,

S-ren oinarria: $\langle (2,1,0), (-1,0,1)\rangle$.

$T = \{(2x+y,\ y+z,\ x+y+z) \mid x, y, z\in\mathbb{R}\} = \{ x(2,0,1) + y(1,1,1) + z(0,1,1) \mid y, z\in\mathbb{R}\}$.

T-ren sistema sortzailea: $\langle (2,0,1), (1,1,1), (0,1,1)\rangle$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}= 3$ denez, $\langle (2,0,1), (1,1,1), (0,1,1)\rangle$ librea da, beraz,

T-ren oinarria: $\langle (2,0,1), (1,1,1), (0,1,1)\rangle$.

(b) $(2,1,0)\in S$?

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ denez, $(2,1,0)\in S$.

$(2,1,0)\in T$?

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$ denez, $(2,1,0)\in T$.

14 Demangun S={$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ | $x=y+2z$}.

(a) Kalkulatu S-ren dimentsioa eta oinarri ortonormal bat.

(b) a-ren zein baliotarako beteko da $(a^2,a,1)\in S$?

(c) a-ren zein baliotarako izango da $\langle(a^2,a,1), (-1,1,-1)\rangle$ S-ren oinarri bat.

(d) a-ren zein baliotarako izango da $\langle(a^2,a,1), (-1,1,-1), (1,0,0)\rangle$ sistema $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat?

EBAZPENA:

(a) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y+2z\right\}=\left\{(y+2z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y(1,1,0)+z(2,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

Beraz, $\langle(1,1,0),(2,0,1)\rangle$ sistema S-ren sistema sortzailea da.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=2$ denez, $\langle(1,1,0),(2,0,1)\rangle$ sistema librea da.

$\langle(1,1,0),(2,0,1)\rangle$ sistema S-ren sistema sortzaile eta librea denez, S-ren oinarria izango da eta ondorioz $\dim(S)=2$ izango da.

S-ren oinarri ortonormala lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2\mid\boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2\mid\boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1\|}=\frac{(2,0,1)-\left\langle(2,0,1)\left|\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}\right.\right\rangle\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|}=\frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$$

Beraz, $\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\rangle$ S-ren oinarri ortonormal bat da.

(b) $(a^2,a,1)\in S \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix}1&2&a^2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=2\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&2&a^2\\1&0&1\\0&1&2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow a=2, a=-1$

(c) $(a^2,a,1)\in S\Leftrightarrow a=2, a=-1.$

$$a=2 \text{ bada, orduan } \mathrm{r}\begin{pmatrix} a^2 & -1 \\ a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$a=-1 \text{ bada, orduan } \mathrm{r}\begin{pmatrix} a^2 & -1 \\ a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Beraz, $\left\langle (a^2, a, 1), (\text{-}1, 1, -1) \right\rangle$ S-ren oinarria $\Leftrightarrow a = 2$.

(d) $\left\langle (a^2, a, 1), (\text{-}1, 1, -1), (1, 0, 0) \right\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} a^2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$$

15 Demagun $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x-y+z=0\right\}$.

(i) S multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, kalkulatu bere oinarri bat eta dimentsioa.

(ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left(1,a,0\right)\notin S$?

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left\langle\left(1,1,b\right),\left(a,5,b\right)\right\rangle$ bektore sistema S-ren oinarria dela?

(iv) $H=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid y=z\right\}$ bada, kalkulatu $S\cap H$ -ren oinarri ortonormal bat.

<u>EBAZPENA:</u>

Demagun $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x-y+z=0\right\}$.

(i) S multzoa $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da? Hala bada, kalkulatu bere oinarri bat eta dimentsioa.

$$S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid -5x-y+z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=5x+y\right\}=\left\{(x,y,5x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{x(1,0,5)+y(0,1,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

(1,0,5) eta (0,1,1) bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa denez, S $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da. Bere sistema sortzailea ⟨(1,0,5), (0,1,1)⟩ librea denez, S-ren oinarria izango da eta ondorioz $\dim(S)=2$.

(ii) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left(1,a,0\right)\notin S$?

S-n egoteko $-5x-y+z=0$ baldintza baieztatu behar da. $(1,a,0)$ kasuan, $-5-a=0 \Leftrightarrow a=-5$. Beraz, $(1,a,0)\notin S \Leftrightarrow a\neq -5$

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $\left\langle\left(1,1,b\right),\left(a,5,b\right)\right\rangle$ bektore sistema S-ren oinarria dela?

$\dim(S)=2$ denez, S-ren oinarria izateko S-ren bi bektore linealki independiente behar ditugu. Eta S-n egoteko $-5x-y+z=0$ baldintza baieztatu behar da.

$(1,1,b)\in S \Leftrightarrow -5-1+b=0 \Leftrightarrow b=6$

$(a,5,b)\in S \Leftrightarrow -5a-5+b=0 \Leftrightarrow 5a=-5+b=-5+6=1$

Beraz, $\langle(1,1,b),(a,5,b)\rangle$ bektore sistema *S*-ren oinarria $\Leftrightarrow$ $a = 1/5$ eta $b = 6$.

(iv) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ bada, kalkulatu $S \cap H$ -ren oinarri ortonormal bat.

$$S \cap H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \in S \text{ eta } (x,y,z) \in H\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x - y + z = 0, y = z\},$$

$\begin{cases} -5x - y + z = 0 \\ \quad y = z \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz,

[2. EK] $y = z$

[1. EK] $-5x - y + z = -5x - z + z = -5x = 0 \rightarrow x = 0$

Beraz, $S \cap H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = z\} = \{(0,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$S\cap H$-ren oinarria: $\langle(0,1,1)\rangle$. $S\cap H$-ren oinarri ortonormala: $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \right\rangle$.

16 Bira $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\right\}$, $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\right\}$ eta $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+3y-2z=0\right\}$ multzoak.

(a) Frogatu $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in A$ badira orduan $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$ baieztatzen dela.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

(c) Aurkitu $A\cap B$-ren bi oinarri.

(d) Aurkitu A-ri ortogonalak diren bektore guztien multzoaren oinarri bat.

(e) Aurkitu a-ren balioak non $(2,1,a)\in A\cap C$ den.

EBAZPENA:

Bira $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\right\}$, $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z=0\right\}$ eta $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+3y-2z=0\right\}$ multzoak.

(a) Frogatu $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in A$ badira orduan $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$ baieztatzen dela.

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-x-2y\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,-x-2y) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in A$ badira, orduan $\boldsymbol{x}=(x,y,-x-2y)$ eta $\boldsymbol{y}=(x',y',-x'-2y')$.

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x,y,-x-2y)+(x',y',-x'-2y')=(x+x',y+y',-x-x'-2y-2y')$$

Eta 3. osagaia $-x-x'-2y-2y'=-(x+x')-2(y+y')$ denez, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$ baieztatzen da.

(b) Aurkitu A-ren oinarri ortonormal bat.

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-x-2y\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,-x-2y) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,0,-1)+y(0,1,-2) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\langle(1,0,-1), (0,1,-2)\rangle$ A-ren sistema sortzaile librea denez, A-ren oinarria da.

A-ren oinarri ortonormala lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatuko dugu.

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{x}_2-\langle\boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{y}_1\rangle\boldsymbol{y}_1\|}=\frac{(0,1,-2)-\left\langle(0,1,-2) \mid \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$= \frac{(0,1,-2)-\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(0,1,-2)-(1,0,-1)}{\text{goikoaren norma}} = \frac{(-1,1,-1)}{\|(-1,1,-1)\|} = \frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}}.$$

Honela, $\left\langle \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}} \right\rangle$ *A*-ren oinarri ortonormala.

(c) Aurkitu $A \cap B$-ren bi oinarri.

$A \cap B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \in A \ \text{ eta } \ \boldsymbol{x} \in B\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0,\ 2x+3y+4z=0\}$, hau da, $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz (Gauss-en metodoa aplikatuz):

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+2y+z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases}$$

[2. EK] $y = 2z$.

[1. EK] $x = -2y - z = -2(2z) - z = -5z$.

Beraz, $A \cap B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=-5z, y=2z\} =$

$$= \{(-5z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-5,2,1) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Honela, $A \cap B$-ren bi oinarri: $\langle(-5, 2, 1)\rangle$ eta $\langle(-10, 4, 2)\rangle$.

(d) *A*-ri ortogonalak diren bektore guztien multzoa, *A*-ren oinarriko bektoreei ortogonalak diren bektore guztien multzoa da, hots,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z) \mid (-5,2,1) \rangle = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5x+2y+z=0\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5x-2y\} = \{(x, y, 5x-2y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1,0,5) + y(0,1,-2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Beraz, *S*-ren oinarria: $\langle(1,0,5), (0,1,-2)\rangle$.

(e) Aurkitu *a*-ren balioak non $(2,1,a) \in A \cap C$ den.

$(2,1,a) \in A \cap C \Leftrightarrow (2,1,a) \in A$ eta $(2,1,a) \in C$.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$ eta $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y-2z=0\}$ direnez,

- $(2,1,a) \in A \Leftrightarrow x+2y+z = 0$ ekuazioa baieztatzen badu: $2 + 2 + a = 4 + a = 0 \Leftrightarrow$ $a = -4$.
- $(2,1,a) \in C \Leftrightarrow x+3y-2 = 0$ ekuazioa baieztatzen badu: $2 + 3 - 2a = 5 - 2a = 0 \Leftrightarrow$

$a = 5/2$.

Beraz, ez dago bi baldintzak baiezztatzen dituen a-ren baliorik, hau da, ez dago a-ren baliorik non $(2,1,a) \in A \cap C$ den.

17 Demagun $\langle (1,1,1),(1,-1,0)\rangle$, A azpiespazio bektorialaren oinarria.

(i) Aurki ezazu A–ren oinarri ortonormal bat.

(ii) Aurki ezazu, posiblea bada, $\boldsymbol{u}$ bektorea non $\langle (0,1,1),\boldsymbol{u}\rangle$ A–ren oinarria den.

(iii) Aurki ezazu, posiblea bada, $\boldsymbol{v}$ bektorea non $\langle (3,1,2),\boldsymbol{v}\rangle$ A–ren oinarria den.

<u>EBAZPENA:</u>

(i) $\langle (1,1,1),(1,-1,0)\rangle$ bektore sistema ortogonala da, $\langle (1,1,1)|(1,-1,0)\rangle = 0$ baita, beraz, bektore bakoitza bere normarekin zatituz, $\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\rangle$ sistema A-ren oinarri ortonormala da.

(ii) Lehenengoz ikusi behar dugu (0,1,1) bektorea A-rena den edo ez:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

hau da, (0,1,1) bektorea ez da A-rena, beraz, $\langle (0,1,1),\boldsymbol{u}\rangle$ A-ren oinarria den $\boldsymbol{u}$ bektorea ez da existitzen.

(iii) Ikus dezagun (3,1,2) bektorea A-rena den ala ez:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

hau da, (3,1,2) A-rena denez, $\boldsymbol{v}$ (3,1,2)-ren konbinazio lineala ez den A-ren edozein bektore izan daiteke, adibidez, (1,1,1), $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ baita. Horrela, $\langle (3,1,2),(1,1,1)\rangle$ A-ren oinarria da.

18 Demagun $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=z\}$, $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\}$ eta $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0\right\}$.

(i) Kalkula itzazu azpiespazio bektorial hauen dimentsioa eta oinarri bat.

(ii) $T\subset V$ beteko al da? Eta $T\subset S$?

(iii) $a\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $(a,a,a)\in V$?

EBAZPENA:

(i) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=z\right\}=\left\{(x,y,x+y) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x(1,0,1)+y(0,1,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Eta $\left\langle(1,0,1),(0,1,1)\right\rangle$ sistema *S*-ren sortzailea da; librea ere, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=2$ baita, beraz, *S*-ren oinarria dugu eta bere dimentsioa 2 da.

$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\right\}=\left\{(0,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(0,0,1) \mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

Eta $\left\langle(0,0,1)\right\rangle$ sistema *T*-ren sortzailea da; librea ere, beraz, *T*-ren oinarria dugu non bere dimentsioa 1 den.

$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0\right\}=\left\{(x,x,z) \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,1,0)+z(0,0,1) \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$.

Eta $\left\langle(1,1,0),(0,0,1)\right\rangle$ sistema *V*-ren sortzailea da; librea ere, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=2$ baita, beraz, *V*-ren oinarria dugu non bere dimentsioa 2 den.

(ii) $T\subset V$? Horretarako, *T*-ren oinarriko bektorea *V*-ren oinarriko bektoreen konbinazio lineala izan beharko da eta horrela da (0,0,1) bektorea *V*-rena delako. Orduan, $T\subset V$.

$T\subset S$? Horretarako, *T*-ren oinarriko bektoreaa *S*-renaa izan beharko da:

$(0,0,1)=a(1,0,1)+b(0,1,1)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\a+b=1\end{cases}$ eta ezinezkoa denez, $T\not\subset S$.

(iii) (a,a,a) bektorea V-n egoteko lehen eta bigarren osagaiak berdinak izan beharko dira, eta horrela da a-ren edozein baliotarako.

19 (a) Esan $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ bektore sistema azpiespazio bektorial hauen oinarria den ala ez eta zergatik:

(i) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-z=0,\ y+z-x=0\}$.

(ii) $B=\{(x+z,-x-y,2x+y+z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

(b) Aurreko apartatuko azpiespazio bektorialak kontutan hartuta:

(i) Kalkula ezazu A-ren oinarri ortonormala.

(ii) Kalkula ezazu A-ren edozein bektoreri ortogonala zaion $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorea.

(iii) $A\subset B$ betetzen al da?

EBAZPENA:

(a) (i) $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ bektore sistema A-ren oinarria izateko, dim(A)=2 izan behar da, bi bektoreak A-n egon behar dira eta linealki independenteak izan behar dira:

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-z=0,\ y+z-x=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z,\ y=0\}=$

$=\{(x,0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)\mid x\in\mathbb{R}\}$. Beraz, $\langle(1,0,1)\rangle$ A-ren oinarria da, hau da, dim(A)=1.

Orduan, $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ ezin da izan A-ren oinarria, bi bektore independentez osatua dagoelako.

(ii) $B=\{(x+z,-x-y,2x+y+z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x(1,-1,2)+y(0,-1,1)+z(1,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle(1,-1,2),(0,-1,1),(1,0,1)\rangle$ B-ren sistema sortzilea izango da. B-ren oinarria izango da 3 bektoreak linealki independenteak badira, baina $\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=2$ denez, adibidez bigarren bektorea kenduz, $\langle(1,-1,2),(1,0,1)\rangle$ B-ren oinarria da eta dim(B)=2.

(b) (i) $\langle(1,0,1)\rangle$ A-ren oinarria denez, $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle$ A-ren oinarri ortonormala da.

(ii) (x,y,z) bektorea A-ri ortogonala da A-ren oinarriaren bektoreei ortogonala bada: $\langle(1,0,1)|(x,y,z)\rangle=0\Rightarrow x=-z$ eta y edozein , adibidez, (0,1,0) bektorea.

(0,0,0) bektorea ere edozeini ortonogonala zaio.

(iii) $A \subset B$ beteko da A-ren oinarriaren bektoreak B multzoan badaude. A-ren oinarriaren (1,0,1) bektorea B-ren oinarrian dago, $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ baita. Beraz, $A \subset B$ da.

20 Demagun $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left\langle (x,y,z)\,|\,(1,-1,2)\right\rangle = 0\right\}$ azpiespazio bektoriala.

(i) Aurki itzazu *S*-ko bi bektore.

(ii) *a*-ren zein baliotarako beteko da $(1,-3,a)\in S$?

(iii) Eman itzazu *S*-ren dimentsioa eta oinarri bat.

(iv) Bektore sistema hauetatik esan zein den *S*-ren oinarria eta zein ez (erantzuna ondo azalduz). Zein da *S*-ren oinarri ortonormala?

$$\left\langle (1,1,0)\right\rangle; \quad \left\langle (0,2,1),(2,0,-1)\right\rangle; \quad \left\langle (1,-1,-1),(-1,1,0)\right\rangle;$$

$$\left\langle \left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle; \quad \left\langle (1,1,0),(2,0,-1),(0,2,1)\right\rangle.$$

(v) Demagun $T=\{(x+2y+z,3x+2y+z,x)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. Betetzen al da $T\subset S$?

EBAZPENA:

(i) *S*-ko edozein bektorek $x-y+2z=0$ ekuazioa betetzen du. Adibidez, (1,1,0) eta (2,2,0).

(ii) Horretarako, $\left\langle (1,-3,a)\middle|(1,-1,2)\right\rangle = 1+3+2a=0 \Rightarrow a=-2.$

(iii) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-y+2z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=y-2z\}=$

$=\{(y-2z,y,z)\,|\,y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(1,1,0)+z(-2,0,1)\,|\,y,z\in\mathbb{R}\}.$

Beraz, $\left\langle (1,1,0),(-2,0,1)\right\rangle$ sistema *S*-ren sortzailea da; eta librea denez, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$ baita,

S-ren oinarria dugu, bere dimentsioa 2 izanik.

(iv) Bektore sistema bat *S*-ren oinarria izateko, *S*-ko bi bektore linealki independenterekin osatua egon behar du:

- $\left\langle (1,1,0)\right\rangle$ ezin da izan, bektore batez osatua dagoelako.
- $\left\langle (0,2,1),(2,0,-1)\right\rangle$ sistema: $(0,2,1),(2,0,-1)\in S$?

$\langle (0,2,1) \mid (1,-1,2) \rangle = 0$ eta $\langle (2,0,-1) \mid (1,-1,2) \rangle = 0$ eta gainera $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ da,

beraz, sistema hau *S*-ren oinarria da. Ez da ortogonala, $\langle (0,2,1) \mid (2,0,-1) \rangle \neq 0$ delako.

- $\langle (1,-1,-1),(-1,1,0) \rangle$ sistema: $(1,-1,-1),(-1,1,0) \in S$? $\langle (1,-1,-1) \mid (1,-1,2) \rangle = 0$ baina $\langle (-1,1,0) \mid (1,-1,2) \rangle = 2 \neq 0$, beraz, sistema hau ez da *S*-ren oinarria.
- $\left\langle \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle$ sistemaren bektoreak *S*-koak dira?

  $\left\langle \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \middle| (1,-1,2) \right\rangle = 0$ eta $\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \middle| (1,-1,2) \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{6}} \neq 0$. Beraz, sistema hau ez da *S*-ren oinarria.
- $\langle (1,1,0),(2,0,-1),(0,2,1) \rangle$ ezin da izan, 3 bektorez osatua dagoelako.

(v) $T = \{(x+2y+z, 3x+2y+z, x) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,3,1) + y(2,2,0) + z(1,1,0) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

Beraz $\langle (1,3,1),(2,2,0),(1,1,0) \rangle$ sistema *T*-ren sortzailea da baina ez da librea, (2,2,0)=2(1,1,0) baita, $\langle (1,3,1),(1,1,0) \rangle$ ordea librea da eta gainera *T*-ren sortzailea da. Azter dezagun *T*-ren oinarri honen bektoreak *S*-koak diren: $\langle (1,3,1) | (1,-1,2) \rangle = 0$ eta $\langle (1,1,0) | (1,-1,2) \rangle = 0$ betetzen denez, $T \subset S$ da.

APLIKAZIO LINEALAK

21 (i) Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non :

$$f\left(0,1,0\right)=\left(1,1,-1\right)\ ;\ f\left(0,0,2\right)=\left(2,0,2\right)\ ;\ f\left(1,1,1\right)=\left(2,1,-1\right)$$

betetzen diren. Kalkulatu f-ri elkartutako matrizea, hots, $M(f)$.

(ii) Biz $f(x,y,z)=(x+y+z,ax+y,-x-y+z)$ aplikazio lineala, $a\in\mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) a=1 bada, eman $\mathrm{Im}(f)$ multzoaren oinarri bat eta dimentsioa.

(c) a-ren zein baliotarako beteko da $\left(1,0,-1\right)\in\ker(f)$?

(d) Existituko al da a-ren balioren bat non $\ker(f)=\varnothing$ den ?

EBAZPENA:

(i) Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non :

$$f\left(0,1,0\right)=\left(1,1,-1\right)\ ;\ f\left(0,0,2\right)=\left(2,0,2\right)\ ;\ f\left(1,1,1\right)=\left(2,1,-1\right)\ .$$

$M(f)$ kalkulatzeko, $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ eta $f(0,0,1)$ lortu behar dira.

$f(0,1,0)$ ezagutzen dugu.

f aplikazio lineala denez, $f(0,0,1)=\dfrac{1}{2}f(0,0,2)=(1,0,1)$ eta

$f(1,0,0)=f(1,1,1)-f(0,1,0)-f(0,0,1)=(2,1,-1)-(1,1,-1)-(1,0,1)=(0,0,-1)$.

Beraz, $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Biz $f(x,y,z)=(x+y+z,ax+y,-x-y+z)$ aplikazio lineala, $a\in\mathbb{R}$.

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) f isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $\left|M(f)\right|=-2(a-1)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a\neq1$.

(b) a=1 bada,

$\mathrm{Im}(f)=\left\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(x+y+z,x+y,-x-y+z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x(1,1,-1)+y(1,1,-1)+z(1,0,1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x(1,1,-1)+y(1,0,1)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$

$\mathrm{Im}(f)$ -ren oinarria: $\langle(1,1,-1),(1,0,1)\rangle$. $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$.

(c) $(1,0,-1)\in\ker(f)\Leftrightarrow f(1,0,-1)=(0,0,0)$. Baina $f(1,0,-1)=(0,a,-2)\neq(0,0,0)$. Beraz, ezinezkoa da.

(d) Existituko al da a-ren balioren bat non $\ker(f)=\varnothing$ den? EZ, f aplikazio lineala izateagatik $f(0,0,0)=(0,0,0)$ denez, $(0,0,0)\in\ker(f)\neq\varnothing$.

22 (i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ isomorfismoa bada, kalkulatu $\mathrm{r}(M(f^{-1}))$, $\ker(f)$ eta $\ker(f\circ f)$.

(ii) Demagun $f\left(x,y,z\right)=\left(x-y+2z,y+z,x+y+az\right)$ aplikazio lineala:

(a) a-ren zein baliotarako beteko da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,2)\right\}=\varnothing$?

(b) a-ren zein baliotarako beteko da $f(0,1,2)=(3,3,0)$?

(c) a=4 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(4,-1,2)\right\}$.

EBAZPENA:

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ isomorfismoa bada, $\left|M\left(f\right)\right|\neq 0$ izanen da, hots, $\mathrm{r}\left(M\left(f\right)\right)=3$. Beraz, f eta $M\left(f\right)$ alderanzkarriak. Beraz, $\left|M\left(f^{-1}\right)\right|\neq 0$ eta ondorioz, $\mathrm{r}\left(M\left(f^{-1}\right)\right)=3$.

dim(ker(f))=3 − r($M\left(f\right)$)=0, beraz, ker(f) ={(0,0,0)}.

$M(f\circ f)=M(f)M(f)$ denez, f alderanzkarria bada $(f\circ f)$ ere alderanzkarria izanen da, hots, r($M(f\circ f)$)=3. Honela, dim(ker$(f\circ f)$)=3 − r($M(f\circ f)$)=0, beraz, ker$(f\circ f)$={(0,0,0)}.

(ii) $f\left(x,y,z\right)=\left(x-y+2z,y+z,x+y+az\right)$ aplikazio lineala hartuz,

(a) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,2)\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ y+z=1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right\}$ ekuazio linealetako sistemaren soluzio multzoa da. Edo era matrizialean, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Laburtuz, $M\left(f\right)X=B$.

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,2)\right\}=\varnothing$ izanen da $M\left(f\right)X=B$ sistema bateraezina bada, hots, r($M(f)$)≠r($M(f):B$) bada.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a-4$ denez, $a\neq 4$ bada, orduan r($M(f)$)=3 da eta a=4 bada, orduan r($M(f)$)=2.

$a\neq 4$ bada, orduan r($M(f)$)=3=r($M(f):B$) da, beraz, sistema bateragarria da.

a=4 bada r($M(f)$)=2.

$$\mathrm{r}(M(f):B)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 2\end{array}\right)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\end{array}\right)=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=2.$$

Beraz, $\forall a\in\mathbb{R}$, $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,2)\right\}\neq\varnothing$.

(b) $f(0,1,2)=(3,3,0) \Leftrightarrow f(0,1,2)=(3,3,1+2a)=(3,3,0) \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

Gainera, $a=-\frac{1}{2}$ baliorako f isomorfismoa denez,

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,0)\right\}$ puntu bakar bat dela ziurtatua dago.

(c) a=4 bada $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(4,-1,2)\right\}$ $\left.\begin{array}{r}x-y+2z=4\\ y+z=-1\\ x+y+4z=2\end{array}\right\}$ ekuazio

linealetako sistemaren soluzio multzoa da. Matrizialki, $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 4 & 2\end{array}\right)\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2 & -2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Beraz $\left.\begin{array}{r}x-y+2z=4\\ y+z=-1\end{array}\right\}$.

Bigarren ekuazioan y askatuz, $y=-1-z$. Lehen ekuazioan x askatuz, $x=4+y-2z=4+(-1-z)-2z=3-3z$. Beraz,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(4,-1,2)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=3-3z, y=-1-z\right\}=$$

$$=\left\{(3-3z,-1-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=(3,-1,0)+\left\{z(-3,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}.$$

23 Demagun $f(x,y)=(x+y,2x-y)$.

(a) Frogatu f aplikazio lineala dela.

(b) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$ -ren oinarri ortonormal bat.

(c) $g(x,y,z)=(x+y-z\ ,\ y+2z)$ aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $\ker(f\circ g)$.

(d) Kalkulatu f^{-1} alderantzizko aplikazioa.

EBAZPENA:

Demagun $f(x,y)=(x+y,2x-y)$.

(a) Frogatu f aplikazio lineala dela.

f aplikazio lineala $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}\ \begin{cases} f\left((x,y)+(x',y')\right)= f(x,y)+f(x',y') \\ \text{eta } f(\lambda(x,y))=\lambda f(x,y) \end{cases}$$

$$f\left((x,y)+(x',y')\right)= f(x+x',y+y')=\left(x+x'+y+y',2(x+x')-(y+y')\right).$$

$$f(x,y)+f(x',y')=(x+y,2x-y)+(x'+y',2x'-y')=(x+y+x'+y',2x-y+2x'-y').$$

Berdinak direnez, lehen baldintza betetzen da.

$$f\left(\lambda(x,y)\right)= f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x+\lambda y,2\lambda x-\lambda y)=\lambda(x+y,2x-y)=\lambda f(x,y).$$

Bigarren baldintza ere betetzen denez, f aplikazio lineala dela frogatu dugu.

(b) Kalkulatu $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri ortonormal bat.

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x+y,2x-y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=\left\langle(1,2),(1,-1)\right\rangle.$$

Beraz, $\langle(1,2),(1,-1)\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$ -ren oinarria da. Gram-Schmidt-en teorema aplikatuz, $\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2),\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)\right\rangle$ $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarri ortonormala lortzen da.

(c) $g(x,y,z)=(x+y-z\ ,\ y+2z)$ aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $\ker(f\circ g)$.

$\ker(f\circ g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)(x,y,z)=(0,0)\right\}$.

Hau da, $\ker(f\circ g)$ $M(f\circ g)X$=O sistemaren soluzio multzoa da.

$M(f\circ g)=M(f)\ M(g)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$ denez,

$M(f\circ g)X$=O ebatziz,

$\ker(f\circ g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=3z,\ y=-2z\right\}=\left\{(3z,-2z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(3,-2,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

(d) Kalkulatu f^{-1} alderantzizko aplikazioa.

$M(f^{-1})=\left(M(f)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Beraz, $f^{-1}(x,y)=\frac{1}{3}\left(x+y,2x-y\right)$.

24 Bira $f, g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio linealak, $f\left(x,y,z\right)=\left(x+2z, x+y+z, y-z\right)$ eta g hurrengo baldintzak betetzen dituena: $g(1,0,0)=(1,0,0)$, $g(0,1,0)=(1,-1,0)$, $g(0,0,1)=(1,1,1)$.

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) Aurkitu $\mathrm{Im}(f)$-ren sistema sortzaile bat.

(c) Aurkitu $\ker(g\circ f)$ multzoa eta eman bere oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) $f, g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio linealak direnez, isomorfismoak dira $|M(f)|\neq 0$ eta $|M(g)|\neq 0$ badira. $\left|M(f)\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$; $\left|M(g)\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow f$ ez da isomorfismoa eta g bai.

(b) $\mathrm{Im}\left(f\right)=\left\{f\left(x,y,z\right)\mid\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\left(x+2z, x+y+z, y-z\right)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x\left(1,1,0\right)+y\left(0,1,1\right)+z\left(2,1,-1\right)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$

Beraz, adibidez $\langle(1,1,0), (0,1,1),(2,1,-1)\rangle$ Im(f)-ren sistema sortzaile bat da.

(c) Aurkitu $\ker(g\circ f)$ multzoa eta eman bere oinarri bat.

$\ker(g\circ f)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid (g\circ f)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\right\}$ da, hots, $M(g\circ f)X=O$ sistemaren soluzio multzoa.

$$M(g\circ f)=M(g)\,M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$M(g\circ f)X=O$ ebatziz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ mailakatuz,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soluzioa: $y=z$, $x=-2z$. Beraz, $\ker(g\circ f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-2z, y=z\right\}=$

$=\left\{(-2z,z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\} \;=\left\{z(-2,1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}.$

Honela, $\ker(g \circ f)$-ren oinarria: $\langle(-2,1,1)\rangle$.

25 Bira $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x,y)=(ax,\ y,\ b)$ den, $a,b\in\mathbb{R}$, eta $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ondoko aplikazio lineala, $g(x,y,z)=(x-z,\ y-z)$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako izanen da f aplikazio lineala?

(b) Aurkitu $\ker(f\circ g)$-ren oinarri bat eta dimentsioa a=1 eta b=0 direnean.

(c) Kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)(x,y,z)=(0,0,1)\}$ multzoa a=1 eta b=0 direnean.

EBAZPENA:

Bira $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x,y)=(ax,\ y,\ b)$ den, $a,b\in\mathbb{R}$, eta

$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(x-z,\ y-z)$.

(a) a eta b-ren zein baliotarako izango da f aplikazio lineala?

$$f \text{ aplikazio lineala} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\quad f((x,y)+(z,t)) = f(x,y)+f(z,t) \\ (2)\quad f(\lambda(x,y)) = \lambda f(x,y) \end{cases}$$

(1) $f\big((x,y)+(z,t)\big)= f(x+z,y+t)=\big(a(x+ z),y+t,b\big)$

$f(x,y)+f(z,t)=(ax,y,b)+(az,t,b)=\big(a(x+z),y+t,2b\big)$

Beraz, $f\big((x,y)+(z,t)\big)= f(x,y)+f(z,t) \Leftrightarrow b = 2b \Leftrightarrow \underline{b = 0}$.

(2) $f\big(\lambda(x,y)\big)= f(\lambda x,\lambda y)=(a\lambda x,\lambda y,0)$

$\lambda f(x,y) = \lambda\,(ax, y, 0) = (a\lambda x, \lambda y, 0)$. Berdinak dira.

Beraz, f aplikazio lineala $\Leftrightarrow b = 0$.

(b) Aurkitu $\ker(f\circ g)$-ren oinarri bat eta dimentsioa $a = 1$ eta $b = 0$ direnean.

$a = 1$ eta $b = 0$ direnean, $f(x,y)=(x,y,0)$ eta $g(x,y,z)=(x-z,\ y-z)$.

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ eta } M(g)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \text{ direnez, } M(f\circ g)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\ker(f\circ g)$, $M(f\circ g)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzioa da, hots, $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Beraz, $\begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$. Ebatziz, $x=z$ eta $y=z$.

Orduan, $\ker(f\circ g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=z, y=z\right\}=\left\{(z,z,\ z)\,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z(1,1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$.

Hau da, $\langle(1,1,1)\rangle$, $\ker(f\circ g)$-ren oinarria eta $\dim(\ker(f\circ g))=1$.

(c) Kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)(x,y,z)=(0,0,1)\right\}$ multzoa $a=1$ eta $b=0$ direnean.

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)(x,y,z)=(0,0,1)\right\}$ multzoa, $\left(M(f\circ g)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sistemaren

soluzioa da, hots, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, hau da, $\begin{cases} x-z=0 \\ y-z=0 \\ 0=1 \end{cases}$. Eta sistema bateraezina

denez,

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (f\circ g)(x,y,z)=(0,0,1)\right\}=\varnothing$.

26 (a) Biz $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondoko hiru baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala.

(i) $f(1,0,0)=(3,-2,2)$ eta $f(0,1,0)=(-2,2,0)$.

(ii) $M(f)$ matrize simetrikoa da.

(iii) $(2,-2,-1)$ $M(f)$-ren bektore propioa da.

Hau dena kontutan hartuta, kalkulatu $M(f)$.

(b) $g(x,y,z)=(x+2y+z,-x+2z,-x+2y+3z)$ eta $h(x,y)=(2x+5y,\ x+4y)$ aplikazio linealak hartuz, kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,-1,1)\}$ multzoa eta $h^{-1}(x,y)$ aplikazioa.

EBAZPENA:

(a) Biz $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondoko hiru baldintzak betetzen dituen aplikazio lineala.

(i) $f(1,0,0)=(3,-2,2)$ eta $f(0,1,0)=(-2,2,0)$.

(ii) $M(f)$ matrize simetrikoa da.

(iii) $(2,-2,-1)$ $M(f)$-ren bektore propioa da.

$M(f)=\begin{pmatrix} 3 & -2 & a \\ -2 & 2 & b \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$. Simetrikoa denez, a=2, b=0. Beraz, $M(f)=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$(2,-2,-1)$ $M(f)$-ren bektore propioa denez, $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4-c \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $8=2\lambda, -8=-2\lambda,\ 4-c=-\lambda$. Beraz, $\lambda=4$ eta ondorioz, $4-c=-4$, hots, $c=8$.

Honela, f–ren matrize elkartua, $M(f)=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(b) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,-1,1)\right\}$ multzoa $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x+2z=-1 \\ -x+2y+3z=1 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa

da. $(A{:}B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$, hau da, sistema bateragarri

determinatua. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2y+3z=0 \\ -2z=2 \end{cases}$ ebatziz, z=-1, y=3/2 eta x=-1.

Beraz, $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(1,-1,1)\right\}=\{(-1,3/2,-1)\}$.

$h(\mathrm{x},\mathrm{y})=(2x+5y,\ x+4y)$ alderanzkarria da $|M(h)|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$=3≠0 baita.

$(M(h))^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ da, beraz, $(M(h))^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4x-5y \\ -x+2y \end{pmatrix}$

eginez, $h^{-1}(x,y)=\frac{1}{3}(4x-5y,-x+2y)$.

27 Bira $f(x,y)=(ax-y,x+3y,bx)$ eta $g(x,y)=(3x,2x+y)$ bi aplikazio lineal, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non $f(1,1)=(1,4,3)$ den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\dim(\ker(f))=1$ den.

(c) Aurkitu a eta b-ren balioak non $(1,0,0)\in\mathrm{Im}(f)$ den.

(d) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0,1)\}=\varnothing$ den.

(e) a=0 eta b=1 badira, kalkulatu $(f\circ g)(1,-1)$ eta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (f\circ g)(x,y)=(-1,3,0)\}$.

EBAZPENA:

(a) $f(1,1)=(a-1,4,b)=(1,4,3) \Leftrightarrow a-1=1$ eta $b=3 \Leftrightarrow a=2$ eta $b=3$.

(b) $\ker(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (ax-y,x+3y,\ bx)=(0,0)\}$.

Beraz, $\begin{cases} ax-y=0 \\ x+3y=0 \\ bx=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Sistema matrizialki: $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Honela, $\dim(\ker(f))=1 \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}=1$ bada $\Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{3}$ eta b=0 badira.

(c) $\mathrm{Im}(f)=\{f(x,y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\{(ax-y,\ x+3y,\ bx) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}=$

$=\{x(a,1,b)+y(-1,3,0) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, $(1,0,0)\in\mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $b\neq 0$ bada, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}=2$ eta $\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$, beraz, $(1,0,0)\notin\mathrm{Im}(f)$.

- $b=0$ bada, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$.

b=0 bada, $\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$=1 $a=\dfrac{-1}{3}$ bada, eta $\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$=2 $a\neq\dfrac{-1}{3}$ bada.

Beraz, (1,0,0)$\in$Im(f) $\Leftrightarrow$ $a\neq\dfrac{-1}{3}$ eta b=0 badira.

(d) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0,1)\right\}=\varnothing \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$ bateraezina bada, hots,

$\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\neq\text{r}\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$ bada.

- $a\neq\dfrac{-1}{3}$ bada, $\text{r}\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$=3$\neq$$\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
- $a=\dfrac{-1}{3}$ bada, $\text{r}\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array}\right)$=2.

$a=\dfrac{-1}{3}$ bada, $\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$=1 b=0 bada eta $\text{r}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$=2 $b\neq 0$ bada.

Beraz, $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=(0,0,1)\right\}=\varnothing$ $\Leftrightarrow$ [$a\neq\dfrac{-1}{3}$, $\forall b\in\mathbb{R}$] edo [$a=\dfrac{-1}{3}$ eta b=0] kasuetan.

(e) $M(f\circ g)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, beraz, $(f\circ g)(1,-1)=(-1,6,3)$.

$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(f\circ g\right)(x,y)=(-1,3,0)\right\}$, $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 9 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Ebatziz, soluzioa x=0, y=1 dela lortzen da.

Beraz, $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(f\circ g\right)(x,y)=(-1,3,0)\right\}$ ={(0,1)}.

28 (i) Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3$ den, $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\}=\varnothing$ den.

(c) $a=0$ eta $b=5$ badira, aurkitu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri bana.

(d) $g(1,3)=(1,4,6)$ eta $g(2,1)=(2,3,2)$ baieztatzen duen g aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $M(g)$. Gainera, $a=0$ eta $b=5$ diren kasurako, kalkulatu $(f\circ g)(1,3)$.

(ii) Aurkitu isomorfismoa ez den $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $f(1,1)=(2,3)$ den. Azaldu erantzuna.

<u>EBAZPENA:</u>

(i) Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3$ den, $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non f isomorfismoa den.

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ denez, f isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $|M(f)|\neq 0$.

$$|M(f)|=\begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=a(2-a)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0 \text{ edo } a\neq 2,\ \forall b\in\mathbb{R}.$$

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\}=\varnothing$ den.

$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bada, $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\}$ $M(f)X=B$ sistemaren soluzio multzoa da. Beraz,

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\}=\varnothing$ $\Leftrightarrow$ $M(f)X=B$ bateraezina bada, hots, $\mathrm{r}\big(M(f)\big)\neq \mathrm{r}\big(M(f):B\big)$ bada.

• $a \neq 0$ eta $a \neq 2$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{r}\big(M(f)\big)$=3. Ondorioz, $\mathrm{r}\big(M(f):B\big)=3$, eta $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\big\}\neq\varnothing$.

• $a=0$ bada, $\big(M(f):B\big)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$. $\mathrm{r}\big(M(f)\big)=2$, adibidez $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$

baita.

Eta $\begin{vmatrix} b & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2(2+b)$ denez, $b=-2$ bada, $\mathrm{r}\big(M(f):B\big)=2$ eta $b\neq -2$

bada, $\mathrm{r}\big(M(f):B\big)=3$.

Honela, $a=0$ eta $b\neq -2$ badira, $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\big\}=\varnothing$.

• $a=2$ bada, $\mathrm{r}\big(M(f)\big)=2$, adibidez $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ =4≠0 baita.

$\big(M(f):B\big)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & b & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ da, eta adibidez 1., 3. eta 4. zutabeak hartuz,

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ =8≠0. Beraz, $\mathrm{r}\big(M(f):B\big)=3$. Hau da, $a=2$ bada,

$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\big\}=\varnothing \;\; \forall b\in\mathbb{R}$.

Laburtuz, $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(1,1,3)\big\}=\varnothing$ izanen da hurrengo kasuetan:

• $a = 0$ eta $b \neq -2$ direnean edo • $a = 2$ bada, $\forall b\in\mathbb{R}$.

(c) $a = 0$ eta $b = 5$ badira, aurkitu $\mathrm{Im}(f)$ eta $\ker(f)$-ren oinarri bana.

$a = 0$ eta $b = 5$ badira, $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Honela, $f\big(x,y,z\big)=\big(5y+3z, y, y+2z\big)$.

• $\mathrm{Im}\big(f\big)=\big\{f\big(x,y,z\big) \mid \big(x,y,z\big)\in\mathbb{R}^3\big\}=\big\{\big(5y+3z,\ y,\ y+2z\big)\mid y,z\in\mathbb{R}\big\}=$

$=\big\{y\big(5,1,1\big)+z\big(3,0,2\big)\mid y,z\in\mathbb{R}\big\}$.

Eta ⟨(5,1,1), (3,0,2)⟩ librea denez, ⟨(5,1,1), (3,0,2)⟩ $\mathrm{Im}(f)$-ren oinarria da.

- $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} =$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (5y+3z,\ y,\ y+2z) = (0,0,0)\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y+3z=0, y=0, y+2z=0\},$$

hau da, $\begin{cases} 5y+3z=0 \\ y=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Ebatziz, soluzioak y=0, z=0, $x \in \mathbb{R}$ dira. Hots,

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0, z=0\} = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Beraz, ker(f)-ren oinarria: $\langle(1,0,0)\rangle$.

(d) $g(1,3) = (1,4,6)$ eta $g(2,1) = (2,3,2)$ baieztatzen duen g aplikazio lineala hartuz, kalkulatu $M(g)$. Gainera, a = 0 eta b = 5 diren kasurako, kalkulatu $(f \circ g)(1,3)$.

(1,3)=(1,0)+3(0,1) eta (2,1)=2(1,0)+(0,1). Eta g aplikazio lineala denez,

$g(1,3)= g(1,0)+3g(0,1)=(1,4,6)$ [1] eta $g(2,1)=2g(1,0)+ g(0,1)=(2,3,2)$ [2].

[1]-etik, $g(1,0)=(1,4,6) - 3g(0,1)$.

[2]-n ordezkatuz, $2g(1,0)+g(0,1) = 2((1,4,6)-3g(0,1))+g(0,1) =$

$$=(2,8,12)-6g(0,1)+g(0,1) = (2,8,12)-5g(0,1) = (2,3,2).$$

Beraz, $5g(0,1)$ =(0,5,10), hots, $g(0,1)$ =(0,1,2),

[1]-etik, $g(1,0)=(1,4,6) - 3g(0,1)= (1,4,6) - 3(0,1,2)=(1,1,0)$, hots, $g(1,0)=(1,1,0)$.

Honela, $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a = 0 eta b = 5 direnean, $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Beraz,

$$M(f \circ g) = M(f)M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Eta $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Beraz, $(f \circ g)(1,3) = (38,4,16)$.

(ii) Aurkitu isomorfismoa ez den $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $f(1,1) = (2,3)$ den.

Adibidez, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, hau da, $f(1,1) = (2,3)$ da, $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ izanik. Eta $|M(f)| = 0$ denez, f ez da isomorfismoa. Beraz, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$ denez, $f(x,y) = (2x,3x)$ aplikazio linealak bi baldintzak betetzen ditu: ez da isomorfismoa eta $f(1,1) = (2,3)$.

29 (i) Biz f aplikazio lineala non $f(1,2)=f(2,1)=(3,-3)$ den. Kalkulatu $f(x,y)$.

(ii) Demagun g aplikazio lineala non $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den.

(a) Kalkulatu $\ker(g)$ multzoa, bere oinarri bat eta dimentsioa.

(b) Kalkulatu $\operatorname{Im}(g)$ -ren oinarri bat. Aurkitu $\operatorname{Im}(g)$ multzoan ez dagoen $\mathbb{R}^3$-ren bektore bat.

(c) $a\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,0,2)\right\}=\varnothing$?

(d) Aurkitu $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $(h\circ g)$ (1,1,0)=(3,1) betetzen den.

EBAZPENA:

(i) Biz f aplikazio lineala non $f(1,2)=f(2,1)=(3,\text{-}3)$ den. Kalkulatu $f(x,y)$.

f lineala denez, f(1,2)=f(1,0)+2 f(1,0)=(3,– 3) eta f(2,1)=2 f(1,0)+ f(1,0)=(3,– 3).

Honela, f (1,0) eta f (1,0) lortzeko, $\begin{cases} f(1,0)+2f(0,1)=(3,-3) \\ 2f(1,0)+f(0,1)=(3,-3) \end{cases}$ sistema ebatziko dugu.

Horrela eginez, f(1,0)=(1,–1) eta f(0,1)=(1,–1) direla lortzen da.

Beraz, $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \end{pmatrix}$ denez, $f(x,y)=(x+y,-x-y)$ dugu.

(ii) Demagun g aplikazio lineala non $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den.

(a) $\ker(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,0,0)\right\}$, hau da, $M(g)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa. Gauss-en metodoa erabiliko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ ebatziz, (2.EK) $y=-z$; (1.EK) $x=-y=z$. Beraz,

$$\ker(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z, y=-z\}=\{(z,-z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{z(1,-1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\}.$$

Honela, dim(ker(g))=1 eta $\langle(1,-1,1)\rangle$, ker(g)-ren oinarri bat da.

(b) Kalkulatu $\mathrm{Im}(g)$-ren oinarri bat. Aurkitu $\mathrm{Im}(g)$ multzoan ez dagoen $\mathbb{R}^3$-ren bektore bat.

$$\mathrm{Im}(g)=\{g(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\{(x+y,-2x+y+3z,y+z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=$$

$$=\{x(1,-2,0)+y(1,1,1)+z(0,3,1) \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

$\langle(1,-2,0), (1,1,1), (0,3,1)\rangle$ lotua da, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$ baita.

Eta $\langle(1,-2,0), (1,1,1)\rangle$ librea denez, $\mathrm{Im}(g) = \{x\,(1,-2,0) + y\,(1,1,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle(1,-2,0), (1,1,1)\rangle$, Im($g$)-ren oinarria da.

Gainera, adibidez, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ denez, $(0,0,1)\notin\mathrm{Im}(g)$.

(c) $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,0,2)\}=\varnothing$?

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(a,0,2)\}=\varnothing \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bateraezina}$$

bada.

Honela, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-6 \end{array}\right)$ bateraezina $a\neq 3$ bada.

(d) Aurkitu $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio lineal bat non $(h\circ g)(1,1,0)=(3,1)$ betetzen den.

$h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ bada, $M(h)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. $M(h\circ g)=M(h)M(g)$ denez,

$(h\circ g)(1,1,0)=(3,1)$ bada, orduan,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b+c \\ 2d-e+f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+c=3 \\ 2d-e+f=1 \end{cases}.$$

Adibidez, a=1, b=0, c=1, d=1, e=1, f=0 balioekin baldintzak baieztatzen dira.

Beraz, $M(h)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Eta $h(x,y)$ lortzeko: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+z \\ x+y \end{pmatrix}$.

$h(x,y)=(x+z,x+y)$.

30 Bira hurrengo aplikazio linealak:

$$f(x,y,z)=(y+z,x-y+z,x+2z) \text{ eta } g(x,y,z)=(2x-y+z,y-3z).$$

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) Kalkulatu $(g\circ f)(1,0,-1)$.

(c) Kalkulatu $\ker(g)$ multzoaren oinarri bat.

(d) $(1,-2)\in \mathrm{Im}(g)$ baieztatzen al da?

(e) Kalkulatu $\ker(f)$ eta $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazio bektorialen dimentsioak.

(f) $a\in\mathbb{R}$ -ren zein baliotarako beteko da $(a,1,1)\in \mathrm{Im}(f)$?

EBAZPENA:

$f(x,y,z)=(y+z,x-y+z,x+2z)$ eta $g(x,y,z)=(2x-y+z,y-3z)$.

(a) $|M(f)|=0$ denez, f ez da isomorfismoa.

g ez da isomorfismoa $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ baita.

(b) Kalkulatu $(g\circ f)(1,0,-1)$.

$$M(g)M(f)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.$$

Beraz, $(g\circ f)(1,0,-1)=(-3,3)$.

(c) Kalkulatu $\ker(g)$ multzoaren oinarri bat.

$$\ker(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,0)\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0, y-3z=0\}=$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z, y=3z\}=\{(z,3z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,3,1)\mid z\in\mathbb{R}\}.$$

$\ker(g)$-ren oinarri bat: $\langle(1,3,1)\rangle$.

(d) $(1,-2)\in \mathrm{Im}(g)$ baieztatzen al da? Hau da, ba al dago $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ non $g(x,y,z)=(1,-2)$ den?

$M(g)X=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sistema bateragarria den ala ez ikusi beharko da. Honela, $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 1\\0 & 1 & -3 & -2\end{array}\right)$, hau da, r($A$)=r($A$:$B$)=2. Beraz bai, $(1,-2)\in \mathrm{Im}(\mathrm{g})$.

(e) Kalkulatu $\ker(f)$ eta $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazio bektorialen dimentsioak.

$\mathrm{r}\big(M(f)\big)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}=2 \Rightarrow \dim\big(\ker(f)\big)=3-\mathrm{r}\big(M(f)\big)=1$ eta

$\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{r}(M(f))=2$.

(f) $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako beteko da $(a,1,1)\in\mathrm{Im}(f)$? Hau da, $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako existituko da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ non $f(x,y,z)=(y+z,x-y+z,x-2z)=(a,1,1)$ den? Beraz, $a\in\mathbb{R}$-ren zein baliotarako izango da bateragarria $M(f)X=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ sistema?

Hau gertatuko da $\mathrm{r}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & a\\1 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)$ denean. Eginez, $(a,1,1)\in\mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow$ a=0.

31 (a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismoa hartuz, kalkulatu $\mathrm{r}(M(f))$, $\ker(f)$ eta $\ker(f \circ f)$.

(b) Demagun $g(x,y,z)=(x-y+2z, y+z, x+y+az)$ aplikazio lineala, $a \in \mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,1,2)\}=\varnothing$?

(ii) a-ren zein baliotarako beteko da $\dim(\ker(g)) = 1$?

(iii) a=4 bada, kalkulatu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(4,1,2)\}$ eta $\mathrm{Im}(g)$.

EBAZPENA:

(a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismoa hartuz, kalkulatu $\mathrm{r}(M(f))$, $\ker(f)$ eta $\ker(f \circ f)$.

- $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfismoa bada, $M(f)\in M_3$ eta $|M(f)|\neq 0$, beraz, $\mathrm{r}(M(f))=3$.
- $\ker(f)$, $M(f)X=\mathrm{O}$ sistema homogenoaren soluzio multzoa da. $\mathrm{r}(M(f))=3$ denez, $M(f)X=\mathrm{O}$ bateragarri determinatua izango da, hots, soluzio bakarra izango du. Beraz, $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$.
- $\ker(f \circ f)$, $M(f\circ f)X=\mathrm{O}$ sistema homogenoaren soluzio multzoa da. $|M(f\circ f)|=|M(f)||M(f)|$ denez, $|M(f\circ f)|\neq 0$ da, hots, $\mathrm{r}(M(f\circ f))=3$. Beraz, $M(f\circ f)X=\mathrm{O}$ bateragarri determinatua izango da, hau da, soluzio bakarra izango du. Ondorioz, $\ker(f\circ f)=\{(0,0,0)\}$.

(b) Demagun $g(x,y,z)=(x-y+2z, y+z, x+y+az)$ aplikazio lineala, $a \in \mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako beteko da $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,1,2)\}=\varnothing$?

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,1,2)\}=\varnothing$ izango da $M(g)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sistema bateraezina bada.

$$(M(g):B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right) \text{ mailakatuz,}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{array}\right).$$

a=4 bada, $\mathrm{r}(M(g)) = \mathrm{r}(M(g):B) = 2$; a≠4 bada, $\mathrm{r}(M(g)) = \mathrm{r}(M(g):B) = 3$.

Beraz, bateragarria a-ren balio guztietarako. Ondorioz, ez dago a-ren baliorik non $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(0,1,2)\right\}=\varnothing$ den.

(ii) a-ren zein baliotarako beteko da $\dim\left(\ker\left(g\right)\right)=1$?

$\ker(g)$, $M(g)X = \mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Beraz, $\dim\left(\ker\left(g\right)\right)=3-\mathrm{r}\left(M\left(g\right)\right)$.

$\dim\left(\ker\left(g\right)\right)=3-\mathrm{r}\left(M\left(g\right)\right)=1 \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(M\left(g\right)\right)=2$.

$$\mathrm{r}(M(g))=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow a=4.$$

Beraz, $\dim\left(\ker\left(g\right)\right)=1 \Leftrightarrow a=4$.

(iii) a=4 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(4,1,2)\right\}$ eta $\mathrm{Im}(g)$.

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(4,1,2)\right\}$, $M(g)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da. Ebazteko, Gauss-en metodoa erabiliko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \text{ mailakatuz, } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Beraz,

$$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ \quad y+z=-1 \end{cases}.$$

2. ekuazioa askatuz, $y=-1-z$.

1. ekuazioa askatuz, $x=4+y-2z=4+-1-z\ -2z=3-3z$.

Beraz,

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=(4,1,2)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=3-3z, y=-1-z\right\}=$$
$$=\left\{(3-3z,-1-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=(3,-1,0)+\left\{z(-3,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$\mathrm{Im}\left(g\right)=\left\{g\left(x,y,z\right) \mid \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\left(x-y+2z, y+z, x+y+4z\right)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x\left(1,0,1\right)+y(-1,1,1)+z(2,1,4)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ =0 denez eta adibidez $\left\langle\left(1,0,1\right),\left(-1,1,1\right)\right\rangle$ librea,

$\mathrm{Im}\left(g\right)=\left\{x\left(1,0,1\right)+y\left(-1,1,1\right)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$

32 Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ den.

(a) b -ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa ?

(b) b -ren zein baliotarako izango da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,0,1)\right\}=\varnothing$?

(c) b -ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,0,1)\in\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(5,3,5)\right\}$?

(d) b=1 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,3)\right\}$ eta ker(f)-ren oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA:

Demagun f aplikazio lineala non $M(f)=\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ den.

(a) b -ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa ?

f isomorfismoa $\Leftrightarrow$ $|M(f)|\neq 0$.

$$|M(f)|=\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix}=-2(b-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 1.$$

(b) b -ren zein baliotarako izango da $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,0,1)\right\}=\varnothing$?

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,0,1)\right\}=\varnothing \quad \Leftrightarrow \quad M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sistema bateraezina bada.

Matrizialki, $AX=B$.

$(A:B)=\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & b & 2 & 1 \end{array}\right)$ hartuz, $\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix}=-2(b-1)^2$ denez, $b\neq 1$ bada r(A)=3 da eta ondorioz r(A:B)=3.

b=1 bada, $\mathrm{r}(A{:}B) = \mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2$. Beraz, r(A)=1≠2= r(A:B).

Honela, $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(b,0,1)\right\}=\varnothing \Leftrightarrow$ b=1.

(c) b -ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,0,1)\in\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(5,3,5)\right\}$?

$(b,0,1)\in\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(5,3,5)\right\} \Leftrightarrow f(b,0,1) = (5,3,5)$.

$M(f)\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 \\ b+2 \\ b+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2=5 \\ b+2=3 \\ b+2=5 \end{cases}$. Sistema hau bateraezina da (azken bi ekuazioak bateraezinak baitira). Beraz, ez dago b-ren baliorik non $(b,0,1)\in\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(5,3,5)\right\}$ den.

(d) b=1 bada, kalkulatu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,3)\right\}$ eta ker(f)-ren oinarri ortonormal bat.

* $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,3)\right\}$, $M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da.

Matrizialki, AX=B. Honela,

$(A{:}B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, hots, x+y+2z=3. Beraz,

$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,3,3)\right\}$ ={(x,y,z)∈ $\mathbb{R}^3$| x+y+2z=3} = {(x,y,z)∈ $\mathbb{R}^3$| x=3-y-2z} =

={(3−y−2z, y, z) | y,z∈ $\mathbb{R}$ } = (3,0,0)+ {y(−1,1,0) + z(−2,0,1) | y,z∈ $\mathbb{R}$ }

* ker(f), $M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzio multzoa da. Matrizialki, AX=O. Honela,

$(A{:}\,O) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, hots, x+y+2z=0. Beraz,

$\ker(f) = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0\} = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=-y-2z\} = \{(-y-2z,\, y,\, z) \mid y,z\in \mathbb{R}\}=$

$= \langle(-1,1,0),\, (-2,0,1)\rangle.$

Beraz, $\ker(f)$-ren oinarri bat: $\langle(-1,1,0),\, (-2,0,1)\rangle$.

Oinarri ortonormal bat lortzeko Gram-Schmidt-en teorema aplikatu beharko dugu:

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}.$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{(-2,0,1)-\left\langle(-2,0,1)\,\middle|\,\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\right\rangle\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(-2,0,1)-\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}}{\text{goikoaren norma}}=$$

$$=\frac{(-2,0,1)-(-1,1,0)}{\text{goikoaren norma}}=\frac{(-1,-1,1)}{\|(-1,-1,1)\|}=\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}.$$

Honela, $\left\langle\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}},\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}\right\rangle$ $\ker(f)$-ren oinarri ortonormala.

33 Demagun $f(x,y,z)=(x+y,\ ay-z)$ eta $g(x,y)=(x,\ x+y,\ y)$ aplikazio linealak, $a\in\mathbb{R}$.

(a) f eta g isomorfismoak al dira?

(b) a-ren zein baliotarako izango da $f\circ g$ isomorfismoa?

(c) a-ren zein baliotarako existituko da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektoreren bat non $f(x,y,z)=(1,1)$ den?

(d) a-ren zein baliotarako baieztatuko da $f(1,1,2)=(2,0)$?

(e) a=1 bada, kalkula ezazu ker(f)-ren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) $M(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a&-1\end{pmatrix}$ eta $M(g)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$ karratuak ez direnez, f eta g ez dira isomorfismoak.

(b) $f\circ g$ isomorfismoa da $M(f\circ g)$ karratua eta alderanzkarria bada.

$$M(f\circ g)=M(f)M(g)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\a&a-1\end{pmatrix}$$

$$|M(f\circ g)|=\begin{vmatrix}2&1\\a&a-1\end{vmatrix}=a-2\neq 0\Leftrightarrow a\neq 2 \text{ bada.}$$

(c) $f(x,y,z)=(x+y,\ ay-z)=(1,1)$ izateko, $\begin{cases}x+y=1\\ay-z=1\end{cases}$ sistemaren soluzioa izan beharko da.

$\begin{cases}x+y=1\\ay-z=1\end{cases}$ ebazteko, $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&a&-1&1\end{array}\right)$ mailakatua dagoenez,

r(M(f)) = 2 = r(M(f):B), beraz, sistema bateragarri indeterminatua $\forall a\in\mathbb{R}$.

Sistema bateragarria da a-ren balio guztietarako, beraz a-ren balio guztietarako existituko da $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektoreren bat non $f(x,y,z)=(1,1)$ den.

(d) $f(1,1,2)=(2,\ a-2)=(2,0)\ \Leftrightarrow\ a=2$ bada.

(e) $a=1$ bada, $f(x,y,z)=(x+y,\ y-z)$ da.

Honela, $\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x + y, y - z) = (0,0)\} =$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x + y = 0,\ y - z = 0\}$. Hau da, $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa.

Sistema mailakatua denez, y eta x askatuz,

[2. EK] $y = z$

[1. EK] $x = -y = -z$.

$\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = -z, y = z\} = \{(-z, z, z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \{ z(-1, 1, 1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

$\ker(f)$-ren oinarria: $\langle(-1, 1, 1)\rangle$.

34 Demagun $f(x,y,z)=(2x+y+z,\ x\text{-}y+z,\ -3y+az)$, $a\in\mathbb{R}$ aplikazio lineala.

(a) a-ren zein baliotarako izango da f isomorfismoa?

(b) a-ren zein baliotarako ez da existituko $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorerik non $f(x,y,z)=(0,0,1)$ den?

(c) a-ren zein baliotarako beteko da $f(0,1,1)=(2,0,0)$?

(d) a=1 denean, kalkulatu ker(f) eta Im(f) azpiespazio bektorialen dimentsioak.

EBAZPENA:

(a) f isomorfismoa da $\Leftrightarrow |M(f)|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -3a+3\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1.$

(b) $f(x,y,z)=(2x+y+z,x-y+z,-3y+az)$

Ez da existituko $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorerik non $f(x,y,z)=(0,0,1)$ den $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ -3y+az=1 \end{cases}$ sistema bateraezina denean. Hau da $\left(A:B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & a & 1 \end{array}\right)$ matrize zabaldua hartuz, ikusi behar dugu a-ren zein baliotarako betetzen den $\mathrm{r}(A)\neq \mathrm{r}(A:B)$.

$a\neq 1$ denean $\mathrm{r}(A)=3=\mathrm{r}(A:B)$

$a=1$ denean $\mathrm{r}(A)=2\neq 3=\mathrm{r}(A:B)$

Beraz, a=1 denean ez da existituko $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ bektorerik non $f(x,y,z)=(0,0,1)$ den.

(c) $f(0,1,1)=(2,0,0)\Leftrightarrow (2,0,-3+a)=(2,0,0)\Leftrightarrow -3+a=0\Leftrightarrow a=3.$

(d) $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)=\mathrm{r}(M(f))=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}=2.$

$\dim\left(\ker(f)\right)=3-\mathrm{r}(M(f))=3-2=1.$

35 Demagun f aplikazio lineala eta $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & a & o \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ bere matrize elkartua; $a\in\mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako baieztatuko dim(Im(f))$\neq$ 3?

(ii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(0,1,b)\in\ker(f)$?

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,0,1)\in \mathrm{Im}(f)$?

(iv) $a=1$ bada, kalkulatu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta dimentsioa.

(v) $a=1$ bada, existitzen al da $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio linealen bat non $(g\circ f)(1,-1,1)\neq(0,0)$ baieztatzen den? Azaldu erantzuna.

EBAZPENA:

Demagun f aplikazio lineala eta $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & a & o \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ bere matrize elkartua; $a\in\mathbb{R}$.

(i) a-ren zein baliotarako baieztatuko dim(Im(f))$\neq$ 3?

dim(Im(f))= r(M(f) = r $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \neq 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$ bada.

$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 2-2a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ edo $a = -1$.

(ii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(0,1,b)\in\ker(f)$?

$(0,1,b)\in\ker(f) \Leftrightarrow f(0,1,b) = (0,0,0)$.

$M(f)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2+ab \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2+ab=0 \\ a+b=0 \end{cases}$. Eta sistema hau bateraezina da.

[1.EK] a=0 bada [2.EK] 2+0=0 da (ezinezkoa).

Beraz, ez dago a eta b-ren baliorik non $(0,1,b)\in\ker(f)$ den.

(iii) a eta b-ren zein baliotarako baieztatuko da $(b,0,1)\in \mathrm{Im}(f)$?

$$(b,0,1)\in \mathrm{Im}(f) \;\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & o & b \\ a & 2 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$ sistema bateragarria bada, hots, r(A)=r(A:B) bada.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ denez, r(A)≥2. $\begin{vmatrix} 1 & a & o \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 2-2a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ edo $a = -1$.

Honela, $a = 1$ edo $a = -1$ bada, r(A)=2. $a \neq 1$ eta $a \neq -1$ bada, r(A)=3.

- $a \neq 1$ eta $a \neq -1$ bada, r(A) = 3 = r(A:B). Beraz, $(b,0,1)\in \mathrm{Im}(f)$.

- $a = 1$ bada, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. r($A$)=2.

  [1.Z, 2.Z, 4.Z] hartuz: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+b=0 \Leftrightarrow b = -1$.

- $a = -1$ bada, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. r($A$)=2.

  [1.Z, 2.Z, 4.Z] $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+b=0 \Leftrightarrow b = -1$.

Beraz, $$(b,0,1)\in \mathrm{Im}(f) \;\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \pm 1 \quad [\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A:B) = 3] \\ \text{edo } a = 1 \text{ eta } b = -1 \quad [\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A:B) = 2] \\ \text{edo } a = -1 \text{ eta } b = -1 \quad [\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A:B) = 2] \end{cases}$$

(iv) $a = 1$ bada, kalkulatu $\ker(f)$-ren oinarri bat eta dimentsioa.

ker(f) kalkulatzeko $M(f)X = \mathrm{O}$ sistema ebatzi behar da. (A:O)= $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

mailakatuz, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ dugu, beraz, $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$.

Ebatziz, [2. EK.] $y=-z$; [1. EK.] $x=-y=z$.

Beraz, ker(f)= $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = z, y = -z\} = \{(z,-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \{z(1,-1,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

ker(f)-ren oinarria: $\langle(1,-1,1)\rangle$. dim(ker(f)) = 1.

(v) $a=1$ bada, existitzen al da $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ aplikazio linealen bat non $(g\circ f)(1,-1,1)\neq(0,0)$ baieztatzen den? Azaldu erantzuna.

$$(g\circ f)(1,-1,1)\neq(0,0) \Leftrightarrow \left(M(g)\right)\left(M(f)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(M(g)\right)\left(M(f)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Beraz,

$\left(M(g)\right)\left(M(f)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ baieztatzea ezinezkoa da.

36 Demagun $f(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y-3z)$ eta $g(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y)$ aplikazio linealak.

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,a,1)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

(b) Aurkitu $\ker(f)$-ren oinarri bat.

(c) $\ker(f)\subset \mathrm{Im}(f)$ baieztatzen al da?

(d) g alderanzkarria al da? Hala bada, kalkulatu g^{-1} aplikazioa.

(e) Kalkulatu (x,y,z) bektoreen multzoa non $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ den.

EBAZPENA:

Demagun $f(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y-3z)$ eta $g(x,y,z)=(2x+y-z,x-z,2x-y)$ aplikazio linealak.

(a) Aurkitu a-ren balioak non $(2,a,1)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

$(2,a,1)\in \mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow \left(M(f):\begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix}\right)$ bateragarria bada, hau da, $\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\1&0&-1&1\\2&-1&-3&a\end{array}\right)$

bateragarria bada.

$\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&0&-1\\2&-1&-3\end{vmatrix}=0$ denez, $\mathrm{r}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&-1\\2&-1&-3\end{pmatrix}=2$ da.

$\begin{vmatrix}2&1&2\\1&0&a\\2&-1&1\end{vmatrix}=-3+4a=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$. Beraz, $\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\1&0&-1&1\\2&-1&-3&a\end{array}\right)=\begin{cases}2 & ; \quad a=3/4\\ 3 & ; \quad a\neq 3/4\end{cases}$.

Honela, $\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\1&0&-1&1\\2&-1&-3&a\end{array}\right)$ bateragarria $\Leftrightarrow$ $(2,a,1)\in \mathrm{Im}(f)$ $\Leftrightarrow$ $a=\dfrac{3}{4}$.

(b) Aurkitu $\ker(f)$-ren oinarri bat.

$\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (2x+y-z,x-z,2x-y-3z)=(0,0,0)\right\}=$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0, x-z=0, 2x-y-3z=0\right\},$$

Hau da, $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases}$ sistemaren soluzio multzoa. Gauss-en metodoaren bitartez ebatziz gero:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}.$$

x eta y askatuz, $x=z,\ y=-z$. Honela,

$$\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z, y=-z\right\}=$$

$$=\left\{(z,-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(z(1,-1,1)\mid z\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\ker(f)$-ren oinarri bat: $\langle(1,-1,1)\rangle$.

(c) $\langle(1,-1,1)\rangle$ $\ker(f)$-ren oinarria denez,

$\ker(f)\subset \mathrm{Im}(f) \iff (1,-1,1)\in \mathrm{Im}(f)$.

Eta $(1,-1,1)\in \mathrm{Im}(f) \iff \left(M(f) : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bateragarria bada, hau da, $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$ bateragarria bada.

$$|M(f)|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \text{ denez, } \mathrm{r}(M(f))=2.$$

Eta $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq 0$ denez, $\mathrm{r}(M(f):B)=3$. Beraz bateraezina da eta ondorioz $\ker(f)\subset \mathrm{Im}(f)$ ez da baieztatzen.

(d) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ alderanzkarria da $\iff$ $|M(g)|\neq 0$ bada.

Gure kasuan, $|M(g)|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0$, beraz, g alderanzkarria da.

$M(g)$-ren alderantzizkoa kalkulatuz: $\left(M(g)\right)^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}$ da, beraz,

$$\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-x+y-z\\ -2x+2y+z\\ -x+4y-z\end{pmatrix}$$ denez,

$$g^{-1}(x,y,z)=\frac{-1}{3}(-x+y-z,-2x+2y+z,-x+4y-z).$$

(e) Kalkulatu (x,y,z) bektoreen multzoa non $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ den.

$g\circ f$ lortzeko $M(g)$ eta $M(f)$ biderkatuko ditugu (orden honetan):

$$M(g)M(f)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

(x,y,z) bektoreen multzoa non $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ den,

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$ sistemaren soluzio multzoa da.

Gauss-en metodoaren bitartez ebatziz gero:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Eta sistema bateraezina denez ($r(A)=2\neq 3=r(A:B)$),

(x,y,z) bektoreen multzoa non $(g\circ f)(x,y,z)=(1,1,1)$ den multzo hutsa da.

37 Demagun ondoko aplikazio lineala: $f(x,y,z)=(x+2y,x+3z,y-z)$.

(i) Aurki ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,4,5)\}$. $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala al da?

(ii) f isomorfismoa al da? Hala bada, aurki ezazu f^{-1} alderantzizko funtzioa.

(iii) Aurki ezazu $\mathrm{Im}(f)$ –ren oinarri bat. Betetzen al da $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^3$? Eta $\mathbb{R}^3\subset\mathrm{Im}(f)$?

EBAZPENA:

(i) Hasteko, lor dezagun *f*-ren matrize elkartua:

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Eta $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(3,4,5)\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$

Gauss-en metodoa erabiltzen badugu soluzioa lortzeko:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\1&0&3&4\\0&1&-1&5\end{array}\right)\xrightarrow[E_2=E_2-E_1]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-2&3&1\\0&1&-1&5\end{array}\right)\xrightarrow[E_3=E_3+\frac{1}{2}E_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-2&3&1\\0&0&1/2&11/2\end{array}\right)$$

Beraz, $\left.\begin{array}{l}x+2y=3\\-2y+3z=1\\z/2=11/2\end{array}\right\}$ emandako sistemaren baliokidea da, hau da, soluzio bera du: $(-29,16,11)$ hain zuzen ere, soluzio bakarra (sistema bateragarri determinatua da). $(0,0,0)\notin\{(-29,16,11)\}$ ez da $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala izango.

(ii) Isomorfismoa izango da bere matrize elkartua karratua eta honen determinantea ezberdin zero bada, hau da:

$$|M(f)|=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Beraz, isomorfismoa da eta

$$M\left(f^{-1}\right)=\left(M(f)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -6\\ -1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Orduan, $f^{-1}(x,y,z)=(3x-2y-6z,-x+y+3z,-x+y+2x)$.

(iii) f isomorfismoa denez, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ $\left(\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)=\mathrm{r}\left(M\left(f\right)\right)=3\right)$ eta ondorioz, $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^3\subset\mathrm{Im}(f)$ izango da eta bere oinarri bat, adibidez, $\left\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\rangle$.

38 Demagun $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala

$$f(2,0,0)=(2,0,-2),\quad f(0,1,0)=(-1,1,-1),\quad f(0,0,1)=(0,1,-2)$$

izanik.

(i) Aurki ezazu $M(f)$.

(ii) Aurki ezazu $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,-2)\right\}$.

(iii) Aurki ezazu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}$. Zein da bere dimentsioa?

EBAZPENA:

(i) *f* aplikazio lineala denez,

$$f(2,0,0)=(2,0,-2)\Rightarrow 2f(1,0,0)=2(1,0,-1)\Rightarrow f(1,0,0)=(1,0,-1).$$

Eta orduan, *f*-ren matrize elkartua oinarri kanonikoaren bektoreen irudiak zutabeka jartzen lortzen dugu: $M(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

(ii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,-2)\right\}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\ y+z=1\\ -x-y-2z=-2\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[E_3=E_3+E_1]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[E_3=E_3+2E_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Beraz, emandako sistemaren baliokidea da sistema hau:

$$\begin{cases}x-y=0\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ y=1-z\end{cases}$$

Eta soluzioa hauxe da:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1,-2)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y,\, y=1-z\right\}=$$
$$=\left\{(1-z,1-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\right\}.$$

(iii) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-en metodoaren bitartez ebatziz gero:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0,0,0)\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\right\} =$$

$$= \left\{(y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(1,1,-1) \mid y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Beraz, $\langle (1,1,-1) \rangle$ sistema multzoaren oinarria da, eta ondorioz, bere dimentsioa 1 da.

39 (a) Kalkula ezazu $h(1,-1)=(2,1,2)$ eta $h(0,2)=(-2,2,2)$ betetzen duen $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio linealaren matrize elkartua.

(b) Demagun *f* aplikazio lineala, $M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bere matrize elkartua izanik.

(i) Kalkula ezazu $\ker(f)$-ren oinarria eta bere dimentsioa.

(ii) Aurki itzazu *a*-ren balioak non $(1,1,a)\in \mathrm{Im}(f)$ den.

(iii) $g(x,y)=(x,y,x-y)$ izanik, kalkulatu $(f\circ g)(2,1)$ eta $\mathrm{Im}(f\circ g)$ multzoaren dimentsioa.

EBAZPENA:

(a) *h* aplikazio lineala denez:

$$\left.\begin{array}{l} h(1,-1)=1h(1,0)-1h(0,1)=(2,1,2) \\ h(0,2)=0h(1,0)+2h(0,1)=(-2,2,2) \end{array}\right\} \to 2h(0,1)=(-2,2,2)\to h(0,1)=(-1,1,1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(1,0)=(2,1,2)+(-1,1,1)=(1,2,3).$$

Beraz, $M(h)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) (i) $\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Sistema hau ebazteko, Gauss-en metodoa erabiliko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2=E_2+E_1]{E_3=E_3-E_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3=E_3+2E_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beraz, $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 2y+4z=0 \end{array}\right\}$ emandako sistemaren baliokidea da eta soluzio bera dute bi sistemek: $y=-2z$ eta $x=z$.

$\ker(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-2z, x=z\right\}=\left\{(z,-2z,z)\mid z\in\mathbb{R}\right\}$, non $\langle(1,-2,1)\rangle$ $\ker(f)$-ren oinarria den, eta ondorioz, $\dim(\ker(f))=1$.

(ii) $(1,1,a)\in \mathrm{Im}(f)\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ sistema bateragarria izan behar da, hau da, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{r}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2$ denez, $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}=2$ izan behar da, eta ondorioz, bere determinanteak 0 izan behar du: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2a$. Beraz, $(1,1,a)$ bektorea $\mathrm{Im}(f)$ multzoan dago $a=0$ denean.

(iii) $g(1,0)=(1,0,1)$ eta $g(0,1)=(0,1,-1)$ direnez, $M(g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ da eta

$$M(f\circ g)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=M(f)M(g)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Beraz, $(f\circ g)(2,1)=(7,-1,4)$.

Eta $\dim\big(\mathrm{Im}(f\circ g)\big)=\mathrm{r}\big(M(f\circ g)\big)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=2$.

40 (i) Aurki ezazu $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio linealari elkartutako matrizea, baldintza hauek betetzen dituelarik:

$$h(0,-1,0)=(1,-1),\ h(3,0,0)=(3,6) \text{ eta } h(2,3,1)=(0,0).$$

(ii) Demagun $M(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ matrize elkartua duen f aplikazio lineala.

(a) a-ren zein baliotarako beteko da $(2,a,-1)\in \ker(f)$?

(b) Aurki itzazu a-ren balioak non $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,a,0)\}=\varnothing$ den.

(c) $g(x,y,z)=(x+z,x-y)$ izanik, aurki ezazu $(g\circ f)(1,-1,0)$ eta $\ker(g\circ f)$ multzoaren dimentsioa.

EBAZPENA:

(i) h-ren matrize elkartua lortzeko oinarri kanonikoaren bektoreen irudia behar dugu, gero hauek zutabeka idazteko. h aplikazio lineala denez,

$h(0,-1,0)=-h(0,1,0)=(1,-1)$; hau da, $h(0,1,0)=(-1,1)$.

$h(3,0,0)=3h(1,0,0)=(3,6)$; hau da, $h(1,0,0)=(1,2)$.

$h(2,3,1)=2h(1,0,0)+3h(0,1,0)+h(0,0,1)=2(1,2)+3(-1,1)+h(0,0,1)=(0,0)$; beraz,

$h(0,0,1)=(1,-7)$.

Eta $M(h)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -7\end{pmatrix}$ da.

(ii) (a) $(2,a,-1)\in\ker(f) \Leftrightarrow f(2,a,-1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ a\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}2+a-3=0\\ 2-2=0\\ 2-a-1=0\end{cases}.$$

Beraz, $a=1$.

(b) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(2,a,0)\right\}=\varnothing$. Honek esan nahi du (2,*a*,0) bektorearen aurreirudia ez dela existitzen, hau da, $M(f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix}$ ekuazio linealeko sistema bateraezina dela:

$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix}$, non $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ koefizienteen matrizea eta $\left(A:B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\1&0&2&a\\1&-1&1&0\end{array}\right)$ matrize zabaldua diren. $\mathrm{r}(A)=2$ denez, sistema bateraezina izateko $\mathrm{r}(A:B)=3$ izan behar da. $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&a\\1&-1&0\end{vmatrix}=-2+2a$ denez, sistema bateraezina da $a\neq 1$ denean.

(c) $\left(g\circ f\right)$ konposaketa matrizialki osatuko dugu: $M\left(g\circ f\right)=M(g)M(f)$.

Eta $M(g)$ lortzeko, $g(x,y,z)=(x+z,x-y)$ denez, $g(1,0,0)=(1,0)$, $g(0,1,0)=(0,-1)$ eta $g(0,0,1)=(1,0)$ dira, orduan: $M(g)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

Eta $M\left(g\circ f\right)=M(g)M(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&1\end{pmatrix}$ denez,

$$M\left(g\circ f\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(g\circ f\right)\left(1,-1,0\right)=\left(2,-1\right).$$

$\ker\left(g\circ f\right)$ $M\left(g\circ f\right)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa denez,

$$\dim\left(\ker\left(g\circ f\right)\right)=3-\mathrm{r}\left(M\left(g\circ f\right)\right)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&1\end{pmatrix}=3-2=1.$$

DIAGONALGARRITASUNA

41 Demagun $p_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda+a)$ $A\in M_3$ matrize baten polinomio karakteristikoa.

(i) a-ren zein baliotarako ziurta dezakegu A diagonalgarria dela ?

(ii) a-ren zein baliotarako ziurta dezakegu A ez dela diagonalgarria ?

(iii) Ezagutu al daiteke A^2 matrizearen balio propiorik? Zergatik?

EBAZPENA:

Demagun $p_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda+a)$ $A\in M_3$ matrize baten polinomio karakteristikoa.

A-ren balio propio bat ezagutzen dugu: $\lambda=2$: Besteak, $\lambda^2+\lambda+a=0$ ekuazioaren erro errealak dira.

$\lambda^2+\lambda+a=0$ ekuazioaren erroak: $\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$.

(i) A diagonalgarria dela ziurta dezakegu $p_A(\lambda)$-ren erro guztiak errealak eta bakunak badira.

Erro bat $\lambda=2$ denez, A diagonalgarria dela ziurta dezakegu $1-4a>0$ eta $\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\neq 2$ badira.

- $1-4a>0 \Leftrightarrow a<\dfrac{1}{4}$ bada.
- $\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\neq 2 \Leftrightarrow -1\pm\sqrt{1-4a}\neq 4 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-4a}\neq 5 \Leftrightarrow 1-4a\neq 25 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow a\neq -6.$

(ii) A ez dela diagonalgarria ziurta dezakegu $p_A(\lambda)$-ren erroren bat konplexua bada, hau da, $1-4a<0$ bada, beraz, $a>\dfrac{1}{4}$ bada.

(iii) Ezagutu al daiteke A^2 matrizearen balio propiorik? BAI.

$\lambda=2$ A-ren balio propioa denez, $AX=2X$ dela dakigu. Beraz, $A^2X=A(AX)=A2X=2AX=2\cdot 2X=4X$. Honela, $\lambda=4$ A^2-ren balio propioa izango da.

42 Demagun $A=\begin{pmatrix} a^2 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea, $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) a eta b-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

(ii) $a=1$ bada, aurkitu b-ren balioak non $(1,0,b)$ A-ren bektore propioa den.

EBAZPENA:

(i) $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a^2-\lambda & 2 & b \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(a^2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$. Erroak: a^2, -1 eta 1.

- $a\neq1$ eta $a\neq-1$ bada, 3 erro erreal desberdin, beraz, A diagonalgarria da.
- $a=1$ bada, $\lambda=1$ erro bikoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ dim(S(1))=2 $\Leftrightarrow$ $r(A-I)=1$.

  $r(A-I) = r\begin{pmatrix} 0 & 2 & b \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ denez, $b=0$ bada, $r(A-I)=1$ eta $b\neq0$ bada, $r(A-I)=2$.

  Beraz, $a=1$ eta $b=0$ badira, A diagonalgarria da. $a=1$ eta $b\neq0$ badira, A ez da diagonalgarria.
- $a=-1$ bada, $\lambda=1$ erro bikoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ dim(S(1))=2 $\Leftrightarrow$ $r(A-I)=1$.

  $r(A-I) = r\begin{pmatrix} 0 & 2 & b \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ denez, $b=0$ bada, $r(A-I)=1$ eta $b\neq0$ bada, $r(A-I)=2$.

  Beraz, $a=-1$ eta $b=0$ badira, A diagonalgarria da. $a=-1$ eta $b\neq0$ badira, A ez da diagonalgarria.

(ii) $a=1$ izanik, $(1,0,b)$ A-ren bektore propioa da $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ bada.

Honela, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+b^2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ b=0 bada, balio propio elkartua $\lambda=1$ izanik.

43 Bira ondoko matrizeak: $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

(a) Kalkulatu A matrizearen balio propio bat.

(b) Kalkulatu B matrizearen bektore propio bat.

(c) C matrize diagonalgarria al da? Zergatik?

(d) Kalkulatu D-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$-ren oinarri bat.

(e) Aurkitu E-ren antzeko bi matrize diagonal.

<u>EBAZPENA:</u>

Bira ondoko matrizeak: $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

(a) Kalkulatu A matrizearen balio propio bat.

$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2\\ -5 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-12=(\lambda-3)(\lambda+4)$ denez, bere erroak $\lambda=3$ eta $\lambda=-4$ dira eta errealak direnez A-ren 2 balio propioak dira.

(b) Kalkulatu B matrizearen bektore propio bat. Adibidez (1,1).

$p_B(\lambda)=|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 5 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$ denez, bere erroak $\lambda=3$ eta $\lambda=-3$ dira.

Eta azpiespazio espektralak: $S(3)=\langle(1,1)\rangle$ eta $S(-3)=\langle(1,-5)\rangle$.
Adibidez, (1,1) B-ren bektore propioa da.

(c) C matrize diagonalgarria al da? Zergatik?

$p_C(\lambda)=|C-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)$ denez, bere erroak $\lambda=0$ eta $\lambda=2$ dira. Erro guztiak errealak eta bakunak direnez, C diagonalgarria da.

(d) Kalkulatu D-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$-ren oinarri bat. $\langle(1,0),(3,4)\rangle$.

$p_D(\lambda)=|D-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 0 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)$ denez, bere erroak $\lambda=1$ eta $\lambda=5$ dira, eta azpiespazio espektralak: $S(1)=\{x(1,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ eta $S(5)=\{x(3,4)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

D-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$ -ren oinarri bat: $\langle(1,0),(3,4)\rangle$.

(e) Aurkitu E-ren antzeko bi matrize diagonal.

$p_E(\lambda)=|E-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda-8=(\lambda-8)(\lambda+1)$ denez, bere erroak $\lambda=-1$ eta $\lambda=8$ dira. Honela, $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ E-ren antzeko bi matrize diagonal dira.

44 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ matrizea.

(c) Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a eta b-ren balio desberdinen arabera.

(d) $a=-1$ bada, esan b-ren zein baliotarako izango den $(0,3,3)$ A-ren bektore propioa.

EBAZPENA:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & b \\ 0 & 0 & a^2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)(a^2-\lambda).$$ Erroak: 1, a eta a^2.

(a) * $a\neq 0, 1, -1$ denean, 3 erro erreal ezberdin, beraz A diagonalgarria da.

* $a=0$ denean $\lambda=0$ erro bikoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(0))=2$.

$$\dim(S(0))=3-\mathrm{r}(A)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2 \Leftrightarrow b=0.$$

* $a=1$ denean $\lambda=1$ erro hirukoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(1))=3$.

$$\dim(S(1))=3-\mathrm{r}(A-I)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3 \Leftrightarrow b=0.$$

* $a=-1$ denean $\lambda=1$ erro bikoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(1))=2$.

$$\dim(S(1))=3-\mathrm{r}(A-I)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2 \quad \forall b\in\mathbb{R}.$$

(b) $a=-1$ bada, $(0,3,3)$ A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ bada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3+3b \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ $\Leftrightarrow$ 0=0; $-3+3b=3\lambda$; $3=3\lambda$. $3=3\lambda \rightarrow \lambda=1$. Eta $\lambda=1$ bada, $-3+3b=3\lambda=3 \rightarrow -3+3b=3 \rightarrow b=2$. Beraz, (0,3,3) A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow$ $b=2$ (balio propio elkartua $\lambda=1$ delarik).

45 (a) Demagun $A=\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}$ matrizea. Aurkitu a, b eta c-ren balioak ondoko bi baldintzak baieztatzeko: λ=2 A-ren balio propia da eta $S_A(2)=\{x(1,-1,0)+y(1,1,-2)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoa λ=2 balioari elkartutako azpiespazio espektrala da.

(b) a=1, b=3 eta c=3 direnean, A matrize diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) Demagun $A=\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}$ matrizea. Aurkitu a, b eta c-ren balioak ondoko bi baldintzak baieztatzeko: λ=2 A-ren balio propioa da eta $S_A(2)=\{x(1,-1,0)+y(1,1,-2)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoa λ=2 balioari elkartutako azpiespazio espektrala da.

- $S_A(2)=\{x(1,-1,0)+y(1,1,-2)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ multzoa λ=2 balioari elkartutako azpiespazio espektrala $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ badira.

$$\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\1-b\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\\1-b=-2\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow b=3$$

$$\begin{pmatrix}3&1&a\\1&b&1\\1&1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-2a\\-1+b\\2-2c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}4-2a=2\\-1+b=2\\2-2c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=3\end{cases}$$

- $\lambda = 2$ A-ren balio propioa $\Leftrightarrow$ $|A-2I| = 0$.

  a =1, b =3 eta c =3 direnean,

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}3-2&1&1\\1&3-2&1\\1&1&3-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

Beraz bi baldintzak baieztatuko dira a =1, b =3 eta c =3 direnean.

(b) $a=1$, $b=3$ eta $c=3$ direnean, A matrize diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 + 2 - 3(3-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 + 2 - 9 + 3\lambda =$$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = (\lambda-2)^2(5-\lambda)$. Erroak: $\lambda=2$ (bikoitza) eta $\lambda=5$ (bakuna).

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(2)) = 2$ bada.

$$\dim(S(2)) = 3 - \mathrm{r}(A-2I) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 1.$$

Beraz, A diagonalgarria da.

A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarria lortzeko $S(2)$ eta $S(5)$-en oinarriak kalkulatuko ditugu.

$S(2)$, $(A-2I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da.

$$(A-2I)X=O \rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ hau da, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ebatziz, $x+y+z = 0$, hau da, $z = -x-y$. Honela,

$S(2) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = -x-y\} = \{(x, y, -x-y) \mid x,y\in\mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

$S(5)$, $(A-5I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da.

$$(A-5I)X=O \rightarrow \begin{pmatrix} 3-5 & 1 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 1 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ hau da, } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ ebazteko $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ mailakatuko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hau da, $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases}$.

[2. EK] $y = z$

[1. EK] $x = -y+2z = -z+2z = z$

Honela, $S(5) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = z,\ y = z\} = \{(z, z, z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \{z(1,1,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Ondorioz, $\langle(1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,1)\rangle$ A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarria.

46 (a) Aurkitu $A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ -b & b \end{pmatrix} \in M_2$ matrizea non (1,2) A-ren bektore propioa den eta $\lambda=3$ bere balio propio elkartua.

(b) Biz $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$ matrizea:

(i) Aurkitu B-ren antzeko matrize diagonal guztiak.

(ii) Aurkitu B-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$-ren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) (1,2), $A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ -b & b \end{pmatrix} \in M_2$ matrizearen bektore propioa da eta $\lambda=3$ bere balio propio elkartua, beraz, $\begin{pmatrix} a & 2a \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & 2a \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=3/5$ eta $b=6$.

(b) Biz $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$ matrizea:

(i) Aurkitu B-ren antzeko matrize diagonal guztiak.

$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ 5 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-25=0 \Leftrightarrow \lambda^2=25 \Leftrightarrow \lambda=5$ edo $\lambda=-5$.

Beraz, B diagonalgarria da eta B-ren antzeko matrize diagonal guztiak $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ dira.

(ii) Aurkitu B-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$-ren oinarri bat.

B-ren balio propioak $\lambda=5$ eta $\lambda=-5$ dira.

$S(5)$, $(B-5I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ebatziz, $x=y$ dela dugu, hots, $S(5)=\{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$S(-5)$, $(B+5I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ebatziz, $x=-y$ dela dugu, hots, $S(-5)=\{x\,(1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Honela, B-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^2$ -ren oinarria: $\langle(1,1), (1,-1)\rangle$.

47 (i) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non $\lambda=3$ A-ren balio propioa den.

(b) Aurkitu a eta b-ren balioak non $(0,1,1)$ A-ren bektore propioa den.

(c) $a=0$ baliorako, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

(d) $a=b=0$ badira, aurkitu $\lambda=0$ balio propioari elkartutako bektore propio guztien multzoa.

(ii) Aurkitu $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$-ren antzeko matrize ez-diagonal bat. Azaldu erantzuna.

<u>EBAZPENA:</u>

(i) (a) $\lambda=3$ A-ren balio propioa da $|A-3I|=0$ bada. Honela, $|A-3I|=\begin{vmatrix} a-3 & b & 3 \\ 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$

$=(a-3)(2-a)$. Beraz, $\lambda=3$ A-ren balio propioa $\Leftrightarrow$ $a=2$ edo $a=3$, $\forall b\in\mathbb{R}$.

(b) $(0,1,1)$, A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bada.

$\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b+3 \\ a+1 \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $b+3=0$, $a+1=\lambda$ eta $3=\lambda$ badira.

Beraz, $(0,1,1)$, A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow$ $a=2$ eta $b=-3$ badira, $\lambda=3$ izanik.

(c) $a=0$ denean, $\begin{vmatrix} -\lambda & b & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ $=-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$. Beraz, erroak $\lambda=0,1$ eta 2 dira. Erro guztiak errealak eta bakunak direnez, A diagonalgarria da. A-ren antzeko matrize diagonala: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) a=b=0. S(0), $(A-0I)X$=O sistemaren soluzio multzoa da. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sistema ebatziz, $S(0)=\{(x,0,0) \mid x\in \mathbb{R}\}=\{x\,(1,0,0) \mid x\in \mathbb{R}\}$.

λ=0-ri elkartutako bektore propioen multzoa: $\{x\,(1,0,0) \mid x\in \mathbb{R}\}\backslash\{(0,0,0)\}$.

(ii) Adibidez, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen antzeko matrize ez-diagonal bat $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ da. Zergatik?

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$-ren balio propioak 3 eta –1 dira (errealak eta bakunak). Honela, diagonalgarria izanen da bere antzeko matrize diagonala $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ delarik.

48 Biz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) $a = 2$ eta $b = 0$ badira, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

EBAZPENA:

Biz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a,b\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a eta b-ren balioak non A diagonalgarria den.

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & b \\ 0 & -a-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = -(a-\lambda)^2(a+\lambda)$. Erroak: $\lambda=a$ (bikoitza) eta $\lambda=-a$ (bakuna).

- $a=0$ bada, $\lambda=0$ erro hirukoitza. $S(0)$, $(A-0I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa denez, A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(0))=3$ bada, hots, $r(A-0I)=0$ bada.

  $r(A-0I)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\geq 1$ denez, A ez da diagonalgarria.

- $a\neq 0$ bada, $\lambda=-a$ erro bakuna da eta $\lambda=a$ erro bikoitza. Beraz, A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(a))=2$ bada, hots, $r(A-aI)=1$ bada.

  $r(A-aI)=r\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{cases} 1\ ;\ b=0 \text{ bada,} \\ 2\ ;\ b\neq 0 \text{ bada.} \end{cases}$

  Beraz, $a\neq 0$ eta $b=0$ badira, A diagonalgarria da.

(b) $a = 2$ eta $b = 0$ badira, $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & b \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2(2+\lambda)$. Erroak: $\lambda=2$ (bikoitza) eta $\lambda=-2$ (bakuna).

S(2), $(A-2I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ebatziz, $-4y=0$ eta $y=0$. Beraz, $S(2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\}=\{(x,0,z) \mid x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,0)+y(0,0,1) \mid x,z\in\mathbb{R}\}$.

$S(-2)$, $(A+2I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ebatziz, $4x=0$ eta $y+4z=0$. Beraz, $S(-2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0,\ y=-4z\}=\{(0,-4z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}=\{z(0,-4,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

Honela, A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$–ren oinarri bat: $\langle(1,0,0), (0,0,1), (0,-4,1)\rangle$.

A-ren antzeko matrize diagonala: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

49 Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) $a=1$ bada, kalkulatu A-ren antzeko matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non $\lambda=4$ A-ren balio propioa den.

EBAZPENA:

Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & a^2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(a-\lambda)(a^2-\lambda)$. Erroak: $\lambda=0$, a eta a^2.

- $a\neq0$ eta $a\neq1$ bada, hiru erro erreal bakun, beraz A diagonalgarria da.
- $a=0$ bada, $\lambda=0$ erro hirukoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(0))=3$. Eta $\dim(S(0))=3-\mathrm{r}(A-0I)$.

  $\mathrm{r}(A-0I)=\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=1$. Beraz, $\dim(S(0))=2$ eta ondorioz A ez da diagonalgarria.
- $a=1$ bada, $\lambda=1$ erro bikoitza. A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(1))=2$.

  Eta $\dim(S(1))=3-\mathrm{r}(A-I)$.

  $\mathrm{r}(A-I)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=1$. Beraz, $\dim(S(1))=2$ eta ondorioz A diagonalgarria da.

  Laburbilduz, A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $a\neq0$.

(b) a=1 bada, kalkulatu A-ren antzeko matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ beraz, } |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2.$$

Erroak: λ=0 eta λ=1 (bikoitza).

a=1 denean A diagonalgarria da (lehen ikusi baitugu A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $a\neq 0$).

Beraz, A-ren antzeko matrize diagonal bat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ izanen da.

$S(0)$, $(A-0I)X$=O sistemaren soluzio multzoa da. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, hau da, $\begin{cases} x=0 \\ -x+2z=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Beraz, $S(0)=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z=0\}=\{(0, y, 0) \mid y\in \mathbb{R}\}=\{y\,(0, 1, 0) \mid y\in \mathbb{R}\}$.

$S(1)$, $(A-I)X$=O sistemaren soluzio multzoa da. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, hau da, $-x-y+2z=0$,

hots, $x=-y+2z$. Honela,

$S(1)=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=-y+2z\}=\{(-y+2z, y, z) \mid y,z\in \mathbb{R}\}=\{y\,(-1,1,0) + z\,(2,0,1) \mid y,z\in \mathbb{R}\}$.

Beraz, $\langle(0,1,0), (-1,1,0), (2,0,1)\rangle$ A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat da.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non λ=4 A-ren balio propioa den.

λ=4 A-ren balio propioa $\Leftrightarrow$ $|A-4I|$=0 bada.

$$|A-4I|=\begin{vmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ -1 & 0-4 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}=-4(a-4)\,(a^2-4) \Leftrightarrow a=4 \text{ edo } a^2=4. \text{ Beraz,}$$

λ=4 A-ren balio propioa $\Leftrightarrow$ $a = 4$, $a = 2$ edo $a = -2$.

50 Biz $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\lambda=-3$ A-ren balio propioa den.

(b) Kalkulatu a-ren balioak non $(0,1,1)$ A-ren bektore propioa den.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

EBAZPENA:

Biz $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Kalkulatu a-ren balioak non $\lambda=-3$ A-ren balio propioa den

$\lambda=-3$ A-ren balio propioa $|A+3I|=0$ bada.

Beraz, $\begin{vmatrix}2+3 & a & 1\\ 0 & -1+3 & 3\\ 0 & 2 & 0+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & a & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

(b) Kalkulatu a-ren balioak non $(0,1,1)$ A-ren bektore propioa den.

$\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1\\2\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$ denean, $\lambda=2$ izanik.

(c) Kalkulatu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & a & 1\\ 0 & -1-\lambda & 3\\ 0 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[-\lambda(-1-\lambda)-6]=$

$=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+3)$. Erroak: $\lambda=2$ (bikoitza), $\lambda=-3$ (bakuna).

$\dim(S(-3))=1$, $\lambda=-3$ erro bakuna baita.

$\dim(S(2))=3-\mathrm{r}(A-2I)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix}0 & a & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Honela,

$a=-1$ bada, $\dim(S(2))=2$ eta $a\neq -1$ bada, $\dim(S(2))=1$. Beraz,

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $a=-1$.

51 Demagun $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 4 & 3 & -2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea ?

(b) $a=1$ bada, kalkulatu:

(i) b-ren balioak non $(b,1,b)$ A-ren bektore propioa den.

(ii) A-ren antzeko matrize diagonal bat.

(iii) A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

(iv) $\lambda=3$ balio propioari elkartutako A-ren bi bektore propio.

EBAZPENA:

Demagun $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 4 & 3 & -2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea ?

$$|A-\lambda|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 4 & 3-\lambda & -2 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)-a^2(3-\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-a^2)=0\to \text{Erroak: } \lambda=3,\ \lambda=a,\ \lambda=-a.$$

Lau kasu ditugu:

[1] $a\neq 0$, $a\neq 3$, $a\neq -3$ $\to$ Hiru erro erreal desberdin.

[2] $a=0$ $\to$ $\lambda=3$ (bakuna), $\lambda=0$ (bikoitza).

[3] $a=3$ $\to$ $\lambda=3$ (bikoitza), $\lambda=-3$ (bakuna).

[4] $a=-3$ $\to$ $\lambda=3$ (bikoitza), $\lambda=-3$ (bakuna).

[1] $a\neq 0$, $a\neq 3$, $a\neq -3$ $\to$ Hiru erro erreal desberdin $\to$ A diagonalgarria.

[2] $a=0$ $\to$ $\lambda=3$ (bakuna), $\lambda=0$ (bikoitza). A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(0))=2$ bada.

$$\dim(S(0))=3-r(A-0I)=3-r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3-1=2. \text{ Beraz, } A \text{ diagonalgarria.}$$

[3] $a=3$ $\to$ $\lambda=3$ (bikoitza), $\lambda=-3$ (bakuna). A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(3))=2$ bada.

$$\dim(S(3))=3-\text{r}(A-3I)=3-\text{r}\begin{pmatrix}-3&0&3\\4&0&-2\\3&0&-3\end{pmatrix}=3-2=1.$$ Beraz, A ez da diagonalgarria.

[4] $a=-3 \to \lambda=3$ (bikoitza), $\lambda=-3$ (bakuna). A diagonalgarria $\Leftrightarrow \dim(S(3))=2$ bada.

$$\dim(S(3))=3-\text{r}(A-3I)=3-\text{r}\begin{pmatrix}-3&0&-3\\4&0&-2\\-3&0&-3\end{pmatrix}=3-2=1.$$ Beraz, A ez da diagonalgarria.

Beraz, A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $a\neq 3$ eta $a\neq -3$.

(b) $a=1$ bada, kalkulatu:

(i) b-ren balioak non $(b,1,b)$ A-ren bektore propioa den.

$(b,1,b)$ A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}0&0&a\\4&3&-2\\a&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\1\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b\\1\\b\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\4&3&-2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\1\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\4b+3-2b\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\2b+3\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b\\1\\b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\lambda b\\2b-3=\lambda\\b=\lambda b\end{cases}$$

b-ren bi baliok baieztatzen dituzte baldintza hauek:

$b=0$ (orduan $\lambda=3$ izango da), eta $b=-1$ (orduan $\lambda=1$ izango da).

(ii) A-ren antzeko matrize diagonal bat.

$$|A-\lambda|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\4&3-\lambda&-2\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)-(3-\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-1)=0.$$

Erroak: $\lambda=3$, $\lambda=1$, $\lambda=-1$.

A-ren antzeko matrize diagonal bat: $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(iii) A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

A-ren balio propioak $\lambda=3$, $\lambda=1$, $\lambda=-1$ direnez, $S(3)$, $S(1)$ eta $S(-1)$ kalkulatu behar dira:

$S(3)$, $(A-3I)X=\text{O}$ sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz,

$$\begin{pmatrix}-3&0&1\\4&0&-2\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c}-3&0&1&0\\4&0&-2&0\\1&0&-3&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&0\\4&0&-2&0\\-3&0&1&0\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&0\\0&0&10&0\\0&0&10&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&0\\0&0&10&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{cases}x-3z=0\\10z=0\end{cases}$$. Beraz, z=0 eta x=0.

Honela, $S(3)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0,\ z=0\}=\{(0,y,0) \mid y\in\mathbb{R}\}=\{y\,(0,1,0) \mid y\in\mathbb{R}\}$.

$S(1)$, $(A-I)X=O$ Sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz,

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\4&2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{cases}-x+z=0\\2y+2z=0\end{cases}$$. Beraz, $y=-z$ eta $x=z$. Honela, $S(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z,\ y=-z\}=\{(z-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{z(1,-1,1) \mid z\in\mathbb{R}\}$.

$S(-1)$, $(A+I)X=O$ Sistemaren soluzio multzoa da. Ebatziz,

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\4&4&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&4&-6&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{cases}x+z=0\\4y-6z=0\end{cases}.$$

Beraz, $y=\frac{3}{2}z$; eta $x-z$. Honela,

$S(-1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-z,\ y=\frac{3}{2}z\}=\{(-z,\ \frac{3}{2}z,\ z) \mid z\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,\ \frac{3}{2},1)\rangle$.

Honela, A-ren bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat: $\left\langle (0,1,0),(1,-1,1),\left(-1,\frac{3}{2},1\right)\right\rangle$.

(iv) λ=3 balio propioari elkartutako A-ren bi bektore propio:

$S(3)=\{x\,(0,1,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ denez, adibidez (0,1,0) eta (0,2,0).

52 (a) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Aztertu A-ren diagonalgarritasuna a, b eta c-ren balio desberdinetarako.

(b) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da $(1,-2,0)$ A-ren bektore propioa?

(c) a, b eta c-ren zein baliotarako izango da $\lambda=3$ A-ren balio propioa?

(d) $a=2$,$b=0$ eta $c=1$ badira, kalkulatu A-ren bektore propioak.

EBAZPENA:

(a) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3$ matrizea, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Aztertu A-ren diagonalgarritasuna.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda)(c-\lambda).$$ Balio propioak: a, c eta 1.

5 kasu desberdin daude: $[a=c=1]$; $[a=1\neq c]$; $[c=1\neq a]$; $[a=c\neq 1]$ eta $[a\neq c,\ a\neq 1$ eta $c\neq 1]$.

(1) $a=c=1$. $\lambda=1$ hirukoitza.

$$A \text{ diagonalgarria} \Leftrightarrow \dim(S(1)) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}=3.$$

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 1$ denez, $\dim(S(1))\neq 3$, beraz A ez da diagonalgarria.

(2) $a=1\neq c$. $\lambda=1$ bikoitza eta $\lambda=c$ bakuna.

$$A \text{ diagonalgarria} \Leftrightarrow \dim(S(1)) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}=2.$$

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}=2$ da, $c\neq 1$ baita. Beraz, $\dim(S(1))=1$ eta A ez da diagonalgarria.

(3) $c=1\neq a$. $\lambda=1$ bikoitza eta $\lambda=a$ bakuna.

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(1)) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}=2.$

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & b \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow b=0$ bada. Beraz, A diagonalgarria da b=0 bada.

(4) $a=c\neq 1$. $\lambda=a$ bikoitza eta $\lambda=1$ bakuna.

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(a)) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} a-a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b \\ 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}=2.$

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a-a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b \\ 0 & 0 & c-a \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow 1-a=b$. Beraz, A diagonalgarria da $a+b=1$ bada.

(5) $a\neq c$, $a\neq 1$ eta $c\neq 1$. Hiru erro erreal bakun, beraz A diagonalgarria da.

Ondorioz:

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ [$c=1\neq a$ eta b=0] edo [$a=c\neq 1$ eta $a+b=1$] edo [$a\neq c$, $a\neq 1$ eta $c\neq 1$]

(b) *a, b* eta *c*-ren zein baliotarako izango da $(1,-2,0)$ A-ren bektore propioa?

$(1,-2,0)$ A-ren bektore propioa $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bada.

$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=\lambda \\ -2=-2\lambda \\ 0=0 \end{cases}$. Bigarren ekuaziotik, $\lambda=1$ eta ondorioz, $a-2=1$, hots, $a=3$, *b* eta *c*-ren balio guztietarako.

(c) *a*, *b* eta *c*-ren zein baliotarako izango da $\lambda=3$ A-ren balio propioa?

$\lambda=3$ A-ren balio propioa $\Leftrightarrow |A-3I| = 0$ bada.

$|A-3I| = \begin{vmatrix} a-3 & 1 & 1 \\ 0 & 1-3 & b \\ 0 & 0 & c-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & c-3 \end{vmatrix} = -2(a-3)(c-3)=0 \Leftrightarrow a=3,\ c=3,\ \forall b\in\mathbb{R}$.

(d) $a=2$, $b=0$ eta $c=1$ badira, kalkulatu A-ren bektore propioak.

$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$. Beraz, $\lambda=2$ bakuna eta $\lambda=1$ bikoitza.

A-ren bektore propioak $S(1)\backslash\{(0,0,0)\}$ eta $S(2)\backslash\{(0,0,0)\}$ izango dira [(0,0,0) ez da bektore propioa].

$S(1)$, $(A-I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da. $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ ebatziz, $x+y+z=0$. Beraz,

$S(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-x-y\}=\{(x,y,-x-y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x\,(1,0,-1)+y\,(0,1,-1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

$S(2)$, $(A-2I)X=O$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}y+z=0\\-y=0\\-z=0\end{cases}$ ebatziz, $y=0$ *eta* $z=0$. Beraz,

$S(2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0, z=0\}=\{(x,0,0)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{x\,(1,0,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Honela, A-ren bektore propioak: $\{x\,(1,0,-1)+y\,(0,1,-1)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\backslash\{(0,0,0)\}$ eta $\{x\,(1,0,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\backslash\{(0,0,0)\}$.

53 Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,}\ a\in \mathbb{R}$.

(a) a-ren zein baliotarako izango da $\lambda=2$ A-ren balio propioa?

(b) a-ren zein baliotarako izango da (1,0,1) A-ren bektore propioa?

(c) a-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

<u>EBAZPENA:</u>

Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,}\ a\in \mathbb{R}$.

(a) $\lambda=2$ A-ren balio propioa da $\Leftrightarrow$ $|A-2I| = 0$ bada.

$$|A-2I| = \begin{vmatrix} 3-2 & 0 & -1 \\ 2 & 1-2 & a \\ 1 & 0 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1-1 = 0 \text{ Beraz,}$$

$\lambda = 2$ A-ren balio propioa da $\forall a\in\mathbb{R}$.

(b) (1,0,1) A-ren bektore propioa da $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ denean, hau da,

$$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+a \\ 1+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ denean. Beraz, } \begin{cases} 3-1=\lambda \\ 2+a=0 \\ 1+1=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ a=-2 \end{cases}.$$

(c) A-ren balio propioak kalkulatuko ditugu.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & a \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) + 1] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 -4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Erroak: $\lambda= 2$ (bikoitza), $\lambda= 1$ (bakuna),

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(2)) = 2$ bada.

$$\dim(S(2)) = 3 - \mathrm{r}(A-2I) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & -1 \\ 2 & 1-2 & a \\ 1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Baina $\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ a-ren balio guztietarako.

Beraz, ez dago a-ren baliorik A diagonalgarria izateko.

54 Demagun $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix} \in M_{3,}\, a,b \in \mathbb{R}$.

(c) a eta b-ren zein baliotarako da A diagonalgarria?.

(d) a=1 y b=1 denean, kalkulatu A-ren antzeko D matrize diagonal bat eta A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

EBAZPENA:

(a) A diagonalgarria noiz den jakiteko, bere polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu:

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & b \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)(2a-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = a \\ \lambda = 2a \end{cases}$$

Hiru kasu desberdin daude:

- a=1 denean, balio propioak 1 (bikoitza) eta 2 dira. Kasu honetan:

  $\dim(S(2)) = 1$

  $$\dim(S(1)) = 3 - \mathrm{r}(A-1I) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2, & b=1 \text{ bada} \\ 1, & b \neq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

  Beraz, a=1 denean A diagonalgarria izango da b=1 bada.

- a=0 denean, balio propioak 1 eta 0 (bikoitza) dira. Kasu honetan:

  $\dim(S(1)) = 1$

  $$\dim(S(0)) = 3 - \mathrm{r}(A-0I) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \ \forall b \in \mathbb{R}.$$

  Beraz, a=0 denean ez dago b-ren baliorik non A diagonalgarria den.

- $a \neq 0,1$ denean hiru balio propio desberdin ditugu, eta ondorioz A matrizea diagonalgarria da.

Laburbilduz, A diagonalgarria izango da [a=1 eta b=1] edo [$a \neq 0,1$ eta $\forall b \in \mathbb{R}$] denean.

(b) a=1 eta b=1 denean A matrizea diagonalgarria da eta bere balio propioak 1 (bikoitza) eta 2 dira. Beraz, adibidez, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ da A-ren antzeko matrize diagonal bat.

Bektore propioak lortzeko $S(1)$ eta $S(2)$ kalkulatu behar dira.

$S(1)$, $\left(A-1I\right)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\left(A-1I\right)X=\mathrm{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2y+z=0\Leftrightarrow z=-2y.$ Beraz,

$S(1)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-2y\right\}=\left\{(x,y,-2y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,0,0)+y(0,1,-2)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=$

$=\left\{x(1,0,0)+y(0,1,-2)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}.$

$S(2)$, $\left(A-2I\right)X=\mathrm{O}$ sistemaren soluzio multzoa da.

$\left(A-2I\right)X=\mathrm{O}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y+z=0\\-y=0\\2y=0\end{cases}$. Sistema ebatziz, $y=0$ eta $x=z$ lortzen ditugu. Beraz,

$S(2)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z,\, y=0\right\}=\left\{(x,0,x)\mid x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,0,1)\mid x\in\mathbb{R}\right\}.$

Ondorioz, $\left\langle(1,0,0),(0,1,-2),(1,0,1)\right\rangle$ izango da A-ren bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat.

55 Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrizea. Badakigu $\lambda=3$ A-ren balio propio dela eta $(1,1,4)\in S_A(3)$ baieztatzen dela.

(iii) Kalkulatu a, b eta c.

(iv) a=b=0 eta c=2 badira, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu bere balio eta bektore propioak, antzeko D matrize diagonal bat eta dagokion P aldaketa matrizea.

EBAZPENA:

Demagun $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrizea.

Badakigu $\lambda=3$ A-ren balio propio dela eta $(1,1,4)\in S_A(3)$ baieztatzen dela.

(i) Kalkulatu a, b eta c.

$\lambda=3$ A-ren balio propioa eta $(1,1,4)\in S_A(3)$ badira, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \\ 4 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, beraz,

$\begin{pmatrix} 3+4a \\ 3+4b \\ 4+4c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$, hau da, $\begin{cases} 3+4a=3 \\ 3+4b=3 \\ 4+4c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=0 \\ 4b=0 \\ 4c=8 \end{cases}$. Ondorioz, a=b=0 eta c=2.

(ii) a=b=0 eta c=2 badira, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu bere balio eta bektore propioak, antzeko D matrize diagonal bat eta dagokion P aldaketa matrizea.

a=b=0 eta c=2 badira, $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)^2$.

A-ren balio propioak: λ=3 (bakuna) eta λ=2 (bikoitza).

$\dim(S(2)) = 3 - r(A-2I) = 3 - r\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 4 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = 3 - r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2.$

Beraz, A diagonalgarria da.

Bektore propioak lortzeko $S(2)$ eta $S(3)$ kalkulatu behar dira:

$S(2)$, $(A–2I)X$=O sistemaren soluzio multzoa da, hau da, $\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 4 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Honela, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x=0 \\ x=0 \\ 4x=0 \end{cases}$. Beraz, $x = 0$.

Orduan, $S(2) = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0, y, z) \mid y, z\in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0)+z(0,0,1) \mid y, z\in \mathbb{R}\}$.

$S(3)$, $(A–3I)X$=O sistemaren soluzio multzoa da, hau da, $\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 4 & 0 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Honela, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x-y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases}$.

Ebatziz, [1. EK.] $y = x$; [2. EK.] $z = 4x$.

Orduan, $S(3) = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid y = x, z = 4x\} = \{(x, x, 4x) \mid x\in \mathbb{R}\} =\{x(1,1,4) \mid x\in \mathbb{R}\}$.

(Hau lortu zitekeen zuzenean enuntziatutik)

A-ren bektore propioak: $S(2)\backslash\{(0,0,0)\}$ eta $S(3)\backslash\{(0,0,0)$

A diagonalgarria denez, badaude $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ aldaketa matrizea eta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

matrize diagonala non $P^{-1}AP=D$.

56 Demagun $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 0 & a & 4-a\\ 0 & a & -a\end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

(b) a = 4 bada, A diagonalgarria al da? Hala bada, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal guztiak.

EBAZPENA:

Demagun $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 0 & a & 4-a\\ 0 & a & -a\end{pmatrix}\in M_3$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$.

(a) Aurkitu a-ren balioak non A diagonalgarria den.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 6\\ 0 & a-\lambda & 4-a\\ 0 & a & -a-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}a-\lambda & 4-a\\ a & -a-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\left[(a-\lambda)(-a-\lambda)-a(4-a)\right]=$$

$$=(2-\lambda)\left[-a^2-a\lambda+a\lambda+\lambda^2-4a+a^2\right]=$$

$$=(2-\lambda)\left[\lambda^2-4a\right]=0 \iff \lambda=2 \quad \text{edo} \quad \lambda^2=4a\text{, hau da,}$$

$$\text{Erroak}:\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}\\ \lambda=-\sqrt{4a}=-2\sqrt{a}\end{cases}$$

Lau kasu desberdin daude:

[1] $a<0 \;\rightarrow\; \lambda=2\sqrt{a}$ eta $\lambda=-2\sqrt{a}$ ez dira errealak eta ondorioz A ez da diagonalgarria.

[2] $a = 0 \rightarrow \lambda = 0$ bikoitza eta $\lambda = 2$ bakuna.

A diagonalgarria $\iff \dim\big(S(0)\big)=2$ bada.

$$\dim(S(0)) = 3 - \mathrm{r}\,(A-0I) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Beraz, ez da diagonalgarria.

[3] $a = 1 \rightarrow \lambda = 2$ bikoitza eta $\lambda = -2$ bakuna.

A diagonalgarria $\Leftrightarrow$ $\dim(S(2)) = 2$ bada.

$$\dim(S(2)) = 3 - \mathrm{r}\,(A-2I) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 2-2 & -2 & 6 \\ 0 & 1-2 & 3 \\ 0 & 1 & -1-2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$ Beraz, diagonalgarria da.

[4] $a > 0$ eta $a \neq 1$ hiru erro erreal desberdin, beraz, A diagonalgarria da.

Ondorioz, A diagonalgarria da $\Leftrightarrow$ $a = 1$ bada edo $a > 0$ eta $a \neq 1$ bada.

(b) $a = 4$ bada, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Polinomio karakteristikoa: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 6 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)(-4-\lambda).$

Erroak, $\lambda = 2$, $\lambda = 4$, $\lambda = -4$ errealak eta bakunak direnez, A diagonalgarria da.,

A-ren antzeko matrize diagonalak lortzeko, $\lambda = 2$, $\lambda = 4$, $\lambda = -4$ balio propioak jarriko ditugu diagonalean. Honela:

A-ren antzeko matrize diagonalak:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

57 Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & a\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ matrizea, $a\in\mathbb{R}$ izanik.

(i) Aurki itzazu *a*-ren balioak non -2 *A*-ren balio propioa den eta elkartutako azpiespazio espektrala.

(ii) Aurki itzazu *a*-ren balioak non $(1,5,-1)$ bektorea 4 balio propioari elkartutakoa den.

(iii) $a=3$ denean, diagonalgarria al da *A* matrizea?

EBAZPENA:

(i) Kalkula ditzagun *A*-ren balio propioak:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 3\\ 3 & 2-\lambda & a\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)-9(-2-\lambda)=$$

$$=(-2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-9\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-2\ \text{(bikoitza)}\\ \lambda=4\end{cases}$$

Beraz, *a*-ren edozein baliotarako -2 *A*-ren balio propioa da.

Eta -2 balioari elkartutako azpiespazio espektrala:

$$S(-2)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid AX=-2X\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (A+2I)X=\mathrm{O}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 0 & a\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Eta hurrengo ekuazioak sortzen dira: $\begin{cases}3x+3z=0\\ 3x+az=0\\ 3x+3z=0\end{cases}$.

Bi kasu bereiztu behar dugu: $a=3$ eta $a\neq 3$:

- $a=3$ denean, ekuazio bakar bat geratzen da ($3x+3z=0$, hau da, $x=-z$) eta $S(-2)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-z\right\}=\left\{(-z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}$.

- $a\neq 3$ denean, $\begin{cases}3x+3z=0\\ 3x+az=0\end{cases}$ ebatziz, sluzioa $x=z=0$ da. Honela,

  $S(-2)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z=0\right\}=\left\{(0,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\right\}$.

(ii) Horretarako hurrengoa dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -7-a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eta sistema hau bateraezina denez, ez da existitzen a-ren balioa non $(1,5,-1)$ 4 balio propioari elkartutako bektore propioa den.

(iii) $a=3$ denean, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dugu eta balio propioak 4 (bakuna) eta -2 (bikoitza) dira, (i)-en ikusi dugun bezala.

Badakigu $\dim\left(S(4)\right)=1$ dela, baina zein da $\dim(S(-2))$?

$\dim(S(-2)) = 3-\mathrm{r}(A+2I) = 3-\mathrm{r}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$. Beraz, azpiespazio espektralen dimentsioen batura 3 denez, A diagonalgarria da.

58 Demagun $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea.

(i) a-ren zein baliotarako da A diagonalgarria?

(ii) a=0 denean, aurki ezazu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

EBAZPENA:

(i) A diagonalgarria izateko balio propioei elkartutako azpiespazio espektralen dimentsioen batura 3 izan behar da:

Aurki ditzagun balio propioak:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - a^2(1-\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - a^2\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+a)(\lambda-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = a \\ \lambda = -a \end{cases}$$

a balio ezberdinen arabera hauxe dugu:

$a=0$ denean, balio propioak 1 eta 0 (bikoitza) izango dira.

$a=1$ denean, balio propioak 1 (bikoitza) eta -1 izango dira.

$a=-1$ denean, balio propioak 1 (bikoitza) eta -1 izango dira.

Beste edozein kasutan hiru balio propio desberdin ditugu (eta ondorioz, A matrizea diagonalgarria).

$a=0$ denean, $\dim\left(S(1)\right)=1$ eta

$$\dim\left(S(0)\right) = 3 - \mathrm{r}\left(A-0I\right) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Beraz, A diagonalgarria da.

$a=1$ denean, $\dim\left(S(-1)\right)=1$ eta

$$\dim\left(S(1)\right) = 3 - \mathrm{r}\left(A-I\right) = 3 - \mathrm{r}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Beraz, A ez da diagonalgarria.

$a=-1$ denean, $\dim\left(S(-1)\right)=1$ eta

$$\dim\left(S(1)\right)=3-\mathrm{r}\left(A-I\right)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2\,.$$

Beraz, *A* diagonalgarria da.

Laburbilduz: $a=1$ denean, *A* ez da diagonalgarria eta beste edozein kasutan, diagonalgarria da.

(ii) *a*=0 denean $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ da eta balio propioak 1 (bakuna) eta 0 (bikoitza) direnez,

$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ bere antzeko matrize diagonal bat da.

59 Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

(a) Diagonalgarria al da A matrizea? Hala bada, kalkula itzazu P eta D matrizeak, $P^{-1}AP=D$ izanik.

(b) a-ren balioren bat existitzen al da non $(3,-6,a)$ A-ren bektorea propioa den?

EBAZPENA:

(a) Kalkulatuko dugu A-ren polinomio karakteristikoa bere balio propioak lortzeko:

$$\mathrm{p}_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 2 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)-2\right]=(2-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-2\right)=$$

$$=(2-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)=0$$

Beraz, balio propioak 2 (bikoitza) eta -1 (bakuna) dira.

-1 erro bakuna denez, $\dim\left(S(-1)\right)=1$.

Atera dezagun $\dim\left(S(2)\right)$:

$$\dim\left(S(2)\right)=3-\mathrm{r}\left(A-2I\right)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=3-2=1.$$

Eta $\dim\left(S(-1)\right)+\dim\left(S(2)\right)=2<3$ denez, A ez da diagonalgarria.

(b) $(3,-6,a)$ A-ren bektorea propioa izateko: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\ -6\\ a\end{pmatrix}$, non λ $(3,-6,a)$-ren balio propio elkartua den.

$$\left.\begin{aligned}-3&=3\lambda\\ 6&=-6\lambda\\ -3+2a&=a\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lambda=-1, a=1.$$

60 Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 3 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matrizea.

(i) $a=2$ baliotarako, diagonalgarria al da A matrizea? Hala bada, aurki ezazu A-ren antzeko D matrize diagonala.

(ii) Existitzen al da a-ren balioren bat non 4 A-ren balio propioa den?

EBAZPENA:

(i) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 3 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ da eta jakiteko diagonalgarria den ala ez, bere polinomio karakteristikoa osatuko dugu:

$$\mathrm{p}_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 3 & 3-\lambda & -3\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)-2(3-\lambda)=$$

$$=(3-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-2\right]=(3-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right)=\lambda(3-\lambda)(\lambda-3)=0$$

Eta erroak (balio propioak): $\lambda=0$ eta $\lambda=3$ (bikoitza).

0 balio propioa polinomio karakteristikoan behin soilik agertzen denez $\dim\left(S(0)\right)=1$.

Aurki dezagun 3 balio propioaren azpiespazio espektralaren dimentsioa:

$$\dim\left(S(3)\right)=3-\mathrm{r}\left(A-3I\right)=3-\mathrm{r}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=3-1=2\,.$$

Beraz, $\dim\left(S(0)\right)+\dim\left(S(3)\right)=3$ denez, A matrizea diagonalgarria da. Eta, adibidez, $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ da A-ren antzeko matrize diagonala.

(ii) 4 balio propioa izateko, polinomio karakteristikoaren erroa izan behar da:

$$\left|A-4I\right|=\begin{vmatrix}1-4 & 0 & a\\ 3 & 3-4 & -3\\ 1 & 0 & 2-4\end{vmatrix}=-6+a=0\Rightarrow a=6.$$

Beraz, $a=6$ denean, 4 A-ren balio propioa da.