Sarriko-On

Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako Lizentziaturako Matematika III. Azterketak

ISBN: 978-84-695-3037-5

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

04-12

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ENPRESEN ADMINISTRAZIO ETA ZUZENDARITZAKO MATEMATIKA III AZTERKETAK

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

AURKIBIDEA

Sarrera...4

Azterketen enuntziatuak..5

Azterketen erantzunak.. 44

SARRERA

Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturako Matematika III irakasgaian matrikulatuta dauden ikasleentzat baliagarriak dira hemen jasotzen diren ariketak. Halaber, programazio linealean eta algebrako diagonalizazio nahiz forma koadratikoen topikoak aztertzen dituen edonorentzat lagungarria izan daiteke azterketa bilduma hau. Hain zuzen, azken urteotan irakasgai honetan jarritako azterketak eta hauen erantzunak jasotzen dira bertan.

Hasteko, azterketen enuntziatuak daude, azterketen orokortasunaz jabetzeko aukera ematen duena. Honela, erantzuna begiratu gabe ikaslea azterketa osoa egiten saia daiteke. Gero erantzunak jasotzen dira eta hauekin ikasleek aurretik egindako lana aztertzeko aukera dute, erantzunen zergaitia zein den eta, behar izanez gero, euren hutsuneetaz jabetu ondoren hauei aurre egiteko zer behar duten argituko diena.

Azterketak ordena kronologikoan jaso dira eta bertan aztertzen diren gaiak irakasgaiaren programan daude:

I. PROGRAMAZIO LINEALA

SARRERA: Problemaren planteamendu orokorra. Oinarrizko teoremak. Analisi grafikoa.

SIMPLEX METODOA: Era estandarra. Oinarrizko soluzio egingarriak. Simplex metodoaren eustarri teorikoa. Taulen bitartezko analisiaren sistematizazioa. Taulen arteko bihurketa formulak. Hoberenen anizkoiztasuna. Hasierako oinarrizko soluzio egingarria. Zigorren metodoa. Minimizazio problema. Hoberenondoko analisia.

II. ALGEBRA LINEALA

ALDEZ AURREKO KONTZEPTUA: Bektoreen oinarri batekiko koordenatuak. Aldaketa matrizea. Erreferentzi oinarri ortonormalak. Matrize ortogonalak.

DIAGONALIZAZIOA: Problemaren planteamendua. Balio propioak eta bektore propioak. Diagonalgarritasunaren baldintzak. Polinomio karakteristikoa. Diagonalizaziorako metodo operatiboa. Matrize simetrikoen diagonalizazioa.

FORMA KOADRATIKOAK: Definizioa, adierazpen matriziala eta sailkapena. Azpideterminante nagusien irizpidea.

Gai hauen garapen teorikoa bibliografia honetan aurkitu daiteke:

Ekonomilarientzako Matematikako Gaiak. F. Valenciano eta M. Aramendia, EHUko Argitarapen Zerbitzua, 1995.

AZTERKETEN ENUNTZIATUAK

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2002ko URTARRILA

1.- i) Demagun $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *a* eta *b*-ren zein baliotarako izango da (2,1,0) *A*-ren bektore propioa?
b) *a* eta *b*-ren zein baliotarako izango da 1 *A*-ren balio propioa?
c) *a* eta *b*-ren zein baliotarako izango da *A* diagonalgarria?

ii) Demagun $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$. Sailkatu *Q* forma koadratikoa *a*-ren balio desberdinetarako.

2.- Enpresa batek garia, lupulua eta malta erabiliz bi motako garagardo ekoizten du: horia eta beltza. Gaur egun enpresak 40 kg. gari, 30 kg. lupulu eta 40 kg. malta dauka. Litro bat garagardo hori 40 zentimotan saltzen da eta 0,1 kg. gari, 0,1 kg. lupulu eta 0,2 kg. malta behar du. Litro bat garagardo beltz 50 zentimotan saltzen da eta 0,2 kg. gari, 0,1 kg. lupulu eta 0,1 kg. malta behar du. Enpresak produzitzen duen garagardo guztia sal dezake.

i) Eman ezazu programazio linealeko problema non enpresaren sarrerak maximotzen diren, eta aurki ezazu problemaren soluzio hoberena.
ii) Aurki ezazu garagardo horiaren prezioen tartea soluzio hoberena i) apartatuan lortutakoa izaten jarraitzeko.
iii) 4 kg. malta gehiago izango balu, zein izango litzateke soluzio hoberena? Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko 4 kg. gehiago horiengatik?
iv) Merkatu azterketa batek aholkatzen badu garagardo beltzak ezin duela gainditu produkzio osoaren %40a, zein izango litzateke soluzio hoberena?

3.- Demagun honako problema hau:

$$\max(4x_1 + x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau baldin badakigu problemaren oinarrizko soluzio egingarri bati elkartutakoa dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	b
	1	-1		4
1		1		4
-3		-1		4

ii) Honako hau problemaren taula hoberen bat da:

		4	1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	***b***
4	A_1	1	1/2	0	1/2	4
0	A_3	0	-1/2	1	1/2	0
		0	1	0	2	16

a) Aldatzen da soluzio hoberena bigarren murrizketaren gai independentea 12 bada?

b) Zein izan behar du bigarren murrizketaren gai independenteak soluzio hoberena (8,0) izateko?

c) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan 6 bada, aldatzen da soluzio hoberena? Hala bada, kalkula ezazu soluzio hoberen berria.

d) Zein izan behar du x_1-en koefizienteak helburu funtzioan, problemaren beste datuak finkoak mantentzen diren bitartean, balio hoberena 24 izateko?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2002ko EKAINA

1.- Demagun honako matrize hau: $A=\begin{pmatrix} a & 3 & 8 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

i) a-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea?

ii) Demagun $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa. Aurki ezazu $M(Q)$ eta sailkatu forma koadratikoa a-ren balio desberdinetarako.

2.- Enpresa batek mota zehatz bateko mahaiak eta aulkiak ekoizten ditu, 20 eta 25 euroko mozkina hurrenez hurren lortuz. Ekoizpen prozesuak hala eskatzen duenez, mahai edo aulki bakoitzak enpresaren hiru lantegi desberdinetatik pasatu behar dute. Mahai batek 1, 3 eta 1 ordu behar ditu *A*, *B* eta *C* lantegietan hurrenez hurren, eta aulki batek 2, 1 eta 3 ordu hurrenez hurren. *A* eta *B* lantegiek gehienez 16 eta 18 lanordu eguneko hurrenez hurren egin dezakete eta *C* lantegiak gutxienez 9 ordu eguneko.

i) Aurki ezazu eguneko ekoizpen hoberena enpresaren helburua mozkina maximotzea bada.

ii) Zein izan beharko zuen mahai bakoitzaren mozkinak enpresarako hoberena aulki kopuru handiena ekoiztea izango balitz?

iii) Hasierako baldintzapetan, enpresak ahal izango balu eguneko ordu bat gehiago sartzea *A* edo *B* lantegietako batean soilik, zein aukeratuko luke?

iv) Salmenta ikerketa baten ostean enpresak erabakitzen du 2 mahaiko gutxienez 7 aulki ekoiztea, aldatuko zuen hasierako soluzio hoberena?

3.- Demagun problema hau:

$$\max\,(3x_1+2x_2)$$
$$\begin{cases} 3x_1+x_2\le 9 \\ x_1+x_2\le 5 \\ x_1-2x_2\le 0 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau, baldin badakigu problemaren oinarrizko soluzio egingarri bati elkartutako taula dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	*b*
1			1	0	5
	0	1	-1		4
	0				10

ii) Baldin badakigu taula hau problemaren taula hoberen bat dela:

		3	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	***b***
2	A_2	0	1	-1/2	3/2	0	3
3	A_1	1	0	1/2	-1/2	0	2
0	A_5	0	0	-3/2	7/2	1	4
		0	0	1/2	3/2	0	12

a) Eman lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena alda ez dadin.

b) Zein izan behar da bigarren murrizketaren gai independentea soluzio hoberena (0,9) izateko?

c) Eman helburu funtzioaren x_1-en koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko.

d) Zein izan behar du helburu funtzioaren x_2-ren koefizienteak balio hoberena 9 izateko?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2003ko OTSAILA

1.- (9 puntu) Demagun honako matrize hau: $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&b\\a&0&1\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$ izanik.

i) *a* eta *b*-ren zein baliotarako izango da *A* diagonalgarria?

ii) *b*=0 denean, demagun *Q* forma koadratikoa non *M*(*Q*)=*A* den. Sailkatu *Q* forma koadratikoa *a*-ren balio desberdinetarako.

2.- (8 puntu) Demagun honako problema hau non $a\in\mathbb{R}$ den:

$$\max(2x_1+x_2)$$
$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 2\\ x_1+ax_2\leq 4\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{cases}$$

i) Ebatzi problema *a*=2 denean. *a*-ren zein baliotarako izango da problemaren soluzio hoberena atal honetan lortutakoa?

ii) Ebatzi problema $a=\frac{1}{4}$ denean.

iii) Ebatzi problema $a\leq 0$ denean.

3.- (3 puntu) Ehun lantegi batek bi motako bufandak egiten ditu (I eta II). Horretarako bi motako artileak erabiltzen ditu (*A* eta *B*) Lantegiak *A* motako 400 kg. artile eta *B* motako 600 kg. artile ditu. I motako bufanda bat egiteko beharrezkoak dira *A* artileko 0,2 kg. eta *B* artilearena bikoitza. II motako bufanda bat egiteko *A* artileko 0,25 kg. eta *B* artileko 0,45 kg. erabiltzen du. I motako bufanda bat egiteko beharrezkoa den denbora II motako bufanda bat egiteko beharrezkoa denaren erdia da. Bufandak egiteko erabilgarria den denborarekin I motako 1500 bufanda egin daitezke. Merkatu ikerketa batek dio I motakoen eskaria gehienez 1000 unitatekoa dela eta I motako 100 bufandako gutxienez II motako 50 egin behar direla. Azkenik, I motako bufanda bat saltzeagatik lortzen den mozkina II motako batetik lortzen denaren 2/3 da.

Planteatu programazio linealeko problema ebatzi gabe jakiteko lantegiak zenbat mota desberdinetako bufandak egin behar dituen bere mozkin handiena lortzeko.

4.- (10 puntu) Demagun honako problema hau:

$$\max\,(2x_1+x_2)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 6 \\ x_1+x_2\le 6 \\ 3x_1+x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau baldin badakigu (0,3,0,3,5) oinarrizko soluzio egingarriari elkartutako taula dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1/2	1				
1/2		1/2	1		
		1/2			

ii) Honako taula hau problemaren taula hoberena dela badakigu:

		2	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2
2	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2
		0	0	1/5	0	3/5	6

a) Eman lehen murrizketaren gai independentearen balio handiena oinarri hoberena ez aldatzeko.

b) Hirugarren murrizketaren gai independentea 13 izango balitz, zein izango litzateke soluzio hoberen berria?

c) Eman helburu funtzioaren x_1-en koefizientearen balio handiena (2,2) puntua problemaren soluzio hoberena izateko.

d) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 6 izango balitz, zein izango litzateke soluzio hoberen berria?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2003ko EKAINA

1.- (5 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & \alpha & 2\end{pmatrix}$ matrizea.

α-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria *A* matrizea? Horrela den kasuetan, aurki ezazu *A*-ren antzeko matrize diagonal bat.

2.- (5 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & \alpha & 2\end{pmatrix}$ matrizea eta $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ forma koadratikoa non

$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ den.

i) Aurki ezazu $M(Q)$ eta sailkatu Q α-ren balio desberdinetarako.

ii) Esan noiz betetzen diren honako baieztapen hauek:

a) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ existitzen da non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

b) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{**0**} existitzen da non $Q(\boldsymbol{x})\le 0$ den.

c) Edozein $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ bektoretarako $Q(\boldsymbol{x})\ge 0$ betetzen da.

3.- (10 puntu) Enpresa batek telebistak eta bideoak ekoizten ditu eta saldu ondoren 40 euroko eta 20 euroko mozkina hurrenez hurren lortzen du. Telebista eta bideo bakoitzak enpresako hiru lantegietatik pasatu behar dute; telebista batek 1/2, 1/2 eta 3/2 ordu behar ditu *A*, *B* eta *C* lantegietan, hurrenez hurren eta bideo batek 1, 1/2 eta 1/2 ordu behar ditu, hurrenez hurren. *A* eta *B* lantegietan gehienez 30 ordu astero sartzen dira eta *C* lantegian, berriz, 40 ordu gehienez.

i) Aurki ezazu asteko produkzio hoberena enpresak mozkina maximotu nahi badu.

ii) Zein izan beharko luke bideoaren mozkinak enpresak bideoak soilik ekoiztuz mozkina handiena lortu nahi badu.

iii) *C* lantegian astero 5 lanordu gehiago lortuko balitu, zenbatetan handituko litzateke mozkina? Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko ordu hauetako bakoitzetik? Erantzun galdera hauei ordu hauek *B* lantegian lortuko balitu.

iv) Merkatu ikerketa batek dio bideo kopuruak ezin duela produkzio osoaren %25 gainditu, zein da soluzio hoberena?

4.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1 + 2x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Eta aurreko problemari elkartutako taula:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
A_1	1	4	2	1		
A_5	0		1	1		
	0	6	5			

i) Bete ezazu taula eta ebatzi problema.

ii) Aurki ezazu lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko.

iii) Esan zuzenak diren ala ez honako baieztapen hauek eta zergatik:

a) Lehen murrizketaren gai independentea 10etik 6ra pasatzen bada, soluzio hoberena ez da aldatzen.

b) Ez dago lehen murrizketaren gai independenterik non balio hoberena 10 den.

iv) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 2ren ordez 10 bada, ebatzi lortutako problema.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2004ko OTSAILA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, non $a,b\in\mathbb{R}$ diren.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna a eta b parametroen balioen arabera.

ii) Demagun $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa. Aurkitu a eta b-ren balio guztiak zeinentzako $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ existitzen diren, $Q(\boldsymbol{x})<0$ eta $Q(\boldsymbol{y})>0$ izanik.

2.- Errubi eta zafiroak erabiliz, Bitxi etxeak bi eraztun mota egiten ditu. 1. motako eraztun batek 2 errubi, 3 zafiro eta bitxigile baten lanordu bat behar du. 2. motako eraztun batek 3 errubi, 2 zafiro eta bitxigile baten 2 lanordu. Bitxi etxea gaur egun 100 errubi, 120 zafiro eta bitxigile baten 60 lanordu ditu. 1. motako eraztun bakoitza 400 eurotan saltzen da eta 2. motako eraztun bakoitza 500 eurotan. Egiten diren eraztun guztiak sal daitezke.

i) Plantea eta ebatzi ezazu Bitxi etxearen sarrerak maximotzeko programazio linealeko problema.

ii) 2. motako eraztunen salmenta prezioa, zer prezioren artean egon daiteke soluzio hoberena aurrekoa izaten jarraituz?

iii) Errubi gehiago eros dezake errubiko kostea 100 eurokoa bada? Zenbat erosiko lituzke? Zein izango litzateke orain soluzio hoberena?

iv) Bitxigileak makinaria berria erosten du, orain 1. motako eraztun bat egiteko 2. motako eraztun bat egiteko behar den denboraren bikoitza behar delarik. Horrez gainera, egiten diren eraztun guztiak 1. motakoak badira, orduan 70 eraztun egin ditzake. Soluzio hoberena aldatuko litzateke?

v) 2. motako gutxienez 22 eraztun egin behar balira, zein izango litzateke sarrera hoberena?

3.- Demagun

$$\max(4x_1+6x_2+5x_3)$$
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3\le 65 \\ x_1+x_2+x_3\le 20 \\ x_1+2x_2+3x_3\le 30 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$

non lehen hiru murrizketek sarrerak maximotu nahi dituen enpresa baten hiru baliabideren kopuru erabilgarri maximoa adierazten duten.

i) Plantea Bete ezazu honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik eta taula hau abiapuntutzat harturik aurkitu soluzio hoberena.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	-2	-1	1	-3	0	5
	1		0	1	0	20
	1			-1		10

ii) Zein baliabide dira oparoak eta zein urriak?

iii) Eman hirugarren murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko. Dagokion baliabidearen 5 unitate gehiago erosiko balira unitate bakoitzeko 1 prezioa ordainduz, komeni da erosketa hori egitea?

iv) Zein da helburu funtzioaren x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aldatu gabe?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2004ko EKAINA

1.- Demagun $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ matrizea, non $a,b,c \in \mathbb{R}$ diren.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna $b=1$ denean.

ii) Demagun $Q(\boldsymbol{x}) = {}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa.

a) $b=c=0$ eta $a \neq 0$ izanik, existitzen da $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den?

b) $b=0$ eta $c=2$ izanik, existitzen da $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den?

2.- Ahate jakiak ekoizten dituen artisau-enpresa batek bi produktu eskaintzen ditu, bata freskoa eta bestea kontserban. Taula honetan produktu bakoitza egiteko eta merkaturatzeko behar den denbora kg bakoitzeko jasotzen da:

	Freskoa (orduak/kg)	Kontserba (orduak/kg)	Ordu erabilgarriak
Hiltegia	0,5	0,8	1600
Prestaketa	1,25	2,5	5000
Ontziraketa	0,125	0,16	400

Biltegian gehienez 2000 kg produktu freskoa gorde daiteke. Bestalde, produktuen arrakasta dela eta, enpresak nahi bezain beste sal dezake produktu bietatik. Produktu freskoaren salneurria kg-ko 18 eurokoa da eta kontserbakoarena berriz kg-ko 9 eurokoa.

i) Eman enpresak produktu bakoitzetik ekoiztu behar duen kantitatea sarrera maximoa egiteko. Kalkulatu sail bakoitzean erabilitako ordu kopurua kantitate hoberen hauek ekoizteko.

ii) Aurreko ataleko erantzuna kontuan hartuta, esan zein sailetan komeni zaion enpresari langileei aparteko orduak egin ditzaten eskatzea sarrerak handitzeko. Enpresa aparteko ordu bakoitza zenbat ordaintzeko prest legoke sail ezberdinetan?

iii) Saltoki-gune bat ekoizpen guztia erosteko prest dago 24 eta 12 eurotan , enpresak kontserban ekoiztutako produktu freskoan ekoiztutakoa bezain beste edo gehiago izateko konpromisoa hartzen badu. Komeni al zaio enpresari bere ekoizpen guztia saltoki-gune honi saltzea?

3.- Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(5x_1 + 6x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Aurkitu grafikoki soluzioa.

ii) Osatu taula, aurreko problemari dagokiola jakinda.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
			1	0	
			0	1	4
				1	2
0	0	0	5		34

iii) Zein da helburu funtzioan x_1-eko koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aldatu gabe?

iv) Eman aldagai independenteen aldaketa tartea bigarren eta hirugarren murrizketetan oinarri hoberena alda ez dadin eta eman euren itzal prezioak.

v) Lehen ataleko grafikoaz baliatuz, esan zer gertatzen den problema berriaren soluzio hoberenarekin bigarren murrizketan aldagai independentearen aldaketa aurreko ataleko ezarritako tartea ez bada.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2005eko OTSAILA

1.- (5 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 3\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R} \text{ izanik.}$$

α-ren zein baliotarako izango da A matrizea diagonalgarria?

2.- (5 puntu) Demagun $Q(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa horrela definitua:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\cdot B\cdot M(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & b\\ 0 & b & 3\end{pmatrix},\ b\in\mathbb{R} \text{ izanik.}$$

Aurki ezazu $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta esan b-ren zein baliotarako beteko diren honako kasu huek, erantzuna azalduz:

i) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})<0$ betetzen da.

ii) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}$: $Q(\boldsymbol{x})>0$ betetzen da.

iii) $\exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ eta $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$ den.

iv) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ betetzen da.

3.- (10 puntu) Enpresa batek gitarrak eta mandolinak egiten ditu zur, metal eta lanorduak erabiliz. Musika tresna bakoitza egiteko beharrezkoak diren baliabide hauen kopuruak taula honetan daude:

	Gitarra	Mandolina
Zur	2	1
Metal	1	1
Lanorduak	1	2

Enpresak 50 unitate zur, 34 unitate metal eta 60 lanordu du eta gitarra bakoitza 200€tan eta mandolina bakoitza 125€tan saltzen du. Honako hau eskatzen da:

i) Aurki ezazu sarrera maximotzen duen produkzioa.

ii) Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko enpresa zur unitate bat gehiago eskuratzeagatik? Eta lanordu bat eskuratzeagatik?

iii) Enpresak, salmentak ziurtatzeko, 11 gitarra egiten dituenean gehienez 3 mandolina egingo dituela erabakitzen badu, zein izango da sarrera maximotzen duen produkzioa?

iv) Zein da lanorduak minimotzen dituen produkzioa, enpresak 4000 euroko sarrera, gutxienez, ziurtatu nahi badu?

4.- (10 puntu) Demagun honako programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1 - x_2 + 5x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

i) Baldin badakigu honako taula hau aurreko problemari dagokiola, aurki ezazu honi jarraitzen diona simplex metodoa erabiliz (aurki ezazu taula bat soilik).

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	***b***
0	A_4	1	3	2	1	0	0	10
0	A_5	1	3	-1	0	1	0	1
0	A_6	-1	3	1	0	0	1	2
		-2	1	-5	0	0	0	0

ii) Bete itzazu taula honen hutsuneak aurreko taulak erabili gabe eta ondo azalduz nola lortzen dituzun zenbaki horiek.

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	***b***
2	A_1	1	-1	0	1/3	0	-2/3	
0	A_5	0	6	0	0	1	1	3
5	A_3	0	2	1		0	1/3	4
		0		0	7/3	0	1/3	24

iii) Zein da hirugarren murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko?Aurki ezazu hirugarren murrizketaren itzal prezioa.

iv) Zein da helburu funtzioaren x_2-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

v) Hirugarren murrizketaren gai independentea 2tik 3ra pasatzen bada, aldatuko da soluzio hoberena?, zergatik?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2005eko EKAINA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & b & a\\ c & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ izanik.

i) b=2 baliorako, aztertu A-ren diagonalgarritasuna a eta c-ren balioen arabera.

ii) $b=a$ eta c=1 badira, har dezagun $Q(x)={}^{t}M(x)AM(x)$, $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$. Aurki ezazu adierazpen matrizea eta sailkatu forma koadratikoa a-ren balioen arabera.

2.- Ehundegi txiki batek bi motako tapizak egiten ditu: kalitate bikainekoak eta lehen kalitatekoak. Hauek egiteko artilea eta kotoia erabiltzen du, 480 kilo artile eta 450 kilo kotoi erabiltzeko kopuruak izanik. Kalitate bikaineko tapiz bat egiteko 6 kilo artile eta 5 kilo kotoi behar du eta lehen kalitateko bat egiteko, 4 kilo artile eta 5 kilo kotoi. Gainera, tapizen salmentei buruzko ikerketa baten ondorioz, lehen kalitateko tapizen produkzioak 60 edo gutxiago izan behar duela erabakitzen dute. Kalitate bikaineko tapiz bakoitzak 800€ eta lehen kalitatekoak 600€ balio badu, eta ekoizten den guztia saltzen bada,

i) Aurki ezazu tapizen produkzio hoberena enpresaren sarrera maximoa izateko.

ii) Kotoi gehiago eskura ahal izango balute, zenbat gehiago eskuratuko lukete? zein preziotan?

iii) Ehundegiak nahi izango balu saltzen duen kalitate bikaineko tapizen kopurua handitu, zenbatetan saldu beharko luke lehen kalitateko tapizak?

iv) Kalitate bikaineko bi tapizeko gehienez lehen kalitateko hiru tapiz egingo dutela erabakitzen badute, lehen atalean lortutako soluzio hoberena aldatuko litzateke?

3.- Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1+x_2+x_3)$$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 3\\ x_1+2x_2+x_3\ge 4\\ x_2+x_3\le 2\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases}$$

i) Bete ezazu aurreko problemari dagokion honako taula hau eta taula honetatik hasita, aurki ezazu problemaren soluzio hoberena, existitzen bada.

1	1	0	1	0		3
0	1	1	-1			1
	0		1	1	1	
	2			-1		

ii) Eman ezazu lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko eta eman ere bere itzal prezioa.
iii) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 1etik 4ra aldatzen bada, sortutako soluzioak hoberena izaten jarraituko du?, zergatik?
iv) Lehen murrizketaren gai independentea 3tik 4ra aldatzen bada, sortutako soluzioak hoberena izaten jarraituko du?, zergatik?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2006ko OTSAILA

1.- (5 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ non } a,\, b\in\mathbb{R} \text{ diren.}$$

a eta *b*-ren zein baliotarako izango da *A* matrizea diagonalgarria?

2.- (5 puntu) Demagun $Q(\boldsymbol{x})$ honako forma koadratiko hau:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})BM(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

non $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

Eman $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta sailkatu forma koadratikoa *a*-ren balioen arabera.

3.- (12 puntu) Konpainia batek garbigailuak eta ontzi-garbigailuak ekoizten ditu. 3 tailerretan egiten dira. 1. tailerrean motorrak egiten dira eta 1200 langile egokitu zaizkio; 2. tailerrean osagaiak ekoizten dira eta 1850 langilek dihardute; azkenik, 3. tailerrean muntatu egiten dira eta 900 langile daude. Langile bakoitzak asteko 40 ordu egiten du lan. Taula honetan unitate bat ekoizteko tailer bakoitzean behar den ordu kopurua jasotzen da:

	Garbigailuak	Ontzi-garbigailuak
1. tailerra	1	3
2. tailerra	3	4
3. tailerra	2	1

Garbigailu bakoitzarekin lortutako mozkina 50 eurokoa da eta ontzi-garbigailu bakoitzeko, ordea, 80 eurokoa. Bestalde, konpainiak produktu bakoitzetik, tailer edukierak kontuan hartuta, nahi bezain beste sal dezakeela ezagutzen du.

a) Kalkulatu konpainiaren mozkinak maximotzen dituen ekoizpena programazio linealeko problema moduan.
b) Ontzi-garbigailu bakoitzaren mozkina mantenduz, zer tartetan izan behar da garbigailuaren bakoitzaren mozkina ekoizpen hoberena aurreko atalean lortutakoa izateko?
c) Kalkulatu 1. eta 3. tailerreko lanorduan itzal prezioak.
d) a) atalean lortutako kontuan hartuta, konpainiako zuzendariak 3. tailerrean dagoen langile kopurua behar dena baino handiagoa dela ikusten du. Horrela, 3.

tailerretik 2. tailerrera 125 langile pasatzea erabaki du, zer gertatzen da mozkin hoberenarekin?

e) Produktu hauen eskariek behartuta, konpainiak bi ontzi-garbigailuko gutxienez 7 garbigailu ekoiztea erabakiko balu, zein litzateke orain ekoizpen hoberena?

4.- (4 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Osatu honako taula hau, aurreko problemari dagokion oinarrizko soluzio egingarri bati elkartuta dagoela jakinik, eta ebatzi.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1		-1	2	0	2
		1	-1	0	1
		-1		1	
0			4	0	

5.- (4 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Honako hau problemari dagokion taula hoberen bat dela jakinik, erantzun honako galdera hauek:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
-10/3	0	0	1	1/3	-7/3	3
-1/3	1	0	0	1/3	-1/3	1
7/6	0	1	0	-1/6	2/3	2
11/6	0	0	0	1/6	4/3	8

i) Zein da 2. murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Eman 2. murrizketaren itzal prezioa.

ii) Zein da helburu funtzioaren x_2 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

iii) Zer gertatzen da soluzio hoberenarekin 3. murrizketaren gai independentea 5-etik 6-ra pasatzen bada?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2006ko EKAINA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2 & a \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$ izanik.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna $a,b\in\mathbb{R}$ balioen arabera.

ii) b=-1 bada, har dezagun

$$Q(x) = {}^{t}M(x)AM(x)\,,\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

forma koadratikoa. Aurkitu $M(Q)$ eta sailkatu Q forma koadratikoa $a\in\mathbb{R}$ balioaren arabera.

2.- Enpresa batek *A* eta *B* bi motako hariak ekoizten ditu, zetazko haria eta kotoizko haria proportzio hauetan nahasiz; *A* motako haria lortzeko proportzioa hauxe da: %60 zetazko haria eta %40 kotoizkoa. *B* motako haria lortzeko proportzioa berriz: %40 zetazko haria eta %60 kotoizkoa. Zetazko metro bat 3 m.u. kostatzen da eta kotoizko metro bat 0,5 m.u. *A* motako hariaren metro baten ekoizpen prozesuaren kostua, lehengaia kontuan hartu gabe, 2,5 m.u.-koa eta *B* motako hariaren metro batena, berriz, 1 m.u.-koa. Astero zetazko hariko gehienez 1.800 metro erabil daitezke eta kotoizko hariko gehienez 2.400 metro. Horrez gainera, ekoizpen prozesuaren kostuak (lehengaiena kontuan hartu gabe) ezin du 6.000 m.u. gainditu. *A* motako hariaren metro baten eta *B* motako hariaren metro baten salmenta prezioak 8,5 m.u. eta 4,5 m.u., hurrenez hurren, dira.

i) Aurki ezazu enpresaren mozkin totala maximotzen duen asteroko produkzioa.

ii) Enpresari komeni al zaio ekoizpen prozesuaren kostua 6.000 m.u.-tik gora handitzea? Zer kantitate arte? Zeta gehiago erostea komeni al litzaioke? Zer preziotan erosiko luke?

iii) *A* motako hariaren metro baten prezioa 8,5 m.u.-etan utziz, aurkitu *B* motako hariaren prezioa enpresaren erabakia *B* motako haria soilik ekoiztea izateko. Prezio berri hauetan zer nahiago luke enpresak: zeta gehiago erostea edo kotoi gehiago erostea?

3.- Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\left(ax_1 + bx_2 - x_3\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

non $a,b\in\mathbb{R}$ diren

i) Ebatzi problema $a=2$ eta $b=-1$ direnean.

ii) $a=0$ eta $b=3$ balioei dagokien problemari elkartutako hau taula kontuan har dezagun.

		0	3	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\boldsymbol{b}$
3	A_2	1/4	1	1/2	1/2	0	3
0	A_5	-5/4	0	-7/2	-1/2	1	0
		3/4	0	5/2	3/2	0	9

1) Aurkitu problemaren bi murrizketen itzal prezioak eta oinarri hoberena ez aldatzeko murrizketa bakoitzaren gai independentearen aldaketa tartea.

2) Lehenengo murrizketaren gai independentea 6tik 2ra jaisten bada, soluzio hoberena aldatzen al da? Aldatzen bada, eman ezazu soluzio hoberen berria.

3) Aurki ezazu helburu funtzioaren x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2007ko OTSAILA

1.- (10 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 1\\ \beta & \gamma & \alpha\end{pmatrix}, \text{ non } \alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R} \text{ diren.}$$

i) β=0 eta γ=1 balioentzako, aurkitu, existitzen bada, *A*-ren balio propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat eta matrize diagonal bat, *A*-ren antzekoa.

ii) β=-1 eta γ=5 badira, sailkatu $Q(x)={}^tM(x)AM(x)$ forma koadratikoa $\alpha\in\mathbb{R}$ balioen arabera.

2.- (10 puntu) Enpresa batek bi produktu, P_1 eta P_2, ekoizten ditu bi lehengai, *A* eta *B*, erabilita. Taulan honetan produktu bakoitzetik tona bat ekoizteko behar diren lehengai kantitateak eta baita hauen erabilgarritasuna asteko, denak tonatan, jasotzen dira:

	P_1 produktua	P_2 produktua	erabilgarritasuna
A lehengaia	1	2	300
B lehengaia	4	3	720

Murrizketa teknologikoak direla eta P_2-ren produkzioa ezin da P_1-en produkzioaren bikoitza baino handiagoa izan. Tonako mozkina P_1 produktuarentzako 15 eurokoa da eta P_2 produktuarena, berriz, 20 eurokoa.

i) Zein da enpresaren mozkina maximotuko duen asteko produkzioa? Komeni al zaio *B* lehengaitik 720 tona gainetik erostea? Zenbat eta zer preziotara?

ii) Zein izan behar da P_2-ren mozkin minimoa, P_1-ena mantenduz, soilik P_1 produktutik ekoizteko?

iii) Legez mozkinak 3.000 euro baino gehiago ezingo direla izan ezartzen bada, zein da soluzio hoberena?

iv) Aurreko problemari honako informazio hau eransten lortzen dugun problema formulatu, ebatzi gabe:

-P_1-eko 3 tona bakoitzeko P_2-tik gutxienez 4 ekoiztu behar dira.

-Lehengaiei zerga berri bat ezarri zaie mozkin totala murriztuko duena, hain zuzen, *A*-ri tona bakoitzeko 0,5 euro eta *B*-ri tona bakoitzeko 0,6 euro.

3.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\left(50x_1 + 80x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 74 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 36 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Erabili zigorren metodoa jatorrizko problemarentzako oinarrizko soluzio egingarri bat lortzeko, hau da, aldagai artifizialak oinarritik kanpo utzi arte.

ii) Honako taula hau aurreko problemari elkartuta badago, lortu soluzio hoberena:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
A_1	1	0	-4/5	3/5	0	0	6
A_2	0	1	3/5	-1/5	0	0	14
A_5	0	0	4/5	2/5	1	-1	32
	0	0	8	14	0	M	1420

iii) Zein da bi lehenengo murrizketen itzal prezioa?

iv) Aurkitu soluzio hoberen berria lehenengo murrizketaren gai askea 5 unitate handitzen bada.

v) Hirugarren murrizketa $2x_1 + x_2 \leq 36$ murrizketa berriarekin ordezkatzen bada, QSB programaren irteera problema berriarentzako honako hau da:

Solution Summary for Problema

01-18-2007 17:03:13 Page: 1 of 1

Variable Number	Variable Name	Solution	Opportunity Cost	Minimum Obj. Coef.	Current Obj. Coef.	Maximum Obj. Coef.
1	X1	6	0	26.66667	50	60
2	X2	14	0	66.66666	80	150

Maximized OBJ = 1420 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

Constraint Summary for Problema

01-18-2007 17:03:13 Page: 1 of 1

Constraint Number	Constraint Status	Shadow Price	Surplus	Minimum R. H. S.	Current R. H. S.	Maximum R. H. S.
1	Tight (<)	8	0	38	48	55.5
2	Tight (<)	14	0	64	74	84
3	Loose (<)	0	10	26	36	M

Maximized OBJ = 1420 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

a) Zein da problema berriaren soluzio hoberena?

b) Zein murrizketek jasotzen dute lehengai oparoak? Zergatik?

c) x_1-en koefizientea helburu funtzioan 55era handitzen bada, soluzio hoberena aldatuko litzateke? Zergatik?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2007ko EKAINA

1.- (8 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix} b & 4 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna a eta b parametroen balio ezberdinetarako.

2.- (8 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max[3x_1+4x_2]$$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 30 \\ x_1+x_2\le 12 \\ x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

i) Kalkulatu grafikoki soluzio hoberena.
ii) Hiru murrizketen itzal prezioa kalkulatu.
iii) Jatorrizko problemari $2x_1-ax_2\ge 0$ murrizketa eransten bazaio, zer balio hartu behar du a-k soluzio hoberena ez aldatzeko?

3.- (4 puntu) Enpresa batek *A* eta *B* produktuak ekoizten ditu lehengai berdinarekin. *A* unitate bat ekoizteko 6 kg lehengai behar dira eta *B* unitate bakoitzeko, ordea, 2 kg. Lehengai hornitzailearen edukiera eguneko 8000 kg da, 2 euro kg-ko prezioan.
Produktu hauek ekoizteko enpresak gehienez 50 langile erabil ditzake eta bakoitzak egunean 8 ordu egiten du lan. *A* unitate bat ekoizteko 0.4 lanordu behar ditu eta *B*-ko unitate batek, ordea, 0.3. Lanordu baten kostua 10 eurokoa da.
Produktuen bukaeran makina berezi bat erabiltzen da eta enpresak soilik *A* produktua ekoizten badu eguneko gehienez 6000 unitate ekoitz ditzake, baina soilik *B*-tik ekoizten badu orduan gehienez 5000 unitate ekoitz ditzake *B*-tik. Gainera, egindako merkatu ikerketaren arabera, *A* produktuaren salmenta gutxienez totalaren %60 da.
Unitateko salmenta prezioak *A* eta *B* produktuentzako, hurrenez hurren, 20 eta 40 euro dira.
Formula ezazu, ebatzi gabe, programa lineal bat produktu bakoitzetik ekoiztuko den kantiatea erabakitzeko, helburua mozkina maximizatzea izanik.

4.- (7 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max[2x_1 + 4x_2 + x_3]$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

i) Honako taula hau problema honi dagokio. Osatu eta problema ebatzi.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	0	-7		-4/3	-5/3	2/3
1	0			2/3	1/3	
0	1	2		1/3	2/3	4/3
0	0			8/3	10/3	26/3

ii) x_1-en koefizientea helburu funtzioan 5 bada, aldatzen al da soluzio hoberena?

iii) Bigarren murrizketaren gai askea unitate bat txikiagotzen bada, zein da problema berriaren soluzio hoberena?

iv) Komeni al da lehenengo murrizketaren gai askea handitzea?

5.- (3 puntu) Enpresa batek labeak eta bitrozeramika plakak ekoizten ditu eta hauetako unitate bakoitzeko, hurrenez, hurren, 40 eta 20 euroko mozkinak lortzen ditu. Labe eta bitrozeramika plaka bakoitzak hiru tailer ezberdinetatik, *A*, *B* eta *C*, pasa behar du. Labe bakoitzak 1/2, 1/2 eta 3/2 ordu behar ditu, hurrenez hurren, *A*, *B* eta *C* tailerretan eta bitrozemarika plaka batek, ordea, 1,1/2 eta 1/2 ordu, hurrenez hurren. *A* eta *B* tailerretan asteko gehienez 30 lanordu daude erabilgarri eta *C* lantegian 40. x_1, x_2, hurrenez hurren, asteko labe eta bitrozeramika plaka unitateak adierazten badute, honako problema hau ebaztea da kontua:

$$\max[40x_1 + 20x_2]$$
$$\begin{cases} (1/2)x_1 + x_2 \le 30 & (A \text{ tailerra}) \\ (1/2)x_1 + (1/2)x_2 \le 30 & (B \text{ tailerra}) \\ (3/2)x_1 + (1/2)x_2 \le 40 & (C \text{ tailerra}) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Problemarentzako QSB programaren irteera honako hau da:

Solution Summary for Problema

01-23-2007 17:49:07 Page: 1 of 1

Variable Number	Variable Name	Solution	Opportunity Cost	Minimum Obj. Coef.	Current Obj. Coef.	Maximum Obj. Coef.
1	X1	20	0	10	40	60
2	X2	20	0	13.33333	20	80

Maximized OBJ = 1200 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown > < PageUp > < Hardcopy > < Cancel >

Constraint Summary for Problema

01-23-2007 17:48:34 Page: 1 of 1

Constraint Number	Constraint Status	Shadow Price	Surplus	Minimum R. H. S.	Current R. H. S.	Maximum R. H. S.
1	Tight (<)	8	0	13.33333	30	55
2	Loose (<)	0	10	20	30	M
3	Tight (<)	24	0	15	40	90

Maximized OBJ = 1200 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown > < PageUp > < Hardcopy > < Cancel >

i) Zein da enpresaren mozkinak maximizatzen dituen soluzio hoberena?
ii) Labe bakoitzeko mozkina 10 unitate jaisten bada, soluzio hoberena aldatuko da?
iii) Tailer batean 10 lanordu gehiago erabiltzea balego, zein tailer aukeratuko litzateke? zer eragin edukiko honek mozkin hoberenean?

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2008-ko OTSAILA

1.- Demagun honako forma koadratiko hau:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + (\lambda+1)x_3^2 + 2\lambda x_2 x_3 + 2x_1 x_3 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

i) $\lambda \in \mathbb{R}$ zein baliotarako betetzen da Q(x) $>$0 izatea edozein $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq \mathbf{0}$?

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ zein baliotarako betetzen da beti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ existitzea non $Q(x_1) > 0$, $Q(x_2) = 0$ eta $Q(x_3) < 0$?

iii) $\lambda = 0$ bada, existitzen da $x \in \mathbb{R}^3, x \neq \mathbf{0}$ non Q(x)= 0? Eman $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\}$ multzoa

2.-Enpresa batek 4 olio mota (1,2, 3 eta 4) ekoizten ditu bi oliba mota (A eta B) erabiliz. Taula honetan olio mota bakoitzetik litro bat lortzeko oliba bakoitzetik behar diren kg-ak jasotzen dira:

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	1	3	3
B	3	4	2	1

Honako murrizketa huek ere kontuan hartu behar dira:

- Asteko 100 tona A oliba eta 150 tona B oliba daude erabilgarri.
- 1 eta 2 motako olioen arteko kantitate totala gutxienez 3 eta 4 motakoen batuketa izan behar da.
- 1 motako 3 litroko gutxienez 2 eta 3 motakoen artean 4 litro ekoiztu behar dira.
- 1 motako ekoizpena ezin da 4 motakoaren %75 baino handiagoa izan.

Helburua olio ekoizpen totala maximizatzea bada, idatzi (ebatzi gabe) programazio linealeko problema moduan.

3.- Honako problema hau izanik:

$$\max(6x_1 + 2x_2)$$
$$\begin{cases} 22x_1 + 15x_2 \leq 630 & (M_1) \\ 4x_1 + x_2 \leq 80 & (M_2) \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 264 & (M_3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Irudikatu soluzio egingarrien multzoa eta eman problemaren soluzio eta balio hoberena.

ii) Kalkula ezazu M_1 eta M_3 murrizketen itzal prezioa.

iii) Zein izan behar da x_1-en koefizientea helburu funtzioan, soluzio hoberenean x_2= 0 izan dadin?

4.- Demagun honako problema hau:

$$\max(x_1+3x_2)$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 10 \\ x_1+x_2\le 6 \\ 2x_1+x_2\le 9 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

i) Ebatzi simplex metodoarekin.
ii) Eman lehenengo murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko.
iii) Lehenengo murrizketaren gai askea 4 unitate txikitzen bada, problemaren soluzio hoberena aldatzen al da? Zergatik?
iv) Zein da hiru murrizketen itzal prezioa?
v) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan $a\ge 0$ zenbakia bada, zer bete behar du a-k soluzio hoberena aldatzeko.

5.- Problema honetan mozkinak maximizatzen dira:

$$\max(10x_1+15x_2+10x_3)$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\le 60 & \text{(A)} \\ x_1+x_2+x_3\le 50 & \text{(B)} \\ 2x_1+x_2+x_3\le 40 & \text{(Lanorduak)} \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$

x_i (i=1,2,3) P_i produktutik astean ekoiztutako kg-ak dira. Horretarako A eta B lehengaiak erabiltzen dira eta hauen edukiera asteko 60 eta 50 kg da, hurrenez hurren. Gainera ekoizpen prozesurako astean 40 lanordu erabil daitezke.

WinQSB programaren irteera hau da:

Combined Report for LP Sample Problem

	10:42:40		Tuesday	January	29	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	10,0000	0	-5,0000	at bound	-M	15,0000
2	X2	20,0000	15,0000	300,0000	0	basic	10,0000	20,0000
3	X3	20,0000	10,0000	200,0000	0	basic	8,3333	15,0000
	Objective	Function	(Max.) =	500,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	60,0000	<=	60,0000	0	5,0000	40,0000	80,0000
2	C2	40,0000	<=	50,0000	10,0000	0	40,0000	M
3	C3	40,0000	<=	40,0000	0	5,0000	30,0000	50,0000

i) P_1 produktuaren mozkin unitarioa 15era handitzen bada, produktu honen ekoizpena handitzea komeni al zaio?
ii) Lehengai baten baten edukiera handitzea posible balitz, zein aukeratuko luke? Zer eragin edukiko luke mozkin hoberenean?
iii) Lanordu estrak kontratatzea komeni al zaio? Zenbat ordainduko luke ordu estra bakoitzeko?

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL 2008-ko EKAINA

1.-(9 puntu) Demagun *A* matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Honako hau eskatzen da:

i) Zer erlazio bete behar da *a,b* eta *c* parametroen artean *A* matrizeak balio propio hirukoitz bat izan dezan.

ii) *a*=1 balioarentzat, kalkulatu *b* eta *c* parametroen balioak $\lambda = -1$ *A* matrizearen balio propia izan dain eta $x = (1,-2,2)$ berari elkartutako bektore propio elkartua..

iii) *a*=1, *b*=1 eta *c*=2 balioentzat, aurkitu *A* matrizearen balio propioak, bektore propioak eta azpiespazio espektralak. *A* diagonalgarria al da? Horrela bada, eman *A*-ren antzeko matrize diagonal bat?

2.- (8 puntu) Honako problema hau izanik:

$$\max(4x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \leq 270 & (1) \\ x_1 \leq 35 & (2) \\ x_2 \leq 20 & (3) \\ x_1 - 2x_2 \leq 22 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Irudikatu soluzio egingarrien multzoa eta lortu soluzio hoberena eta balio hoberena.

ii) Kalkulatu (2) eta (3) murrizketen itzal prezioa.

iii) Zein izan behar da x_1-en koefizientea helburu funtzioan soluzio hoberenean x_2=20 betetzeko?

3.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(x_1 + x_2 + 2x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

i) Honako taula hau problemari dagokion taula bat dela jakinik, bete hutsuneak (aurreko taulak erabili gabe) eta simplex metosoa erabiliz ondoren datorren taula lortu (soilik bat)

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	3	0	1	0	1	4
0	A_5	0		0	0	1	1	
2	A_3	1	-1	1	0	0	-1	4
		1	-3	0	0	0		

ii) Honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik, erantzun honako galdera hauek:

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	1	0	1	-1	0	2
0	A_6	0	2	0	0	1	1	2
2	A_3	1	1	1	0	1	0	6
		1	1	0	0	2	0	12

a) Zein da bigarren murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Eman bigarren murrizketaren itzal prezioa.

b) Bigarren murrizketaren gai askea 6-tik 7-ra pasatzen bada, soluzio hoberena aldatuko al da? Zergatik?

c) Zein da helburu funtzioaren x_3-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

4.- (3 puntu) problema honetan sarrerak maximizatzen dira:

$$\max\left(4x_1+6x_2+5x_3\right)$$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3\le 65 & (A) \\ x_1+x_2+x_3\le 20 & (B) \\ x_1+2x_2+3x_3\le 30 & (C) \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0 \end{cases}$$

non x_i (i=1,2,3) egunean P_i produktutik ekoizten diren kg-ak diren. Horretarako hiru lehengai erabiltzen dira, A, B eta C, eta hauen erabilgarritasuna, hurrenez hurren, 65, 20 eta 30 kg da.

WinQSB programaren irteera honako hau da:

Combined Report for LP Sample Problem

	16:05:38		Monday	January	28	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	10,0000	4,0000	40,0000	0	basic	3,0000	6,0000
2	X2	10,0000	6,0000	60,0000	0	basic	4,5000	8,0000
3	X3	0	5,0000	0	-3,0000	at bound	-M	8,0000
	Objective	Function	(Max.) =	100,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	40,0000	<=	65,0000	25,0000	0	40,0000	M
2	C2	20,0000	<=	20,0000	0	2,0000	15,0000	25,0000
3	C3	30,0000	<=	30,0000	0	2,0000	20,0000	40,0000

i) Enpresari A-tik kg gehiago edukitzea komeni al zaio? Zergatik?

ii) Enpresak C-tik 5 kg gehiago hartuko balitu, zenbatean handituko lirateke enpresaren sarrerak?

iii) P_2-ren prezioa kg-ko 5-era jaitsiko balitz, enpresarentzako komenigarria litzateke produktu honen ekoizpena txikiagotzea?

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2009-ko URTARRRILA

1.- Enpresa batek bi legami mota ekoizten ditu: bata pastelak egiteko eta bestea ogia egiteko. Asteko legami ekoizpena pastelak egiteko gutxienez 1000 kg-koa izan behar da eta ogitako legamiarena gutxienez 2500 kg. Gainera, pastelak egiteko 3 kg legamiko gutxienez 5 kg ogitako legami ekoiztu behar dira. Azkenik, asteko legami ekoizpenak ogia egiteko gutxienez pastelak egitekoarena baino 2000 kg gehiago izan behar du.

a) Gaur egun A ekoizpen-planta bakarra dago erabilgarri. Bertako kg-ko mozkinak 15 €-koak dira pastelak egiteko legamiarentzat eta 8 €-koak ogia egitekoarentzat. Formula ezazu problema helburua mozkinak maximizatzea bada.

b) Enpresak B ekoizpen-planta berria erosi du. Bertan ere bi legami motak ekoiztuko ditu. Mozkinak B planta honetan 13 €-koak dira pastelak egiteko legamiarentzat eta 10 €-koak ogia egitekoarentzat. Formula ezazu problema planta bakoitzean legami bakoitzeko asteko ekoizpena erabakitzeko, helburua mozkinak maximizatzea bada eta legami mota bakoitzeko planta bakoitzean gutxienez 500 kg ekoiztu behar badira astean.

2.- Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\ (10x_1 + 7x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Ebatzi grafikoki problema.

b) Kalkulatu murrizketen itzal prezioak.

c) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan 3 bada soluzio hoberena aldatzen al da?

d) $ax_1 - x_2 \leq 0$ murrizketa eransten bada, zein izan behar da a soluzio hoberena a) atalean lortutako berbera izateko?

3.- Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\ (3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Problemari dagokion honako taula hau osatu:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
	-1		1	0	-2	
0	2		0	1	1	6
-1	1		0	0	1	4
-7			0		4	

b) Honako taula hau ere problemari badagokio, erantzun honako galdera hauek:

		3	2	4	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
3	A_1	1	1	0	1/3	2/3	0	13/3
0	A_6	0	2	0	0	1	1	6
4	A_3	0	0	1	1/3	-1/3	0	7/3
		0	1	0	7/3	2/3	0	67/3

i) Zein da soluzio hoberena bigarren murrizketaren gai askea 3 unitate murrizten bada?

ii) Zein da helburu funtzioko x_3-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

iii) Lehen edo hirugarren murrizketaren gai askea handitzekotan, zein aukeratuko zenuke? Zergatik? Zer eragin du balio hoberenean?

4. Demagun

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Aztertu a-ren eta b-ren zein baliotarako izango den A matrizea diagonalgarria.

b) a=1 eta b=0 izanik eman A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat.

c) $b=2\sqrt{a}$ $(a\geq 0)$ bada eta Q horrela definitutako forma koadratikoa: $Q(x)={}^tM(x)AM(x)$ edozein $x\in\mathbb{R}^3$. Eman $M(Q)$ eta Q sailkatu a-ren balioen arabera.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2009-ko EKAINA

1.- (7 puntu) Enpresa batek 3 produktu, P_1, P_2 eta P_3, ekoizten ditu soilik bi lehengai, M_1 eta M_2, nahastuz. P_2 ekoizteko M_1 eta M_2 kantitate berdinean nahasten dira. P_1-ko kg bakoitzak M_1-eko %20 eta M_2-ko %80 dauka eta P_3-ko kg bakoitzak M_1-eko %60 eta M_2-ko %40. Lehengaien erabilgarritasuna astean 1000 kg-koa da M_1-entzako eta 2000 kg-koa M_2-rentzako. Prezioak kg-ko berriz, 3 m.u. M_1-entzako eta 2 m.u. M_2-rentzako. Ekoizpen kostua (lehengaien kostuaz aparte) 2 m.u.-koa da ekoiztutako kg-ko.
Egungo eskaria kontuan hartuta, P_1-eko 3 kg-ko gutxienez P_2-ko 2 kg ekoiztu behar dira eta P_2-ko ekoizpena gehienez P_3-renaren bikoitza izan behar da.
Produktuen salneurriak 10, 15 eta 20 m.u. izanik, P_1, P_2 eta P_3-ko kg-ko hurrenez hurren, formula ezazu Programazio Linealeko problema (ebatzi gabe) helburua mozkinak maximizatzea bada.

2.- (8 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *a=0* bada eta $(1,0,-2)$ *A* matrizearen 0 balio propioari elkartutako bektore propioa bada, zein da *b*-ren balioa? *A* eta *b* balio hauentzako aurkitu *A* matrizearen bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat.

b) *b*=1 balioarentzako, demagun *Q* forma kuadratikoa: $Q(x) = {}^tM(x)AM(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Aurkitu *M*(*Q*) eta *Q* sailkatu *a*-ren balioen arabera.

3.- (8 puntu) Demagun problema hau:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Irudikatu soluzio egigarrien multzoa eta kalkulatu soluzio hoberena.

b) Zein da x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aurreko atalekoa izateko?

c) Kalkulatu bigarren murrizketaren itzal prezioa.

4.- (7 puntu) Demagun problema hau:

$$\max(5x_1 + 3x_2 + 4x_3)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Kalkulatu soluzio hoberena simplex metodoa erabiliz.

b) Eman hirugarren murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko eta bere itzal prezioa.

c) x_3 aldagaiaren koefizientea helburu funtzioan λ denotatzen badugu, kalkulatu soluzio hoberenak λ- k zero edo balio handiagoa hartzen duenean.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL,2010-eko urtarrila

1. Produktu bat bi fabriketan F1 eta F2 ekoizten da.Fabrika hauen ekoizpen-edukiera, bakoitzarentzako,150 tonakoa da. Ekoizpenaren zati bat C1, C2 eta C3 hirietara bidaltzen da. Produktu honen eskaria hiri hauetan 35, 65 eta 50 tona da, hurrenez hurren.
Taula honetan fabrika bakoitzetik hiri bakoitzerako garraio-kostuak, tonako eta mila eurotan, jasotzen dira.

Fabrika	C1	C2	C3
F1	3	7	8
F2	2	5	6

Fabrika bakoitzetik hiri bakoitzera gutxienez 10 tona bidali behar da. F1 fabrikatik bidalitako kantitate totala, gutxienez bi fabriketatik bidalitako totalaren %60 izan behar da.
Garraio kostu totala minimizatuz, fabrika bakoitzetik hiri bakoitzera, bere eskaera asetuz, zer bidali behar den erabakitzeko, formula ezazu problema programazio linealeko problema moduan.

2. Demagun:

$$\max(3x_1 + 4x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Adierazi zein murrizketan diren aseak (8,5) soluzio egingarrian. Zer balio lortzen du helburu funtzioak soluzio horretan.
b) Ebatzi problema grafikoki eta eman soluzio eta balio hoberena.
c) Lehen edo bigarren murrizketen gai askea nahi bezain beste unitate handitzea posible bada eta helburu funtzioa maximizatu nahi badugu, bietatik zein aukeratuko zenuke handitzeko? Zenbat úntate? Zergatik?
d) Zein da hiru murrizketen itzal prezioa?
e) Egin hirugarren murrizketan nahi duzun aldaketa problemaren soluzio hoberena b) atalean lortutakoa izatea ezinezkoa izan dadin.

3. Demagun:

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Osatu honako taula hau simplex metodoaren urrats bati dagokiona dela jakinik, non A4 eta A5 bektoreak lehenengo eta bigarren murrizketei, hurrenez hurren, elkartutako lasaiera-aldagaiak diren (ez du balio metodoa hasieratik egiteak).

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	-1		1	0	
0	1		1	1	

Zein da taulari elkartutako problema estandarraren oinarrizko soluzio egingarria? Hoberena al da? Kontrako kasuan adierazi oinarria nola aldatuko den metodoaren urratsa honetara pasatzeko.

b) Honako taula hau problema estandarrari aplikatutako simplex metodoaren urrats bati elkartuta badago:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	0	0	2	1	3
0	1	1	1	1	2
0	0	1	5	3	8

Zein da taulari elkartutako problema estandarraren oinarrizko soluzio egingarria? Hoberena al da? Taula hoberenetik abiatuta kalkulatu zenbateraino alda daitekeen lehenengo murrizketaren gai askea oinarri hoberena aldatu gabe. Eman murrizketa honen itzal prezioa.

c) Jatorrizko problemaren bigarren murrizketaren zeinua $\geq$ aldatzen badugu, zein da problema berriaren soluzio hoberena? Arrazoitu b) ataleko taulan beharrezkoak dituzun aldaketak eginda, metodoaren urrats guztiak berriro egin gabe.

4.

a) Demagun A matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} d & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

non $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Aztertu A diagonalgarritasuna a, b, c eta d balioen arabera $d \neq 0$ denean.

b) Demagun $Q(x) = {}^tM(x)BM(x)$ forma koadratikoa non:

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$b+c=0$ bada, Q sailkatu a, b eta c balioen arabera.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL, 2010-eko ekaina

1. Valentziar nekazari batek bi laranja mota A eta B ekoizten du eta Espainian eta Frantzian banatzen ditu. Ekoizpen kostua tonako 200 € eta 250 € da, hurrenez hurren, A eta B-rentzat. Frantzian banatuz gero, garraio kostua gehitu behar zaio, ekoizpen kostuaren %10ean estimatutakoa mota bakoitzarentzako. Nekazariak 1000 ha-ko lursaila du. B motako laranja tona bat ekoizteko 1.5 ha beha du eta A motako tona baloitzeko berriz 1 ha. B motako ekoizpenaren erdia gutxienez Frantzian banatu behar da. Espainian gehienez ekoizpen totalaren %60 banatuko da. Espainian banatutako A motako 3 tonako Frantzian, mota honetako, 2 tona gutxienez banatu behar dira. Laranja mota bakoitzeko 300 tona ekoiztu behar da gutxienez. Formula (ebatzi gabe) ezazu problema.

2. Demagun problema hau:

$$\max(6x_1 + 5x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Irudika ezazu soluzio egingarrien multzoa eta kalkula ezazu soluzio hoberena.

b) Zein da helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizentearen aldaketa tartea 3. murrizketa soluzio hoberenean ase egon dadin?

c) Kalkulatu lehenengo murrizketaren itzal prezioa.

d) Problemari $ax_1 - x_2 \le 0$, ($a \ge 0$) murrizketa eransten bazaio, zeintzuk dira a-ren balioak soluzio hoberena aldatzeko?

3. Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(6x_1 + 4x_2 + x_3)$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 65 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ x_i \ge 0 \ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

a) Osatu honako taula hau (aurreko taulak egin gabe), problemari dagokiola jakinik eta, bertatik, kalkulatu Simplex metodoko hurrengo taula.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
7	-1	0	1	0	-2	
	1	0			-1	10
1	2				1	10
					1	

b) Honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik, erantzun galdera hauek:

		6	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	-6	-1	1	-3	0	5
6	A_1	1	1	1/3	0	1/3	0	20/3
0	A_6	0	1	2/3	0	-1/3	1	10/3
		0	2	1	0	2	0	40

i) Zein murrizketa da ase eta zein da oparo?

ii) Zein da bigarren murrizketaren gai askearean aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Baliabide honetatik 1 unitate gehigarri erostea posible balitz unitateko 1€ prezioan, ekoizteko erabiltzeko erostea komeniko al litzateke?

iii) Zein da helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizentearen aldaketa tartea soluzio hoberenean ez aldatzeko?

4. Demagun $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matrizea.

a) $\boldsymbol{a}$-ren zein baliotarako da $M(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bektorea A-ren bektore propioa?

b) $\boldsymbol{a}$-ren zein baliotarako da A matrizea diagonalgarria?

AZTERKETEN ERANTZUNAK

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2002ko URTARRILA

1.- i) Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) a eta b-ren zein baliotarako izango da (2,1,0) A-ren bektore propioa?
b) a eta b-ren zein baliotarako izango da 1 A-ren balio propioa?
c) a eta b-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

ii) Demagun $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}$. Sailkatu Q forma koadratikoa a-ren balio desberdinetarako.

i.a) (2,1,0) A-ren bektore propioa izateko $AM(2,1,0)=\lambda M(2,1,0)$ bete egin behar du:

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+a=2\lambda\\ 1=\lambda\\ 2b=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{a=b=0};\quad \lambda=1.$$

i.b) 1 A-ren balio propioa izateko $|A-I|=\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b & 0 & 0\end{vmatrix}=0$, eta hala da a eta b edozein baliotarako.

i.c) Horretarako $|A-\lambda I|=0$ polinomio karakteristikoa aterako dugu:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & a & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ b & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3=0\Rightarrow\lambda=1\ (\textit{hirukoitza})$$

Eta diagonalgarria izateko dim(S(1))=3-heina(A-I)=3 izan behar du eta hori a=b=0 denean soilik gertatzen da:

$$\begin{cases}a=0, b=0: & \text{heina}(A-I)=0\\ a\neq 0, b=0: & \text{heina}(A-I)=1\\ a=0, b\neq 0: & \text{heina}(A-I)=1\\ a\neq 0, b\neq 0: & \text{heina}(A-I)=2\end{cases}$$

ii) $M(Q)=\begin{pmatrix}a & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & a\end{pmatrix}$ bada, bere azpideterminante nagusiak hauek dira:

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, -1, a\}$
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{-a-4, a^2, -a-9\}$

$|M(Q)| = -a^2-13a = -a(a+13)$

Q definitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak >0 direnean: ezinezkoa da, lehen ordenako azpideterminante nagusi bat negatiboa delako.

Q erdidefinitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 eta $|M(Q)|=0$ direnean: ezinezkoa da, lehen ordenako azpideterminante nagusi bat negatiboa delako.

Q definitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusi guztiak <0 eta ordena bikoitiko azpideterminante nagusi guztiak >0 direnean: $a<0$, $-a-4>0$, $-a-9>0$, $-a(a+13)<0$, hau da, $a<-13$.

Q erdidefinitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusi guztiak ≤ 0, ordena bikoitiko azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 eta $|M(Q)|=0$ direnean: $a\leq 0$, $-a-4\geq 0$, $-a-9\geq 0$, $-a(a+13)=0$, hau da, $a=-13$.

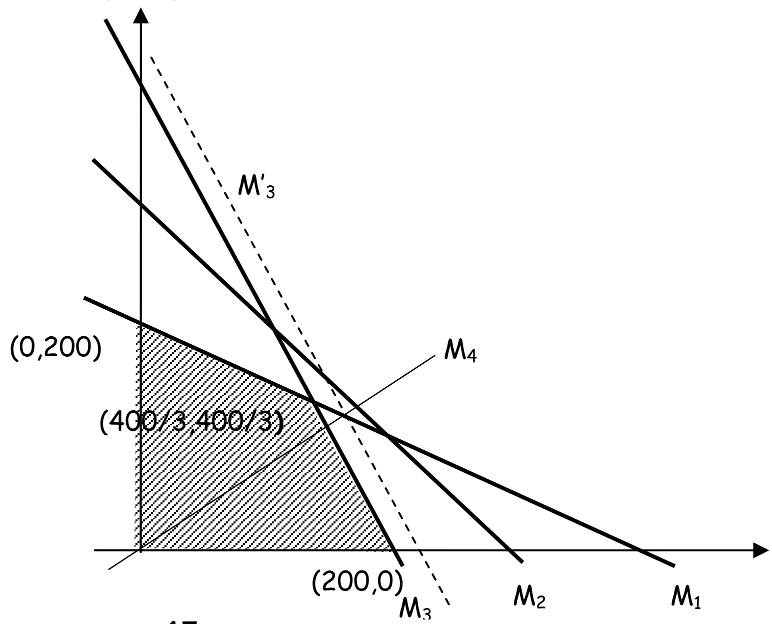
Eta Q indefinitua izango da $a>-13$ denean.

2.- Enpresa batek garia, lupulua eta malta erabiliz bi motako garagardo ekoizten du: horia eta beltza. Gaur egun enpresak 40 kg. gari, 30 kg. lupulu eta 40 kg. malta dauka. Litro bat garagardo hori 40 zentimotan saltzen da eta 0,1 kg. gari, 0,1 kg. lupulu eta 0,2 kg. malta behar du. Litro bat garagardo beltz 50 zentimotan saltzen da eta 0,2 kg. gari, 0,1 kg. lupulu eta 0,1 kg. malta behar du. Enpresak produzitzen duen garagardo guztia sal dezake.

i) Eman ezazu programazio linealeko problema non enpresaren sarrerak maximotzen diren, eta aurki ezazu problemaren soluzio hoberena.
ii) Aurki ezazu garagardo horiaren prezioen tartea soluzio hoberena i) apartatuan lortutakoa izaten jarraitzeko.
iii) 4 kg. malta gehiago izango balu, zein izango litzateke soluzio hoberena? Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko 4 kg. gehiago horiengatik?
iv) Merkatu azterketa batek aholkatzen badu garagardo beltzak ezin duela gainditu produkzio osoaren %40a, zein izango litzateke soluzio hoberena?

i) x_1 garagardo horia litrotan eta x_2 garagardo beltza litrotan badira,

$$\max\,(0,4x_1+0,5x_2)$$
$$\begin{cases} 0,1x_1+0,2x_2\leq 40 \\ 0,1x_1+0,1x_2\leq 30 \\ 0,2x_1+0,1x_2\leq 40 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



Berehala konturatzen gara 2. murrizketak ez duela inolako eraginik soluzio egingarrien multzoan, beraz soluzio hoberena lortzeko ez dugu kontuan hartuko: m_3=-2 < m_f=-4/5 < m_1=-1/2 (edo $|m_1|$=1/2 < $|m_f|$=4/5 < $|m_3|$=2), hau da, soluzio hoberena 1. eta 3. murrizketak ebakitzen diren puntuan dago, hots, (400/3, 400/3) puntuan eta balio hoberena 120€ da.

ii) Soluzio hoberena bertan mantentzeko, helburu funtzioaren maldak 1. murrizketaren eta 3. murrizketaren artean egon beharko luke: -2 < m_f=-p_h/0,5 < -1/2 (edo 1/2 < $|m_f|$=p_h/0,5 < 2) (non p_h garagardo horiaren prezioa den) Beraz, 0,25 < p_h < 1.

iii) M_3 murrizketa berria honako hau izango da: $0{,}2x_1+0{,}1x_2 \leq 44$ eta soluzio hoberen berria M_1 eta M_3 ebakitzen diren puntuan kokatuko da: (160, 120) eta balio hoberena 124€ da; beraz, aurreko balio hoberena 120 denez, enpresa prest egongo litzateke **4€** ordaintzeko 4 kg. malta horiengatik.

iv) Orain M_4: $x_2 \leq 0{,}4(x_1+x_2)$ murrizketa berria sartzen da eta aurreko soluzio hoberena ez da oraingo problemaren soluzio egingarria; soluzio hoberen berria M_3 eta M_4 ebakitzen diren puntuan dago: (150,100).

3.- Demagun honako problema hau:

$$\max(4x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau baldin badakigu problemaren oinarrizko soluzio egingarri bati elkartutakoa dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	b
	1	-1		4
1		1		4
-3		-1		4

ii) Honako hau problemaren taula hoberen bat da:

		4	1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	b
4	A_1	1	1/2	0	1/2	4
0	A_3	0	-1/2	1	1/2	0
		0	1	0	2	16

a) Aldatzen da soluzio hoberena bigarren murrizketaren gai independentea 12 bada?

b) Zein izan behar du bigarren murrizketaren gai independenteak soluzio hoberena (8,0) izateko?

c) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan 6 bada, aldatzen da soluzio hoberena? Hala bada, kalkula ezazu soluzio hoberen berria.

d) Zein izan behar du x_1-en koefizienteak helburu funtzioan, problemaren beste datuak finkoak mantentzen diren bitartean, balio hoberena 24 izateko?

i) Koefizienteen matrizea: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

	A_1	A_2	A_3	A_4	b
A_2	***1***	1	-1	***0***	4
A_4	1	***0***	1	***1***	4
	-3	***0***	-1	***0***	4

ii.a) Horretarako bigarren murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea aztertuko dugu, oinarri matrizea ez aldatzeko, beraz, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zutabea koefizienteen matrizean A_4 da, orduan:

$b+A_4\varepsilon$
$4+1/2\varepsilon$
$1/2\varepsilon$
$16+2\varepsilon$

Eta gai independentea 12 denez, $\varepsilon=4$ da eta soluzio hoberena (6,0) izango da, beraz aldatzen da.

ii.b) Soluzio hoberena (8,0) izateko $4+1/2\varepsilon=8$, hots, $\varepsilon=8$ eta orduan gai independenteak 16 izan behar du. (konturatu $\varepsilon=8$ denean $1/2\varepsilon \geq 0$ dela ere)

ii.c)

		4	***6***	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	b	θ	
4	A_1	1	1/2	0	1/2	4	8	→
0	A_3	0	-1/2	1	1/2	0		
		0	***-4***	0	2	16		
			↑					

Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 6 bada azken errenkadako elementu bat negatiboa da eta taulak hoberena izateari uzten dio, beraz

		4	6	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	b
6	A_2	2	1	0	1	8
0	A_3	1	0	1	1	4
		8	0	0	6	48

Eta soluzio hoberen berria (0,8) da.

ii.d)

		n	1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	**b**
n	A_1	1	1/2	0	1/2	4
0	A_3	0	-1/2	1	1/2	0
		0	$1/2n$-1	0	$1/2n$	**$4n=24$**

Balio hoberena 24 izateko $4n$=24, hots, n=6 eta azken errenkadako elementu guztiek positiboak izaten jarraitzen dutenez, taulak hoberena izaten jarraitzen du.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2002ko EKAINA

1.- Demagun honako matrize hau $A=\begin{pmatrix} a & 3 & 8 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

i) *a*-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea?

ii) Demagun $Q(\mathbf{x})={}^{t}M(\mathbf{x})AM(\mathbf{x})$ forma koadratikoa. Aurki ezazu $M(Q)$ eta sailkatu forma koadratikoa *a*-ren balio desberdinetarako.

i) *A*-ren polinomio karakteriskoa aztertuko dugu:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & 3 & 8 \\ 3 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^3-9(a-\lambda)=(a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-9\right];$$

$$\lambda_1=a,\ \lambda_2=a+3,\ \lambda_3=a-3$$

Eta hiru balio propio desberdin direnez, *a*-ren edozein baliotarako *A* diagonalgarria da.

ii) $M(Q)=\begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 3 & a & 0 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$. Eta azpideterminante nagusiak hauek dira:

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, a, a\}$

2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a^2-9, a^2-16, a^2\}$

$|M(Q)|=a(a^2-25)$

Q definitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak >0 direnean: $a>0$, $a^2-9>0$, $a^2-16>0$, $a^2>0$, $a(a^2-25)>0$; hots, $a>5$ denean.

Q erdidefinitu positiboa da azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 eta $|M(Q)|=0$ direnean: $a\geq 0$, $a^2-9\geq 0$, $a^2-16\geq 0$, $a^2\geq 0$, $a(a^2-25)=0$; hots, $a=5$ denean.

Q definitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusi guztiak <0 eta ordena bikoitiko azpideterminante nagusi guztiak >0 direnean: $a<0$, $a^2-9>0$, $a^2-16>0$, $a^2>0$, $a(a^2-25)<0$, hots, $\boldsymbol{a<-5}$ denean.

Q erdidefinitu negatiboa da ordena bakoitiko azpideterminante nagusi guztiak ≤ 0, ordena bikoitiko azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 eta $|M(Q)|=0$ direnean: $a\leq 0$, $a^2-9\geq 0$, $a^2-16\geq 0$, $a^2\geq 0$, $a(a^2-25)=0$; hots, $a=-5$ denean.

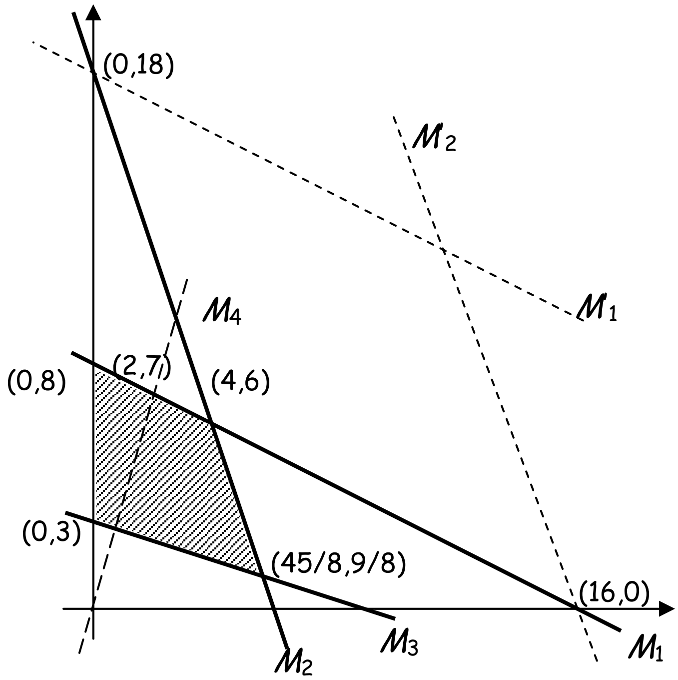
Eta Q indefinitua izango da $-5<a<5$ denean.

2.- Enpresa batek mota zehatz bateko mahaiak eta aulkiak ekoizten ditu, 20 eta 25 euroko mozkina hurrenez hurren lortuz. Ekoizpen prozesuak hala eskatzen duenez, mahai edo aulki bakoitzak enpresaren hiru lantegi desberdinetatik pasatu behar dute. Mahai batek 1, 3 eta 1 ordu behar ditu *A*, *B* eta *C* lantegietan hurrenez hurren, eta aulki batek 2, 1 eta 3 ordu hurrenez hurren. *A* eta *B* lantegiek gehienez 16 eta 18 lanordu eguneko hurrenez hurren egin dezakete eta *C* lantegiak gutxienez 9 ordu eguneko.

i) Aurki ezazu eguneko ekoizpen hoberena enpresaren helburua mozkina maximotzea bada.
ii) Zein izan beharko zuen mahai bakoitzaren mozkinak enpresarako hoberena aulki kopuru handiena ekoiztea izango balitz?
iii) Hasierako baldintzapetan, enpresak ahal izango balu eguneko ordu bat gehiago sartzea *A* edo *B* lantegietako batean soilik, zein aukeratuko luke?
iv) Salmenta ikerketa baten ostean enpresak erabakitzen du 2 mahaiko gutxienez 7 aulki ekoiztea, aldatuko zuen hasierako soluzio hoberena?

x_1 mahai kopurua eta x_2 aulki kopurua bada, problema horrela garatzen da:

$$\max(20x_1 + 25x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez (irudian ikusten dugu) soluzio hoberena erpin batean egongo da, beraz:
$f(0,8)=200$€
$f(0,3)=75$€
$f(45/8,9/8)=140{,}625$€
$f(4,6)=230$€

Edo maila kurben malden bitartez:
Helburu funtzioari dagokion maldaren balio absolutua: $|m|$=20/25
Lehen murrizketari dagokion maldaren balio absolutua: $|m_1|$=1/2
Bigarren murrizketari dagokion maldaren balio absolutua: $|m_2|$=3
$|m_1|<|m|<|m_2|$ da.
Soluzio hoberena (4,6) da eta mozkin handiena 230€.

ii) Helburu funtzioaren maila kurben malda $-\frac{m_m}{m_a}$ (m_m eta m_a mahaien eta aulkien mozkina hurrenez hurren izanik) eta aulkiak soilik ekoiztu nahi badu: $-\frac{m_m}{25}$=-m_1=$-\frac{1}{2}$; m_m=25/2. Horrela soluzio hoberena $\overline{(0,8)(4,6)}$ segmentu osoa izango litzateke, eta m_m<12,5 bada soluzio hoberena (0,8) izango litzateke, hau da, aulkiak soilik egingo ditu.

iii) M'_1: $x_1+2x_2\leq 16+a$
(4,6)$\rightarrow$(0,18)
$a=0\rightarrow a=20$
$\lambda_1=\frac{f(0,18)-f(4,6)}{20}$=11€

M'_2: $3x_1+x_2\leq 18+b$
(4,6)$\rightarrow$(16,0)
$b=0\rightarrow b=30$
$\lambda_2=\frac{f(16,0)-f(4,6)}{30}$=3€
Ordu bat gehiago sartzekotan lehen lantegian sartuko luke, mozkin handiagoa lortzen baitu.

iv) M_4 murrizketa berria $7x_1\leq 2x_2$ izango da eta (4,6) hasierako soluzio hoberenak ez du betetzen murrizketa hau. Soluzio hoberen berria, irudian ikusten den bezala, (2,7) da.

3.- Demagun problema hau:

$$\max\,(3x_1+2x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau, baldin badakigu problemaren oinarrizko soluzio egingarri bati elkartutako taula dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1			1	0	5
	0	1	-1		4
	0				10

ii) Baldin badakigu taula hau problemaren taula hoberen bat dela:

		3	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
2	A_2	0	1	-1/2	3/2	0	3
3	A_1	1	0	1/2	-1/2	0	2
0	A_5	0	0	-3/2	7/2	1	4
		0	0	1/2	3/2	0	12

a) Eman lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena alda ez dadin.

b) Zein izan behar da bigarren murrizketaren gai independentea soluzio hoberena (0,9) izateko?

c) Eman helburu funtzioaren x_1-en koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko.

d) Zein izan behar du helburu funtzioaren x_2-ren koefizienteak balio hoberena 9 izateko?

i) Koefizienteen matrizea: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

		3	**2**	**0**	**0**	**0**	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
2	A_2	1	***1***	***0***	1	0	5
0	A_3	***2***	0	1	-1	***0***	4
0	A_5	***3***	0	***0***	***2***	***1***	10
		-1	***0***	***0***	***2***	***0***	***10***

A_2, A_3 eta A_5 zutabeak oinarrian daudenak direlako eta $A_1=1A_2+\mathbf{2}A_3+\mathbf{3}A_5$; $A_4=1A_2-1A_3+\mathbf{2}A_5$. Beste zenbaki guztiak inolako arazorik gabe lortuko dira.

ii.a) $3x_1+x_2\leq 9+\varepsilon$. Horretarako koefizienteen matrizean $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bektorea A_3 da, beraz:

$b+A_3\varepsilon$	
$3-1/2\varepsilon$	$\geq 0; \Rightarrow \varepsilon\leq 6$
$2+1/2\varepsilon$	$\geq 0; \Rightarrow \varepsilon\geq -4$
$4-3/2\varepsilon$	$\geq 0; \Rightarrow \varepsilon\leq 8/3$
$12+1/2\varepsilon$	

Eta soluzio hoberenaren osagai guztiek ≥ 0 izan behar dutenez: $\varepsilon\in\left[\mathbf{-4}, \mathbf{\frac{8}{3}}\right]$.

ii.b) $x_1+x_2\leq 5+\varepsilon$. Azter dezagun bigarren murrizketaren gai independientea aldatzen dugunean zer gertatzen den: koefizienteen matrizean $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ bektorea A_4 da, beraz:

	$b+A_4\varepsilon$
A_2	$3+3/2\varepsilon$
A_1	$2-1/2\varepsilon$
A_5	$4+7/2\varepsilon$
	$12+3/2\varepsilon$

Eta soluzio hoberena (0,9) izateko: $2-1/2\varepsilon=0$ eta $3+3/2\varepsilon=9$, beraz, $\varepsilon=\mathbf{4}$. (Ohartu $4+7/2\varepsilon\geq 0$ dela)

ii.c)

		λ	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
2	A_2	0	1	-1/2	3/2	0	3
λ	A_1	1	0	1/2	-1/2	0	2
0	A_5	0	0	-3/2	7/2	1	4
		0	0	***$1/2\lambda-1$***	***$-1/2\lambda+3$***	0	***$6+2\lambda$***

Soluzio hoberena ez aldatzeko $1/2\lambda-1\geq 0$ eta $-1/2\lambda+3\geq 0$ izan behar dute, hots, $\lambda\in\left[\mathbf{2, 6}\right]$.

ii.d)

		3	n	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
n	A_2	0	1	-1/2	3/2	0	3
3	A_1	1	0	1/2	-1/2	0	2
0	A_5	0	0	-3/2	7/2	1	4
		0	0	***$-1/2n+3/2$***	***$3/2n-3/2$***	0	***$3n+6=9$***

Beraz, $3n+6=9$, $\mathbf{n=1}$. (konturatu $n=1$ denean azken errenkadako elementu guztiek ez negatiboak izaten jarraitzen dutela).

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL, 2003ko OTSAILA

1.- (9 puntu) Demagun honako matrize hau: $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&b\\a&0&1\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$ izanik.

i) a eta b-ren zein baliotarako izango da A diagonalgarria?

ii) b=0 denean, demagun Q forma koadratikoa non $M(Q)=A$ den. Sailkatu Q forma koadratikoa a-ren balio desberdinetarako.

i) Horretarako polinomio karakteristikoa egingo dugu:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&a\\0&3-\lambda&b\\a&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(1-\lambda)^2-a^2(3-\lambda)=(3-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-a^2\right]=0$$

Erroak: 3, 1+a, 1-a.

a=0 denean, erroak 3 eta 1 (bikoitza) dira;

dim$S$(1)=3-heina$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&b\\0&0&0\end{pmatrix}$=2 ($\forall b\in\mathbb{R}$) eta A diagonalgarria da.

a=2 denean, erroak 3 (bikoitza) eta -1 dira; orduan

dim$S$(3)=3-heina$\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&0&b\\2&0&-2\end{pmatrix}\begin{cases}=2, & b=0 \text{ denean, beraz, diagonalgarria da.}\\=1, & b\neq 0 \text{ denean, beraz, ez da diagonalgarria.}\end{cases}$

a=-2 denean, erroak 3 (bikoitza) eta -1 dira; orduan

dim$S$(3)=3-heina$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&0&b\\-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{cases}=2, & b=0 \text{ denean, beraz, diagonalgarria da.}\\=1, & b\neq 0 \text{ denean, beraz, ez da diagonalgarria.}\end{cases}$

$a\neq0$, $a\neq2$, $a\neq-2$ denean, hiru erro desberdin dira eta beraz, A diagonalgarria.

ii) $M(Q)=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&3&0\\a&0&1\end{pmatrix}$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: {1, 3, 1}
2. ordenako azpideterminante nagusiak: {3, 1-a^2, 3}

$|M(Q)|$=3(1-a^2)

Azpideterminante nagusi guztiak >0 badira, Q definitu positiboa izango da: $a\in(-1,1)$ denean.

Azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 badira eta $|M(Q)|=0$ bada Q erdidefinitu positiboa izango da: $a=-1$ eta $a=1$ denean.

Beste edozein kasutan, azpideterminante nagusiek ez dute zeinua mantentzen, hots, Q indefinitua da $a\notin[-1,1]$ denean.

2.- (8 puntu) Demagun honako problema hau non $a\in\mathbb{R}$ den:

$$\max(2x_1+x_2)$$
$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 2 \\ x_1+ax_2\leq 4 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$

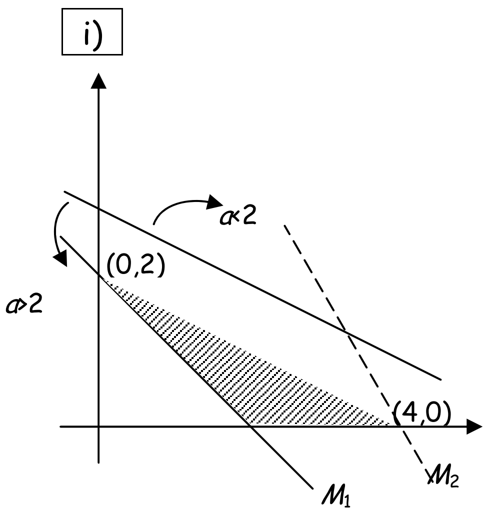
i) Ebatzi problema $a=2$ denean. a-ren zein baliotarako izango da problemaren soluzio hoberena atal honetan lortutakoa?

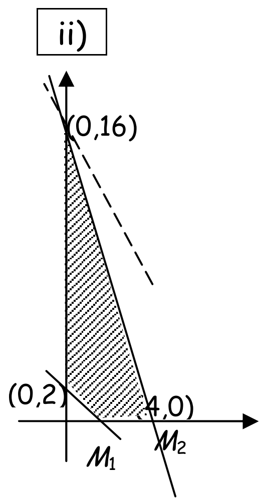
ii) Ebatzi problema $a=\dfrac{1}{4}$ denean.

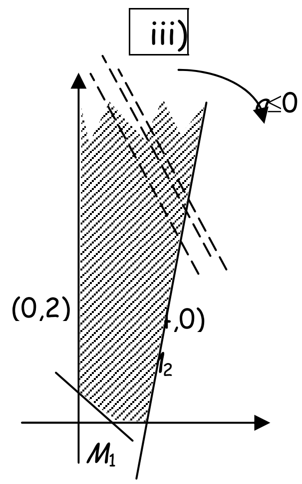
iii) Ebatzi problema $a\leq 0$ denean.

i) Irudia egin ondoren, soluzio hoberena (4,0) dela ondorioztatzen dugu... baina, a-ren zein baliotarako ere izango da (0,4) soluzio hoberena? $a>2$ bada, soluzio egingarrien multzoa gero eta txikiagoa da baina (4,0) puntuan, edozein kasutan ere, beti da soluzio egingarria, eta erraz uler daitekeenez, soluzio hoberena.

$a<2$ bada, bigarren murrizketa gero eta bertikalagoa da; (4,0) puntuak hoberena izaten jarraitzen du murrizketaren malda helburu funtzioarena baina handiagoa bada ($-1/a = m_2 > m_f = -2$) hau da, $a=1/2$ den arte. $a=1/2$ denean soluzio hoberena M_2 murrizketaren mugan dauden soluzio egingarri guztiak dira eta $a<1/2$ denean, soluzio hoberena ez da (4,0) izango.







ii) a=1/4 denean, irudian ikusten den bezala, soluzio hoberena (0,16) puntuan egongo da.

iii) *a* negatiboa bada, bigarren murrizketaren malda positiboa egiten da eta soluzio egingarrien multzoa ez bornatu bihurtzen da non helburu funtzioa bornatua ez den, hots, problemak ez du soluzio hoberenik.

3.- (3 puntu) Ehun lantegi batek bi motako bufandak egiten ditu (I eta II). Horretarako bi motako artileak erabiltzen ditu (*A* eta *B*) Lantegiak *A* motako 400 kg. artile eta *B* motako 600 kg. artile ditu. I motako bufanda bat egiteko beharrezkoak dira *A* artileko 0,2 kg. eta *B* artilearena bikoitza. II motako bufanda bat egiteko *A* artileko 0,25 kg. eta *B* artileko 0,45 kg. erabiltzen du. I motako bufanda bat egiteko beharrezkoa den denbora II motako bufanda bat egiteko beharrezkoa denaren erdia da. Bufandak egiteko erabilgarria den denborarekin I motako 1500 bufanda egin daitezke. Merkatu ikerketa batek dio I motakoen eskaria gehienez 1000 unitatekoa dela eta I motako 100 bufandako gutxienez II motako 50 egin behar direla. Azkenik, I motako bufanda bat saltzeagatik lortzen den mozkina II motako batetik lortzen denaren 2/3 da.
Planteatu programazio linealeko problema ebatzi gabe jakiteko lantegiak zenbat mota desberdinetako bufandak egin behar dituen bere mozkin handiena lortzeko.

x_1 I motako bufanda kopurua, x_2 II motako bufanda kopurua eta k II motako bufanda batengatik lortzen duen mozkina bada:

$$\max\left(\frac{2}{3}kx_1 + kx_2\right)$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,25x_2 \le 400 \\ 0,4x_1 + 0,45x_2 \le 600 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 750 \\ x_1 \le 1000 \\ 50x_1 \le 100x_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4.- (10 puntu) Demagun honako problema hau:

$$\max\,(2x_1+x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu honako taula hau baldin badakigu (0,3,0,3,5) oinarrizko soluzio egingarriari elkartutako taula dela:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1/2	1				
1/2		-1/2	1		
		-1/2			

ii) Honako taula hau problemaren taula hoberena dela badakigu:

		2	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2
2	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2
		0	0	1/5	0	3/5	6

a) Eman lehen murrizketaren gai independentearen balio handiena oinarri hoberena ez aldatzeko.

b) Hirugarren murrizketaren gai independentea 13 izango balitz, zein izango litzateke soluzio hoberen berria?

c) Eman helburu funtzioaren x_1-en koefizientearen balio handiena (2,2) puntua problemaren soluzio hoberena izateko.

d) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 6 izango balitz, zein izango litzateke soluzio hoberen berria?

i) Problema era estandarrean horrela geratzen da:

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_i \ge 0 \ \ (i = 1,\dots,5) \end{cases}$$

Eta koefiziente matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A_2, A_4 eta A_5 oinarrian dauden bektoreak dira. Eta $A_1 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4 + \frac{5}{2}A_5$ eta $A_3 = \frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_4 - \frac{1}{2}A_5$ direnez:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
A_2	1/2	1	**1/2**	**0**	**0**	**3**
A_4	1/2	**0**	-1/2	1	**0**	**3**
A_5	**5/2**	**0**	-1/2	**0**	**1**	**5**
	-3/2	**0**	**1/2**	**0**	**0**	**3**

ii.a) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 + \alpha$. Honetarako koefiziente matrizean $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ bektorea A_3 dela jakin ondoren, taula hoberenean dagozkion eragiketak egingo ditugu:

		2	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$b+\alpha A_3$
1	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2+3/5α
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2-2/5α
2	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2-1/5α
		0	0	1/5	0	3/5	6+1/5α

Eta azken zutabearen elementu guztiek handiago edo berdin zero izan behar dutenez, $\alpha\in$[-10/3, 5], eta ondorioz, lehen murrizketaren gai independentearen balio handiena 11 da.

ii.b) $3x_1 + x_2 + x_5 = 8 + \gamma$. Honetarako koefiziente matrizean $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ bektorea A_5 dela jakin ondoren, taula hoberenean dagozkion eragiketak egingo ditugu:

		2	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$b+\gamma A_5$
1	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2-1/5γ
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2-1/5γ
2	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2+2/5γ
		0	0	1/5	0	3/5	6+3/5γ

Eta azken zutabearen elementu guztiek handiago edo berdin zero izan behar dutenez, $\gamma \in [-5, 10]$, eta $8+\gamma=13$ izateko $\gamma=5$, eta posible da oinarria aldatu gabe. Soluzio hoberena $(2+2/5\gamma, 2-1/5\gamma)=(4,1)$ izango da.

ii.c)

		λ	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**
1	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2
λ	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2
		0	0	**3/5-1/5 λ**	0	**-1/5+2/5 λ**	**2+2 λ**

Eta azken errenkadako elementu guztiek handiago edo berdin zero izan behar dutenez, $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 3$ izango da. Orduan, x_1-en koefizientearen balio handiena 3 da.

ii.d)

		2	**6**	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**	θ
6	A_2	0	1	3/5	0	-1/5	2	
0	A_4	0	0	-2/5	1	-1/5	2	
2	A_1	1	0	-1/5	0	2/5	2	5 →
		0	0	**16/5**	0	**-2/5** ↑	**14**	

		2	6	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**
6	A_2	1/2	1	1/2	0	0	3
0	A_4	1/2	0	-1/2	1	0	3
0	A_5	5/2	0	-1/2	0	1	5
		1	0	3	0	0	18

Eta beraz, soluzio hoberen berria (0,3) izango da.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2003ko EKAINA

1.- (5 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&2\\1&\alpha&2\end{pmatrix}$ matrizea.

α-ren zein baliotarako izango da diagonalgarria A matrizea? Horrela den kasuetan, aurki ezazu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

Horretarako polinomio karakteristikoaren erroak bilatuko ditugu:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&2\\1&\alpha&2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)^2-2\alpha(4-\lambda)=(4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-2\alpha\right]$$

Eta erroak 4, $2+\sqrt{2\alpha}$, $2-\sqrt{2\alpha}$ dira.

α=0: erroak 4 eta 2 (bikoitza) eta dim$S$(2)=3-heina$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$=1: beraz, A ez da diagonalgarria.

α=2: erroak 4 (bikoitza) eta 0 eta dim$S$(4)=3-heina$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&2\\1&2&-2\end{pmatrix}$=1: beraz, A ez da diagonalgarria.

Beste edozein kasutan ($\alpha \geq 0$ den bitartean, bestela A ez da diagonalgarria izango balio propioren bat erreala ez delako) hiru balio propio ezberdin dugu eta A diagonalgarria izango da. Kasu hauetan, antzeko matrize diagonal bat

$$D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2+\sqrt{2\alpha}&0\\0&0&2-\sqrt{2\alpha}\end{pmatrix}$$

izango da.

2.- (5 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\2&\alpha&2\end{pmatrix}$ matrizea eta $Q:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ forma koadratikoa non

$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ den.

i) Aurki ezazu $M(Q)$ eta sailkatu Q α-ren balio desberdinetarako.

ii) Esan noiz betetzen diren honako baieztapen hauek:

a) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ existitzen da non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

b) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{**0**} existitzen da non $Q(\boldsymbol{x})\leq 0$ den.

c) Edozein $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ bektoretarako $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ betetzen da.

i) $M(Q)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha/2 \\ 1 & \alpha/2 & 2 \end{pmatrix}$ izango da eta azpideterminante nagusiak:

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: {4, 2, 2}
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: {8, 7, 4- α^2/4}
$|M(Q)|$=14- α^2
Q ezin da definitu negatiboa edo erdidefinitu negatiboa izan lehen ordenako azpideterminante nagusi guztiak positiboak direlako.
Q definitu positiboa izateko azpideterminante nagusi guztiek >0 izan behar dute: 14- α^2>0 $\Rightarrow$ $-\sqrt{14}<\alpha<\sqrt{14}$ eta 4- α^2/4>0 $\Rightarrow$ $-4<\alpha<4$. Orduan, $-\sqrt{14}<\alpha<\sqrt{14}$ denean.
Q erdidefinitu positiboa izateko $|M(Q)|$=14- α^2 eta azpideterminante nagusi guztiek $\geq$0 izan behar dute: 14- α^2=0 $\Rightarrow$ $\alpha=\sqrt{14}$ edo $\alpha=-\sqrt{14}$. Bestalde, 4- α^2/4$\geq$0 da bi balio hauentzako.
$\alpha\notin\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$ denean indefinitua izango da, hirugarren ordenako azpideterminante nagusia negatiboa delako.

ii.a) Hau beteko da *Q* definitu negatiboa, erdidefinitu negatiboa edo indefinitua denean, beraz $\alpha\notin\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$ denean.

ii.b) Hau beteko da *Q* definitu negatiboa, erdidefinitu negatiboa, erdidefinitu positiboa edo indefinitua denean, (hau da, definitu positiboa ez denean) beraz $\alpha\notin\left(-\sqrt{14},\sqrt{14}\right)$ denean.

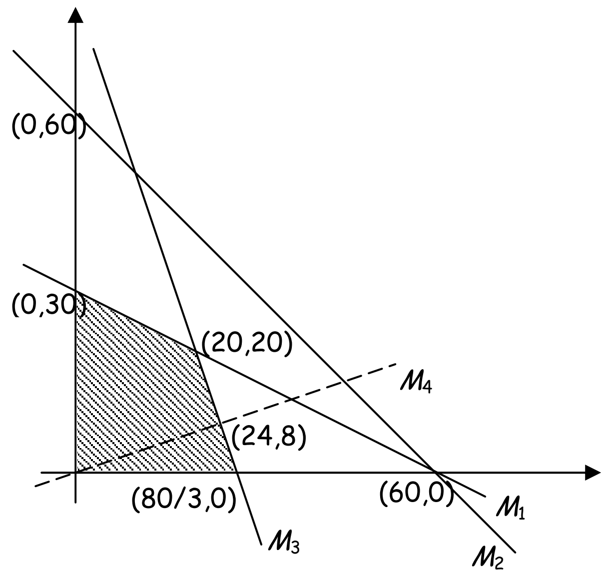
ii.c) Hau ordea, beteko da *Q* definitu positiboa edo erdidefinitu positiboa denean, hots, $\alpha\in\left[-\sqrt{14},\sqrt{14}\right]$ denean.

3.- (10 puntu) Enpresa batek telebistak eta bideoak ekoizten ditu eta saldu ondoren 40 euroko eta 20 euroko mozkina hurrenez hurren lortzen du. Telebista eta bideo bakoitzak enpresako hiru lantegietatik pasatu behar dute; telebista batek 1/2, 1/2 eta 3/2 ordu behar ditu *A*, *B* eta *C* lantegietan, hurrenez hurren eta bideo batek 1, 1/2 eta 1/2 ordu behar ditu, hurrenez hurren. *A* eta *B* lantegietan gehienez 30 ordu astero sartzen dira eta *C* lantegian, berriz, 40 ordu gehienez.

i) Aurki ezazu asteko produkzio hoberena enpresak mozkina maximotu nahi badu.
ii) Zein izan beharko luke bideoaren mozkinak enpresak bideoak soilik ekoiztuz mozkina handiena lortu nahi badu.
iii) *C* lantegian astero 5 lanordu gehiago lortuko balitu, zenbatetan handituko litzateke mozkina? Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko ordu hauetako bakoitzetik? Erantzun galdera hauei ordu hauek *B* lantegian lortuko balitu.
iv) Merkatu ikerketa batek dio bideo kopuruak ezin duela produkzio osoaren %25 gainditu, zein da soluzio hoberena?

x_1: telebista kopurua eta x_2 bideo kopurua bada,

$$\max(40x_1 + 20x_2)$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 30 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 30 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa da, beraz, soluzio hoberena gutxienez erpin batean egongo da:
$f(0,0)=0$€
$f(0,30)=600$€
$f(20,20)=1200$€
$f(80/3,0)=1066,6$€
Beraz, soluzio hoberena (20,20) da eta balio hoberena 1200€.
Beste modu bat soluzio hoberena lortzeko maldak erabiltzea da: (m_1 M_1en malda, m_3 M_3ren malda eta m_f helburu funtzioaren maila kurben malda):

$$-\infty \xleftrightarrow{(80/3,0)} m_3 = -3 \xleftrightarrow{(20,20)} m_1 = -1/2 \xleftrightarrow{(0,30)} 0$$

Eta m_f=-2 m_1 eta m_3 malden artean dagoenez, soluzio hoberena M_1 eta M_3 murrizketak ebakitzen diren puntuan egongo da, hau da, (20,20) puntuan.

Edo balio absolutuen bitartez arrazonatuz $|m_1| < |m_f| < |m_3|$ denez, (20,20) soluzio hoberena da.

ii) Bideoak soilik ekoiztuz mozkina handiena lortzeko, soluzio hoberena (0,30) puntuan egon beharko luke eta horretarako helburu funtzioaren maila kurben malda, m_f (-40/m_b, non m_b bideoen mozkina den) m_1 malda (-0,5) baino handiagoa izan beharko luke:

$$m_1 = -0{,}5 \leq -\frac{40}{m_b} \Rightarrow m_b \geq \frac{40}{0{,}5} = 80$$

Edo balio absolutuekin: $|m_1| \geq \left|\dfrac{40}{m_b}\right|$

Beraz, bideoaren mozkina 80€koa edo handiagoa bada, bideoak soilik eginez mozkin handiena lortuko du.

iii) Soluzio hoberen berria M_1 eta M_3 berria ebakitzen diren puntuan egongo da:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + x_2 &= 30 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 45 \end{aligned}\right\} (24,18)$$

Eta balio hoberen berria 1320€ da; beraz, mozkina 120€ tan handituko da.

Hirugarren murrizketaren itzal prezioa kalkulatuko dugu:

$$\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 40 + c$$

(20,20) $\rightarrow$ (24,18)

c=0 $\rightarrow$ c=5

1200€ $\rightarrow$ 1320€

$$\lambda_c = \frac{f(24,18) - f(20,20)}{\Delta c} = \frac{1320 - 1200}{5} = 24€$$

Orduan, ordu gehiago bakoitzetik gehienez 24€ ordainduko luke.

Bigarren lantegian ez dira ordu guztiak erabiltzen (baliabide oparoa da). Soluzio hoberenean (20,20) puntuan lantegi honetan 20 ordu besterik ez dira erabiltzen; beraz, aparteko ordu gehiagorik ez zaio interesatzen.

iv) Murrizketa berria $x_2 \leq 0{,}25(x_1 + x_2)$ edo $0{,}25x_1 - 0{,}75x_2 \geq 0$ da eta ikusten dugun moduan, (20,20) ez da murrizketa berriarekin soluzio egingarria. Soluzio hoberen berria M_3 eta murrizketa berriaren arteko ebakidura puntuan egongo da, (24,8) puntuan hain zuzen ere, eta balio hoberen berria 1120 izango da.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2004ko OTSAILA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, non $a,b\in\mathbb{R}$ diren.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna a eta b parametroen balioen arabera.

ii) Demagun $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa. Aurkitu a eta b-ren balio guztiak zeinentzako $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ existitzen diren, $Q(\boldsymbol{x})<0$ eta $Q(\boldsymbol{y})>0$ izanik.

i) $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^2(b-\lambda)=0$.

$a=b$ bada, $\lambda=a$ balio propio hirukoitza dugu eta $\dim S(a)=3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 3$ eta orduan, A ez da diagonalgarria izango.

$a\neq b$ bada, $\lambda=a$ balio propio bikoitza eta $\lambda=b$ balio propio bakuna dugu.
$\dim S(a)=3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}\neq 3$ eta orduan, A ez da diagonalgarria izango.

ii) $M(Q)=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Aztertuko ditugu azpideterminante nagusiak:

1. ordenako AN:$\{a,a,b\}$
2. ordenako AN: $\{a^2-4,ab,ab\}$
$|M(Q)|=b(a^2-4)$

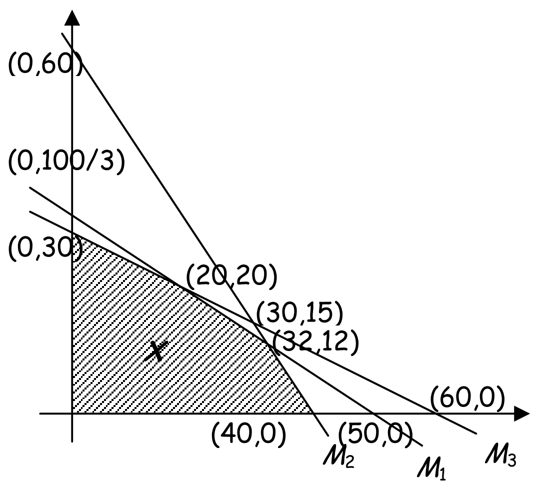
Eta Q indefinitua da:
- $a^2-4<0$ denean, hau da, $-2<a<2$, b edozein izanda.
- $a\geq 2$ eta $b<0$ denean.
- $a\leq -2$ eta $b>0$ denean.

2.- Errubi eta zafiroak erabiliz, Bitxi etxeak bi eraztun mota egiten ditu. 1. motako eraztun batek 2 errubi, 3 zafiro eta bitxigile baten lanordu bat behar du. 2. motako eraztun batek 3 errubi, 2 zafiro eta bitxigile baten 2 lanordu. Bitxi etxea gaur egun 100 errubi, 120 zafiro eta bitxigile baten 60 lanordu ditu. 1. motako eraztun bakoitza 400 eurotan saltzen da eta 2. motako eraztun bakoitza 500 eurotan. Egiten diren eraztun guztiak sal daitezke.

i) Plantea eta ebatzi ezazu Bitxi etxearen sarrerak maximotzeko programazio linealeko problema.
ii) 2. motako eraztunen salmenta prezioa, zer prezioren artean egon daiteke soluzio hoberena aurrekoa izaten jarraituz?
iii) Errubi gehiago eros dezake errubiko kostea 100 eurokoa bada? Zenbat erosiko lituzke? Zein izango litzateke orain soluzio hoberena?
iv) Bitxigileak makinaria berria erosten du, orain 1. motako eraztun bat egiteko 2. motako eraztun bat egiteko behar den denboraren bikoitza behar delarik. Horrez gainera, egiten diren eraztun guztiak 1. motakoak badira, orduan 70 eraztun egin ditzake. Soluzio hoberena aldatuko litzateke?
v) 2. motako gutxienez 22 eraztun egin behar balira, zein izango litzateke sarrera hoberena?

x_1 lehen motako eraztun kopurua eta x_2 bigarren motako eraztun kopurua badira,

$$\max(400x_1 + 500x_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena gutxienez erpin batean egongo da.
Helburu funtzioaren maila kurben malda balio absolutuan: $|m_f|=4/5$.
1. murrizketaren malda balio absolutuan: $|m_1|=2/3$.
2. murrizketaren malda balio absolutuan: $|m_2|=3/2$.
3. murrizketaren malda balio absolutuan: $|m_3|=1/2$.
Beraz, soluzio hoberena lehen eta bigarren murrizketen ebaki puntuan lortzen da:
Soluzio hoberena: (32,12).
Balio hoberena: 18800€.

ii) Helburu funtzioaren malda lehen eta bigarren murrizketen malden artean egon behar du. p_2 2. motako eraztunen prezioa bada:

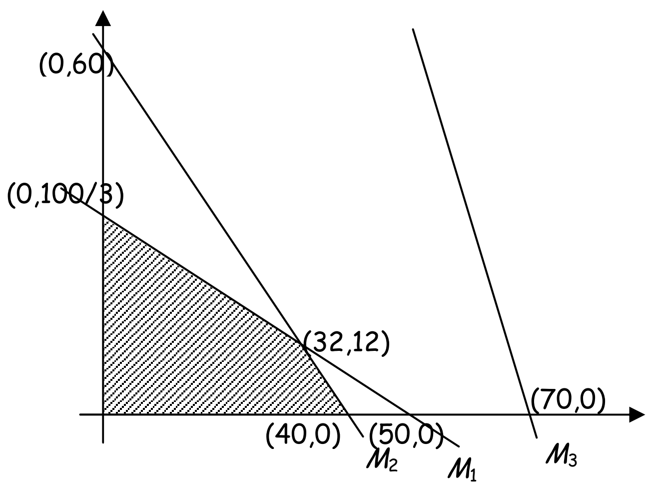
$$\frac{3}{2} \leq \frac{400}{p_2} \leq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 600 \geq p_2 \geq \frac{800}{3}.$$

iii) Lehen murrizketa (errubiak) mugi daiteke bigarren eta hirugarren murrizketen ebaki punturaino, hots, (30,15) punturaino. Kantitate hauek egiteko 2·30+3·15=105 errubi behar dira, hau da, 5 errubi gehiago. Balio hoberena 400·30+500·15=19500€ izango litzateke. Eta errubien itzal prezioa:

$$\lambda = \frac{19500 - 18800}{105 - 100} = 140€$$

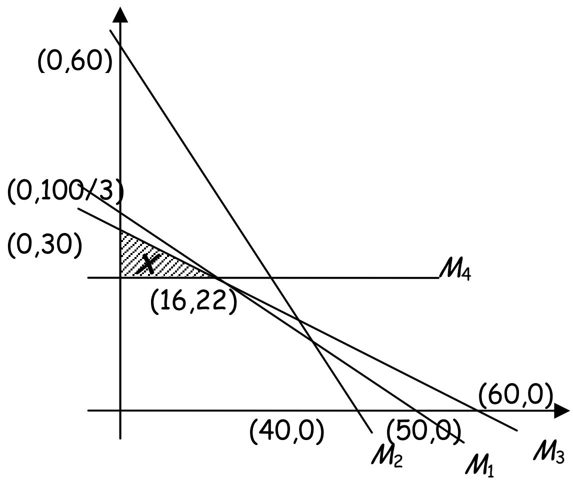
Itzal prezioa benetakoa baino txikiagoa denez, 5 errubi gehiago eskuratuko ditu eta soluzio hoberen berria (30,15) izango da.

iv) Hirugarren murrizketaren ordez, $2x_1+x_2 \leq 140$ murrizketa berria daukagu, grafiko berria hau delarik:



Eta soluzio hoberena ez da aldatzen, hau da, (32,12).

v)



Hasierako problemari murrizketa berri hau erantsi behar zaio: $x_2 \geq 22$. Grafiko berria kontuan hartuz, soluzio hoberen berria (16,22) izango da eta balio hoberena 17400€.

3.- Demagun

$$\max(4x_1 + 6x_2 + 5x_3)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

non lehen hiru murrizketek sarrerak maximotu nahi dituen enpresa baten hiru baliabideren kopuru erabilgarri maximoa adierazten duten.

i) Bete ezazu honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik eta taula hau abiapuntutzat harturik aurkitu soluzio hoberena.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	-2	-1	1	-3	0	5
	1		0	1	0	20
	1			-1		10

ii) Zein baliabide dira oparoak eta zein urriak?

iii) Eman hirugarren murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko. Dagokion baliabidearen 5 unitate gehiago erosiko balira unitate bakoitzeko 1 prezioa ordainduz, komeni da erosketa hori egitea?

iv) Zein da helburu funtzioaren x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aldatu gabe?

i)

		4	6	5	0	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ	
0	A_4	0	-2	-1	1	-3	0	5	-	
4	A_1	1	1	1	0	1	0	20	20	
0	A_6	0	1	2	0	-1	1	10	10	→
		0	-2	-1	0	4	0	80		
			↑							

		4	6	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	0	-3	1	-5	2	25
4	A_1	1	0	-1	0	2	-1	10
6	A_2	0	1	2	0	-1	1	10
		0	0	3	0	2	2	100

Soluzio hoberena: (10,10,0) eta balio hoberena 100.

ii) (10,10,0) soluzio hoberena murrizketetan ordezkatuz:

3(10)+1(10)+2(0)=40<65

1(10)+1(10)+1(0)=20

1(10)+2(10)+3(0)=30.

Beraz, lehen baliabidea oparoa da eta bigarren eta hirugarrena urriak.

iii)

		4	6	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$b+\varepsilon A_6$
0	A_4	0	0	-3	1	-5	2	$25+2\varepsilon$
4	A_1	1	0	-1	0	2	-1	$10-\varepsilon$
6	A_2	0	1	2	0	-1	1	$10+\varepsilon$
		0	0	3	0	2	2	$100+2\varepsilon$

$25+2\varepsilon\geq 0$, $10-\varepsilon\geq 0$ eta $10+\varepsilon\geq 0$ izan behar dute, beraz, $-10\leq\varepsilon\leq 10$.
5 aurreko tartean dagoenez eta itzal prezioa 2>1 denez, komeni da 5 unitate gehiago erostea unitate bakoitzeko 1 prezioa ordainduz. Soluzio hoberen berria (5,15,0) izango litzateke eta irabazi berriak 100+5(2)=110.

iv)

		$4+\lambda$	6	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	0	-3	1	-5	2	25
$4+\lambda$	A_1	1	0	-1	0	2	-1	10
6	A_2	0	1	2	0	-1	1	10
		0	0	$3-\lambda$	0	$2(1+\lambda)$	$2-\lambda$	$100+10\lambda$

$3-\lambda\geq 0$, $2(1-\lambda)\geq 0$ eta $2-\lambda\geq 0$ izan behar dute, hots, $-1\leq\lambda\leq 2$. Honela, x_1 aldagaiaren koefizienteak ($4+\lambda$) zenbakiak) 3 eta 6 artean egon behar du soluzio hoberena ez aldatzeko.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2004ko EKAINA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ matrizea, non $a,b,c\in\mathbb{R}$ diren.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna $b=1$ denean.

ii) Demagun $Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa.

a) $b=c=0$ eta $a\neq 0$ izanik, existitzen da $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den?

b) $b=0$ eta $c=2$ izanik, existitzen da $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den?

i) $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & c \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ da eta $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & a & 0 \\ a & a-\lambda & c \\ 0 & 1 & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)\left(\lambda^2-2a\lambda-c\right).$

Eta erroak: $\lambda=a$, $\lambda=a\pm\sqrt{a^2+c}$. Orduan,

$a^2+c<0$ bada, erro guztiak ez dira errealak eta beraz, A ez da diagonalgarria izango.

$a^2+c>0$ bada, erroak errealak eta desberdinak dira, beraz, A diagonalgarria izango da.

$a^2+c=0$ bada, a erro hirukoitza da eta

$\dim S(a)=3-\text{heina}(A-aI)=3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\neq 3$, eta beraz, A ez da diagonalgarria izango.

ii.a) $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=M(Q)$. Forma koadratiko hau sailkatuko dugu:

1. ordenako AN:$\{a,a,a\}$

2. ordenako AN:$\{0,a^2,a^2\}$

$|M(Q)|=0$

Orduan, $a>0$ bada, Q erdidefinitu positiboa da eta ez da existitzen $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

$a<0$ bada, Q erdidefinitu negatiboa da eta existitzen da $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

ii.b) $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ eta $M(Q)=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Forma koadratikoa sailkatuko dugu:

1. ordenako *AN*:$\{a,a,a\}$
2. ordenako *AN*:$\{0,a^2,a^2-1\}$
$|M(Q)|=-a$

$a\neq 0$ bada, lehen eta hirugarren ordenako (ordena bakoitikoak biak) azpideterminante nagusiak zeinu desberdinetakoak dira, eta beraz, Q indefinitua da eta existitzen da $\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

$a=0$ bada, bigarren ordenako *AN* bat negatiboa da, beraz, Q indefinitua berriro eta existitzen da $\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x})<0$ den.

2.- Ahate jakiak ekoizten dituen artisau-enpresa batek bi produktu eskaintzen ditu, bata freskoa eta bestea kontserban. Taula honetan produktu bakoitza egiteko eta merkaturatzeko behar den denbora kg bakoitzeko jasotzen da:

	Freskoa (orduak/kg)	Kontserba (orduak/kg)	Ordu erabilgarriak
Hiltegia	0,5	0,8	1600
Prestaketa	1,25	2,5	5000
Ontziraketa	0,125	0,16	400

Biltegian gehienez 2000 kg produktu freskoa gorde daiteke. Bestalde, produktuen arrakasta dela eta, enpresak nahi bezain beste sal dezake produktu bietatik. Produktu freskoaren salneurria kg-ko 18 eurokoa da eta kontserbakoarena berriz kg-ko 9 eurokoa.

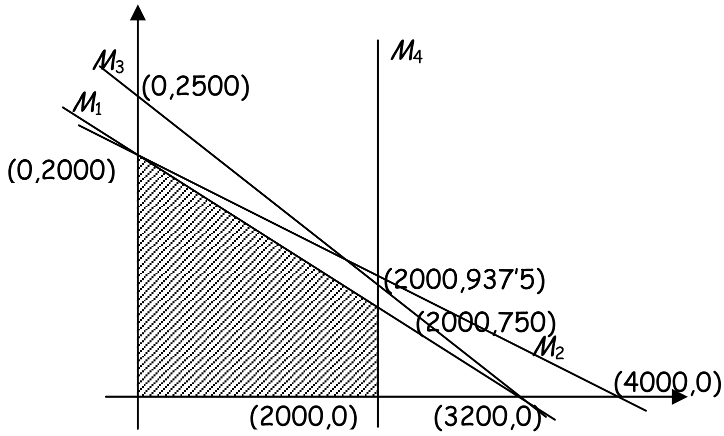
i) Eman enpresak produktu bakoitzetik ekoiztu behar duen kantitatea sarrera maximoa egiteko. Kalkulatu sail bakoitzean erabilitako ordu kopurua kantitate hoberen hauek ekoizteko.

ii) Aurreko ataleko erantzuna kontuan hartuta, esan zein sailetan komeni zaion enpresari langileei aparteko orduak egin ditzaten eskatzea sarrerak handitzeko. Enpresa aparteko ordu bakoitza zenbat ordaintzeko prest legoke sail ezberdinetan?

iii) Saltoki-gune bat ekoizpen guztia erosteko prest dago 24 eta 12 eurotan , enpresak kontserban ekoiztutako produktu freskoan ekoiztutakoa bezain beste edo gehiago izateko konpromisoa hartzen badu. Komeni al zaio enpresari bere ekoizpen guztia saltoki-gune honi saltzea?

x_1: Produktu freskotik ekoiztutako kg.
x_2: Kontserba produktutik ekoiztutako kg.

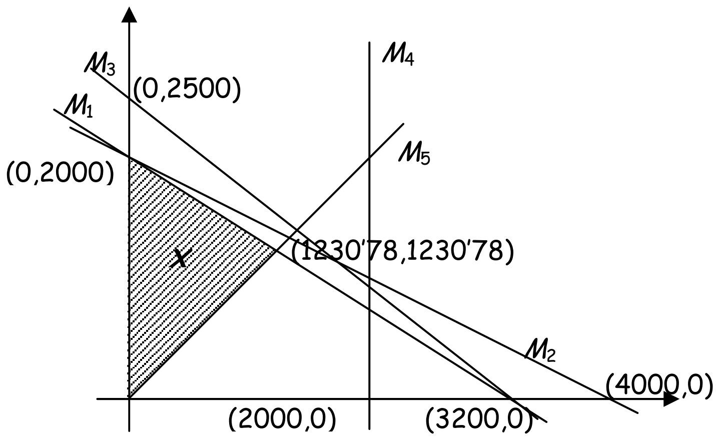
$$\max(18x_1 + 9x_2)$$
$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,8x_2 \leq 1600 \\ 1,25x_1 + 2,5x_2 \leq 5000 \\ 0,125x_1 + 0,16x_2 \leq 400 \\ x_1 \leq 2000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, soluzio hoberena erpin batean, gutxienez, egongo da:
$f(0,0)=0$
$f(0,2000)=18000$
$f(2000,750)=42750$
$f(2000,0)=36000$
Hau da, produktu freskotik 2000 kg eta kontserban 750 kg.
Balio hoberena: 42750 euro.
Erabilitako ordu kopurua:
Hiltegian: $0,5(2000)+0,8(750)=1600$ ordu.
Prestatze sailean: $1,25(2000)+2,5(750)=4375$ ordu.
Ontziratze sailean: $0,125(2000)+0,16(750)=370$ ordu.

ii) Soluzio hoberenean hiltegiaren ordu kopuru guztiak erabiltzen dira, beste sailetan ez bezala. Orduan hiltegian aparteko orduak kontratatuz sarrerak handitu egiten ditu. Hain zuzen (2000,937'5) arte:
Itzal prezioa: $\lambda_1 = \dfrac{44437,5-42750}{1750-1600} = 11,25$
Hortaz sarrerak handitzeko hiltegiaren aparteko ordu bakoitzeko 11,25€ baino gutxiago ordaintzeko prest legoke.

iii)
$$\max(24x_1 + 12x_2)$$
$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,8x_2 \leq 1600 \\ 1,25x_1 + 2,5x_2 \leq 5000 \\ 0,125x_1 + 0,16x_2 \leq 400 \\ x_1 \leq 2000 \\ x_2 \geq x_1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: (1230'78,1230'78).
Produktu freskotik 1230'78 kg eta kontserban 1230'78 kg.
Balio hoberena: 44307'69 euro.
Ikusten denez sarrerak handiagoak dira. Horrela ekoizpen guztia saltoki-gunera saltzea komeni zaio.

3.- Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(5x_1+6x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geq 6 \\ x_1\leq 2 \\ x_2\leq 4 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$

i) Aurkitu grafikoki soluzioa.
ii) Osatu taula, aurreko problemari dagokiola jakinda.

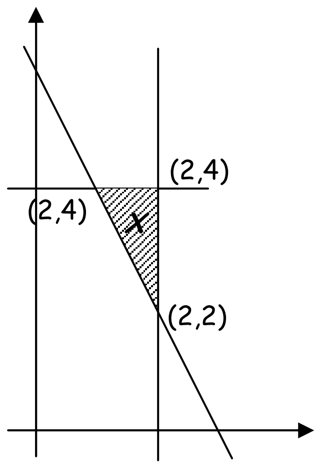
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
			1	0	
			0	1	4
				1	2
0	0	0	5		34

iii) Zein da helburu funtzioan x_1-eko koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aldatu gabe?
iv) Eman aldagai independenteen aldaketa tartea bigarren eta hirugarren murrizketetan oinarri hoberena alda ez dadin eta eman euren itzal prezioak.
v) Lehen ataleko grafikoaz baliatuz, esan zer gertatzen den problema berriaren soluzio hoberenarekin bigarren murrizketan aldagai independentearen aldaketa aurreko ataleko ezarritako tartea ez bada.

i)

$$\max(5x_1+6x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geq 6 \\ x_1\leq 2 \\ x_2\leq 4 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: (2,4) eta balio hoberena 34.

ii) Taula hau daukagu:

		5	6	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
5	A_1	1	0	0	1	0	2
6	A_2	0	1	0	0	1	4
0	A_3	0	0	1	2	1	2
		0	0	0	5	6	34

iii)

		$5+\pi$	6	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
$5+\pi$	A_1	1	0	0	1	0	2
6	A_2	0	1	0	0	1	4
0	A_3	0	0	1	2	1	2
		0	0	0	$5+\pi$	6	$34+2\pi$

Soluzio hoberena (2,4) izaten jarraitzeko $5+\pi\geq 0$ izan behar da, hau da, $\pi\geq -5$.

iv) Bigarren murrizketan:

		5	6	0	0	0	
		$\boldsymbol{A_1}$	A_2	A_3	A_4	A_5	b
5	A_1	**1**	0	0	1	0	$2+a$
6	A_2	**0**	1	0	0	1	4
0	A_3	**0**	0	1	2	1	$2+2a$
		0	0	0	5	6	$34+5a$

$2+a\geq 0$ eta $2+2a\geq 0$ izan behar dira, beraz $a\geq -1$ eta $\lambda_2=5$

Hirugarren murrizketan:

		5	6	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
5	A_1	1	0	0	1	0	2
6	A_2	0	1	0	0	1	$4+b$
0	A_3	0	0	1	2	1	$2+b$
		0	0	0	5	6	$34+6b$

$4+b\geq 0$ eta $2+b\geq 0$ izan behar dira, beraz $b\geq -2$ eta $\lambda_3=6$.

2. murrizketan $a<-1$ hartzen badugu edota 3. murrizketan $b<-2$ problema berriaren soluzio egingarrien multzoa hutsa da, grafikoki ikusi ahal dugunez, hortaz ez du soluzio hoberenik.

4.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1 + 2x_2 - x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Eta aurreko problemari elkartutako taula:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
A_1	1	4	2	1		
A_5	0		1	1		
	0	6	5			

i) Bete ezazu taula eta ebatzi problema.
ii) Aurki ezazu lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko.
iii) Esan zuzenak diren ala ez honako baieztapen hauek eta zergatik:
a) Lehen murrizketaren gai independentea 10etik 6ra pasatzen bada, soluzio hoberena ez da aldatzen.
b)Ez dago lehen murrizketaren gai independenterik non balio hoberena 10 den.
iv) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 2ren ordez 10 bada, ebatzi lortutako problema.

i) Problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max(2x_1 + 2x_2 - x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \quad \text{eta koefiziente matrizea} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

		2	2	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
2	A_1	1	4	2	1	**0**	**10**
0	A_5	0	**5**	1	1	**1**	**14**
		0	6	5	**2**	**0**	**20**

A_5 oinarrian dago, A_2=4A_1+**5**A_5 eta b=**10**A_1+**14**A_5 dira. Azken errenkadako elementu guztiak ez negatiboak direnez, (10,0,0) problemaren soluzio hoberena da eta 20 balio hoberena.

ii) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 + \alpha$ egin nahi dugu. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bektorea koefiziente matrizean A_4 da, beraz,

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$b+\alpha A_4$
A_1	1	4	2	1	0	10+α
A_5	0	5	1	1	1	14+ α
	0	6	5	2	0	20+2 α

Eta lortutako elementu guztiek positiboak izan behar dutenez, $\alpha \geq -10$. Horrela den bitartean, oinarri hoberena ez da aldatuko.

iii.a)Ez da zuzena. Aurreko apartatuan ikusten dugu $\alpha=-4$ (horrela lehen murrizketaren gai independentea 10etik 6ra pasatzen da) denean oinarri hoberena ez dela aldatzen, baina soluzio hoberena bai:(6,0,0) da soluzio hoberen berria eta balio hoberena 12.

iii.b) Ez da zuzena. 20+2 α=10 eta orduan α=-5, eta orduan soluzio hoberena (5,0,0) da eta balio hoberena, 10.

iv)

		2	**10**	-1	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**	θ	
2	A_1	1	4	2	1	0	10	5/2	→
0	A_5	0	5	1	1	1	14	14/5	
		0	**-2**	5	2	0	20		
			↑						

		2	10	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**
10	A_2	1/4	1	1/2	1/4	0	5/2
0	A_5	-5/4	0	-3/2	-1/4	1	3/2
		1/2	0	6	5/2	0	25

Eta soluzio hoberen berria (0,5/2,0) da eta balio hoberena 25.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2005eko OTSAILA

1.- (5 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 3\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R} \text{ izanik.}$$

α-ren zein baliotarako izango da A matrizea diagonalgarria?

Ebatz dezagun polinomio karakteristikoa:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & \alpha & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-\alpha\right]=0$$

Erroak: 1, $2+\sqrt{1+\alpha}$, $2-\sqrt{1+\alpha}$.

α<-1: bi balio propio ez dira errealak, beraz, A ez da diagonalgarria izango.

α=-1: erroak 1 eta 2 (bikoitza) dira. Azter dezagun dim$S$(2).

dim$S$(2)=3-heina$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$=1. Beraz, A ez da diagonalgarria izango.

α=0: erroak 1 (bikoitza) eta 3.

dim$S$(1)=3-heina$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$=1. Beraz, A ez da diagonalgarria izango.

Beste edozein kasutan (α>-1, $\alpha\neq 0$), diagonalgarria da hiru balio propioak desberdinak direlako.

2.- (5 puntu) Demagun $Q(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa horrela definitua:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})\cdot B\cdot M(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,$$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$ izanik.

Aurki ezazu $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta esan b-ren zein baliotarako beteko diren honako kasu hauek, erantzuna azalduz:

i) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{**0**}: $Q(\boldsymbol{x})<0$ betetzen da.

ii) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$-{**0**}: $Q(\boldsymbol{x})>0$ betetzen da.

iii) $\exists \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^3$ non $Q(\boldsymbol{x}_1)<0$ eta $Q(\boldsymbol{x}_2)>0$ den.

iv) $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$: $Q(\boldsymbol{x})\geq 0$ betetzen da.

$$M(Q)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: {1, 1, 3}.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: {0, 3, 3-b^2}.
$|M(Q)|=-b^2$.
Eta forma koadratiko hau, b=0 denean erdidefinitu positiboa izango eta $b\neq0$ denean, indefinitua.

i) Q inoiz ez da definitu negatiboa izango.
ii) Q inoiz ez da definitu positiboa izango.
iii) Horretarako Q-k indefinitua izan behar du, hau da, $b\neq0$ denean.
iv) Q erdidefinitu positiboa da b=0 denean.

3.- (10 puntu) Enpresa batek gitarrak eta mandolinak egiten ditu zur, metal eta lanorduak erabiliz. Musika tresna bakoitza egiteko beharrezkoak diren baliabide hauen kopuruak taulan honetan daude:

	Gitarra	Mandolina
Zur	2	1
Metal	1	1
Lanorduak	1	2

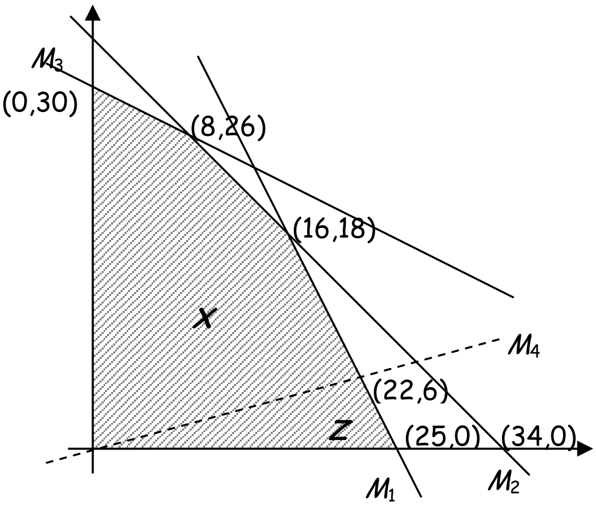
Enpresak 50 unitate zur, 34 unitate metal eta 60 lanordu du eta gitarra bakoitza 200€tan eta mandolina bakoitza 125€tan saltzen du. Honako hau eskatzen da:

i) Aurki ezazu sarrera maximotzen duen produkzioa.
ii) Zenbat egongo litzateke prest ordaintzeko enpresa zur unitate bat gehiago eskuratzeagatik? Eta lanordu bat eskuratzeagatik?

iii) Enpresak, salmentak ziurtatzeko, 11 gitarra egiten dituenean gehienez 3 mandolina egingo dituela erabakitzen badu, zein izango da sarrera maximotzen duen produkzioa?
iv) Zein da lanorduak minimotzen dituen produkzioa, enpresak 4000 euroko sarrera, gutxienez, ziurtatu nahi badu?

x_1 gitarra kopurua bada eta x_2 mandolina kopurua bada,

$$\max(200x_1 + 125x_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 34 \\ x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



i) Bi eratara egin daiteke:
1) Soluzio egingarrien multzoa trinkoa da, beraz, soluzio hoberena erpin batean egongo da.
$f(0,0)=0$
$f(0,30)=3750$€
$f(8,26)=4850$€
$f(16,18)=5450$€
$f(25,0)=5000$€
Beraz, soluzio hoberena (16,18) da eta sarrera handiena 5450€.
2) Malden bitartez,
$|m_3|<|m_2|<|m_f|<|m_1|$
denez, non $|m_3|=1/2$, $|m_2|=1$, $|m_f|=200/125=1{,}6$ eta $|m_1|=2$ diren, soluzio hoberena M_1 eta M_2 zuzenen ebakipuntua da. Hau da (16,18) da.

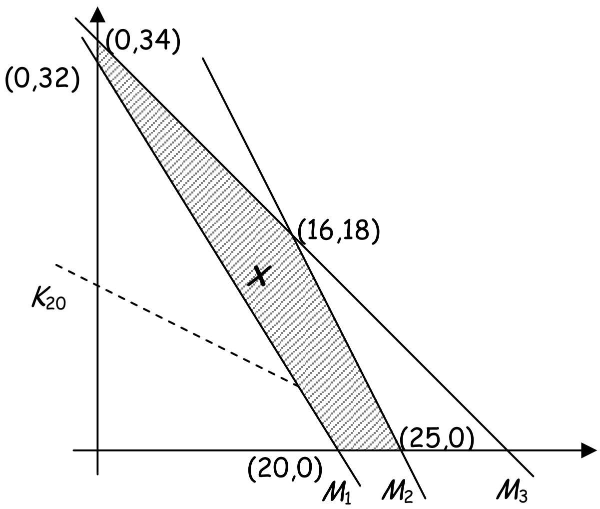
ii) Kalkulatuko dugu zuraren itzal prezioa:
$2x_1+x_2=50+a$
$(16,18) \rightarrow (34,0)$
$a=0 \rightarrow a=18$
$5450€ \rightarrow 6800€$
$$\lambda_1 = \frac{6800-5450}{18} = 75€$$

Orduan, gehienez eskuratuko luke 18 unitate zur gehiago eta gehienez 75€ unitateko ordainduko luke.
Lanorduei dagokienez, baliabide oparoa da, beraz, ez zaio interesatzen lanordu gehiago eskuratzea.

iii) M_4 murrizketa berria $3x_1 \geq 11x_2$ da eta soluzio egingarrien multzo berria Z da. Kasu honetan, soluzio hoberena (22,6) da.

iv) Problema berria horrela geratzen da:

$$\min(x_1 + 2x_2)$$
$$\begin{cases} 200x_1 + 125x_2 \geq 4000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 34 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Eta helburu funtzioaren maila kurbarik baxuena soluzio egingarriaren multzoko (20,0) puntutik pasatzen da, hau da, soluzio hoberen berria (20,0) da.

4.- (10 puntu) Demagun honako programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1 - x_2 + 5x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

i) Baldin badakigu honako taula hau aurreko problemari dagokiola, aurki ezazu honi jarraitzen diona simplex metodoa erabiliz (aurki ezazu taula bat soilik).

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	1	3	2	1	0	0	10
0	A_5	1	3	-1	0	1	0	1
0	A_6	-1	3	1	0	0	1	2
		-2	1	-5	0	0	0	0

ii) Bete itzazu taula honen hutsuneak aurreko taulak erabili gabe eta ondo azalduz nola lortzen dituzun zenbaki horiek.

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
2	A_1	1	-1	0	1/3	0	-2/3	
0	A_5	0	6	0	0	1	1	3
5	A_3	0	2	1		0	1/3	4
		0		0	7/3	0	1/3	24

iii) Zein da hirugarren murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko?Aurki ezazu hirugarren murrizketaren itzal prezioa.

iv) Zein da helburu funtzioaren x_2-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

v) Hirugarren murrizketaren gai independentea 2tik 3ra pasatzen bada, aldatuko da soluzio hoberena?, zergatik?

i)

$$\max(2x_1 - x_2 + 5x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$ eta koefizienteen matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

.

		2	-1	5	0	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ	
0	A_4	1	3	2	1	0	0	10	5	
0	A_5	1	3	-1	0	1	0	1		
0	A_6	-1	3	1	0	0	1	2	2	→
		-2	1	-5	0	0	0	0		
				↑						

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	3	-3	0	1	0	-2	6
0	A_5	0	6	0	0	1	1	3
5	A_3	-1	3	1	0	0	1	2
		-7	16	0	0	0	5	10

ii)

		2	-1	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	***b***
2	A_1	1	-1	0	1/3	0	-2/3	**2**
0	A_5	0	6	0	0	1	1	3
5	A_3	0	2	1	**1/3**	0	1/3	4
		0	**9**	0	7/3	0	1/3	24

2×(-1)+0×6+5×2-(-1)=9.

$A_4=1/3A_1+0A_5+aA_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2a\\-a\\a\end{pmatrix}$; hau da, a=1/3.

$b=bA_1+3A_5+4A_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}10\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b\\-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}$; hau da, b=2.

iii) Aurreko taula hoberena da azken errenkadako elementu guztiak ez negatiboak direlako. Beraz, problemaren soluzio hoberena (2,0,4) da eta balio hoberena 24.

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=A_6$

$b+\alpha A_6$
$2-2/3\alpha$
$3+\alpha$
$4+1/3\alpha$
$24+1/3\alpha$

denez, $\begin{cases}2-2/3\alpha \geq 0; & \alpha \leq 3\\ 3+\alpha \geq 0, & \alpha \geq -3\\ 4+1/3\alpha \geq 0; & \alpha \geq -12\end{cases}$

Eta oinarrizko soluzio egingarria izateko: $-3\leq\alpha\leq 3$.

Itzal prezioa: $\lambda_3=\dfrac{24+1/3\alpha-24}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$.

iv)

		2	*c*	5	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	***b***
2	A_1	1	-1	0	1/3	0	-2/3	2
0	A_5	0	6	0	0	1	1	3
5	A_3	0	2	1	1/3	0	1/3	4
		0	8-*c*	0	7/3	0	1/3	24

Beraz, $c\leq 8$ izan behar da.

v) Hirugarren galderan egindakoa erabiliko dugu α=1 denean: argi dago, soluzio hoberen berria (4/3,0,13/3) dela eta balio hoberena 73/3.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2005eko EKAINA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & b & a\\ c & 0 & 1\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ izanik.

i) b=2 baliorako, aztertu A-ren diagonalgarritasuna a eta c-ren balioen arabera.

ii) b=a eta c=1 badira, har dezagun $Q(x)={}^{t}M(x)AM(x)$, $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$. Aurki ezazu adierazpen matrizea eta sailkatu forma koadratikoa a-ren balioen arabera.

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & 2 & a\\ c & 0 & 1\end{pmatrix}$ izanik, kalkula ditzagun balio propioak:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ a & 2-\lambda & a\\ c & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-c\right]\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=1+\sqrt{c}\\ \lambda=1-\sqrt{c}\end{cases}$$

c<0 bada (a edozein izanda), erro guztiak ez dira errealak eta ondorioz, A ez da diagonalgarria izango.

c=0 bada, erroak 2 eta 1 (bikoitza) izango dira. Azter dezagun 1 balio propioaren azpiespazio espektralaren dimentsioa:

dim$S$(1)=3-heina$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ a & 1 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$=1, hau da, dim$S$(1) 1 balioaren anizkoiztasuna $p(\lambda)$-n baino txikiagoa da, beraz, A ez da diagonalgarria izango.

c=1 bada, erroak 2 (bikoitza) eta 0 izango dira.

dim$S$(2)=3-heina$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ a & 0 & a\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{cases}a=0 \text{ bada, dim}S(2)=2\\ a\neq 0 \text{ bada, dim}S(2)=1\end{cases}$

Beraz, c=1 eta a=0 denean, A diagonalgarria izango da eta c=1 eta $a\neq$0 denean ez. $c\neq$0 eta $c\neq$1 denean, hiru balio propio ezberdin dira, eta orduan A diagonalgarria izango da.

ii) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & a & a\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ bada, $M(Q)=\begin{pmatrix}1 & a/2 & 1\\ a/2 & a & a/2\\ 1 & a/2 & 1\end{pmatrix}$ izango da.

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: {1, a, 1}.
Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: {a-a^2/4, 0, a-a^2/4}.
|$M(Q)$|=0.

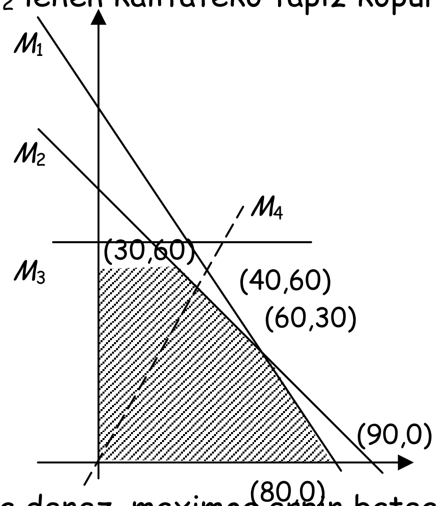
Orduan, $|M(Q)|=0$ denez, inoiz ez da definitua (positiboa zein negatiboa) izango eta erdidefinitu negatiboa ere ez, lehen ordenako azpideterminante nagusi bi gutxienez 0 baino handiagoa direlako.
Erdidefinitu positiboa izateko $a\geq 0$ eta $a-a^2/4\geq 0$ izan behar dira, hau da, $0\leq a\leq 4$ denean. Eta beraz, $a<0$ edo $a>4$ denean Q indefinitua izango da.

2.- Ehundegi txiki batek bi motako tapizak egiten ditu: kalitate bikainekoak eta lehen kalitatekoak. Hauek egiteko artilea eta kotoia erabiltzen du, 480 kilo artile eta 450 kilo kotoi erabiltzeko kopuruak izanik. Kalitate bikaineko tapiz bat egiteko 6 kilo artile eta 5 kilo kotoi behar du eta lehen kalitateko bat egiteko, 4 kilo artile eta 5 kilo kotoi. Gainera, tapizen salmentei buruzko ikerketa baten ondorioz, lehen kalitateko tapizen produkzioak 60 edo gutxiago izan behar duela erabakitzen dute. Kalitate bikaineko tapiz bakoitzak 800€ eta lehen kalitatekoak 600€ balio badu, eta ekoizten den guztia saltzen bada,

i) Aurki ezazu tapizen produkzio hoberena enpresaren sarrera maximoa izateko.
ii) Kotoi gehiago eskura ahal izango balute, zenbat gehiago eskuratuko lukete? zein preziotan?
iii) Ehundegiak nahi izango balu saltzen duen kalitate bikaineko tapizen kopurua handitu, zenbatetan saldu beharko luke lehen kalitateko tapizak?
iv) Kalitate bikaineko bi tapizeko gehienez lehen kalitateko hiru tapiz egingo dutela erabakitzen badute, lehen atalean lortutako soluzio hoberena aldatuko litzateke?

x_1 kalitate bikaineko tapiz kopurua eta x_2 lehen kalitateko tapiz kopurua badira,

$$\max(800x_1+600x_2)$$
$$\begin{cases} 6x_1+4x_2\leq 480 \\ 5x_1+5x_2\leq 450 \\ x_2\leq 60 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



i) X soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, maximoa erpin batean egongo da:

$$-\infty \xleftrightarrow{(80,0)} m_1=-3/2 \xleftrightarrow{(60,30)} m_2=-1 \xleftrightarrow{(30,60)} m_3=0$$

Eta helburu funtzioaren maila kurben malda m_f=-4/3 denez, soluzio hoberena (60,30) da eta balio hoberena 66.000€.

ii) Kalkula dezagun kotoia adierazten duen murrizketaren (bigarrena) itzal prezioa:
M_2: $5x_1+5x_2=450+b$
(60,30)→(40,60)

b=0→b=50

66.000€→68.000€

$$\lambda_b = \frac{f(40,60) - f(60,30)}{\Delta b} = \frac{68.000 - 66.000}{50} = 40€$$

Beraz, gehienez 50 kilo kotoi gehiago eskuratuko lukete eta gehienez 40€ kiloko ordainduko lukete.

iii) Irudian ikusten den bezala, kalitate bikaineko tapiz gehiago egiteko, soluzio hoberenak (80,0) puntuan egon beharko zuen, hau da, $m_f \le m_1$ denean; orduan (p_2 lehen kalitateko tapizen prezioa izanik),

$$m_f = -\frac{800}{p_2} \le m_1 = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad p_2 \le \frac{1600}{3}€$$

iv) M_4 murrizketa berria $3x_1 \ge 2x_2$ denez, eta lehengo atalean lortutako soluzio hoberenak (60,30) murrizketa hau betetzen duenez, hoberena izaten jarraitzen du.

3.- Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max(2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

i) Bete ezazu aurreko problemari dagokion honako taula hau eta taula honetatik hasita, aurki ezazu problemaren soluzio hoberena, existitzen bada.

1	1	0	1	0		3
0	1	1	-1			1
	0		1	1	1	
	2			-1		

ii) Eman ezazu lehen murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko eta eman ere bere itzal prezioa.

iii) Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 1etik 4ra aldatzen bada, sortutako soluzioak hoberena izaten jarraituko du?, zergatik?

iv) Lehen murrizketaren gai independentea 3tik 4ra aldatzen bada, sortutako soluzioak hoberena izaten jarraituko du?, zergatik?

i) Lehenengoz problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max(2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$ eta koefizienteen matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Argi dago A_1, A_3 eta A_6 oinarrian daudela, beraz,

$A_5=0A_1+aA_3+A_6$, hau da, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=-1$.

A_4 zutabearen azken errenkadako elementua: $2\times1+1\times(-1)+0\times1=1$

Eta oinarrizko soluzio egingarria: $b=3A_1+A_3+bA_6$, hau da, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow b=1$.

Bukatzeko, balio hoberena: $3\times2+1\times1+1\times0=7$.

		2	1	1	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ
2	A_1	1	1	0	1	0	**0**	3	
1	A_3	0	1	1	-1	**-1**	**0**	1	
0	A_6	**0**	0	**0**	1	1	1	**1**	1 →
		0	2	**0**	**1**	-1	**0**	**7**	
						↑			

		2	1	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
2	A_1	1	1	0	1	0	0	3
1	A_3	0	1	1	0	0	1	2
0	A_5	0	0	0	1	1	1	1
		0	2	0	2	0	1	8

Eta azken errenkadako elementu guztiak ez negatiboak direnez, taula hoberena da eta soluzio hoberena (3,0,2) da.

ii) Koefizienteen matrizean $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_4$ denez,

$b+\alpha A_4$
$3+\alpha$
2
$1+\alpha$
$8+2\alpha$

Eta oinarrizko soluzio egingarria izateko: $3+\alpha\geq0$, $1+\alpha\geq0$ eta orduan $\alpha\geq-1$.

Itzal prezioa kalkulatzeko $\lambda = \dfrac{8+2\alpha-8}{\alpha} = 2$.

iii)

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
		2	**4**	1	0	0	0	
2	A_1	1	1	0	1	0	0	3
1	A_3	0	1	1	0	0	1	2
0	A_5	0	0	0	1	1	1	1
		0	**-1**	0	2	0	1	8

Helburu funtzioaren x_2-ren koefizientea 1etik 4ra pasatzen bada, taulak hoberena izaten uzten du, eta ondorioz, beste soluzio hoberen berri bat izango dugu.

iv) Bigarren atalean egin duguna aplikatuko dugu eta α=1 denez, soluzio hoberena (4,0,2) izango da eta balio hoberena 10 izango da.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2006ko OTSAILA

1.- (5 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \text{ non } a,\, b\in\mathbb{R} \text{ diren.}$$

a eta *b*-ren zein baliotarako izango da *A* matrizea diagonalgarria?

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & a & b\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-b)=0$$

Erroak: $\lambda=1, \lambda=\sqrt{b}, \lambda=-\sqrt{b}$.

Azterketa:

- $b<0$ bada, edozein $a\in\mathbb{R}$ A ez da diagonalgarria.

- $b=0$ bada, erroak 0(bikoitza) eta 1 dira.

Horrela, A diagonalgarria izateko $S(0)=2$ izan behar da.

$\dim S(0)=3-heina\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=3-2=1.$ Edozein $a\in\mathbb{R}$-rako A ez da diagonalgarria.

- $b=1$ bada, erroak -1 eta 1(bikoitza) dira.

Horrela, A diagonalgarria izateko $S(1)=2$ izan behar da.

$\dim S(1)=$

$$3-heina\begin{vmatrix}-1 & a & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{cases}a=-1 \text{ denean } \dim S(1)=2. \text{ Hortaz, } A \text{ diagonalgarria da.}\\ a\neq-1 \text{ denean } \dim S(1)=1. \text{ Hortaz, } A \text{ ez da diagonalgarria.}\end{cases}$$

- Azkenik, $b>0$ eta $b\neq 1$ denean, hiru erroak ezberdinak dira eta horregatik A diagonalgarria izango da edozein $a\in\mathbb{R}$-rako.

2.- (5 puntu) Demagun $Q(x)$ honako forma koadratiko hau:

$$Q(\boldsymbol{x})={}^{t}M(\boldsymbol{x})BM(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

non $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

Eman $Q(\boldsymbol{x})$-ren adierazpen matrizea eta sailkatu forma koadratikoa a-ren balioen arabera.

$$M(Q)=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, a, a\}$
2. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a^2, a^2\text{-}4, a^2\}$
3. ordenako azpideterminante nagusia: $a(a^2\text{-}4)$

- a^2-4<0, hau da, $-2<a<2$ bada, 2. ordenako azpideterminante nagusi bat <0 denez, forma koadratikoa indefinitua da.
- $a=2$ bada, $|M(Q)|=0$ eta beste azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 direnez, Q erdidefinitu positiboa da.
- $a=-2$ bada, $|M(Q)|=0$, 1. ordenako *AN* guztiak ≥ 0 eta 2. ordenako *AN* guztiak ≤ 0 direnez, Q erdidefinitu negatiboa da.
- $a>2$ bada, azpideterminante nagusi guztiak >0 dira eta beraz, Q definitu positiboa da.
- $a<-2$ bada, 1. eta 3. ordenako *AN* guztiak <0 eta 2. ordenako *AN* guztiak >0 direnez, Q definitu negatiboa da.

3.- (12 puntu) Konpainia batek garbigailuak eta ontzi-garbigailuak ekoizten ditu. 3 tailerretan egiten dira. 1. tailerrean motorrak egiten dira eta 1200 langile egokitu zaizkio; 2. tailerrean osagaiak ekoizten dira eta 1850 langilek dihardute; azkenik, 3. tailerrean muntatu egiten dira eta 900 langile daude. Langile bakoitzak asteko 40 ordu egiten du lan. Taula honetan unitate bat ekoizteko tailer bakoitzean behar den ordu kopurua jasotzen da:

	Garbigailuak	Ontzi-garbigailuak
1. tailerra	1	3
2. tailerra	3	4
3. tailerra	2	1

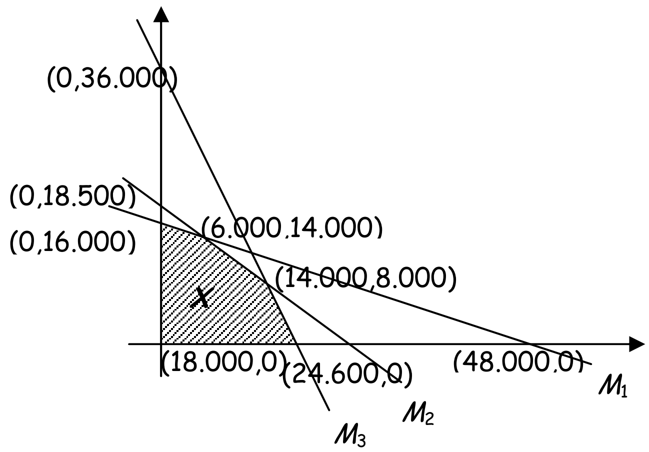
Garbigailu bakoitzarekin lortutako mozkina 50 eurokoa da eta ontzi-garbigailu bakoitzeko, ordea, 80 eurokoa. Bestalde, konpainiak produktu bakoitzetik, tailer edukierak kontuan hartuta, nahi bezain beste sal dezakeela ezagutzen du.

a) Kalkulatu konpainiaren mozkinak maximotzen dituen ekoizpena programazio linealeko problema moduan.
b) Ontzi-garbigailu bakoitzaren mozkina mantenduz, zer tartetan izan behar da garbigailuaren bakoitzaren mozkina ekoizpen hoberena aurreko atalean lortutakoa izateko?
c) Kalkulatu 1. eta 3. tailerreko lanorduan itzal prezioak.
d) a) atalean lortutako kontuan hartuta, konpainiako zuzendariak 3. tailerrean dagoen langile kopurua behar dena baino handiagoa dela ikusten du. Horrela, 3. tailerretik 2. tailerrera 125 langile pasatzea erabaki du, zer gertatzen da mozkin hoberenarekin?
e) Produktu hauen eskariek behartuta, konpainiak bi ontzi-garbigailuko gutxienez 7 garbigailu ekoiztea erabakiko balu, zein litzateke orain ekoizpen hoberena?

a) x_1: ekoiztutako garbigailu kopurua
x_2: ekoiztutako ontzi-garbigailu kopurua

Eta ebatzi behar den problema:

$$\max(50x_1 + 80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 48.000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 74.000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 36.000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Murrizketen eta helburu funtzioaren maila kurben maldak aztertuz (X, soluzio egingarrien multzoa, trinkoa da):

$$-\infty \xleftrightarrow{(18.000,0)} m_3 = -2 \xleftrightarrow{(14.000,8.000)} m_2 = -\frac{3}{4} \xleftrightarrow{(6.000,14.000)} m_1 = -\frac{1}{3} \xleftrightarrow{(0,16.000)} 0$$

Eta helburu funtzioaren maila kurben malda $m_2 < m_f = -\frac{5}{8} < m_1$ denez, soluzio hoberena M_2 eta M_1 murrizketak ebakitzen diren puntuan egongo da, hau da, (6.000,14.000) puntuan. Beraz, ekoiztuko den garbigailu kopurua 6.000 izango da, ontzi-garbigailu kopurua 14.000 eta lortuko den mozkin maximoa 1.420.000 euro.

b) Orain helburu funtzioa max(ax_1+80x_2) dugu eta bere malda $m_f = -\frac{a}{80}$. Horrela, soluzio hoberena lehenengo bera izateko,

$$m_2 \leq m_f \leq m_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4} \leq -\frac{a}{80} \leq -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{3} \leq a \leq 60$$

Horrela, garbigailuen prezioa 26,66 eta 60 euro artean egon behar da soluzio bera mantentzeko.

c) Lehen murrizketa asea da, orduan

M_1: $x_1+3x_2=48.000+a$

$(6.000,14.000)\rightarrow(0,18.500)$

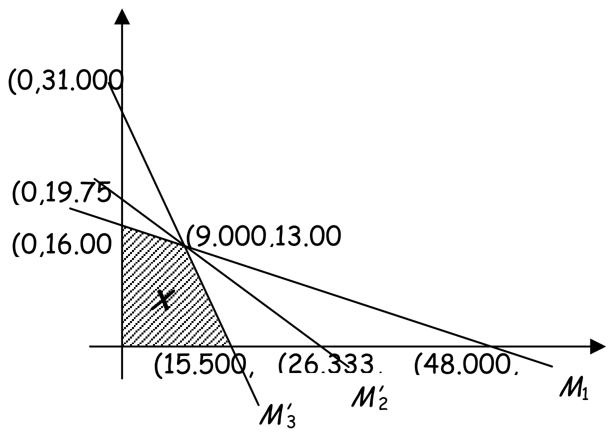
$a=0\rightarrow a=7.500$

$$\lambda_1=\frac{f(0,18.500)-f(6.000,14.000)}{55.500-48.000}=\frac{1.480.000-1.420.000}{7.500}=8€$$

3. murrizketa, ordea, ez asea da eta orduan, $\lambda_3=0$ da.

d) Problema berria:

$$\max(50x_1+80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 48.000 \\ 3x_1+4x_2\le 79.000 \\ 2x_1+x_2\le 31.000 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$



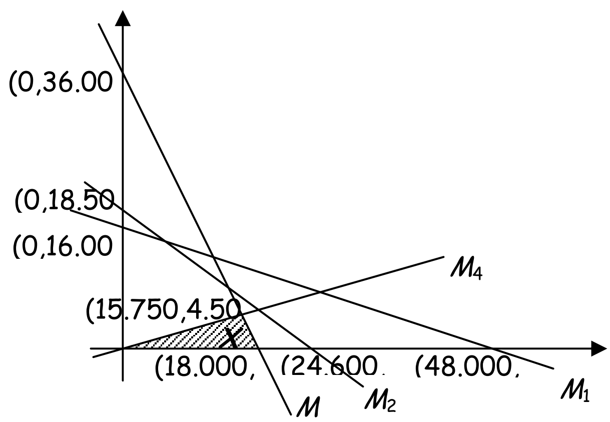
$$-\infty\xleftarrow{(15.500,0)}\!\!\!\rightarrow m_3'=-2\xleftarrow{(9.000,13.000)}\!\!\!\rightarrow m_1=-\frac{1}{3}\xleftarrow{(0,16.000)}\!\!\!\rightarrow 0$$

$$m_3'<m_f=-\frac{5}{8}<m_1$$

Eta soluzio hoberen berria: 9.000 garbigailu eta 13.000 ontzi-garbigailu. Mozkin maximoa: 1.490.000€.

e) Orain murrizketa berri bat (M_4) dugu:

$$\max(50x_1+80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 48.000 \\ 3x_1+4x_2\le 74.000 \\ 2x_1+x_2\le 36.000 \\ x_1\ge 3{,}5x_2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: 15.750 garbigailu eta 4.500 ontzi-garbigailu. Mozkin maximoa: 1.147.500€

4.- (4 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Osatu honako taula hau, aurreko problemari dagokion oinarrizko soluzio egingarri bati elkartuta dagoela jakinik, eta ebatzi.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1		-1	2	0	2
		1	-1	0	1
		-1		1	
0			4	0	

Lehenik osatu egingo dugu.

		3	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
3	A_1	1		-1	2	0	2
2	A_2			1	-1	0	1
0	A_5			-1	c	1	x_5
		0		d	4	0	

Era estandarreko problema:

$$\max(3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_5 = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,5. \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kalkula dezagun c zenbakia:

$A_4=2A_1-1A_2+cA_5$, hau da, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eta $c=2$ da.

d kalkulatzeko, $d=3\cdot(-1)+2\cdot 1+0\cdot(-1)-0=-1$.

A_1, A_2 eta A_5 zutabeei elkartutako oinarrizko soluzio egingarria $(x_1,x_2,0,0,x_5)$ erakoa da. Beraz, taulari begiratuz, $(2,1,0,0,x_5)$ erakoa da. Problemaren murrizketak definitutako sisteman ordezkatuz,

$$\begin{cases} 2+2=4 \\ 2+1=3 \\ 2-x_5=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_5=1$$

Oinarrizko soluzio egingarria helburu funtzioan ordezkatuz 8 dugu eta beste hutsuneak berehalakoak direnez, taula hau da:

		3	2	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**	θ
3	A_1	1	0	-1	2	0	2	
2	A_2	0	1	1	-1	0	1	1 →
0	A_5	0	0	-1	2	1	1	
		0	0	-1	4	0	8	
				↑				

A_2 irtengo da eta A_3 sartuko da, pibotea markatua dagoen 1 izanik. Eragiketak eginez, hurrengo taula hauxe da:

		3	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	**b**
3	A_1	1	0	0	1	0	3
0	A_3	0	1	1	-1	0	1
0	A_5	0	1	0	1	1	2
		0	1	0	3	0	9

Eta jatorrizko problemaren soluzio hoberena (3,0) da eta balio hoberena 9 da.

5.- (4 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Honako hau problemari dagokion taula hoberen bat dela jakinik, erantzun honako galdera hauek:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
-10/3	0	0	1	1/3	-7/3	3
-1/3	1	0	0	1/3	-1/3	1
7/6	0	1	0	-1/6	2/3	2
11/6	0	0	0	1/6	4/3	8

i) Zein da 2. murrizketaren gai independentearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Eman 2. murrizketaren itzal prezioa.

ii) Zein da helburu funtzioaren x_2 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

iii) Zer gertatzen da soluzio hoberenarekin 3. murrizketaren gai independentea 5-etik 6-ra pasatzen bada?

i) Bigarren murrizketan 8-ren ordez 8+ε ipintzen badugu, problema berria dugu eta honi elkartutako taula hoberena problemak emandakoa izango da, azken zutabea aldatuta. Azken zutabe berria

$b+\varepsilon A_5$
$3+\frac{1}{3}\varepsilon$
$1+\frac{1}{3}\varepsilon$
$2-\frac{1}{6}\varepsilon$
$8+\frac{1}{6}\varepsilon$

izango da. Hiru lehen elementuak ≥ 0 izan behar direnez, $-3 \le \varepsilon \le 12$ egiaztatzen da. Eta itzal prezioa $\lambda_2 = \dfrac{1}{6}$ da.

ii) 2-ren ordez, 2+λ ipintzen bada, taula berria:

		1	$2+\lambda$	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	-10/3	0	0	1	1/3	-7/3	3
$2+\lambda$	A_2	-1/3	1	0	0	1/3	-1/3	1
3	A_3	7/6	0	1	0	-1/6	2/3	2
		$11/6-\lambda/3$	0	0	0	$1/6+\lambda/3$	$4/3-\lambda/3$	$8+\lambda$

11/6- λ/3≥0, 1/6+ λ/3≥0, 4/3- λ/3≥0 bada, soluzio hoberena ez da aldatuko. Bestela, aldatuko da, hurrenho taula kalkulatuko genuke eta helburu funtzioak balio handiagoa hartuko luke. Eragiketak eginez, -1/2≤ λ≤4 dugu.

iii) Lehenengo galderan egin dugun moduan,

$$\begin{array}{|c|}\multicolumn{1}{c}{b+\varepsilon A_6} \\ \hline 3-\frac{7}{3}\varepsilon \\ 1-\frac{1}{3}\varepsilon \\ 2+\frac{2}{3}\varepsilon \\ \hline 8+\frac{4}{3}\varepsilon \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\varepsilon=1} \begin{array}{|c|}\multicolumn{1}{c}{b+A_6} \\ \hline 2/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \\ \hline 28/3 \\ \hline \end{array}$$

dugu azken zutabe berritzat. ε =1 ordezkatzen badugu, soluzio hoberena aldatzen da eta $\left(0,\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$ puntua izatera pasatzen da.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2006ko EKAINA

1.- Demagun $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2 & a \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$ izanik.

i) Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna $a,b\in\mathbb{R}$ balioen arabera.

ii) b=-1 bada, har dezagun

$$Q(x) = {}^{t}M(x)AM(x),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

forma koadratikoa. Aurkitu $M(Q)$ eta sailkatu Q forma koadratikoa $a\in\mathbb{R}$ balioaren arabera.

i) Kalkula ditzagun balio propioak:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ a & 2-\lambda & a \\ b & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - b(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1+\sqrt{1+b} \\ \lambda = 1-\sqrt{1+b} \end{cases}$$

b<-1 bada (a edozein izanda), erro guztiak ez dira errealak eta ondorioz, A ez da diagonalgarria izango.

b=-1 bada, erroak 2 eta 1 (bikoitza) izango dira. Azter dezagun 1 balio propioaren azpiespazio espektralaren dimentsioa:

dim$S$(1)=3-heina$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$=3-2=1, hau da, dim$S$(1) 1 balioaren anizkoiztasuna $p(\lambda)$-n baino txikiagoa da, beraz, A ez da diagonalgarria izango.

b=0 bada, erroak 2 (bikoitza) eta 0 izango dira.

dim$S$(2)=3-heina$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{cases} a=0 \text{ bada, } \dim S(2)=2 \\ a\neq 0 \text{ bada, } \dim S(2)=1 \end{cases}$

Beraz, b=0 eta a=0 denean, A diagonalgarria izango da eta b=0 eta $a\neq$0 denean ez.

b>-1 eta $b\neq$0 denean, hiru balio propio ezberdin dira, eta orduan A diagonalgarria izango da, a edozein izanda.

ii) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 2 & a \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bada, $M(Q)=\begin{pmatrix} 2 & a/2 & 0 \\ a/2 & 2 & a/2 \\ 0 & a/2 & 0 \end{pmatrix}$ izango da.

Lehen ordenako azpideterminante nagusiak: {2, 2, 0}.

Bigarren ordenako azpideterminante nagusiak: $\{4-a^2/4, 0, -a^2/4\}$.
$|M(Q)|=-a^2/2$.
Orduan, $a=0$ bada, $|M(Q)|=0$ eta azpideterminante nagusi guztiak ≥ 0 dira. Hau da, Q erdidefinitu positiboa da
Eta $a\neq 0$ bada, $-a^2/4<0$ denez eta azpideterminante hau ordena bikoitikoa denez, Q indefinitua da.

2.- Enpresa batek *A* eta *B* bi motako hariak ekoizten ditu, zetazko haria eta kotoizko haria proportzio hauetan nahasiz; *A* motako haria lortzeko proportzioa hauxe da: %60 zetazko haria eta %40 kotoizkoa. *B* motako haria lortzeko proportzioa berriz: %40 zetazko haria eta %60 kotoizkoa. Zetazko metro bat 3 m.u. kostatzen da eta kotoizko metro bat 0,5 m.u. *A* motako hariaren metro baten ekoizpen prozesuaren kostua, lehengaia kontuan hartu gabe, 2,5 m.u.-koa eta *B* motako hariaren metro batena, berriz, 1 m.u.-koa. Astero zetazko hariko gehienez 1.800 metro erabil daitezke eta kotoizko hariko gehienez 2.400 metro. Horrez gainera, ekoizpen prozesuaren kostuak (lehengaiena kontuan hartu gabe) ezin du 6.000 m.u. gainditu. *A* motako hariaren metro baten eta *B* motako hariaren metro baten salmenta prezioak 8,5 m.u. eta 4,5 m.u., hurrenez hurren, dira.

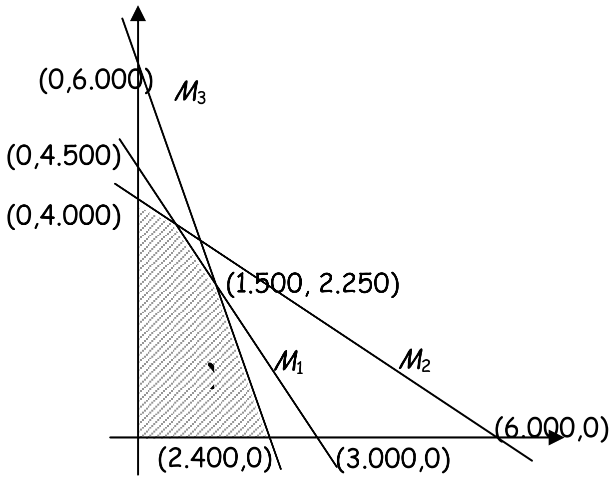
i) Aurki ezazu enpresaren mozkin totala maximotzen duen asteroko produkzioa.
ii) Enpresari komeni al zaio ekoizpen prozesuaren kostua 6.000 m.u.-tik gora handitzea? Zer kantitate arte? Zeta gehiago erostea komeni al litzaioke? Zer preziotan erosiko luke?
iii) *A* motako hariaren metro baten prezioa 8,5 m.u.-etan utziz, aurkitu *B* motako hariaren prezioa enpresaren erabakia *B* motako haria soilik ekoiztea izateko. Prezio berri hauetan zer nahiago luke enpresak: zeta gehiago erostea edo kotoi gehiago erostea?

x_1 *A* motako astero ekoiztutako metroak eta x_2 *B* motako astero ekoiztutako metroak badira,
Helburu funtzioa: Mozkinak = Sarrerak – Ekoizpen prozesuaren kostuak – Lehengaien kostuak.

$$x_1\left(8{,}5-2{,}5-\left(3(0{,}6)+0{,}5(0{,}4)\right)\right)+x_2\left(4{,}5-1-\left(3(0{,}4)+0{,}5(0{,}6)\right)\right)=4x_1+2x_2$$

Horrela, ebatzi behar den problema:

$$\max 4x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 \le 1.800 \\ 0,4x_1 + 0,6x_2 \le 2.400 \\ 2,5x_1 + x_2 \le 6.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) X soluzio egingarrien multzoa trinkoa denez, maximoa erpin batean egongo da. Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{array}{l} m_z = -2 \\ m_1 = -1,5 \\ m_2 = -0,6 \\ m_3 = -2,5 \end{array}\right\} \text{Ordenatuz: } m_3 < m_z < m_1 < m_2$$

Eta horrela, soluzio hoberena M_1 eta M_3 murrizketen ebakiduran, (1.500,2.250) puntuan hain zuzen, egongo da, hau da, A haritik 1.500 metro ekoiztuko dira eta B haritik 2.250 metro. Lortuko den maximo totala 10.500 m.u.

ii) M_3 murrizketa urria da, orduan, kostua handitzearekin mozkina handitzea lortuko du. Hau horrela izango da (3.000,0) aukerara heldu arte, hau da, 7.500 m.u.-ko kostura arte.

Zetaren murrizketa lehena da eta urria da, beraz, gehiago erostea komeni zaio prezio honetara:

M_1: $0,6x_1 + 0,4x_2 = 1.800 + a$

$$(1.500,2.250) \rightarrow \left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right)$$

$$a=0 \rightarrow a=\frac{1.800}{11}$$

$$f(1.500,2.250)=10.500 \text{ m.u.} \rightarrow f\left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right) = \frac{120.000}{11} \text{ m.u.}$$

$$\lambda_1 = \frac{f\left(\frac{12.000}{11}, \frac{36.000}{11}\right) - f(1.500,2.250)}{\frac{1.800}{11}} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m.u.}$$

iii) Orain B motako prezioaren arabera helburu funtzioa horrela idatz dezakegu: $4x_1 + (b-2,5)x_2$. Maximoa (0,4.000) puntuan lortzea nahi badugu, $m_3 < m_1 < m_2 < m_z$ gertatu behar da eta horretarako:

$$-\frac{0,4}{0,6} \leq -\frac{4}{b-2,5}, \text{ hau da, } b \geq 8,5$$

(0,4.000) soluzio hoberenean M_2 murrizketa urria da eta M_1 berriz oparoa. Horregatik *B* motako prezioa $b \geq 8,5$ denean mozkin total handiagoa lortzeko kotoia erostea komeni zaio.

3.- (4 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(ax_1 + bx_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

non $a,b \in \mathbb{R}$ diren

i) Ebatzi problema a=2 eta b=-1 direnean.

ii) a=0 eta b=3 balioei dagokien problemari elkartutako honako taula hau kontuan har dezagun.

		0	3	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
3	A_2	1/4	1	1/2	1/2	0	3
0	A_5	-5/4	0	-7/2	-1/2	1	0
		3/4	0	5/2	3/2	0	9

1) Aurkitu problemaren bi murrizketen itzal prezioak eta oinarri hoberena ez aldatzeko murrizketa bakoitzaren gai independentearen aldaketa tartea.

2) Lehenengo murrizketaren gai independentea 6tik 2ra jaisten bada, soluzio hoberena aldatzen al da? Aldatzen bada, eman ezazu soluzio hoberen berria.

3) Aurki ezazu helburu funtzioaren x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko.

i) Lehenengoz problema era estandarrean idatziko dugu:

$$\max(2x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 3 \\ \quad x_1 \ge 0, \dots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

eta koefizienteen matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Azken bi zutabeak hartzen baditugu oinarrizko soluzio egingarria lortzeko, taula hau dugu:

		2	-1	-1	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b	θ	
0	A_4	1/2	2	1	1	0	6	12	→
0	A_5	-1	1	-3	0	1	3		
		-2	1	1	0	0	0		
		↑							

Hurrengo taula:

		2	-1	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
2	A_1	1	4	2	2	0	12
0	A_5	0	5	-1	2	1	15
		0	9	5	4	0	24

Eta azken errenkadako elementu guztiak zero baino handiagoak direnez, (12,0,0) soluzio hoberena da eta 24 balio hoberena.

ii.1) Koefizienteen matrizean $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_4$ denez,

$b+\alpha\ A_4$
$3+\frac{1}{2}\alpha$
$-\frac{1}{2}\alpha$
$9+\frac{3}{2}\alpha$

Eta $3+\frac{1}{2}\alpha \geq 0$ eta $-\frac{1}{2}\alpha \geq 0$ izan behar direnez oinarri hoberena ez aldatzeko, $-6 \leq \alpha \leq 0$ izan behar da. Eta itzal prezioa 3/2 da.

Bigarren murrizketari dagokionez: koefizienteen matrizean $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_5$ denez,

$b+\alpha\ A_5$
3
α
9

Eta $\alpha \geq 0$ izan behar da oinarri hoberena ez aldatzeko. Itzal prezioa 0 da.

ii.2) Lehenengo murrizketaren gai independentea 6tik 2ra jaisten bada, α =-4 da eta beraz soluzio hoberen berria, aurrekoa kontuan hartuz, (0,1,0) da, eta gainera, taula kontuan hartuz, soluzio bakarra da. beraz, soluzio hoberena aldatu da.

ii.3)

		λ	3	-1	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
3	A_2	1/4	1	1/2	1/2	0	3
0	A_5	-5/4	0	-7/2	-1/2	1	0
		$3/4-\lambda$	0	5/2	3/2	0	9

Eta beraz, soluzio hoberena ez aldatzeko $\frac{3}{4}-\lambda \geq 0$ izan behar du, hau da, $\lambda \leq 3/4$.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2007ko OTSAILA

1.- (10 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \text{ non } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ diren.}$$

i) β=0 eta γ=1 balioentzako, aurkitu, existitzen bada, A-ren balio propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat eta matrize diagonal bat, A-ren antzekoa.

ii) β=-1 eta γ=5 badira, sailkatu $Q(\boldsymbol{x})={}^tM(\boldsymbol{x})AM(\boldsymbol{x})$ forma koadratikoa $\alpha \in \mathbb{R}$ balioen arabera.

i) $$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)[(\alpha-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Balio propioak $\lambda = \alpha$, $\lambda = \alpha + 1$ eta $\lambda = \alpha - 1$. Hiru balio propio ezberdin ditugunez, A matrizea diagonalgarria da $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ eta bere antzeko matrize diagonal bat, adibidez, honako hau da:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

Oinarria osatzeko $S(\lambda)$ ezberdinak lortuko ditugu:

$S(\alpha) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - \alpha I)M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$

Horrela, $S(\alpha) = \left\{x_1(1,0,0) / x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L\langle(1,0,0)\rangle$

$S(\alpha+1) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - (\alpha+1)I)M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

Horrela, $S(\alpha+1) = \left\{x_1(1,1,1) / x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L\langle(1,1,1)\rangle$

$S(\alpha-1) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - (\alpha-1)I)M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = -x_3$$

Horrela, $S(\alpha-1)=\{x_1(-1,-1,1)/x_1\in\mathbb{R}\}=L\langle(-1,-1,1)\rangle$

Eta A-ren bektore propioz osaturiko oinarri bat: $B=\langle(1,0,0),(1,1,1),(-1,-1,1)\rangle$.

ii) $M(Q)=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 3\\ 0 & 3 & \alpha\end{pmatrix}$

1 ordenako azpideterminante nagusiak: α, α, α.
2 ordenako azpideterminante nagusiak: α^2, α^2, α^2-9.
3 ordenako azpideterminante nagusia: $|M(Q)|= \alpha^3-9\alpha= \alpha(\alpha^2-9)$.
Sailkapena:

- $-3<a<3$: Q indefinitua.
- $a=3$: Q erdidefinitu positiboa.
- $a=-3$: Q erdidefinitu negatiboa.
- $a>3$: Q definitu positiboa.
- $a<-3$: Q definitu negatiboa.

2.- (10 puntu) Enpresa batek bi produktu, P_1 eta P_2, ekoizten ditu bi lehengai, A eta B, erabilita. Taula honetan produktu bakoitzetik tona bat ekoizteko behar diren lehengai kantitateak eta baita hauen erabilgarritasuna asteko, denak tonatan, jasotzen dira:

	P_1 produktua	P_2 produktua	erabilgarritasuna
A lehengaia	1	2	300
B lehengaia	4	3	720

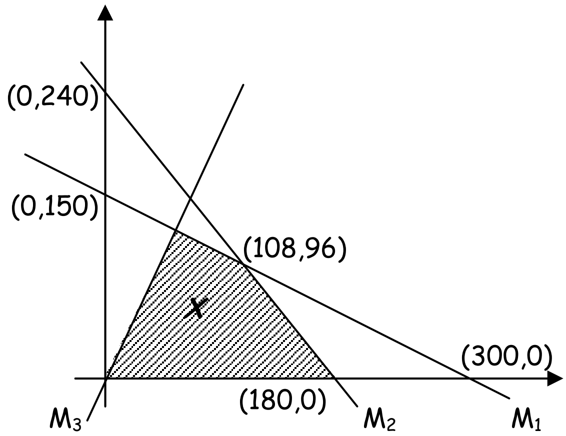
Murrizketa teknologikoak direla eta P_2-ren produkzioa ezin da P_1-en produkzioaren bikoitza baino handiagoa izan. Tonako mozkina P_1 produktuarentzako 15 eurokoa da eta P_2 produktuarena, berriz, 20 eurokoa.

i) Zein da enpresaren mozkina maximotuko duen asteko produkzioa? Komeni al zaio B lehengaitik 720 tona gainetik erostea? Zenbat eta zer preziotara?
ii) Zein izan behar da P_2-ren mozkin minimoa, P_1-ena mantenduz, soilik P_1 produktutik ekoizteko?
iii) Legez mozkinak 3.000 euro baino gehiago ezingo direla izan ezartzen bada, zein da soluzio hoberena?
iv) Aurreko problemari honako informazio hau eransten lortzen dugun problema formulatu, ebatzi gabe:
 -P_1-eko 3 tona bakoitzeko P_2-tik gutxienez 4 ekoiztu behar dira.
 -Lehengaiei zerga berri bat ezarri zaie mozkin totala murriztuko duena, hain zuzen, A-ri tona bakoitzeko 0,5 euro eta B-ri tona bakoitzeko 0,6 euro.

Aldagai hauek definituko ditugu:
x_1= P_1 produktutik astean ekoiztutako tonak
x_2= P_2 produktutik astean ekoiztutako tonak

Ebatzi beharreko problema ha da:

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_2 \le 2x_1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



i) Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -\frac{15}{20} \\ m_1 &= -\frac{1}{2} \\ m_2 &= -\frac{4}{3} \\ m_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_1 < m_3 .$$

Eta horrela, soluzio hoberena M_1 eta M_2 murrizketen ebakiduran dago, hau da, (108,96) puntuan, hain zuzen, P_1 produktutik 108 tona ekoiztuko dira astean eta P_2 produktutik 96 tona. Lortuko den mozkin total maximoa 3.540 euro.

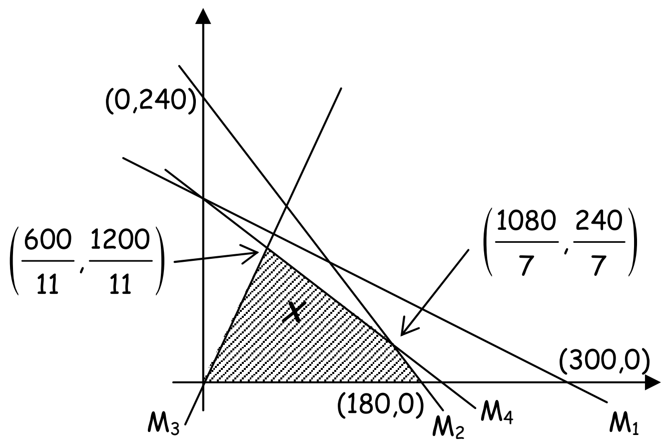
2. baliabidea M_2 murrizketan jasotzen dugu eta hau urria da soluzio hoberenean, orduan baliabidearen erabilgarritasuna handitzearekin mozkina handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (300,0) aukerara heldu arte, hau da, 1.200 tona arte. Eta gehienez ordainduko duen prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(300,0) - f(108,96)}{1200 - 720} = \frac{4500 - 3540}{480} = 2 \text{ €/tona}$$

ii) P_1 soilik ekoizteko m_f malda txikiena izan behar da: $m_f \le m_2$, hau da a deitzen badugu P_2-ren mozkina, $-\frac{15}{a} \le -\frac{4}{3} \Leftrightarrow a \le \frac{45}{4}$. Orduan P_2-ren mozkin tartea soilik P_1 ekoizteko $0 \le a \le \frac{45}{4}$ da eta mozkin minimoa 0.

iii) Orduan ereduan murrizketa berri bat sartzen dugu:

$$\max(15x_1 + 20x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_2 \le 2x_1 \\ 15x_1 + 20x_2 \le 3.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Eta $m_2 < \boldsymbol{m_f} = \boldsymbol{m_4} < m_1 < m_3$ denez, soluzio hoberena $\overline{\left(\frac{600}{11}, \frac{1200}{11}\right)\left(\frac{1080}{7}, \frac{240}{7}\right)}$ segmentuko puntuetan lortzen da, bertan balio hoberena 3000 da hain zuzen.

iv) Lehenengo informazioa jasoko duen murrizketa: $3x_2 \ge 4x_1$ da.

Ikusten dugunez helburu funtzioan zergak sartu beharko ditugu: $\max[15x_1 + 20x_2 - 0,5(x_1 + 2x_2) - 0,6(4x_1 + 3x_2)]$, hau da, $\max[12,1x_1 + 17,2x_2]$
Problema hau dugu:

$$\max(12,1x_1 + 17,2x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 720 \\ x_2 \le 2x_1 \\ 3x_2 \ge 4x_1 \\ 15x_1 + 20x_2 \le 3.000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max(50x_1 + 80x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 74 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 36 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Erabili zigorren metodoa jatorrizko problemarentzako oinarrizko soluzio egingarri bat lortzeko, hau da, aldagai artifizialak oinarritik kanpo utzi arte.

ii) Honako taula hau aurreko problemari elkartuta badago, lortu soluzio hoberena:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
A_1	1	0	-4/5	3/5	0	0	6
A_2	0	1	3/5	-1/5	0	0	14
A_5	0	0	4/5	2/5	1	-1	32
	0	0	8	14	0	M	1420

iii) Zein da bi lehenengo murrizketen itzal prezioa?

iv) Aurkitu soluzio hoberen berria lehenengo murrizketaren gai askea 5 unitate handitzen bada.

v) Hirugarren murrizketa $2x_1 + x_2 \le 36$ murrizketa berriarekin ordezkatzen bada, QSB programaren irteera problema berriarentzako honako hau da:

```
|----------------------- Solution Summary for Problema -----------------------|
| 01-18-2007 17:03:13                                           Page: 1 of 1  |
|-----------------------------------------------------------------------------|
| Variable | Variable |          |Opportuni-| Minimum  |  Current |  Maximum |
|  Number  |   Name   | Solution | ty Cost  |Obj. Coef.|Obj. Coef.|Obj. Coef.|
|----------+----------+----------+----------+----------+----------+----------|
|    1     |    X1    |        6 |        0 | 26.66667 |       50 |       60|
|    2     |    X2    |       14 |        0 | 66.66666 |       80 |      150|
|-----------------------------------------------------------------------------|
|         Maximized OBJ = 1420   Iteration = 2   Elapsed CPU seconds = 0      |
|-----------------------------------------------------------------------------|

|--------------------- Constraint Summary for Problema ----------------------|
| 01-18-2007 17:03:13                                           Page: 1 of 1 |
|----------------------------------------------------------------------------|
|Constraint|Constraint|  Shadow  |  Surplus |  Minimum |  Current |  Maximum |
|  Number  |  Status  |  Price   |          | R. H. S. | R. H. S. | R. H. S. |
|----------+----------+----------+----------+----------+----------+----------|
|     1    |Tight  (<)|        8 |        0 |       38 |       48 |     55.5 |
|     2    |Tight  (<)|       14 |        0 |       64 |       74 |       84 |
|     3    |Loose  (<)|        0 |       10 |       26 |       36 |        M |
|----------------------------------------------------------------------------|
|        Maximized OBJ = 1420   Iteration = 2   Elapsed CPU seconds = 0      |
|----------------------------------------------------------------------------|
|                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------|
```

a) Zein da problema berriaren soluzio hoberena?

b) Zein murrizketek jasotzen dute lehengai oparoak? Zergatik?

c) x_1-en koefizientea helburu funtzioan 55era handitzen bada, soluzio hoberena aldatuko litzateke? Zergatik?

i)

jatorrizkoa	estandarra	artifiziala
$\max(50x_1+80x_2)$	$\max(50x_1+80x_2)$	$\max(50x_1+80x_2-Mx_6)$
$\begin{cases} x_1+3x_2\le 48 \\ 3x_1+4x_2\le 74 \\ 2x_1+4x_2\ge 36 \\ x_i\ge 0\ (i=1,2) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=48 \\ 3x_1+4x_2+x_4=74 \\ 2x_1+4x_2-x_5=36 \\ x_i\ge 0\ (i=1,\dots,5) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=48 \\ 3x_1+4x_2+x_4=74 \\ 2x_1+4x_2-x_5+x_6=36 \\ x_i\ge 0\ (i=1,\dots,6) \end{cases}$

Eta koefizienteen matrizea:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eta hasierako oinarria $B=\langle A_3,A_4,A_6\rangle$ kanonikoa da. Honekin taula hau dugu:

		50	80	0	0	0	-M		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ
0	A_3	1	3	1	0	0	0	48	16
0	A_4	3	4	0	1	0	0	74	74/4
-M	A_6	2	4	0	0	-1	1	36	9 →
		-2M-50	-4M-80 ↑	0	0	M	0	-36M	

Bertan ikusten dugunez, oraindik A_6 aldagai artifiala agertzen da. Oinarrira A_2 sartuko dugu eta A_6 atera:

		50	80	0	0	0	-M		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ
0	A_3	-1/2	0	1	0	3/4	-3/4	21	28 →
0	A_4	1	0	0	1	1	-1	38	38
80	A_2	1/2	1	0	0	-1/4	1/4	9	
		-10	0	0	0	-20 ↑	M+20	720	

Eta jada oinarritik kanpo dugu A_6, hortaz oinarrizko soluzio egingarri bat problemarentzako: (0,9,21,38,0).

ii)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
A_1	1	0	-4/5	3/5	0	0	6
A_2	0	1	3/5	-1/5	0	0	14
A_5	0	0	4/5	2/5	1	-1	32
	0	0	8	14	0	M	1420

Ikusten dugunez, azkeneko errenkadan ez dugu negatiborik, orduan soluzio hoberenari dagokion taula dugu. Hain zuzen, soluzio hoberena (6,14) dugu.

iii) A_3 eta A_4 zutabeen azkeneko elementuan jasotzen da:
- 1. murrizketaren itzal prezioa 8 da
- 2. murrizketaren itzal prezioa 14 da.

iv) 1. murrizketaren gai askearen aldaketak A_3 zutabean jasotzen dira. 5 handitzen bada soluzio hoberena, azken zutabea horrela aldatzen da:

$6-\frac{4}{5}(5)$	2
$14+\frac{3}{5}(5)$	17
$32+\frac{4}{5}(5)$	36
1420+8(5)	1460

Soluzio hoberena: (2,17) eta balio hoberena: 1460.

v.a) 1. taulan ikusten dugunez (6,14) izango da problemaren soluzio hoberena.

v.b) Murrizketen informazioa 2. taulan dator. Bertan 3.a oparoa dela esaten digu. Hain zuzen, soluzio hoberenean 3. murrizketan 10 dugu soberan. Gainera, itzal prezioa 0 dela ikus dezakegu, oparoekin gertatzen den moduan.

v.c) Koefizientean aldaketa tartea, soluzio hoberena aldatu gabe, lehenengo taulan ematen digute. Eta bertan x_1-en aldaketa tartea [26'6667,60] dela dugu. Gurean, 55 arte handitzen bada, ez da soluzio hoberena aldatuko tartearen barruan baitago.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EZAL. 2007ko EKAINA

1.- (8 puntu) Demagun honako matrize hau:

$$A = \begin{pmatrix} b & 4 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \ a,b \in \mathbb{R}.$$

Aztertu A matrizearen diagonalgarritasuna a eta b parametroen balio ezberdinetarako.

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} b-\lambda & 4 & 4 \\ 0 & a-\lambda & b \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(b-\lambda) - b^2(b-\lambda) =$$

$$= (b-\lambda)((a-\lambda)^2 - b^2) = 0$$

Balio propioak: $\lambda = b, \lambda = a+b, \lambda = a-b$.

***a*=0**

- b=0: λ=0 hirukoitza.

  dim$S(0)$=3-heina(A-0I)=$3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2<3 $\Rightarrow$ A ez da diagonalgarria.

- b≠0: λ=b bikoitza eta λ=-b bakuna.

  dim$S(b)$=3-heina(A-bI)=$3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & -b & b \\ 0 & b & -b \end{pmatrix}$=1<2 $\Rightarrow$ A ez da diagonalgarria.

***a*≠0**

- b=0: λ=0 bakuna eta λ=a bikoitza.

  dim$S(a)$=3-heina(A-aI)=$3-\text{heina}\begin{pmatrix} -a & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow$ A diagonalgarria da.

- b≠0 eta a=2b: λ=3b bakuna eta λ=b bikoitza

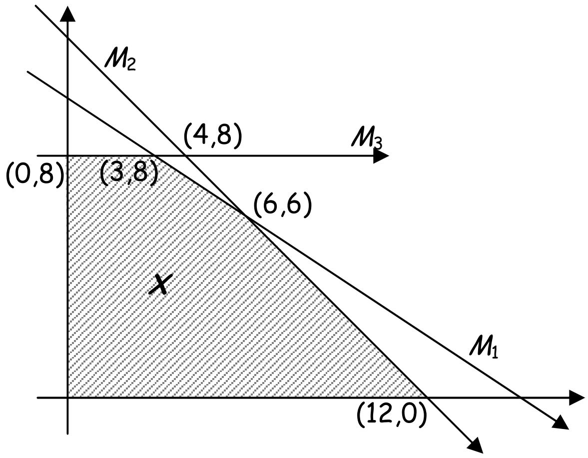
  dim$S(b)$=3-heina(A-bI)=$3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow$ A diagonalgarria da.

- b≠0 eta a≠2b: λ=b, λ=a+b eta λ=a-b hiru erro ezberdin $\Rightarrow$ A diagonalgarria.

2.- (8 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max[3x_1 + 4x_2]$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Kalkulatu grafikoki soluzio hoberena.
ii) Hiru murrizketen itzal prezioa kalkulatu.
iii) Jatorrizko problemari $2x_1 - ax_2 \ge 0$ murrizketa eransten bazaio, zer balio hartu behar du *a*-k soluzio hoberena ez aldatzeko?



i) Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{array}{r} m_f = -\dfrac{3}{4} \\ m_1 = -\dfrac{2}{3} \\ m_2 = -1 \\ m_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_1 < m_3.$$

Eta horrela, soluzio hoberena M_1 eta M_2 murrizketen ebakiduran dago, hau da, (6,6) puntuan eta bertan lortzen den balioa 42 da.

ii) Lehen murrizketaren itzal prezioa:

$$\lambda_1 = \frac{f(4,8) - f(6,6)}{32 - 30} = \frac{44 - 42}{2} = 1.$$

Bigarren murrizketaren itzal prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(15,0) - f(6,6)}{15 - 12} = \frac{45 - 42}{3} = 1.$$

Hirugarren murrizketaren itzal prezioa: ikusten dugunez, 3. murrizketa oparoa da, orduan bere itzal prezioa 0 da (λ_3=0).

iii) (6,6), aurreko problemaren soluzio hoberena, problema berriaren soluzio egingarria bada orduan ez da soluzio hoberena aldatuko. Horretarako $2 \cdot 6 - a \cdot 6 \geq 0$ izatea eskatuko diogu, hau da, $a \leq 2$. Kasu honetan, (6,6) soluzio egingarria da eta hoberena izaten jarraitzen du.

3.- (4 puntu) Enpresa batek *A* eta *B* produktuak ekoizten ditu lehengai berdinarekin. *A* unitate bat ekoizteko 6 kg lehengai behar dira eta *B* unitate bakoitzeko, ordea, 2 kg. Lehengai hornitzailearen edukiera eguneko 8000 kg da, 2 euro kg-ko prezioan.
Produktu hauek ekoizteko enpresak gehienez 50 langile erabil ditzake eta bakoitzak egunean 8 ordu egiten du lan. *A* unitate bat ekoizteko 0.4 lanordu behar ditu eta *B*-ko unitate batek, ordea, 0.3. Lanordu baten kostua 10 eurokoa da.
Produktuen bukaeran makina berezi bat erabiltzen da eta enpresak soilik *A* produktua ekoizten badu eguneko gehienez 6000 unitate ekoitz ditzake, baina soilik *B*-tik ekoizten badu orduan gehienez 5000 unitate ekoitz ditzake *B*-tik. Gainera, egindako merkatu ikerketaren arabera, *A* produktuaren salmenta gutxienez totalaren %60 da.
Unitateko salmenta prezioak *A* eta *B* produktuentzako, hurrenez hurren, 20 eta 40 euro dira.
Formula ezazu, ebatzi gabe, programa lineal bat produktu bakoitzetik ekoiztuko den kantiatea erabakitzeko, helburua mozkina maximizatzea izanik.

Aldagai hauek definituko ditugu:
x_1 = *A* produktutik egunean ekoiztutako kg-ak.
x_2 = *B* produktutik egunean ekoiztutako kg-ak.
Eta hauekin honako problema hau formulatuko dugu:
Mozkin funtzioa: $x_1(20-(6\cdot 2+0,4\cdot 10))+x_2(40-(2\cdot 2+0,3\cdot 10))=4x_1+33x_2$
Eta problema hau da:

$$\max[4x_1+33x_2]$$
$$\begin{cases} 6x_1+2x_2 \leq 8000 \\ 0,4x_1+0,3x_2 \leq 400 \\ \dfrac{5}{6}x_1+x_2 \leq 5000 \\ x_1 \geq 0,6(x_1+x_2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4.- (7 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max[2x_1 + 4x_2 + x_3]$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

i) Honako taula hau problema honi dagokio.Osatu eta problema ebatzi.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	0	-7		-4/3	-5/3	2/3
1	0			2/3	1/3	
0	1	2		1/3	2/3	4/3
0	0			8/3	10/3	26/3

ii) x_1-en koefizientea helburu funtzioan 5 bada, aldatzen al da soluzio hoberena?

iii) Bigarren murrizketaren gai askea unitate bat txikiagotzen bada, zein da problema berriaren soluzio hoberena?

iv) Komeni al da lehenengo murrizketaren gai askea handitzea?

i) Falta zaizkigunak lortzeko:

$$A_3 = -7A_4 + aA_1 + 2A_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2.$$

$$b = \frac{2}{3}A_4 + bA_1 + \frac{4}{3}A_2$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \frac{5}{3}.$$

Taula osatuz:

		2	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	0	-7	1	-4/3	-5/3	2/3
2	A_1	1	0	2	0	2/3	1/3	5/3
4	A_2	0	1	2	0	1/3	2/3	4/3
		0	0	11	0	8/3	10/3	26/3

Hau hoberena da. Beraz, soluzio hoberena (5/3,4/3,0) da eta balio hoberena 26/3 da.

ii)

		5	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	***b***
0	A_4	0	0	-7	1	-4/3	-5/3	2/3
5	A_1	1	0	2	0	2/3	1/3	5/3
4	A_2	0	1	2	0	1/3	2/3	4/3
		0	0	**17**	0	**14/3**	**13/3**	**41/3**

Azkeneko errenkadan denak ≥ 0 direnez, taula hoberena izaten jarraitzen du eta soluzio hoberena ez da aldatzen.

iii) 2. murrizketaren gai askearen aldaketak A_5 zutabean jasotzen dira. 1 txikiagotzen bada soluzio hoberena, azken zutabea horrela aldatzen da:

(2/3)-(4/3)(-1)		2
(5/3)+(2/3)(-1)	=	1
(4/3)+(1/3)(-1)		1
(26/3)+(8/3)(-1)		6

Soluzio hoberen berria: (1,1,0) eta balio hoberena: 6.

iv) Ez, ez da komeni, 1. murrizketa oparoa baita, taulan bere itzal prezioa 0 izateak adierazten diguna (1. murrizketaren gai askearen aldaketak A_4 zutabean jasotzen dira) eta horregatik, gai askea handitzeak ez du balio hoberena handitzen.

5.- (3 puntu) Enpresa batek labeak eta bitrozeramika plakak ekoizten ditu eta hauetako unitate bakoitzeko, hurrenez, hurren, 40 eta 20 euroko mozkinak lortzen ditu. Labe eta bitrozeramika plaka bakoitzak hiru tailer ezberdinetatik, *A*, *B* eta *C*, pasa behar du. Labe bakoitzak 1/2, 1/2 eta 3/2 ordu behar ditu, hurrenez hurren, *A*, *B* eta *C* tailerretan eta bitrozemarika plaka batek, ordea, 1,1/2 eta 1/2 ordu, hurrenez hurren. *A* eta *B* tailerretan asteko gehienez 30 lanordu daude erabilgarri eta *C* lantegian 40. x_1, x_2, hurrenez hurren, asteko labe eta bitrozeramika plaka unitateak adierazten badute, honako problema hau ebaztea da kontua:

$$\max[40x_1 + 20x_2]$$
$$\begin{cases} (1/2)x_1 + x_2 \leq 30 & (A \text{ tailerra}) \\ (1/2)x_1 + (1/2)x_2 \leq 30 & (B \text{ tailerra}) \\ (3/2)x_1 + (1/2)x_2 \leq 40 & (C \text{ tailerra}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problemarentzako QSB programaren irteera honako hau da:

Solution Summary for Problema

01-23-2007 17:49:07 — Page: 1 of 1

Variable Number	Variable Name	Solution	Opportunity Cost	Minimum Obj. Coef.	Current Obj. Coef.	Maximum Obj. Coef.
1	X1	20	0	10	40	60
2	X2	20	0	13.33333	20	80

Maximized OBJ = 1200 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown > < PageUp > < Hardcopy > < Cancel >

Constraint Summary for Problema

01-23-2007 17:48:34 — Page: 1 of 1

Constraint Number	Constraint Status	Shadow Price	Surplus	Minimum R. H. S.	Current R. H. S.	Maximum R. H. S.
1	Tight (<)	8	0	13.33333	30	55
2	Loose (<)	0	10	20	30	M
3	Tight (<)	24	0	15	40	90

Maximized OBJ = 1200 Iteration = 2 Elapsed CPU seconds = 0

< PageDown > < PageUp > < Hardcopy > < Cancel >

i) Zein da enpresaren mozkinak maximizatzen dituen soluzio hoberena?
ii) Labe bakoitzeko mozkina 10 unitate jaisten bada, soluzio hoberena aldatuko da?
iii) Tailer batean 10 lanordu gehiago erabiltzea balego, zein tailer aukeratuko litzateke? zer eragin edukiko honek mozkin hoberenean?

i) Problemaren soluzio hoberena (20,20) puntuan lortzen da, hau da, asteko 20 labe eta 20 bitrozeramika plaka ekoiztea da hoberena.

ii) Lehenengo taula ikus dezakegunez, labeen mozkina tartea soluzio aldatu gabe[10,60] da eta 10 jaisten bada 40-10=30 da, tartearen barruan. Horrela, labeen mozkina 10 unitate jaisten bada ez da soluzio hoberena aldatuko.

iii) Urriak diren tailerretan begiratuko dugu, hau da itzal prezioa handiago zero dutenen artean. Gurean, *A* eta *C* tailerretan (1 eta 3 murrizketetan) gertatzen da hau. Bi hauen artean helburu funtzioan ekarpen handiena duena *C* tailerra da, itzal prezioa handiagoa baitu, horregatik 10 lanordu horiek *C* tailerrean sartuko ditugu eta mozkina 10x24=240 handituko da.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2008-ko OTSAILA

1.- Demagun honako forma koadratiko hau:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + (\lambda+1)x_3^2 + 2\lambda x_2 x_3 + 2x_1x_3 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

i) $\lambda \in \mathbb{R}$ zein baliotarako betetzen da Q(x) >0 izatea edozein $x\in\mathbb{R}^3$, $x\neq\mathbf{0}$?

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ zein baliotarako betetzen da beti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ existitzea non $Q(x_1)> 0$, $Q(x_2)= 0$ eta $Q(x_3)<0$?

iii) $\lambda = 0$ bada, existitzen da $x\in\mathbb{R}^3$,$x\neq\mathbf{0}$ non Q(x)= 0? Eman $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\}$ multzoa

i) Galdetzen dena zera da: λ-ren zein baliotarako den forma koadratikoa definitu positiboa. Horretarako eta azpideterminanteak erabiliz forma koadratikoa sailkatuko dugu λ-ren balioen arabera

$$M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

1. ordenako azpideterminate nagusiak: {1, 1, λ+1}
2. ordenako azpideterminate nagusiak: {1, λ,$\lambda+1-\lambda^2$}
3. ordenako azpideterminante nagusia: $\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$

Denak kontuan hartuta:

- $\lambda\in(0,1)$ *forma koadratikoa definitu positiboa da*
- λ=0 edo λ=1 *forma koadratikoa erdidefinitu positiboa da*
- Beste kasu guztietan, $\lambda\notin[0,1]$, *forma koadratikoa indefinitua da.*

ii) Hau da, λ-ren zein baliotarako da forma koadratikoa indefinitua?
Ikusi dugunez $\lambda\notin[0,1]$ denean

iii) λ=0 denean forma koadratikoa erdidefinitu positiboa dela ikusiko dugu eta horrexegatik ziurta dezakegu existitzen dela $x\in\mathbb{R}^3$, $x\neq\mathbf{0}$ non Q(x)= 0

Goazen orain $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\}$ multzoa lortzea.

λ=0 denean $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$.

Orduan $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / Q(x) = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, 0, -x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\}$

2.- Enpresa batek 4 olio mota (1,2, 3 eta 4) ekoizten ditu bi oliba mota (A eta B) erabiliz. Taulan honetan olio mota bakoitzetik litro bat lortzeko oliba bakoitzetik behar diren kg-ak jasotzen dira:

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	1	3	3
B	3	4	2	1

Honako murrizketa hauek ere kontuan hartu behar dira:
- Asteko 100 tona A oliba eta 150 tona B oliba daude erabilgarri.
- 1 eta 2 motako olioen arteko kantitate totala gutxienez 3 eta 4 motakoen batuketa izan behar da.
- 1 motako 3 litroko gutxienez 2 eta 3 motakoen artean 4 litro ekoiztu behar dira.
- 1 motako ekoizpena ezin da 4 motakoaren %75 baino handiagoa izan.

Helburua olio ekoizpen totala maximizatzea bada, idatzi (ebatzi gabe) programazio linealeko problema moduan.

Aldagai hauek definituko ditugu:

x_1= 1 olio motatik ekoiztutako litroak
x_2= 2 olio motatik ekoiztutako litroak
x_3= 3 olio motatik ekoiztutako litroak
x_4= 4 olio motatik ekoiztutako litroak

Eta aldagai hauekin honako problema hau idazten dugu:

$$\max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 100000 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 \le 150000 \\ x_1 + x_2 \ge x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \ge \dfrac{4}{3}x_1 \\ x_1 \le 0.75x_4 \\ x_i \ge 0, i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

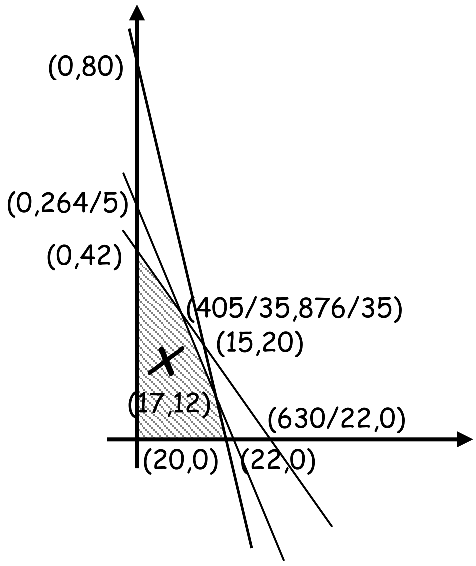
3.- Honako problema hau izanik:

$$\max(6x_1+2x_2)$$
$$\begin{cases} 22x_1+15x_2 \le 630 & (M_1) \\ 4x_1+x_2 \le 80 & (M_2) \\ 12x_1+5x_2 \le 264 & (M_3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Irudikatu soluzio egingarrien multzoa eta eman problemaren soluzio eta balio hoberena.
ii) Kalkula ezazu M_1 eta M_3 murrizketen itzal prezioa.
iii) Zein izan behar da x_1-en koefizientea helburu funtzioan, soluzio hoberenean x_2= 0 izan dadin?

i)

$$\max(6x_1+2x_2)$$
$$\begin{cases} 22x_1+15x_2 \le 630 \\ 4x_1+x_2 \le 80 \\ 12x_1+5x_2 \le 264 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -3 \\ m_1 &= -\frac{22}{15} \\ m_2 &= -4 \\ m_3 &= -\frac{12}{5} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_3 < m_1.$$

Eta horrela, soluzio hoberena M_2 eta M_3 murrizketen ebakiduran dago, hau da, (17,12) puntuan eta balio hoberena 126

ii) M_3 murrizketa oparoa da soluzio hoberenean, orduan bere itzal prezioa 0 da (λ_1=0).
M_3 murrizketari dagokionez, urria da soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (15,20) aukerara heldu arte, hau da, 280 arte.
Eta itzal prezioa:

$$\lambda_3 = \frac{f(15,20)-f(17,12)}{280-264} = \frac{130-126}{16} = \frac{1}{4}$$

iii) Helburu funtzioa orain max(ax_1+2x_2) da eta soluzio hoberena (20,0) erpina izateko hau bete behar da:

$m_f \le m_2$, hau da, $\frac{-a}{2} \le -4 \Rightarrow a \ge 8$

4.- Demagun honako problema hau:

$$\max(x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Ebatzi simplex metodoarekin.
ii) Eman lehenengo murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko.
iii) Lehenengo murrizketaren gai askea 4 unitate txikitzen bada, problemaren soluzio hoberena aldatzen al da? Zergatik?
iv) Zein da hiru murrizketen itzal prezioa?
v) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan $a \ge 0$ zenbakia bada, zer bete behar du a-k soluzio hoberena aldatzeko.

i) Problema modu estandarrean:

$$\max(x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ x_i \ge 0, i = 1, ..., 5 \end{cases} \text{ eta koefizienteen matrizea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \langle A_3, A_4, A_5 \rangle$ oinarri kanonikoa hartuz taula hau osatzen dugu:

		1	3	0	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b	θ	
0	A_3	1	2	1	0	0	10	5	→
0	A_4	1	1	0	1	0	6	6	
0	A_5	2	1	0	0	1	9	9	
		-1	-3	0	0	0	0		
			↑						

Oinarrian A_2 sartuko da eta A_3 irten

		1	3	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
3	A_2	1/2	1	1/2	0	0	5
0	A_4	1/2	0	-1/2	1	0	1
0	A_5	3/2	0	-1/2	0	1	4
		1/2	0	3/2	0	0	15

Azken errenkadan elementu negatiborik ez dagoenez soluzio hoberenari dagokion taulara ailegatu gara. Soluzio hoberena (0,5) eta balio hoberena 15.

ii) Lehenengo murrizketaren gai askearen aldaketak A_3 zutabean jasotzen dira. Gai askea ε aldatzen badugu azkeneko zutabea::

$$b+\varepsilon A_3$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 5+\frac{1}{2}(\varepsilon) \\ 1-\frac{1}{2}(\varepsilon) \\ 4-\frac{1}{2}(\varepsilon) \end{array}}$$

Hauek ez negatiboak izateko, $-10\leq \varepsilon \leq 2$ eta oinarri hoberena ez aldatzeko gai askearen aldaketa tartea [0,12] da.

iii) Bai soluzio hoberena aldatu egingo da. Kasu honetan ε=-4 da eta soluzio hoberen berria (0,3) da.

iv) A_3 A_4 eta A_5 zutabeen azkeneko elementuan jasotzen da:
- 1. murrizketaren itzal prezioa 3/2 da
- 2. murrizketaren itzal prezioa 0 da.
- 3. murrizketaren itzal prezioa 0 da.

v) Taula hobenaren azkeneko errenkada hau litzateke kasu honetan

(1/2)a-1	0	(1/2)a	0	0	15

Eta hoberena ez izateko azken errenkadako elementu baten bat negatiboa izan behar da. Hau a<2 denean gertatuko da. Hortaz, $0\leq a < 2$.

5.- Problema honetan mozkinak maximizatzen dira:

$$\max\left(10x_1+15x_2+10x_3\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leq 60 & \text{(A)} \\ x_1+x_2+x_3\leq 50 & \text{(B)} \\ 2x_1+x_2+x_3\leq 40 & \text{(Lanorduak)} \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$$

x_i (i=1,2,3) P_i produktutik astean ekoiztutako kg-ak dira. Horretarako A eta B lehengaiak erabiltzen dira eta hauen edukiera asteko 60 eta 50 kg da, hurrenez hurren. Gainera ekoizpen prozesurako astean 40 lanordu erabil daitezke.

WinQSB programaren irteera hau da:

Combined Report for LP Sample Problem

	10:42:40		Tuesday	January	29	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	10,0000	0	-5,0000	at bound	-M	15,0000
2	X2	20,0000	15,0000	300,0000	0	basic	10,0000	20,0000
3	X3	20,0000	10,0000	200,0000	0	basic	8,3333	15,0000
	Objective	Function	(Max.) =	500,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	60,0000	<=	60,0000	0	5,0000	40,0000	80,0000
2	C2	40,0000	<=	50,0000	10,0000	0	40,0000	M
3	C3	40,0000	<=	40,0000	0	5,0000	30,0000	50,0000

i) P_1 produktuaren mozkin unitarioa 15era handitzen bada, produktu honen ekoizpena handitzea komeni al zaio?
ii) Lehengai baten baten edukiera handitzea posible balitz, zein aukeratuko luke? Zer eragin edukiko luke mozkin hoberenean?
iii) Lanordu estrak kontratatzea komeni al zaio? Zenbat ordainduko luke ordu estra bakoitzeko?

i) P_1 produktuaren mozkina 15 era igotzen bada, ez litzateke soluzio hoberena aldatuko, koefizientearen aldaketa tartean, [-M,15], baitago. Eta soluzio hoberenean, (0,20,20), x_1=0 denez bere mozkina handitzeak ez du eraginik mozkin totalean. Horrexegatik ez da handituko P_1 produktuaren ekoizpena.
ii) B lehengaia oparoa da soluzio hoberenean eta A Lehengaia ordea urria. Horrela A lehengaia handituz gero mozkin hoberena handitu egiten da, hain zuzen, A lehengaia handitzen dugun unitate bakoitzaren ekarpena mozkin hoberenean bere itzal prezioa da, hau da,5.
iii) Lanorduak 3. murrizketan jasotzen dira. Murrizketa hau urria da soluzio hoberenean eta horrexegatik komeni zaio gehiago kontratatzea, honekin mozkina hobetu egingo da eta. Ordaiduko duen prezioa, murrizketa honen itzal prezioa izango da, hau da, 5.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL 2008-ko EKAINA

1.-(9 puntu) Demagun *A* matrizea:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Honako hau eskatzen da:

i) Zer erlazio bete behar da *a,b* eta *c* parametroen artean *A* matrizeak balio propio hirukoitz bat izan dezan.

ii) *a*=1 balioarentzat, kalkulatu *b* eta *c* parametroen balioak $\lambda=-1$ *A* matrizearen balio propia izan dain eta $x=(1,-2,2)$ berari elkartutako bektore propio elkartua..

iii) *a*=1, *b*=1 eta *c*=2 balioentzat, aurkitu *A* matrizearen balio propioak, bektore propioak eta azpiespazio espektralak. *A* diagonalgarria al da? Horrela bada, eman *A*-ren antzeko matrize diagonal bat?

i) Kalkula ditzagun balio propioak:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & b \\ 0 & c & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^3-2bc(a-\lambda)=0$$

Balio propio hirukoitza $\lambda=a$ izan beharko da eta horretarako *bc*=0 izan behar da ($\forall a\in\mathbb{R}$)

ii) *a*=1 bada,

$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ eta $\lambda=-1$ *A*-ren balio propioa izateko non $x=(1,-2,2)$ berari elkartutako bektore propioa den hau bete behar da:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 1-2b=-1 \\ c-2+2b=2 \\ -2c+2=-2 \end{cases}$$, hau da b=1 eta c=2

iii) *a*=1, *b*=1 eta *c*=2 bada,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-4(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right]=0$$

A-ren balio propioak: λ=1, λ=-1 eta λ=3.

Azpiespazio espectralak:

$S(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - I)M(x) = 0 \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{array}$$

$S(1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 0, x_3 = -2x_1 \right\} = \left\{ (x_1, 0, -2x_1) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L < (1, 0, -2) >$

$S(-1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A + I)M(x) = 0 \right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 2x_1 \end{array}$$

$S(-1) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = -2x_1, x_3 = 2x_1 \right\} = \left\{ (x_1, -2x_1, 2x_1) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L < (1, -2, 2) >$

$S(3) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - 3I)M(x) = 0 \right\}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 2x_1 \end{array}$$

$S(3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 2x_1, x_3 = 2x_1 \right\} = \left\{ (x_1, 2x_1, 2x_1) / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = L < (1, 2, 2) >$

Bai, A matrizea diagonalgarria da 3 balio propio ezberdin baititu.

Bere antzeko matrize diagonal bat, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.- (8 puntu) Honako problema hau izanik:

$$\max(4x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 11x_2 \le 270 & (1) \\ x_1 \le 35 & (2) \\ x_2 \le 20 & (3) \\ x_1 - 2x_2 \le 22 & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Irudikatu soluzio egingarrien multzoa eta lortu soluzio hoberena eta balio hoberena.

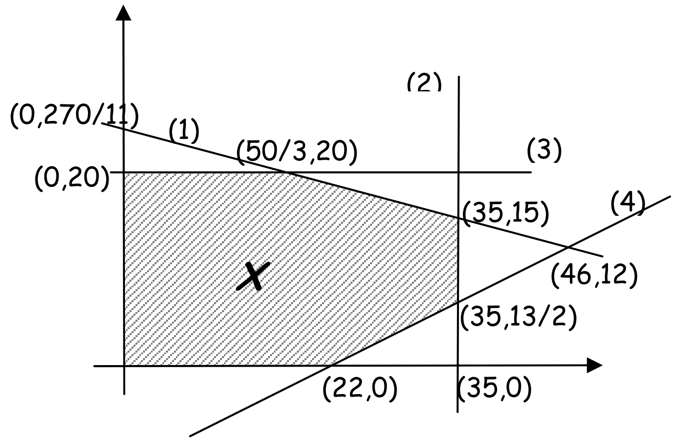
ii) Kalkulatu (2) eta (3) murrizketen itzal prezioa.

iii) Zein izan behar da x_1-en koefizientea helburu funtzioan soluzio hoberenean x_2=20 betetzeko?

i)

$$\max(4x_1+3x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1+11x_2\leq 270 & (1)\\ x_1\leq 35 & (2)\\ x_2\leq 20 & (3)\\ x_1-2x_2\leq 22 & (4)\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$



Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -\frac{4}{3}\\ m_1 &= -\frac{3}{11}\\ m_2 &= -\infty\\ m_3 &= 0\\ m_4 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_1 < m_3 < m_4 .$$

Eta horrela, soluzio hoberena (1) eta (2) murrizketen ebakiduran dago, hau da, (35,15) puntuan eta balio hoberena 185

ii) (2) murrizketa urria da eta bere itzal prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(46,12)-f(35,15)}{46-35} = \frac{220-185}{11} = \frac{35}{11}$$

(3) murrizketa oparoa da soluzio hoberenean, orduan bere itzal prezioa 0 da (λ_3=0).

iii) x_1-en koefizientea helburu funtzioan a deitzen badugu, soluzio hoberenean x_2=20 izateko hau bete behar da:

$m_f \geq m_1$, hau da, $\frac{-a}{3}\geq\frac{-3}{11}\Rightarrow a\leq\frac{9}{11}$

3.- (10 puntu) Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\left(x_1+x_2+2x_3\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leq 8\\ x_1+x_2+x_3\leq 6\\ x_1-x_2+x_3\geq 4\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$$

i) Honako taula hau problemari dagokion taula bat dela jakinik, bete hutsuneak (aurreko taulak erabili gabe) eta simplex metosoa erabiliz ondoren datorren taula lortu (soilik bat).

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	3	0	1	0	1	4
0	A_5	0		0	0	1	1	
2	A_3	1	-1	1	0	0	-1	4
		1	-3	0	0	0		

ii) Honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik, erantzun honako galdera hauek:

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	1	0	1	-1	0	2
0	A_6	0	2	0	0	1	1	2
2	A_3	1	1	1	0	1	0	6
		1	1	0	0	2	0	12

a) Zein da bigarren murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Eman bigarren murrizketaren itzal prezioa.
b) Bigarren murrizketaren gai askea 6-tik 7-ra pasatzen bada, soluzio hoberena aldatuko al da? Zergatik?
c) Zein da helburu funtzioaren x_3-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

i) Problema modu estandarrean:

$$\max(x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_6 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$ eta koefizienteen matrizea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hutsuneak a, b, c eta d letrekin beteko ditugu

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	3	0	1	0	1	4
0	A_5	0	a	0	0	1	1	b
2	A_3	1	-1	1	0	0	-1	4
		1	-3	0	0	0	c	d

Taularen oinarria <A_4, A_5, A_3> kontuan izanik,
a lortzeko: $A_2 = 3A_4 + aA_5 - A_3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = a - 1 \Rightarrow a = 2$$

b lortzeko: $\boldsymbol{b} = 4A_4 + bA_5 + 4A_3$

$$\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 6 = b + 4 \Rightarrow b = 2$$

c lortzeko: c=1(0)+1(0)-1(2)-0=-2

eta azkenik d lortzeko: d=4(0)+2(0)+4(2)=8

Goazen orain hurrengo taula osatzeko pibota zein den ikustera

		1	1	2	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\boldsymbol{b}$	θ
0	A_4	0	3	0	1	0	1	4	4/3
0	A_5	0	2	0	0	1	1	2	1 →
2	A_3	1	-1	1	0	0	-1	4	-
		1	-3 ↑	0	0	0	-2	8	

Oinarrian A_2 sartuko da eta A_4 irten

		1	1	2	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\boldsymbol{b}$
0	A_4	0	0	0	1	-3/2	-1/2	1
1	A_2	0	1	0	0	1/2	1/2	1
2	A_3	1	0	1	0	1/2	-1/2	5
		1	0	0	0	3/2	-1/2	11

ii.a) Bigarren murrizketaren gai askearen aldaketak A_5 zutabean jasotzen dira. Gai askea ε aldatzen badugu azkeneko zutabea:

$b+\varepsilon A_5$
$2-1(\varepsilon)$
$2+1(\varepsilon)$
$6+1(\varepsilon)$

Hauek ez negatiboak izateko, $-2\leq \varepsilon \leq 2$ eta oinarri hoberena ez aldatzeko gai askearen aldaketa tartea [4,8] da.

2\. murrizketaren itzal prezioa taula hoberenaren A_5 zutabearen azkeneko elementuan jasotzen da eta hau 2 da.

ii.b) Esan dugunez 2. murrizketaren gai askearen aldaketa tartea [4,8] da. 7 barne denez oinarri hoberena ez da aldatuko, bai ordea soluzio hoberena, orain (0,0,7) izango da.

ii.c) Soluzio hoberena ez aldatzeko taula hoberenaren ezkeneko errenkadako elementu guztiak ez negatiboak izan behar dute. Π izendatzen badugu x_3-ren koefizientearen aldaketa azkeneko errenkada horrela geratzen da:

$1+\Pi$	$1+\Pi$	0	0	$2+\Pi$	0

Eta hauek ez negatiboak izateko $\Pi\geq-1$. Horrela koefizientearen aldaketa tartea $[1,\infty)$

4. (3 puntu) Problema honetan sarrerak maximizatzen dira:

$$\max(4x_1+6x_2+5x_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3 \le 65 \ (A) \\ x_1+x_2+x_3 \le 20 \quad (B) \\ x_1+2x_2+3x_3 \le 30 \ (C) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

non x_i (i=1,2,3) egunean P_i produktutik ekoizten diren kg-ak diren. Horretarako hiru lehengai erabiltzen dira, A, B eta C, eta hauen erabilgarritasuna, hurrenez hurren, 65, 20 eta 30 kg da.

WinQSB programaren irteera honako hau da:

Combined Report for LP Sample Problem

	16:05:38		Monday	January	28	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	10,0000	4,0000	40,0000	0	basic	3,0000	6,0000
2	X2	10,0000	6,0000	60,0000	0	basic	4,5000	8,0000
3	X3	0	5,0000	0	-3,0000	at bound	-M	8,0000
	Objective	Function	(Max.) =	100,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	40,0000	<=	65,0000	25,0000	0	40,0000	M
2	C2	20,0000	<=	20,0000	0	2,0000	15,0000	25,0000
3	C3	30,0000	<=	30,0000	0	2,0000	20,0000	40,0000

i) Enpresari A-tik kg gehiago edukitzea komeni al zaio? Zergatik?

ii) Enpresak C-tik 5 kg gehiago hartuko balitu, zenbatean handituko lirateke enpresaren sarrerak?

iii) P_2-ren prezioa kg-ko 5-era jaitsiko balitz, enpresarentzako komenigarria litzateke produktu honen ekoizpena txikiagotzea?

i) Ez ez zaio komeni A-tik gehiago edukitzea. Ikusten dugunez A lehengaia oparoa da soluzio hoberenean eta kg gehiago edukitzeak ez du balio hoberena hobetuko.

ii) C-tik 5 kg gehiago hartzean (guztira 35) ez da oinarri hoberena aldatzen, aldaketa tartearen ([20,40]) barruan baitago. C-ko Kg bakiotzaren itzal prezio 2 denez sarrerak guztira 5(2)=10 handituko dira.

iii) Ez, ez zaio komeni. P_2-ren prezioa kg-ko 5-era jaisten bada ez da soluzio hoberena aldatzen, bere aldaketa tartearen barruan ([4'5,8]) baita. Soluzio hoberenean P_2-tik 10 kg ekoiztuko dira, lehen bezala, eta gutxiago ekiztea erabakiko balu, sarrerak behar dena baino gehiago txikiagotzea eraginko luke.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2009-ko URTARRRILA

1.- Enpresa batek bi legami mota ekoizten ditu: bata pastelak egiteko eta bestea ogia egiteko. Asteko legami ekoizpena pastelak egiteko gutxienez 1000 kg-koa izan behar da eta ogitako legamiarena gutxienez 2500 kg. Gainera, pastelak egiteko 3 kg legamiko gutxienez 5 kg ogitako legami ekoiztu behar dira. Azkenik, asteko legami ekoizpenak ogia egiteko gutxienez pastelak egitekoarena baino 2000 kg gehiago izan behar du.

a) Gaur egun A ekoizpen-planta bakarra dago erabilgarri. Bertako kg-ko mozkinak 15 €-koak dira pastelak egiteko legamiarentzat eta 8 €-koak ogia egitekoarentzat. Formula ezazu problema helburua mozkinak maximizatzea bada.

b) Enpresak B ekoizpen-planta berria erosi du. Bertan ere bi legami motak ekoiztuko ditu. Mozkinak B planta honetan 13 €-koak dira pastelak egiteko legamiarentzat eta 10 €-koak ogia egitekoarentzat. Formula ezazu problema planta bakoitzean legami bakoitzeko asteko ekoizpena erabakitzeko, helburua mozkinak maximizatzea bada eta legami mota bakoitzeko planta bakoitzean gutxienez 500 kg ekoiztu behar badira astean.

a) Aldagai hauek definituko ditugu:

x_1= Pastelak egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko

x_2= Ogia egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko

Eta aldagai hauekin problema hau idazten dugu:

$$\max\ (15x_1 + 8x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000 \\ x_2 \geq 2500 \\ x_2 \geq \dfrac{5}{3}x_1 \\ x_2 \geq x_1 + 2000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Aldagai hauek definituko ditugu:

x_{1A}= Pastelak egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko A plantan

x_{2A}= Ogia egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko A plantan

x_{1B}= Pastelak egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko B plantan

x_{2B}= Ogia egiteko ekoiztutako legami kiloak asteko B plantan

Eta aldagai hauekin problema hau idazten dugu:

$$\max\ (15x_{1A} + 8x_{2A} + 13x_{1B} + 10x_{2B})$$
$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1B} \geq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 2500 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq \frac{5}{3}(x_{1A} + x_{1B}) \\ x_{2A} + x_{2B} \geq x_{1A} + x_{1B} + 2000 \\ x_{1A} \geq 500 \\ x_{2A} \geq 500 \\ x_{1B} \geq 500 \\ x_{2B} \geq 500 \\ x_{1A} \geq 0, x_{2A} \geq 0, x_{1B} \geq 0, x_{2B} \geq 0 \end{cases}$$

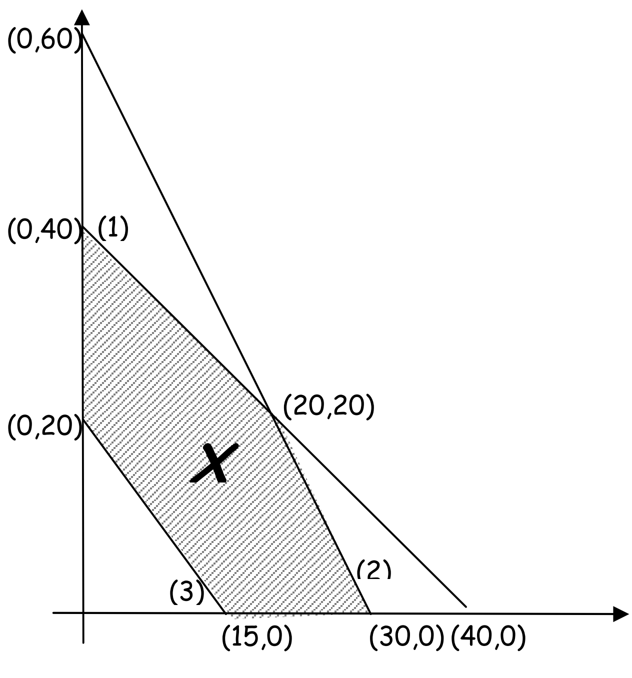
2.- Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\ (10x_1 + 7x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Ebatzi grafikoki problema.
b) Kalkulatu murrizketen itzal prezioak.
c) x_2-ren koefizientea helburu funtzioan 3 bada soluzio hoberena aldatzen al da?
d) $ax_1 - x_2 \leq 0$ murrizketa eransten bada, zein izan behar da a soluzio hoberena a) atalean lortutako berbera izateko?

a)

$$\max\ (10x_1 + 7x_2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 60$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 60$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -\frac{10}{7} \\ m_1 &= -1 \\ m_2 &= -2 \\ m_3 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_3 < m_1 .$$

Baina M_2 eta M_3 murrizketen ebakidura puntua egingarria ez denez M_2 eta M_1 murrizketen ebakidura puntuan lortzen da soluzio hoberena, hau da, (20,20) puntuan eta balio hoberena 340 da.

b) M_1 murrizketa urria da soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (0,60) aukerara heldu arte, hau da, 60 arte.
Eta itzal prezioa:

$$\lambda_1 = \frac{f(0,60) - f(20,20)}{60 - 40} = \frac{420 - 340}{20} = 4$$

M_2 murrizketa urria da ere soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (40,0) aukerara heldu arte, hau da, 80 arte.
Eta itzal prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(40,0) - f(20,20)}{80 - 60} = \frac{400 - 340}{20} = 3$$

Azkenik, M_3 murrizketa oparoa da soluzio hoberenean, orduan bere itzal prezioa 0 da ($\lambda_3 = 0$).

c) Honekin helburu funtzioaren malda aldatzen da. Orain horrela dugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -\frac{10}{3} \\ m_1 &= -1 \\ m_2 &= -2 \\ m_3 &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_f < m_2 < m_3 < m_1$$

Eta soluzio hoberena orain (30,0) izango da. Bertan lortzen den balio hoberena 300.

d) $ax_1 - x_2 \leq 0$ murrizketa erantsita, soluzio hoberena (20,20) izateko aukera hau egingarria izatea behar dugu, hau da, $a20 - 20 \leq 0 \Rightarrow a \leq 1$.

3.- Demagun programazio linealeko honako problema hau:

$$\max\,(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Problemari dagokion honako taula hau osatu:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
	-1		1	0	-2	
0	2		0	1	1	6
-1	1		0	0	1	4
-7			0		4	

b) Honako taula hau ere problemari badagokio, erantzun honako galdera hauek:

		3	2	4	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
3	A_1	1	1	0	1/3	2/3	0	13/3
0	A_6	0	2	0	0	1	1	6
4	A_3	0	0	1	1/3	-1/3	0	7/3
		0	1	0	7/3	2/3	0	67/3

i) Zein da soluzio hoberena bigarren murrizketaren gai askea 3 unitate murrizten bada?

ii) Zein da helburu funtzioko x_3-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko?

iii) Lehen edo hirugarren murrizketaren gai askea handitzekotan, zein aukeratuko zenuke? Zergatik? Zer eragin du balio hoberenean?

a)

$$\max\,(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \text{eta koefizienteen matrizea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eragiketak behar dituzten hutsuneak a, b, c eta d letrekin deituko ditugu

		3	2	4	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	a	-1	0	1	0	-2	b
0	A_5	0	2	0	0	1	1	6
4	A_3	-1	1	1	0	0	1	4
		-7	c	0	0	0	4	d

Taularen oinarria $<A_4, A_5, A_3>$ dela kontuan izanik,

$A_1 = aA_4 + 0A_5 - A_3$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} -1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ 1 = a - 2 \Rightarrow a = 3$$

b lortzeko: $\boldsymbol{b} = bA_4 + 6A_5 + 4A_3$

$$\begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} +6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} +4\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ 9 = b + 8 \Rightarrow b = 1$$

c lortzeko: c=-1(0)+2(0)+1(4)-2=2

Azkenik, d=1(0)+6(0)+4(4)=16

b.i) Bigarren murrizketaren gai askearen aldaketak A_5 zutabean jasotzen dira. Goazen ikustera zer gertazten den gai askea 3 unitate murrizten bada.

$$\boxed{\begin{array}{c} b-3A_5 \\ \frac{13}{3}+\frac{2}{3}(-3) \\ 6+1(-3) \\ \frac{7}{3}-\frac{1}{3}(-3) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} b-3A_5 \\ \frac{7}{3} \\ 3 \\ \frac{10}{3} \end{array}}$$

Orduan, soluzio hoberen berria $\left(\frac{7}{3}, 0, \frac{10}{3}\right)$ da.

b.ii)

		3	2	a	0	0	0
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
3	A_1	1	1	0	1/3	2/3	0
0	A_6	0	2	0	0	1	1
a	A_3	0	0	1	1/3	-1/3	0
		0	1	0	1+(a/3)	2-(a/3)	0

Soluzio hoberena ez aldatzeko azken errenkadako elementu guztiak ez negatiboak izan behar dute eta horretarako $-3 \leq a \leq 6$. Beraz helburu funtzioko x_3-ren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena ez aldatzeko [-3,6] da.

b.iii) Lehengo murrizketaren gai askearen aldaketak A_4 zutabean jasotzen dira eta hirugarrengoak, berriz, A_6 zutabean. Soluzio hoberenean lehen murrizketa urria da eta hirugarrena, ordea, oparoa horrela adierazten baitigu euren itzal prezioak (λ_1=7/3 eta λ_3=0). Guk lehenengo murrizketaren gai askea handitzea aukeratuko dugu, urria denez handitzerakoan balio hoberena handituko baita. Hain zuzen gai askea handitzen dugun unitate bakoitzeko helburu funtzioa λ_1=7/3 handituko da, hau da bere itzal prezioa.

4.- Demagun

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Aztertu *a*-ren eta *b*-ren zein baliotarako izango den *A* matrizea diagonalgarria.

b) *a*=1 eta *b*=0 izanik eman *A* matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat.

c) $b=2\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ bada eta *Q* horrela definitutako forma koadratikoa: $Q(x) = {}^tM(x)AM(x)$ edozein $x \in \mathbb{R}^3$. Eman *M*(*Q*) eta *Q* sailkatu *a*-ren balioen arabera.

a) $$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

Balio propiaok (erroak) : λ=2, bakuna, eta λ=*a* bikoitza

Kasuak:

- $a = 2$ bada λ=2 balio propioa hiruitza da eta

$$\dim S(2)=3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 3$$. Hortaz *A* matrizea ez da diagonalgarria.

- $a \neq 2$ bada λ=*a* balio propioa bikoitza eta λ=2 bakuna.

Eta:

$$\dim S(a)=3-\text{heina}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 2-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} = 3-1=2 & b=0 \text{ bada} \Rightarrow A \text{ diagonalgarria da} \\ = 3-2=1 & b \neq 0 \text{ bada} \Rightarrow A \text{ ez da diagonalgarria} \end{cases}$$

b) *a*=1 eta *b*=0 badira *A* matrizearen balio propioak 2, bakuna, eta 1 bioitza dira.

$S(2) = \{x \in \mathbb{R}^3 / (A-2I)M(x) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} -x_1 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$S(2) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0,\ x_3 = 0\} = \{(0,x_2,0) / x_2 \in \mathbb{R}\} = L < (0,1,0) >$

$S(1) = \{x \in \mathbb{R}^3 / (A-I)M(x) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3$$

$S(1) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = -2x_3\} = \{(x_1,0,0)+(0,-2x_3,x_3) / x_1,x_3 \in \mathbb{R}\} =$

$= L < (1,0,0),(0,-2,1) >$. Horrela bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$ –ko oinarri bat: *B*=<(0,1,0),(1,0,0),(0,1,-1/2)>

c) $M(Q) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a} & 0 \\ \sqrt{a} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a,2,a\}$
2. ordenako azpideterminante naguasiak: $\{a, 2a\text{-}1, a^2\}$
3. ordenako azpideterminante nagusia: $|M(Q)| = a(a-1)$

Sailkapena:

- $a>1$ denean, Q definitu positiboa.
- $a=1$ denean, Q erdidefinitu positiboa.
- $0 \leq a < 1$ bada, Q indefinitua.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL. 2009-ko EKAINA

1.- (7 puntu) Enpresa batek 3 produktu, P_1, P_2 eta P_3, ekoizten ditu soilik bi lehengai, M_1 eta M_2, nahastuz. P_2 ekoizteko M_1 eta M_2 kantitate berdinean nahasten dira. P_1-ko kg bakoitzak M_1-eko %20 eta M_2-ko %80 dauka eta P_3-ko kg bakoitzak M_1-eko %60 eta M_2-ko %40. Lehengaien erabilgarritasuna astean 1000 kg-koa da M_1-entzako eta 2000 kg-koa M_2-rentzako. Prezioak kg-ko berriz, 3 m.u. M_1-entzako eta 2 m.u. M_2-rentzako. Ekoizpen kostua (lehengaien kostuaz aparte) 2 m.u.-koa da ekoiztutako kg-ko.
Egungo eskaria kontuan hartuta, P_1-eko 3 kg-ko gutxienez P_2-ko 2 kg ekoiztu behar dira eta P_2-ko ekoizpena gehienez P_3-renaren bikoitza izan behar da.
Produktuen salneurriak 10, 15 eta 20 m.u. izanik, P_1, P_2 eta P_3-ko kg-ko hurrenez hurren, formula ezazu Programazio Linealeko problema (ebatzi gabe) helburua mozkinak maximizatzea bada.

Aldagai hauek definituko ditugu:
x_1= P_1 produktutik ekoiztutako kg-ak asteko
x_2= P_2 produktutik ekoiztutako kg-ak asteko
x_3= P_3 produktutik ekoiztutako kg-ak asteko
Eta aldagai hauekin honako problema hau idazten dugu:

$$\max\ (5.8x_1 + 10.5x_2 + 15.4x_3)$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3 \leq 1000 \\ 0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \leq 2000 \\ x_2 \geq \dfrac{2}{3}x_1 \\ x_2 \leq 2x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.- (8 puntu) Demagun $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *a=0* bada eta $(1,0,-2)$ *A* matrizearen 0 balio propioari elkartutako bektore propioa bada, zein da *b*-ren balioa? *A* eta *b* balio hauentzako aurkitu *A* matrizearen bektore propioz osaturiko $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat.

b) *b*=1 balioarentzako, demagun *Q* forma kuadratikoa: $Q(x) = {}^tM(x)AM(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Aurkitu *M*(*Q*) eta *Q* sailkatu *a*-ren balioen arabera.

a) $AM(x) = \lambda M(x)$

$AM(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b-2=0 \Rightarrow b=2$$

a=0 eta *b*=2 direnean,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Balio propioak (erroak) : λ=0, λ=3 eta λ=1

$S(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / (A)M(x) = 0\right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{array}$$

$S(0) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 0, x_3 = -2x_1\right\} = \left\{(x_1,0,-2x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L < (1,0,-2) >$

$S(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / (A-I)M(x) = 0\right\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$S(1) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_2 = 0\right\} = \left\{(0,0,x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\right\} = L < (0,0,1) >$

$S(3) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / (A-3I)M(x) = 0\right\}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 3x_1 \\ x_3 = x_1 \end{array}$$

$S(3) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 3x_1, x_3 = x_1\right\} = \left\{(x_1,3x_1,x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\right\} = L < (1,3,1) >$

Horrela bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$ –ko oinarri bat: *B*=<(1,0,-2),(0,0,1),(1,3,1)>

b) $M(Q) = \begin{pmatrix} a & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a, 3, 1\}$

2. ordenako azpideterminante naguasiak: $\{3a - \frac{1}{4}, a - \frac{1}{4}, 3\}$

3. ordenako azpideterminante nagusia: $|M(Q)| = 3a - 1$

Sailkapena:

- $a < \frac{1}{3}$ denean *Q* indefinitua.
- $a = \frac{1}{3}$ denean, *Q* erdidefinitu positiboa.
- $a > \frac{1}{3}$ denean, *Q* definitu positiboa.

3.- (8 puntu) Demagun problema hau:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

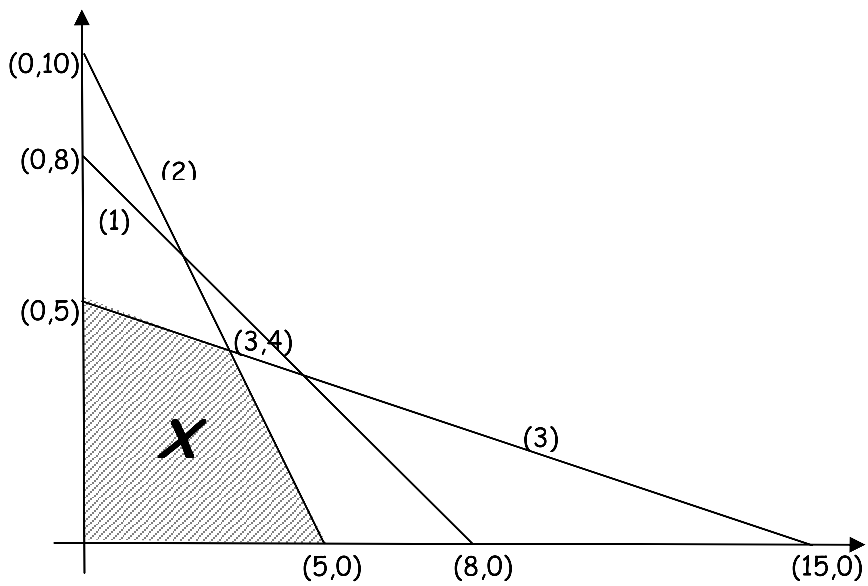
a) Irudikatu soluzio egigarrien multzoa eta kalkulatu soluzio hoberena.

b) Zein da x_1 aldagaiaren koefizientearen aldaketa tartea soluzio hoberena aurreko atalekoa izateko?

c) Kalkulatu bigarren murrizketaren itzal prezioa.

a)

$$\max(x_1 + 2x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Maldak aztertzen baditugu:

$$\left.\begin{aligned} m_f &= -\frac{1}{2} \\ m_1 &= -1 \\ m_2 &= -2 \\ m_3 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Ordenatuz, } m_2 < m_1 < m_f < m_3.$$

Baina M_1 eta M_3 murrizketen ebakidura puntua egingarria ez denez M_2 eta M_3 murrizketen ebakidura puntuan lortzen da soluzio hoberena, hau da, (3,4) puntuan eta balio hoberena 11 da.

b) Helburu funtzioa orain horrela idatz dezkagu $ax_1 + 2x_2$ eta soluzio hoberena (3,4) izateko, hau da M_2 eta M_3 murrizketen ebakidura, helburu funtzioaren malda murrizketa hauen malden artean izan beharko da. Horrela,
$m_2 \le m_f \le m_3$ ziurtatu behar da:

$$-2 \le \frac{-a}{2} \le \frac{-1}{3} \;\Rightarrow\; 2 \ge \frac{a}{2} \ge \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} \le a \le 4$$

c) Bigarren murrizketa urria da soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (4.5,3.5) aukerara heldu arte, hau da, 12.5 arte.
Eta bere itzal prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(4.5,3.5) - f(3,4)}{12.5 - 10} = \frac{11.5 - 11}{2.5} = 0.2$$

4.- (7 puntu) Demagun problema hau:

$$\max\left(5x_1 + 3x_2 + 4x_3\right)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Kalkulatu soluzio hoberena simplex metodoa erabiliz.
b) Eman hirugarren murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko eta bere itzal prezioa.
c) x_3 aldagaiaren koefizientea helburu funtzioan λ denotatzen badugu, kalkulatu soluzio hoberenak λ- k zero edo balio handiagoa hartzen duenean.

a)

$$\max(5x_1 + 3x_2 + 4x_3)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 50 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 10 \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, 6) \end{cases}$$ eta koefizienteen matrizea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oinarria: B=< A_4, A_5, A_6>

		5	3	4	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ
0	A_4	4	2	4	1	0	0	80	20
0	A_5	2	2	3	0	1	0	50	25
0	A_6	1	3	2	0	0	1	10	10 →
	z_j-c_j	-5 ↑	-3	-4	0	0	0	0	

Oinarri berria: B=< A_4, A_5, A_1>

		5	3	4	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	-10	-4	1	0	-4	40
0	A_5	0	-4	-1	0	1	-2	30
5	A_1	1	3	2	0	0	1	10
	z_j-c_j	0	12	6	0	0	5	50

Soluzio hoberena (10,0,0). Eta balio hoberena: 50

b) Hirugarren murrizketaren gai askearen aldaketak A_6 zutabean jasotzen dira.

$b+\varepsilon A_6$
$40 - 4\varepsilon$
$30 - 2\varepsilon$
$10 + \varepsilon$

Hauek ez negatiboak izateko, $-10 \leq \varepsilon \leq 10$ eta oinarri hoberena ez aldatzeko gai askearen aldaketa tartea [0,20] da.

Eta bere itzal prezioa taula hoberenean A_6 zutabeko azkeneko errenkadako elementua da, hau da, 5.

c) Helburu funtzioa orain $\max(5x_1 + 3x_2 + \lambda x_3)$ da eta honekin taula horrela geratzen da.

		5	3	λ	0	0	0		
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	θ
0	A_4	0	-10	-4	1	0	-4	40	-
0	A_5	0	-4	-1	0	1	-2	30	-
5	A_1	1	3	2	0	0	1	10	5 →
	z_j-c_j	0	12	10-λ ↑	0	0	5	50	

$0 \leq \lambda \leq 10$ bada aurreko soluzioa ez da aldatzen, azkeneko errenkadan elementu guztiak ez negatiboak direlako.

$\lambda = 10$ denean problemak anitz soluzio izando ditu (azkeneko errenkadan 4 zero ditugu eta oinarrian 3 elementu). Beste erpina oinarrian A_3 sartuz eta A_1 irtenda lortuko dugu (zutabe horretako beste elementuak negatiboak baitira) eta hurrengo kasuan aztertzen dugu.

$\lambda \geq 10$ denean esan bezala oinarri berria B=<A_4, A_5, A_3> izango da eta pibota 2.

		5	3	4	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	2	-4	0	1	0	-2	60
0	A_5	1/2	-5/2	0	0	1	-3/2	35
λ	A_3	1/2	3/2	1	0	0	1/2	5
	z_j-c_j	$(\lambda/2)-5$	$(3\lambda/2)-3$	0	0	0	$\lambda/2$	5λ

Soluzio hoberen berria (0,0,5). Balio hoberena 5λ

Laburtuz:

- $0 \leq \lambda < 10$, soluzio hoberena (10,0,0) eta balio hoberena 50.
- $\lambda = 10$, soluzio hoberen anitz (10,0,0) (0,0,5) eta balio hoberena 50.
- $\lambda > 10$, soluzio hoberena (0,0,5) eta balio hoberena 5λ.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
EAZL,2010-eko urtarrila

1.- Produktu bat bi fabriketan F1 eta F2 ekoizten da.Fabrika hauen ekoizpen-edukiera, bakoitzarentzako,150 tonakoa da. Ekoizpenaren zati bat C1, C2 eta C3 hirietara bidaltzen da. Produktu honen eskaria hiri hauetan 35, 65 eta 50 tona da, hurrenez hurren.
Taula honetan fabrika bakoitzetik hiri bakoitzerako garraio-kostuak, tonako eta mila eurotan, jasotzen dira.

Fabrika	C1	C2	C3
F1	3	7	8
F2	2	5	6

Fabrika bakoitzetik hiri bakoitzera gutxienez 10 tona bidali behar da. F1 fabrikatik bidalitako kantitate totala, gutxienez bi fabriketatik bidalitako totalaren %60 izan behar da.
Garraio kostu totala minimizatuz, fabrika bakoitzetik hiri bakoitzera, bere eskaera asetuz, zer bidali behar den erabakitzeko, formula ezazu problema programazio linealeko problema moduan.

Aldagai hauek definituko ditugu:
x_{ij}= F_i fabrikatik C_j hirira bidalitako tonak (i=1,2;j=1,2,3) eta honekin idatziko dugun programazio linealeko problema hau da:

$$\min\left(3x_{11}+7x_{12}+8x_{13}+2x_{21}+5x_{22}+6x_{23}\right)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 150 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 150 \\ x_{11}+x_{21}=35 \\ x_{12}+x_{22}=65 \\ x_{13}+x_{23}=50 \\ x_{ij}\geq 10, i=1,2; j=1,2,3 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\geq 0.6\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}\right) \end{cases}$$

2.- Demagun:

$$\max\left(3x_1+4x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leq 24 \\ x_1+x_2\leq 20 \\ x_1-x_2\geq 0 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$$

a) Adierazi zein murrizketan diren aseak (8,5) soluzio egingarrian. Zer balio lortzen du helburu funtzioak soluzio horretan.

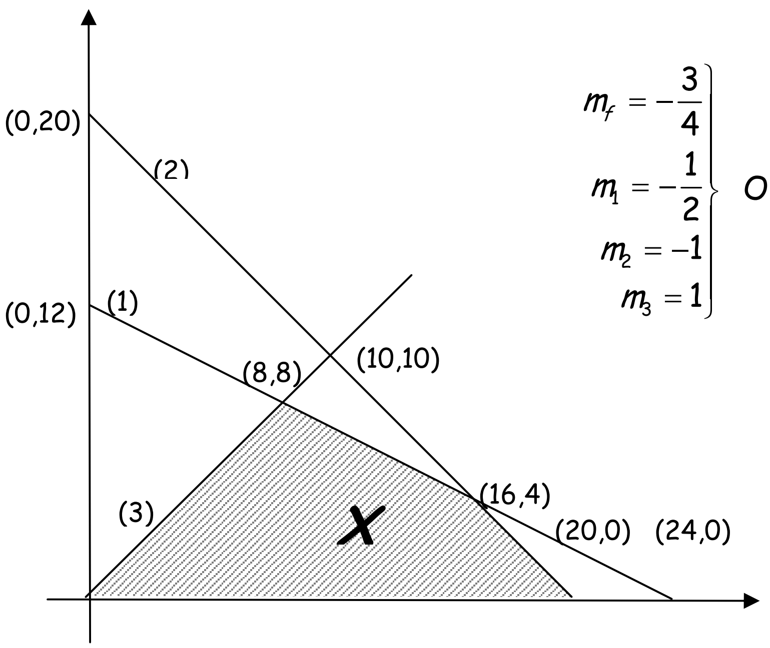
b) Ebatzi problema grafikoki eta eman soluzio eta balio hoberena.
c) Lehen edo bigarren murrizketen gai askea nahi bezain beste unitate handitzea posible bada eta helburu funtzioa maximizatu nahi badugu, bietatik zein aukeratuko zenuke handitzeko? Zenbat úntate? Zergatik?
d) Zein da hiru murrizketen itzal prezioa?
e) Egin hirugarren murrizketan nahi duzun aldaketa problemaren soluzio hoberena b) atalean lortutakoa izatea ezinezkoa izan dadin.

a) (8,5)-n murrizketak balio hau hartzen dute:

$$x_1+2x_2=18 \Rightarrow \text{Ez asea}$$
$$x_1+x_2=13 \Rightarrow \text{Ez asea}$$
$$x_1-x_2=3 \Rightarrow \text{Ez asea}$$

Helburu funtzioaren balioa: $f(8,5)=44$

b)



$$\left.\begin{array}{r} m_f=-\dfrac{3}{4} \\ m_1=-\dfrac{1}{2} \\ m_2=-1 \\ m_3=1 \end{array}\right\} \text{Ordenatuz, } m_2<m_f<m_1<m_3$$

Soluzio hoberena, M_2 eta M_1 murrizketen ebakidura puntuan lortzen da, hau da, (16,4) puntuan eta balio hoberena 64 da.

c) Lehen murrizketaren gai askea nahi bezain beste handitzen badugu soluzio hoberen berria (10,10) izango da eta helburu funtzioak bertan lortzen duena f(10,10)=70.
Bigarren murrizketaren gai askea nahi bezain beste handitzen badugu soluzio hoberen berria (24,0) izango da eta helburu funtzioak bertan lortzen duena f(24,0)=72.
Bi balioak alderatuta 2. murrizketaren gai askea handitzea komenigarriagoa dela ikusten dugu. x_1+x_2 murrizketa (24,0) puntuarekin ebaki arte handituko dugu:
$x_1+x_2=24+0=24 \Rightarrow$ 4 unitate handituko dugu 2. murrizketa

d) Lehen murrizketa urria da soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (10,10) aukerara heldu arte, hau da, 30 arte.
Eta itzal prezioa:

$$\lambda_1 = \frac{f(10,10) - f(16,4)}{30 - 24} = 1$$

Bigarren murrizketa urria da ere soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (24,0) aukerara heldu arte, hau da, 24 arte.
Eta itzal prezioa:

$$\lambda_2 = \frac{f(24,0) - f(16,4)}{24 - 20} = 2$$

Azkenik, M3 murrizketa oparoa da soluzio hoberenean, orduan bere itzal prezioa 0 da (λ_3 = 0).

e) Aukera bat murrizketaren beste aldea hartzea da: $x_1 - x_2 \leq 0$. Horrela orain (16,4) ez da egingarria eta, jakina, ezingo da problemaren soluzio hoberena izan.

3.- Demagun:

$$\max(2x_1 + x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Osatu honako taula hau simplex metodoaren urrats bati dagokiona dela jakinik, non A4 eta A5 bektoreak lehenengo eta bigarren murrizketei, hurrenez hurren, elkartutako lasaiera-aldagaiak diren (ez du balio metodoa hasieratik egiteak).

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	-1		1	0	
0	1		1	1	

Zein da taulari elkartutako problema estandarraren oinarrizko soluzio egingarria? Hoberena al da? Kontrako kasuan adierazi oinarria nola aldatuko den metodoaren hurrengo urratsara pasatzeko.

b) Honako taula hau problema estandarrari aplikatutako simplex metodoaren urrats bati elkartuta badago:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
1	0	0	2	1	3
0	1	1	1	1	2
0	0	1	5	3	8

Zein da taulari elkartutako problema estandarraren oinarrizko soluzio egingarria? Hoberena al da? Taula hoberenetik abiatuta kalkulatu zenbateraino alda daitekeen lehenengo murrizketaren gai askea oinarri hoberena aldatu gabe. Eman murrizketa honen itzal prezioa.

c) Jatorrizko problemaren bigarren murrizketaren zeinua $\geq$ aldatzen badugu, zein da problema berriaren soluzio hoberena? Arrazoitu b) ataleko taulan beharrezkoak dituzun aldaketak eginda, metodoaren urrats guztiak berriro egin gabe.

a) Taula horri elkartutako oinarria $<A_1, A_5>$ da. Hutsuneak dituzten bektoreen koordenatuak oinarri honekiko hauek dira:

$$A_3 = aA_1 + bA_5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

$$b = b_1A_1 + b_2A_5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{array}$$

Eta taula osatua:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b	θ
A_1	1	-1	**-1**	1	0	**1**	**-**
A_5	0	1	**1**	1	1	**2**	**2**
	0	**-3**	**-2**	**2**	**0**	**2**	

Oinarrizko soluzio egingarria (1,0,0,0,2) da eta ez dago soluzio hoberenari elkartua, azkeneko errenkadan elementu negatiboak baititugu. Ikusten dugunez oinarrian A_2 sartuko da (azkeneko errenkadan negatiboena berari dagokio) eta A_5 irten. Honela, oinarri berria $<A_1, A_2>$ da.

b) Oinarrizko soluzio egingarria (3,2,0,0,0) da, jatorrizko problemaren (3,2,0) soluzioari elkartutakoa. Hau hoberena da azkeneko errenkadako elementu guztiak ez-negatiboak baitira.

Lehenengo murrizketaren gai askearen aldaketak A_4 zutabean jasotzen dira. Goazen ikustera zer gertatzen den gai askea ε unitate aldatzen bada.

$b+\varepsilon A_4$
$3+2\varepsilon$
$2+1\varepsilon$

Hauek ez-negatiboak izateko, $\varepsilon \geq \frac{-3}{2}$ eta oinarri hoberena ez aldatzeko gai askearen aldaketa tartea $\left[\frac{-1}{2}, \infty\right)$ da.

Murrizketaren itzal prezioa 5 da.

c) Problema berria modu estandarrean idazten dugunean murrizketa honela izango da:

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 1$$

Eta $A_5^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Orain bektore honen koordenatuak taula hoberenaren <A_1 , A_2 > oinarriarekiko lortu behar ditugu:

$$A_5^* = aA_1 + bA_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = -1 \end{matrix}$$

Hau taulan sartuta:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5^*	b
A_1	1	0	0	2	-1	3
A_2	0	1	1	1	-1	2
	0	0	1	5	-3	8

Honela, A_5^* sartu nahi dugu oinarrian, baina bere koordenatu guztiak negatiboak direnez ez dago irtengairik. Problemak ez du soluziorik.

4.-

a) Demagun A matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} d & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

non $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Aztertu A diagonalgarritasuna a, b, c eta d balioen arabera $d \neq 0$ denean.

b) Demagun $Q(x) = {}^tM(x)BM(x)$ forma koadratikoa non:

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$b+c=0$ bada, Q sailkatu a, b eta c balioen arabera.

a)
$$P_A(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} d-\lambda & b & 0 \\ 0 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (d-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - d^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = d \\ (a-\lambda)^2 - d^2 \Rightarrow a-\lambda = \pm d \Rightarrow \lambda = a \pm d \end{cases}$$

Kasuak:

- $a = 0$ bada balio propioak: $\lambda = d$ bikoitza eta $\lambda = -d$ bakuna dim$S$(d)=3-

heina(A-dI)=3-heina$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -d & d \\ 0 & d & -d \end{pmatrix}$

Heina aztertzeko: $\begin{vmatrix} b & c \\ -d & d \end{vmatrix} = d(b+c) \neq 0 \Leftrightarrow b+c \neq 0$ bada, $d \neq 0$ baita

Orduan:

- $b+c\neq 0$ bada heina(A-dI)=2 eta

dim$S$(d)=3-2=1$\Rightarrow$ A matrizea ez da diagonalgarria.

- $b+c=0$ bada heina(A-dI)=1, $d\neq 0$ baita eta

dim$S$(d)=3-1=2$\Rightarrow$ A matrizea diagonalgarria da.

- $a=2d$ bada balio propioak: $\lambda=d$ bikoitza eta $\lambda=3d$ bakuna.

$$\dim S(d)=3-\text{heina}(A-dI)=3-\text{heina}\begin{pmatrix}0 & b & c\\ 0 & d & d\\ 0 & d & d\end{pmatrix}$$

Heina aztertzeko: $\begin{vmatrix}b & c\\ d & d\end{vmatrix}=d(b-c)\neq 0 \Leftrightarrow b-c\neq 0$ bada, $d\neq 0$ baita

Orduan:

- $b-c\neq 0$ bada heina(A-dI)=2 eta

dim$S$(d)=3-2=1$\Rightarrow$ A matrizea ez da diagonalgarria.

- $b-c=0$ bada heina(A-dI)=1, $d\neq 0$ baita eta

dim$S$(d)=3-1=2$\Rightarrow$ A matrizea diagonalgarria da.

- $a\neq 0$ eta $a\neq 2d$ bada e balio propio ezberdin erreal ditugunez A matrizea diagonalgarria izango da.

b) b+c=0 denez Q-ren adierazpen matrizea:

$$M(Q)=\begin{pmatrix}a & a/2 & 0\\ a/2 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

1. ordenako azpideterminante nagusiak: $\{a,a,a\}$

2. ordenako azpideterminante naguasiak: $\left\{\frac{3}{4}a^2, a^2, a^2\right\}$

3. ordenako azpideterminante nagusia: $|M(Q)|=\frac{3}{4}a^3$

Sailkapena:

- a<0 denean, Q definitu negatiboa.
- a=0 denean, Q erdidefinitu positiboa eta negatiboa.
- a>0 denean, Q definitu positiboa.

MATEMATIKA III-ko AZTERKETA
2010-eko ekainak 28

1.- Valentziar nekazari batek bi laranja mota A eta B ekoizten du eta Espainian eta Frantzian banatzen ditu. Ekoizpen kostua tonako 200 € eta 250 € da, hurrenez hurren, A eta B-rentzat. Frantzian banatuz gero, garraio kostua gehitu behar zaio, ekoizpen kostuaren %10ean estimatutakoa mota bakoitzarentzako. Nekazariak 1000 ha-ko lursaila du. B motako laranja tona bat ekoizteko 1.5 ha beha du eta A motako tona baloitzeko berriz 1 ha. B motako ekoizpenaren erdia gutxienez Frantzian banatu behar da. Espainian gehienez ekoizpen totalaren %60 banatuko da. Espainian banatutako A motako 3 tonako Frantzian, mota honetako, 2 tona gutxienez banatu behar dira. Laranja mota bakoitzeko 300 tona ekoiztu behar da gutxienez. Formula (ebatzi gabe) ezazu problema.

Aldagai hauek definituko ditugu:
X_{AE}= Ekoiztutako A laranja tonak Espainian banatzeko.
X_{AF}= Ekoiztutako A laranja tonak Frantzian banatzeko.
X_{BE}= Ekoiztutako B laranja tonak Espainian banatzeko.
X_{BF}= Ekoiztutako B laranja tonak Frantzian banatzeko.
eta honekin idatziko dugun programazio linealeko problema hau da:

$$\min\left(200x_{AE}+220x_{AF}+250x_{BE}+275x_{BF}\right)$$

$$\begin{cases} (x_{AE}+x_{AF})+1.5(x_{BE}+x_{BF})\le 1000 \\ 0.5(x_{BE}+x_{BF})\le x_{BF} \\ 0.6(x_{AE}+x_{AF}+x_{BE}+x_{BF})\ge x_{AE}+x_{BE} \\ 2x_{AE}\le 3x_{AF} \\ x_{AE}+x_{AF}\ge 300 \\ x_{BE}+x_{BF}\ge 300 \\ x_{AE}\ge 0, x_{AF}\ge 0, x_{BE}\ge 0, x_{BF}\ge 0 \end{cases}$$

2.- Demagun problema hau:

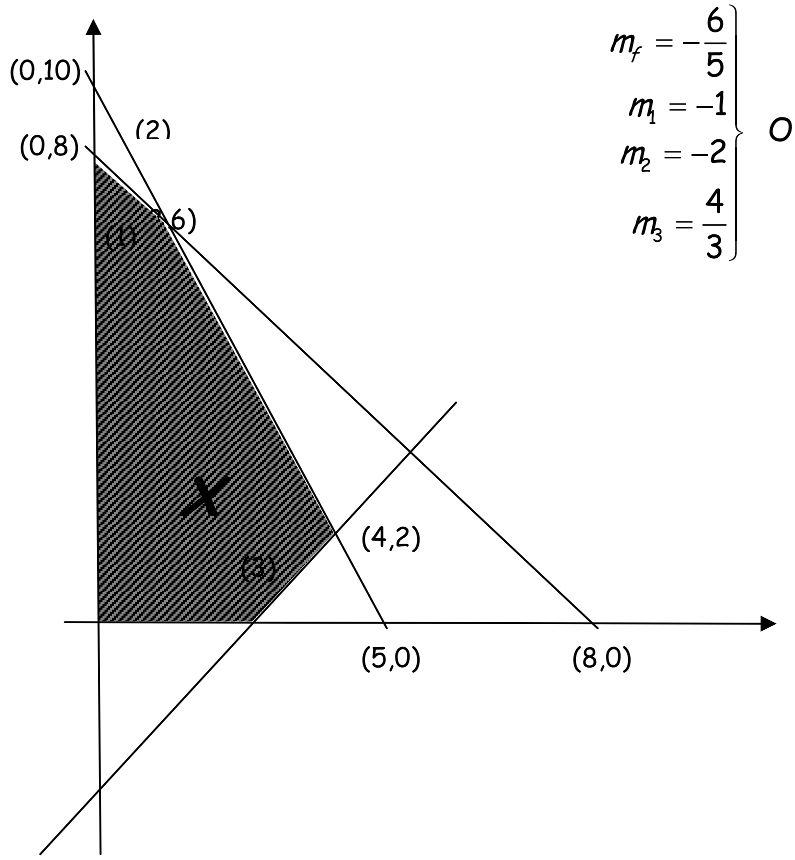
$$\max\left(6x_1+5x_2\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 8 \\ 2x_1+x_2\le 10 \\ 4x_1-3x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

a) Irudika ezazu soluzio egingarrien multzoa eta kalkula ezazu soluzio hoberena.
b) Zein da helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizentearen aldaketa tartea 3. murrizketa soluzio hoberenean ase egon dadin?
c) Kalkulatu lehenengo murrizketaren itzal prezioa.

d) Problemari $ax_1 - x_2 \le 0$, ($a \ge 0$) murrizketa eransten bazaio, zeintzuk dira a-ren balioak soluzio hoberena aldatzeko?

a)



$$\left.\begin{array}{l} m_f = -\dfrac{6}{5} \\ m_1 = -1 \\ m_2 = -2 \\ m_3 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \text{Ordenatuz, } m_2 < m_f < m_1 < m_3$$

Soluzio hoberena, M_2 eta M_1 murrizketen ebakidura puntuan lortzen da, hau da, (2,6) puntuan eta balio hoberena 42 da.

b) Helburu funtzioa $f(x_1, x_2) = Ax_1 + 5x_2$ idatziz.
Hirugarren murrizketa soluzio hoberenean ase egoteko, soluzio hoberena (4,2) puntuan egon behar da eta horretarako $m_f \le m_2$. Orduan, $\dfrac{A}{5} \ge 2 \Rightarrow A \ge 10$

c) Lehenengo murrizketa (1) urria da soluzio hoberenean, orduan murrizketaren gai askea handitzearekin helburu funtzioa handitzea lortuko dugu. Hau horrela izango da (0,10) aukerara heldu arte, hau da, 10 arte. Itzal prezioa:

$$\lambda_1 = \frac{f(0,10) - f(2,6)}{10 - 8} = \frac{50 - 42}{2} = 4$$

d) Problemari $ax_1 - x_2 \le 0$ ($a \ge 0$) murrizketa eransten bazaio, soluzio hoberena aldatzeko baldintza, orain duguna ez egingarria izatea da. Hau da, $2a - 6 > 0 \Leftrightarrow a > 3$.

3.- Demagun programazio linealeko problema hau:

$$\max\left(6x_1 + 4x_2 + x_3\right)$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 65 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

a) Osatu honako taula hau (aurreko taulak egin gabe), problemari dagokiola jakinik eta, bertatik, kalkulatu Simplex metodoko hurrengo taula.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
7	-1	0	1	0	-2	
	1	0			-1	10
1	2				1	10
					1	

b) Honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik, erantzun galdera hauek:

		6	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	-6	-1	1	-3	0	5
6	A_1	1	1	1/3	0	1/3	0	20/3
0	A_6	0	1	2/3	0	-1/3	1	10/3
		0	2	1	0	2	0	40

i) Zein murrizketa da ase eta zein da oparo?

ii) Zein da bigarren murrizketaren gai askearean aldaketa tartea oinarri hoberena ez aldatzeko? Baliabide honetatik 1 unitate gehigarri erostea posible balitz unitateko 1 € prezioan, ekoizteko erabiltzeko erostea komeniko al litzateke?

iii) Zein da helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizentearen aldaketa tartea soluzio hoberenean ez aldatzeko?

a) Problema modu estandarrean:

$$\max\left(6x_1 + 4x_2 + x_3\right)$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 65 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ x_i \geq 0 \ (\forall i = 1,\ldots,6) \end{cases}$$

Taulari elkartutako oinarria $\langle A_4, A_5, A_3 \rangle$ da

		6	4	1	0	0	0			
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**		
0	A_4	7	-1	0	1	0	-2	b=45	45/7	
0	A_5	a=2	1	0	0	1	-1	10	5	→
1	A_3	1	2	1	0	0	1	10	10	
		c=-5	d=-2	0	0	0	1	e=10		
		↑								

$$A_1 = 7A_4 + aA_5 + 1A_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 = a + 1 \Rightarrow a = 2$$

c=1-6=-5

d=2-4=-2

e=10

$$\begin{pmatrix} 65 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 65 = b + 20 \Rightarrow b = 45$$

Hurrengo taula:

		6	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	-9/2	0	1	-7/2	3/2	10
6	A_1	1	1/2	0	0	1/2	-1/2	5
1	A_3	0	3/2	1	0	-1/2	3/2	5
		0	1/2	0	0	5/2	-3/2	35

b) Honako taula hau aurreko problemari dagokiola jakinik, erantzun galdera hauek:

		6	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	**b**
0	A_4	0	-6	-1	1	-3	0	5
6	A_1	1	1	1/3	0	1/3	0	20/3
0	A_6	0	1	2/3	0	-1/3	1	10/3
		0	2	1	0	2	0	40

Soluzio hoberena (20/3,0,0) da eta balio hoberena 40.

i) Hiru murrizketen itzal prezioak, hurrenez hurren 0, 2 eta 0 dira, hau da, taula hobereneko A_4, A_5 eta A_6 zutabeetako azkeneko elementuak. Horrela, bigarren murrizketa urria da eta beste biak oparoak.

ii) aldaketak A_5 zutabean jasotzen dira. Goazen ikustera zer gertatzen den gai askea ε unitate aldatzen bada.

$$\begin{cases} 5-3\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 5/3 \\ \dfrac{20}{3}+\dfrac{1}{3}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \geq -20 \\ \dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq 10 \end{cases} \qquad \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{b+\varepsilon\ A_5} \\ \hline 5-3\varepsilon \\ \dfrac{20}{3}+\dfrac{1}{3}\varepsilon \\ \dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}\varepsilon \\ \hline 40+2\varepsilon \\ \hline \end{array} \Rightarrow \quad -20 \leq \varepsilon \leq 5/3$$

Hortaz bigarren murrizketaren gai askearen aldaketa tartea oinarri hoberena alda ez dadin [0,65/3] da.

Murrizketa honen itzal prezioa 2 da eta horregatik unitate berri bat 1€-ko preziora erostea komeni zaio, hau egindakoan balio hoberena 2 unitate handitzen da, erosketa prezioa baino gehiago.

iii) Helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizientea a letrarekin adierazten badugu taula hoberenaren azkeneko errenkada honako hau da:

		a	4	1	0	0	0	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b
0	A_4	0	-6	-1	1	-3	0	5
a	A_1	1	1	1/3	0	1/3	0	20/3
0	A_6	0	1	2/3	0	-1/3	1	10/3
		0	a-4	$\frac{a}{3}-1$	0	a/3	0	20a/3

Soluzio hoberena ez aldatzeko:

$$\begin{cases} a-4 \geq 0 \Rightarrow a \geq 4 \\ \dfrac{a}{3}-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 3 \\ a/3 \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a \geq 4$$

4.- Demagun $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matrizea.

a) $\boldsymbol{a}$-ren zein baliotarako da $M(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bektorea A-ren bektore propioa?

b) $\boldsymbol{a}$-ren zein baliotarako da A matrizea diagonalgarria?

a) Definizioak dionez *M(x)* bektoreoa *A*-ren bektore propioa izango da b.s.b. existitzen bada λ balio erreala non:

$$A\ M(x) = \lambda\ M(x)$$

Hau da :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eta hau betetzeko $\lambda = 0 \Rightarrow a = -4$

b) Polinomio karakteristikoaren erroak lortuko ditugu:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ a & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + (8+2a)) = 0$$

Balio propioak: $\lambda = -3$

$\lambda = 3 + \sqrt{1-2a}$

$\lambda = 3 - \sqrt{1-2a}$

<u>Kasuak:</u>

1.- $a > 1/2$ orduan, $1-2a < 0$ eta erroak ez dira errealak, hau da, A matrizea ez da DIAGONAGARRIA.

2.- $a = 1/2$ bada, balio propioak: $\lambda = -3$ (bakuna) eta $\lambda = 3$ (bikoitza).

dim S(3)=3-heina(A-3I)

heina(A-3I)=heina$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow \dim S(3) = 1 < 2$ eta A matrizea EZ DA DIAGONALGARRIA.

3.- $a < 1/2$

i) $a = -35/2$ bada balio propioak: $\lambda = -3$ (bikoitza) eta $\lambda = 9$ (bakuna).

dim S(-3)=3-heina(A+3I)

heina(A+3I)=heina$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -35/2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2 $\Rightarrow \dim S(-3) = 1 < 2$ eta A matrizea EZ DA DIAGONALGARRIA.

ii) $a \neq -35/2$ bada balio propioak: $\lambda = -3$, $\lambda = 3 - \sqrt{1-2a}$, $\lambda = 3 + \sqrt{1-2a}$.

Hiru balio propio ezberdin dira eta eta A matrizea DIAGONALGARRIA da.