baliabideak
material didaktikoa

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Zelan neurtzen dira R^n-ko multzoak ?

Osane Oruetxebarria

Ikasle kaiera

IKD baliabideak 5 (2013)

ANALISI FUNTZIONALA

12-13 IKASTURTEA

MATEMATIKAKO GRADUA

OSANE ORUETXEBARRIA
MATEMATIKA SAILA
ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA

AURKIBIDEA

1 – IRAKASGAIAREN TESTUINGURA

"Analisi Funtzional" irakasgaia Matematikako lizentziaturako 4. mailan ematen den enborrezko irakasgaia da. Lehen lau hilabetean ematen da, 6 ECTS kreditu kopurua du, kopuru honi presentziazko 4 ordu astero egokitzen dionik. Irakasgai honetarako komenigarria da Riemannen integrazio teknikak eta propietateak menperatzea. Gainera, kontuan izan behar dugu POI metodologiaren ezarpena egingo den baldintza bereziak, zeren eta 12-13 ikasturtea irakasgai honetarako emango diren klaseetako azken urtea izango da. Hori dela eta, ikasle kopurua 30 ingurukoa izatea espero da, kopuru hau egokia izanik POI motatako metodologia bat ezartzeko. Alde batetik, ikasturtearekin batera doazen ikasleak matrikulatuko dira, eta bestetik, irakasgai honen klaseak hartzeko azken aukera dutenak. Ikasleen profilaren aldetik, talde heterogeneoa izatea espero da. Egoera honek sor ditzakeen arazoak ekiditeko, taldeak egiterakoan mota bitako ikasleak egotea bermatuko da.

1.1) Irakasgaiaren gai-zerrenda

Lehen Gaia: R^n-KO MULTZOREN NEURRIAK. Riemannen integrala eta bere murrizketak. Edukia, kanpo-neurria. Lebesgueren neurria. Aljebrak, kanpo-neurriak eta neurri-espazioak. Oinarrizko propietateak eta adibideak. Zero neurriko multzoak.

Bigarren Gaia: INTEGRAZIOA ETA BERE PROPIETATEAK. Funtzio neurgarriak. Neurrizko konbergentzia. Lusin eta Egoroven teoremak. Funtzio sinple eta funtzio positiboen integralak. Funtzio integragarriak. Konbergentziaren teoremak integraletarako. Integralen deribazioa. Lebesgueren integralaren nagusitasuna Riemann-n integralarekiko.

Hirugarren Gaia: FUBINIREN TEOREMA ETA ALDAGAIAREN ALDAKETA. Biderkadura-neurria. Tonelliren eta Fubiniren teorema. Aldagaiaren aldaketa.

Laugarren Gaia: BANACH ESPAZIOAK ETA L^p ESPAZIOAK. Espazio normatuak eta Banach espazioak. L^p espazioak. Holder eta Minkowskiren desberdintzak. L^p-ren osotasuna. Eragile linealak: jarraitasuna eta bornaketa.

Bosgarren Gaia: HILBERT ESPAZIOEN OINARRIZKO TEORIA. Biderkadura eskalarra. Cauchy-Schwarzen desberdintza. Hilbert espazioak. Ortogonaltasuna eta proiekzioak. Funtzional linealak: adierazpenaren teorema. Sistema eta oinarri ortonormalak.

1.2) Asteko orduak lauhilabetekoan eta kreditu kopurua

"Analisi Funtzional" lehen lauhilabetekoan ematen den 6 ECTS kreditudun enborrezko irakasgaia da , astero presentziazko klaseko 4 ordu izanik.

1.3) Irakasgairekin lotutako Graduko gaitasun orokorrak

Graduko Gaitasun orokorrak (CG, T (zeharkakoa), E (espezifikoa))

CG_1(T). Matematikako arlo desberdinen helburua, metodoak eta erabilgarritasuna ezagutu eta oinarrizko kontzeptuak eta emaitzak jakin.

CG_2(E). Matematikako arlo desberdinetako teorema klasiko batzuen frogapen zehatzak ezagutu.

CG_3(T). Funtsezko eta noizbehinkako propietateak desberdindu abstrakzioa eginez eta testuinguru abstraktu horretan arrazonamendu matematikoa erabiltzen jakitea.

CG_4(T). Oinarrizko kalkuluko trebetasunak erabiliz, Matematikako problemak ebatzi; beste problema batzuetarako, ebazpena planifikatuz eskuragarri dauden tresna, eta denbora eta baliabideen murrizketen araberan.

CG_5(T). Problemen definizio eta ebazpenetan lortutako ezaguera eta analisirako eta abstrakziorako gaitasunak aplikatu emaitzen soluzioak aurkitzeko, bai testuinguru akademikoetan zein profesionaletan.

CG_8(T). Lengoai matematikoa erabili eta ulertu. Ezaguerak, prozedurak, emaitzak eta ideia matematikoak komunikatu, idatziz zein ahoz.

CG_9(T). Ondoko ikasketei autonomiarekin aurre egiteko beharrezkoan diren ikaskuntzaren gaitasunak garatu.

CG_10(T). Matematika arloko baliabide bibliografikoko bilaketa-tresnak erabili.

1.4) Irakasgaiaren gaitasun espezifikoak

CA_1 – Neurriaren teoria eta Lebesgueren integrazioaren oinarriak eta teknikak ezagutzea.

CA_2 – Neurria eta integrazioaren ideiak erlazionatu.

CA_3 – Konbergentzia monotonoa, Konbergentzia menderatua, Fatouren lema, Fubiniren teorema eta aldagai-aldaketaren teoremak ezagutzea eta erabiltzea.

CA_4 – Banach eta Hilbert espazioak ezagutzea. Adibide nagusien sailkapena egin, bereziki segida eta funtzioen espazioen kasuak.

1.5) Graduko gaitasun orokorrak eta irakasgaiaren gaitasunen arteko erlazioa

Gaitasun mota	Kodea	Irakasgaiaren gaitasun espezifikoa	Graduko gaitasun orokorra
Espezifikoa	CA_1	Neurriaren teoria eta Lebesgueren integrazioaren oinarriak eta teknikak ezagutzea	CG_1 (T) CG_2 (E) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10 (T)
Espezifikoa	CA_2	Neurria eta integrazioaren ideiak erlazionatu	CG_1 (T) CG_2 (E) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10 (T)
Espezifikoa	CA_3	Konbergentzia monotonoa, Konbergentzia menderatua, Fatouren lema, Fubiniren teorema eta aldagai-aldaketaren teoremak ezagutzea eta erabiltzea	CG_1 (T) CG_2 (E) CG_3 (T) CG_4 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10 (T)
Espezifikoa	CA_4	Banach eta Hilbert espazioak ezagutzea. Adibide nagusien sailkapena egin, bereziki segida eta funtzioen espazioen kasuak	CG_1 (T) CG_2 (E) CG_3 (T) CG_4 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10 (T)

2 - POI METODOAREN EZARPENA IRAKASGAIAN

POI metodoa lehen eta bigarren gaietan ezarriko da, hau da, Multzoen neurriak eta Lebesgueren integralekin lotutako gaietan. Metodo honen aplikazioa egiteko 15 astetik 6 aste erabiliko direla aurreikusi da (3 aste lehen gairako eta beste hiru aste bigarrenerako), hau da, irakasgaiaren % 40a. Ondoko taulan, POI metodologia ezartzeko presentziazko eta presentziarik gabeko ordu kopuruaren estimazioa agertzen da

POI DISEINUA	**PROGRAMA -REN %a**	**IKASLEAREN ORDU KOPURUA** **(Presentzialak eta presentzia gabekoak)**	**IRAKASLEAREN ORDU KOPURUA** **(Presentzialak)**	**EZARTZEKO DATAK**
POI LEHEN GAIA	% 20a	27 ordu (11 presentzialak eta 16 presentzia gabekoak)	11 ordu presentzialak	2012ko irailaren 10etik 27ra
POI BIGARREN GAIA	% 20a	28 ordu (12 presentzialak eta 16 presentzia gabekoak)	1 ordu presentzialak	2012ko irailaren 1027etik urriaren 18ra
EBALUAZIORAKO AZKEN EKINTZA		5 ordu (1 presentzialak eta 4 presentzia gabekoak)	1 ordu presentzialak	Urriaren 19a
GUZTIRA	% 40a	60 ordu (24 presentzialak eta 36 presentzia gabekoak)	24 ordu presentzialak	2012ko irailaren 10etik urriaren 19a

3 – PROBLEMA EGITURATZAILEA

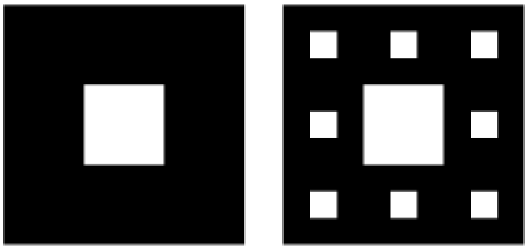
3.1) Problema Egituratzailaren aurkezpena

Hari eroaletzat planteatzen den galdera hurrengoa da:

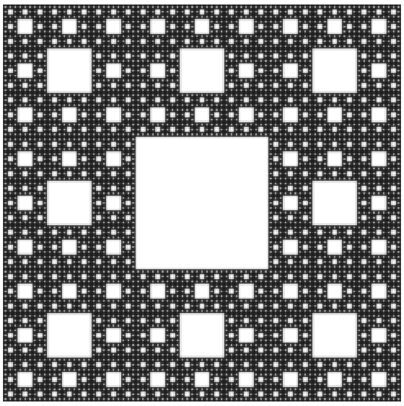
Zelan neurtzen dira R^n-ko multzoak ?

Irailaren 1etik abenduaren 31ra Tokomi Yamura eskultore japoniarra bere lanaren atzera begirako erakusketa aurkezten ari da Bilbon. Aldi berean eta erakusketak irauten duen bitartean bere lan bat egingo du Guggenheimen aurreko zabaldegian. Lana amaitu ondoren museoak duen bilduma iraunkorraren partea bihurtuko da.

Lan hori egiteko artistak 10 metroko luzeradun aldeko metalezko xafla hartu du. Erakusketaren inaugurazio egunetik, irailak 1a, Tokomik txaparen alde bakoitza hiru zati berdinetan banatzen du, bederatzi karratu aldekideak lortuz eta erdikoa kentzen du. Gelditzen diren 8 karratuekin eragiketa errepikatzen du egunero, hau da, bederatzi karratu aldekidetan banatu eta erdikoa kendu.



Lana, prozeduraren errepikapenaren emaitza izango, prozesu hau erakusketaren azken eguna arte errepikatuko delarik.



Ander eta Miren eskultore japoniarraren erakusketa ikustera joan diren Matematikako 2. mailako bi ikasle dira. Museotik irteterakoan artista lanean dagoela konturatzen dira, hurbildu egiten dira eta beraien artean komentatzen ari dira.

- Ander: hau hasieran 10 metroko karratua zen, ezta ?
- Miren, bai, hori entzun dut.
- Ander: Ba, doan martxarekin abenduaren 31rako ez da kentzeko txaparik gelditPuko.
- Miren: ez horixe, ziur nago zerbait geratuko dela.
- Ander: Baina zerbait geldituko dela diozuena, abenduaren 31taz ari zara ?, nik esan nahi dut infinitu egun eta ostean zerbait geldituko litzatekeen ala ez …
- Miren: Eta zer esan nahi duzu "infinitu egun" horiekin ?
- Ander: ba, ez dakit oso ondo …

Tokomi, bikotea interesaturik dagoela ikusirik hauengana hurbiltzen da eta elkarrizketan hasten da:

- Tokomi; Zelan bikote?, azalpenik behar izan ezkero beldurrik gabe galdetu, ez?
- Ander: Geure buruari galdetzen genion ea zenbat xafla geldituko den eskulana amaitzen denean. Mirenek zerbait geldituko dela dio, baina nik ez dut argi ikusten.
- Tokomi: galdera hori hainbat alditan egin didate hemen nagoenetik. Sentitzen dut, baina ezin dizuet erantzun. Egingo banu ez legoke ezustekorik baina emango dizudan azken orduko berria izango da. Ideia hauxe da. Erakusketa amaitzen denean Arte Ederretako ikaslek nik egindako lanarekin jarraituko dute limitera iritsi arte. Zenbat geldituko da orduan ? Zein izango da, zuen ustez, xaflaren azalera urtarrilaren 1ean ? eta zenbat neurtuko du denbora pasatu ahala?
- Miren: hori zen Anderrek komentatzen zuena. Bere ustez abenduaren 31an ez da ezer geldituko baina egia esan ez daukagu argi.

Eta zu, irakasgai honetan matrikulatutako ikaslearen ikuspuntutik, zer uste duzu?

Ander eta Mirenek planteatzen dituzten galderen aurrean, zer erantzungo zenuke?

Problema hau ebatzi ondoren lortutako gaitasunak honako hauek izango lirateke:

- CA_1: Neurriaren teoria eta Lebesgueren integrazioaren oinarriak eta teknikak ezagutzea.
- CA_2: Neurria eta integrazioaren ideiak erlazionatu.
- CA_3: Konbergentzia Monotonoa, Konbergentzia Menderatuaren teoremak eta Fatouren lemak ezagutu eta erabili.

3.2) Graduko gaitasun orokorrak, irakasgaiaren gaitasunak eta ikaste-emaitzen lotzen dituen taula

IKASTEAREN EMAITZAK	GAITASUNA	
R_1: Multzo baten neurriaren kontzeptua ezagutu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_2: Multzo baten edukiaren kontzeptua ezagutu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_3: Neurria eta edukiaren kontzeptuak desberdindu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_4: Multzoen neurriak eta edukiak kalkulatu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_5: Multzo ezagun batzuen Lebesgueren neurria kalkulatu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_6: Lebesgueren Zero neurriko multzo batzuk identifikatu	CA_1	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T)
R_7: Neurria eta integrazioaren kontzeptuak erlazionatu	CA_2	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10(T)

R_8: Funtzio desberdinen Lebesgueren integralak kalkulatu	CA_2	CG_1 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10(T)
R_9: Lebesgueren integralak eta limitearekin lotutako teorema nagusiak aplikatzen jakitea	CA_3	CG_1 (T) CG_2 (T) CG_3 (T) CG_5 (T) CG_8 (T) CG_9 (T) CG_10(T)

3.3) Ikaste-emaitzak eta egindako ekintzak erlazionatzen duen taula

Hurrengo taulan ekintza bakoitzean lantzen diren ikaste-emaitzak agertzen dira, laburpen bezala.

IKASTEAREN EMAITZAK	GAITASUNA
R_1: Multzo baten neurriaren kontzeptua ezagutu	Ekintza 1.1 Ekintza 1.2 Ekintza 1.3 Ekintza 1.5 Ekintza 2.6
R_2: Multzo baten edukiaren kontzeptua ezagutu	Ekintza 1.1 Ekintza 1.2 Ekintza 1.3 Ekintza 1.4 Ekintza 1.5 Ekintza 2.6

R_3: Neurria eta edukiaren kontzeptuak desberdindu	Ekintza 1.2 Ekintza 1.3 Ekintza 1.5 Ekintza 2.6
R_4: Multzoen neurriak eta edukiak kalkulatu	Ekintza 1.2 Ekintza 1.3 Ekintza 1.4 Ekintza 1.5 Ekintza 2.6
R_5: Multzo ezagun batzuen Lebesgueren neurria kalkulatu	Ekintza 2.6
R_6: Lebesgueren Zero neurriko multzo batzuk identifikatu	Ekintza 1.4 Ekintza 1.5 Ekintza 2.6
R_7: Neurria eta integrazioaren kontzeptuak erlazionatu	Ekintza 2.1 Ekintza 2.2 Ekintza 2.5 Ekintza 2.6
R_8: Funtzio desberdinen Lebesgueren integralak kalkulatu	Ekintza 2.2 Ekintza 2.3 Ekintza 2.4 Ekintza 2.5 Ekintza 2.6
R_9: Lebesgueren integralak eta limitearekin lotutako teorema nagusiak aplikatzen jakitea	Ekintza 2.3 Ekintza 2.4 Ekintza 2.5 Ekintza 2.6

3.4) Bibliografia eta Interneteko helbideak

Bibliografia:

- J. A. Facenda y F. J. Freniche, “Integración de funciones de varias variables”, Ed. Pirámide, 2002.
- W. Rudin, “Análisis real y complejo”, Ed. Alhambra, Madrid, 1979.
- el Kacimi Alaoui, “Introducción al Análisis Funcional”, Ed. Reverte, 1994.
- G. de Barra, “Introduction to Measure Theory”, Ed. Van Nostrand, London, 1974.
- J. Cerdá, “Análisis Real”, Ediciones de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1996.
- G. B. Folland, “Real Analysis”, Ed. John-Wiley-Interscience, New York, 1984.
- M. A. De Guzmán y B. Rubio, “Integración: teoría y técnicas”, Ed. Alhambra, Madrid, 1979.
- W. J. Kaczor, M. T. Nowak, “Problems in Mathematical Analysis III, Integration”, Student Mahematical Library, vol. 21, AMS, 2003
- H. L. Royden, “Real Analysis”, Ed. Macmillan, New York, 1963
- Trence Tao, “An introduction to measure theory”, Graduate Studies in Mathematics, vol. 126, AMS, 2011.

Interneteko helbideak:

- www.ehu.es/~mtpalezp/mundo/teomed/apuntes.pdf
- http://matematicas.unex.es/~ricarfr/Tmedida/librotmed.pdf
- http:// turnbull.mcs.st-and.ac.uk/ ~history
- http://www.elprisma.com/apuntes
- http://www.fceia.unr.edu.ar/~fismat2/

4 – IKASLEAREN KOADERNOA

4.1) Lehen Gaia: R^n-ko multzoen neurriak

Ekintza 1.1: Jakintza-froga

EKINTZA 1.1	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: ordu bat
Binaka	
Ekintza mota: c1, c3, c4, c5, c7	Ikaste-emaitzak: R_1, R_2, R_6, R_7

Test moduko 5 galdera dituen eta beste galdera irekia duen froga bat ematen da. Galderak erantzun behar dira 40 minututan. Denbora pasatu ondoren irakasleak lanak batuko ditu, erantzun zuzenak eman eta emaitzak komentatuko dira.

Irakasleak egindako ariketak bilduko ditu eta sortutako dokumentuak 1.2 ekintzaren abiapuntutzat balioko du.

Ekintza 1.2: Problema baten aurkezpena

EKINTZA 1.2	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: ordu bat
Taldeka (hiru pertsona)	
Ekintza mota: c2, c3, c4, c5, c7	Ikaste-emaitzak: R_1, R_2, R_3, R_4

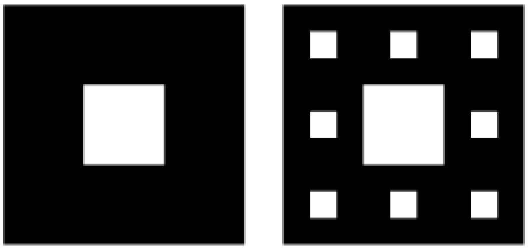
Hau presentziako eta taldeka egingo den ekintza bat da. Talde bakoitzean hiru ikasle egongo dira, bat bozeramailea izango delarik, besteak denbora hartuko du eta hirugarrenak idazkariarena.

1. zatia: 10 minututan irakur ezazue 1.1 ekintzan lortutako emaitzak eta ondorioak idatzi. Denbora pasatu ondoren talde bakoitzak bere ondorioak azalduko ditu.
2. Zatia: Irakurri ondoko testua eta bertan identifikatzen dituzun ideia matematikoak eman.

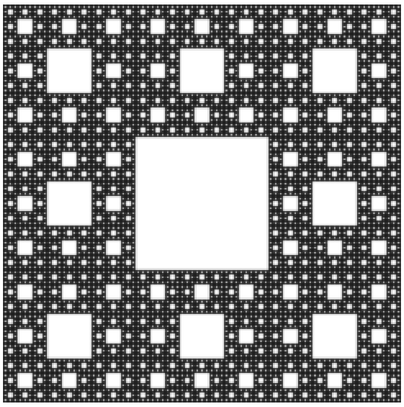
Irakur ezazu ondoko testua eta zerrendatu bertan identifikatzen dituzun ideia matematikoak.

Irailaren 1etik abenduaren 31ra Tokomi Yamura eskultore japoniarra bere lanaren atzera begirako erakusketa aurkezten ari da Bilbon. Aldi berean eta erakusketak irauten duen bitartean bere lan bat egingo du Guggenheimen aurreko zabaldegian. Lana amaitu ondoren museoak duen bilduma iraunkorraren partea bihurtuko da.

Lan hori egiteko artistak 10 metroko luzeradun aldeko metalezko xafla hartu du. Erakusketaren inaugurazio egunetik, irailak 1a, Tokomik txaparen alde bakoitza hiru zati berdinetan banatzen du, bederatzi karratu aldekideak lortuz eta erdikoa kentzen du. Gelditzen diren 8 karratuekin eragiketa errepikatzen du egunero, hau da, bederatzi karratu aldekidetan banatu eta erdikoa kendu.



Lana, prozeduraren errepikapenaren emaitza izango, prozesu hau erakusketaren azken eguna arte errepikatuko delarik.



Ander eta Miren eskultore japoniarraren erakusketa ikustera joan diren Matematikako 2. mailako bi ikasle dira. Museotik irteterakoan artista lanean dagoela konturatzen dira, hurbildu egiten dira eta beraien artean komentatzen ari dira.

- Ander: hau hasieran 10 metroko karratua zen, ezta ?
- Miren, bai, hori entzun dut.
- Ander: Ba, doan martxarekin abenduaren 31rako ez da kentzeko txaparik geldituko.
- Miren: ez horixe, ziur nago zerbait geratuko dela.
- Ander: Baina zerbait geldituko dela diozuena, abenduaren 31taz ari zara ?, nik esan nahi dut infinitu egun eta ostean zerbait geldituko litzatekeen ala ez …
- Miren: Eta zer esan nahi duzu "infinitu egun" horiekin ?
- Ander: ba, ez dakit oso ondo …

Tokomi, bikotea interesaturik dagoela ikusirik hauengana hurbiltzen da eta elkarrizketan hasten da:

- Tokomi; Zelan bikote?, azalpenik behar izan ezkero beldurrik gabe galdetu, ez?
- Ander: Geure buruari galdetzen genion ea zenbat xafla geldituko den eskulana amaitzen denean. Mirenek zerbait geldituko dela dio, baina nik ez dut argi ikusten.
- Tokomi: galdera hori hainbat alditan egin didate hemen nagoenetik. Sentitzen dut, baina ezin dizuet erantzun. Egingo banu ez legoke ezustekorik baina emango dizudan azken orduko berria izango da. Ideia hauxe da. Erakusketa amaitzen denean Arte Ederretako ikaslek nik egindako lanarekin jarraituko dute limitera iritsi arte. Zenbat geldituko da orduan ? Zein izango da, zuen ustez, xaflaren azalera urtarrilaren 1ean ? eta zenbat neurtuko du denbora pasatu ahala?
- Miren: hori zen Anderrek komentatzen zuena. Bere ustez abenduaren 31an ez da ezer geldituko baina egia esan ez daukagu argi.

Eta zu, irakasgai honetan matrikulatutako ikaslearen ikuspuntutik, zer uste duzu?

– Eman zerrenda batean testuan aurki daitezken ideia matematikoak.

Ekintza 1.3: Txosten bat egitea

EKINTZA 1.3	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 5 ordu
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 10 ordu
Taldeka (lau pertsona)	Entregatzekoa: Txostena
Ekintza mota: c4, c6, c7, c8, c9, c11	Ikaste-emaitzak: R_1, R_2, R_3, R_4

Irakasleak 1.2 ekintzatik sortutako ideiak talde osoari azalduko ditu eta errepasatu ere bai, ea ikaste-behar guztiak identifikatuta dauden. Horretarako, modu informalean, honen antzeko galderak botako ditu:
- Zer ulertzen duzue edukieraz?
- Zer uste duzue dela neurria edo neurtzea?
- Non definitzen da neurri bat ?
- Modu desberdinak baina baliokidetan defini daiteke ?
- Edukiera eta neurriaren arteko erlaziorik dago?
- Zeintzuk dira propietateak ? Neurtzeko era lekuaren independentea al da ?
- Kontzeptu hauek finkatu ondoren multzo eta beraien neurrien adibideka eman (tarte bat, zenbaki arrunten multzoaren neurria, zenbaki arrazionalen multzoaren, eta abar)

Talde bakoitzak txosten bat egin beharko du, non formalki problema egituratzailetik agertutako galderei erantzuna eman behar zaien. Irakasleak agertutako galderek txostenak izan behar duen informazioaren gidoi bezala balio dute.

Txostenean azaldu behar diren atal teorikoak honako hauek dira:

1. Aurkibidea
2. Sigma-aljebraren definizioa. Propietateak.
3. Lebesgueren kanpo-neurriaren definizioa. Propietateak.
4. Kanpo-neurrian oinarrituz, Lebesgueren neurriaren definizioa (Caratheodoryren Teorema).
5. Neurriaren definizioa funtzio bat bezala.
6. Propietateak.
7. Multzo baten edukiera. Erlazioa multzo baten neurriarekin.
8. Multzoen eta bere neurria eta edukieren adibideak
9. Bibliografia

Txosten hau egiteko, taldeak nahi duen materiala erabil daiteke (gidan emandako bibliografia, interneteko helbideak, beste ikasturteko apunteak, eta abar). Presentziazko orduetan irakasleak sortzen zalantzak erantzungo ditu, eta beharrezkoa izan ezkero, taldeen lana bideratzeko ere erabiliko dira. Azkeneko presentziako bi orduetan taldeek lanaren aurkezpena egingo dute, guztien artean gai oso azalduta geldituko delarik. Aurkezpena egingo duenaren hautaketa ausazkoa izango da. Horretaz gain, talde bakoitzak bere txostena irakasleari emango dio.

Txostena egitea eta azaltzeak puntu bateko balioa du irakasgaiaren azken ebaluazioan, ondorengo irizpideak jarraituz:
Aurkezpena:
- Idazkeraren garbitasuna eta argitasuna
- Dokumentuaren koherentzia (ordena jarraitzen da)

Lengoai Matematikoaren erabilera:
- Idazkeraren zuzentasuna
- Ahozko adierazpenaren zuzentasuna

Txostenaren edukiak:
- Gidoian aipatutako atal guztiak agertzen dira
- Propietateen frogapenak agertzen dira

Aurkezpena:
- Zuzena eta argia izan da
- Irakasleak eta ikasleek egindako galderei erantzun zuzena ematen zaie.

Ekintza 1.4: Vitaliren multzoaren eta Cantoren multzo hirutarraren azterketa

EKINTZA 1.4	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: ordu bat
Taldeka (lau pertsona)	Entregatzekoa: Txostena
Ekintza mota: c2, c3, c7, c8,	Ikaste-emaitzak: R_2, R_4, R_6

Taldeka egiteko ekintza presentziala da, bertan puzzleren teknika erabiliko delarik. Jarraian, teknika hori zertan datza azaltzen da:

- Talde bakoitzean 4 pertsona egongo dira, 2 A motako deituko ditugunak eta beste bi B motakoak. A motako ikasleek, bakoitza bere aldetik baina taldearen barne, dokumentu bat irakurri beharko dute (Cantoren multzoari buruz, hain zuzen ere) eta B motakoak beste testu desberdin bat (Vitaliren multzoari buruzkoa). Hau egiteko 10 minutu izango dute eta apunteak har ditzakete.

- Denbora hori pasatu ondoren, ikasleak 4 pertsonaz osatutako taldetan berrantolatuko dira, orain partaide guztiak mota berekoak izanik (A motakoak edo B motakoak), hau da, guztiek testu berdina irakurri dute.
- Eraiki diren talde berrietan, bakoitzak irakurritakoa azalduko du, guztion artea zalantzak argituz eta testua ulertuta gera dadin. Azalpen hau 15 minututan egingo da.
- Hurrengo pausua hasierako taldetara itzultzea da, eta 10 minututan A motako ikasleek euren testua azaldu behar diete B motako ikasleei eta alderantziz, ager daitezken zalantzak argituz.

Ekintza hau banakako ebaluazioa batekin amaitzen da. Ikasle bakoitzak irakurgai biekin lotutako galdetegia bati erantzun beharko dio. Galdetegian zortzi galdera egongo dira, egia ala gezurra erantzuteko. Ebaluazio irizpideka honako hauek dira:

- 0 eta 5 arteko erantzun zuzenak => 0 puntu
- 5 baino gehiago erantzun zuzenak => 0,12 puntu

Ekintza 1.5: Ariketak egitea eta zuzentzea. Ikasitakoari buruzko hausnarketa

EKINTZA 1.5	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: ordu bi
Presentzia Gabekoa	Denbora estimatua: 6 ordu
Bakarka	Entregatzekoa: egindako ariketak
Ekintza mota: c6, c7, c8, c9, c11	Ikaste-emaitzak: R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6

Lehen zatia: Jarraian agertzen diren ariketatik hiru ebatzi ondoko irizpideak jarraituz:

a. Ariketa bat egiteko aukeratu 1 eta 2ren artetik.
b. Ariketa bat egiteko aukeratu 3 eta 4ren artetik.
c. 5. Ariketa egitea derrigorrezkoa da.

Bigarren zatia: Ariketak zuzendu ondoko irizpideak jarraituz:

a. 1 eta 2 ariketen ebazpen zehatza (bietatik bat soilik egin behar da): 0,1 puntu
b. 3 eta 4 ariketen ebazpen zehatza (bietatik bat soilik egin behar da): 0,1 puntu.

4.2) Bigarren Gaia: Integrazioa eta bere propietateak

Ekintza 2.1: Problema baten aurkezpena eta txostena egitea

EKINTZA 2.1	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 6 ordu
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 7 ordu
Taldeka (lau pertsona)	Entregatzekoa: Txostena
Ekintza mota: c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c11	Ikaste-emaitzak: R_7, R_8

Ekintza hau taldeka egiteko presentziazko zein presentzia gabeko lana da. Batek bozeramailearen papera egingo du eta besteak denbora neurtu eta notak hartu.

Lehen zatia: 10 minututan lehen gaiko azken ekintzaren hausnarketak irakurri eta zuen ondorioak atera. Honen ondoren hausnarketa komunean jarriko dira eta ideiaren bat falta bada irakasleak mahai gainena jarriko du.

Bigarren zatia: 1.5 ekintzaren 5. galderaren erantzuna ezezkoa izan bada, esan zeintzuk izan daitezken ikaste-betebeharrak erantzuna baiezkoa bihurtzeko. Hasierako erantzuna baiezkoa izan bada, irakasleak ikasle bat aukeratuko du azalpena eman diezaion klase osoari.

Hirugarren zatia: Riemannen integrala eta multzo baten azalera edo bolumenaren arteko erlazioa ezagututa, antzeko zerbait defini genezake Lebesgueren neurrirako, hau da, nola definituko genuke neurtzeko modu berri honi dagokion integrala ?

Laugarren zatia: aurreko hiru ataletatik ateratako ondorio guztiak aurkeztuko dira ea ikaste betebehar guztiak identifikatuta dauden ala ez bermatzeko, errepaso baten bidez.

Sortutako informazioarekin talde bakoitzak txosten bat egin beharko du, non formalki agertutako galderei erantzuna eman behar zaien. Irakasleak agertutako galderek txostenak izan behar duen informazioaren gidoi bezala balio dute. Txosten hau egiteko, taldeak nahi duen materiala erabil daiteke (gidan emandako bibliografia, interneteko helbideak, beste ikasturteko apunteak, eta abar). Presentziazko orduetan irakasleak sortzen zalantzak erantzungo ditu, eta beharrezkoa izan ezkero, taldeen lana bideratzeko ere erabiliko dira. Azkeneko presentziako bi orduetan taldeek lanaren aurkezpena egingo dute, guztien artean gai oso azalduta geldituko delarik. Aurkezpena egingo duenaren hautaketa ausazkoa izango da. Horretaz gain, talde bakoitzak bere txostena irakasleari emango dio.

Txostena egitea eta azaltzeak puntu bateko balioa du irakasgaiaren azken ebaluazioan, ondorengo irizpideak jarraituz:
Aurkezpena:
- Idazkeraren garbitasuna eta argitasuna
- Dokumentuaren koherentzia (ordena jarraitzen da)

Lengoai Matematikoaren erabilera:
- Idazkeraren zuzentasuna
- Ahozko adierazpenaren zuzentasuna

Txostenaren edukiak:
- Gidoian aipatutako atal guztiak agertzen dira
- Propietateen frogapenak agertzen dira

Aurkezpena:
- Zuzena eta argia izan da
- Irakasleak eta ikasleek egindako galderei erantzun zuzena ematen zaie

Ekintza 2.2: Konbergentzia Monotonoa eta Konbergentzia Menderatuaren teorema eta Fatouren lemaren azterketa eta aplikazioa

EKINTZA 2.2	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 2 ordu
Taldeka (hiru pertsona)	Entregatzekoa: Laburpena
Ekintza mota: c5, c6, c7, c8	Ikaste-emaitzak: R_8, R_9

Modu presentzialean eta hiruko taldetan egin beharreko ekintza bat da, taldekide bakoitzak zenbaki bat duelarik (Taldekide 1, Taldekide 2 eta Taldekide 3)

Lehen zatia: 10 minututan, taldeko partaide guztiek 1 Testua irakurriko dute. Denbora hori pasatu ondoren, Taldekide 1-k irakurritako testua azalduko die beste biei, beste hamar minututan zehar.

Bigarren zatia: 10 minututan taldeko partaide guztiek 2 Testua irakurriko dute. Taldekide 2-k irakurritako testua azalduko die beste biei, beste hamar minututan zehar.

Hirugarren zatia: 10 minututan taldeko partaide guztiek 3 Testua irakurriko dute. Taldekide 3-k irakurritako testua azalduko die beste biei, beste hamar minututan zehar.

Laugarren zatia: taldekide guztien artean, 4 Testua irakurri eta aztertu. Ondoren laburpen txiki bat idatzi ondoko galderei erantzunez:

- Enuntziatu 1, 2 eta 3 testuetan agertzen diren teoremak, emaitzak ateratzeko beraien balditzetan agertzen diren desberdintasunak azpimarratuz
- Konbergentzia Monotonoaren Teoreman, uste duzu baldintzaren bat alda daitekeela eta antzeko emaitza lortu?
- Fatouren Teoremaren frogapenean, zein da erabiltzen den teorema ? Non erabiltzen da?
- Demagun Konbergentzia Monotonoaren Teoremaren baldintzak betetzen dituen funtzio segida dugula. Posiblea da limitearen integrala infinitua izatea?
- Demagun Konbergentzia Menderaturen Teoremaren baldintzak betetzen dituen funtzio segida dugula. Posiblea da limitearen integrala infinitua izatea?

KONBERGENTZIA MONOTONOAREN TEOREMA.

Izan bedi $\{f_n\}_{n\in N}$ funtzio neurgarri ez negatiboen segida ez-beherakorra (era berean suposa daiteke ez-gorakorra dela) eta $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Orduan ondokoa egiaztatzen da:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)dx = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_X f(x)dx.$$

Honek limitea eta integralaren ordena alda daitekela esan nahi du, hau da, berdina da lehenengo limitea egitea eta gero integratu ala alderantziz.

<u>FROGAPENA.</u>

$\{f_n\}_{n\in N}$ segida ez-beherakorra denez, $f_n \leq f_{n+1}$ desberdintza betetzen da, eta limiteak hartuz, $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1}$ izango da, beraz $\int_X f_n$ segida ez-beherakorra da ere bai, eta limitea existituko da, limite hau finitua ala infinitua izanik. Dei diezagun limite horri α, hau da ,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)dx.$$

Beste alde batetik, $f_n \leq f$ da segida ez-beherakorra delako. Integralak hartuz desberdintza mantenduko da eta gero limiteak hartuz ere, beraz:

$$f_n \leq f \Longrightarrow \int_X f_n(x)dx \leq \int_X f(x)dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)dx \leq \int_X f(x)dx \Longrightarrow \alpha \leq \int_X f(x)dx.$$

$\alpha = \infty$ bada, badaukagu berdintza, zeren eta

$$\alpha = \infty \leq \int_X f(x)dx \leq \infty \Longrightarrow \int_X f(x)dx = \infty = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)dx.$$

Demagun α finitua dela, hau da, $\alpha < \infty$. Orduan $\int_X f(x)dx \leq \alpha$ desberdintza falta zaigu frogatzea.

Segidako f_i gai bakoitzerako existitzen da funtzio sinpleen segida ez-beherakorra, non $a_{ij} \geq 0$, $\lim\limits_{j\to\infty} a_{ij}(x) = f_i(x)$ eta $a_{ij}(x) \leq f_i(x)$ den.

Finkatu dugu $k \in N$. k bakoitzerako defini dezagun $s_k(x) = \max\{a_{ij}(x), i,j \leq k\}$. (Adibidez, $k = 1$-erako $s_1 = a_{11}$ izango da, $k = 2$-rako, $s_2 = \max\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}$ da).

k bakoitzerako, $0 \leq s_k \leq f_k$ da, $a_{ij} \geq 0$ direlako eta s_k-ren definiziotik. Gainera $\{s_k, k \in N\}$ funtzio sinpleen segida ez-beherakorra da eta f-ra konbergentea. Orduan alde batetik

$$\lim_{k\to\infty}\int_X s_k(x)dx \leq \lim_{k\to\infty}\int_X f_k(x)dx = \alpha$$

eta bestetik, integralaren definiziotik, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_X s_k(x)dx = \int_X f(x)dx$. Beraz biak elkartuz faltazten zen beste desberdintza dugu

$$\int_X f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty}\int_X f_k(x)dx = \alpha$$

eta honela teorema frogatuta gelditzen da.

2. TESTUA: FATOU-REN LEMA

Teorema 1. (Fatouren Lema)

Izan bedi $\{f_n\}_{n\in N}$ funtzio neurgarri ez-negatiboen segida. Orduan hurrengo desberdintza betetzen da:

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu\right)$$

Frogapena: Izan bedi $g_n(x) = \inf_{k\geq n}(f_k(x))$ segida. Orduan

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (\inf_{k\geq n} f_k) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

$g_n(x) \leq f_n(x)$ delako. (Behe-limitea jarri behar dugu ez dakigulako limitea existitzen den ala ez). Beste alde batetik

$$(2) \quad \int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} f_k)\right) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

g_n segida definizioz ez-beherakorra da beraz Konbergentzia Monotoaren Teorema aplika dakioke

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu$$

berdintza lortuz. Bertan (1) eta (2) adierazpenetako emaitzak ordekatuz

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu\right)$$

lortzen dugu ∎

Ikus dezagun orain Lema honen kontradibide bat berdintza ez dela beti ematen adierazten duena.
Izan bedi

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x), & n = 2k, \\ \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) & n = 2k+1. \end{cases}$$

segida, $x \in [0,1]$ izanik. Froga ezazu Fatouren Lemaren desberdintza hertsia dela, hau da,

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu < \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Azter dezagun nolakoa den segida hau:

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), f_n(x) = \{0,1,0,1,\dots\},$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], f_n(x) = \{1,0,1,0,\dots\},$$

$$x = \frac{1}{2}, f_n(x) = \{1,1,1,1\dots\}.$$

Segidaren behe-limitea zero da, beraz Lemaren ezkerreko adierazpena

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

da. Kalkula dezagun orain eskuineko adierazpena.

$$\int_X f_n d\mu = \int_{[0,\frac{1}{2})} f_n d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} f_n d\mu$$

$$n = 2k \text{ bada } \int_{[0,\frac{1}{2})} 1 d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} 0 d\mu = \mu\left([0, \frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2} \text{ da eta}$$

$$n = 2k+1 \text{ bada } \int_{[0,\frac{1}{2})} 0 d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} 1 d\mu = \mu\left((\frac{1}{2}, 1] \right) = \frac{1}{2}.$$

Beraz

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \frac{1}{2} \text{ eta } 0 < \frac{1}{2} \ f.n.g.$$

3. TESTUA: KONBERGENTZIA MENDERATUAREN TEOREMA

Teorema 1. (Lebesgueren Konbergentzia Menderatuaren Teorema)

Izan bedi $\{f_n\}_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ funtzio neurgarrien segida eta f funtziora puntuz puntu konbergentea dena. Demagun

$$\exists\ F \in L^1(X,\mu), |f_n| \leq F,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Orduan f integragarria da eta hurrengo berdintzak egiaztatzen dira:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \text{ eta } \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Frogapena: $|f_n| \leq F$ denez, segidako funtzio guztiak integragarriak dira. Gainera puntuzko limitea hartuz $|f| \leq F$ izango da eta orduan f ere integragarria da. Era berean

$$|f_n| \leq F \Rightarrow -F \leq f_n \leq F \Rightarrow F + f_n \text{ eta } F - f_n \geq 0$$

dira. Aplika diezaiogun Fatouren Lema $F + f_n$ segidari. Orduan

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (F + f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (F + f_n) d\mu \Longrightarrow$$

$$\int_X F d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \int_X F d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \Rightarrow$$

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Baina segidaren limitea f denez

$$\text{(1)} \qquad \int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Errepika dezagun prozedura Fatouren Lema aplikatuz $F - f_n$ segidari:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (F - f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (F - f_n) d\mu \Longrightarrow$$

$$\int_X F d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) \leq \int_X F d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n) d\mu \Rightarrow$$

$$\int_X \liminf (-f_n)_{n\to\infty} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n) d\mu.$$

Ezkerraldeko behe-limitea segidaren limitea da eta eskuinean

$$\liminf_{n\to\infty} (-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} (a_n)$$

propietatea erabiliz

$$-\int_X f d\mu \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\text{(2)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

desberdintza lortzen dugu. (1) eta (2) desberdintzak batera hartuz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dela lortzen dugu. Berdintza hau kenketa bezala idatziz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f) d\mu = 0 \text{ eta } \lim_{n\to\infty} \int_X (f - f_n) d\mu = 0$$

direla ateratzen da, beraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

■

4. TESTUA: KONBERGENTZIA MENDERATUAREN TEOREMAREN APLIKAZIOA

Korolarioa 1. Izan bedi $f : X \times I \to \mathbb{R}$ funtzioa, $f(\cdot, t) \in L^1(X, \mu)$ izanik $t \in I$ guztietarako. Har dezagun

$$F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x), \ t \in I$$

funtzioa.
Ondoko baieztapenak betetzen dira:

1. $f(\cdot, t)$ jarraitua bada t_0-n, $x \in X$ guztietarako eta $\exists\, g_1 \in L^1(X, \mu)$, non $|f(x,t)| \leq g_1(x)$ den $\forall\ (x,t) \in X \times I \Rightarrow F$ funtzio jarraitua da t_0 puntuan, hau da,
$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \int_X f(x, t_0) d\mu(x).$$
2. $f(\cdot, t)$ deribagarria bada t_0-n, $x \in X$ guztietarako eta $\exists\, g_2 \in L^1(X, \mu)$, non $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g_2(x)$ den $\forall\ (x,t) \in X \times I \Rightarrow F$ funtzio deribagarria da t_0 puntuan eta
$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Frogapena:
1. Izan bedi $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t_0-ra doan zenbaki errealen segida bat. F jarraitua izateko

$$\lim_{n \to \infty} F(t_n) = F(t_0)$$

dela frogatu behar da, edo baliokidea den $\lim\limits_{n \to \infty} (F(t_n) - F(t_0)) = 0$.

$$\lim_{n \to \infty} (F(t_n) - F(t_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f(x, t_n) d\mu - \int_X f(x, t_0) d\mu \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \int_X f(x, t_n) d\mu = \int_X f(x, t_0) d\mu.$$

Hipotesiz, t guztietarako $f(x,t)$-ren goi-bornea den g_1 funtzio integragarria existitzen da, beraz Konbergentzia Menderatuaren Teoremaren baldintzak betetzen dira eta limitea integralaren barrura sar daiteke. Gainera f jarraitua denez $\lim\limits_{n \to \infty} f(x, t_n) = f(x, t_0)$, beraz

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f(x, t_n) d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} f(x, t_n) d\mu = \int_X f(x, t_0) d\mu$$

da.

2. Deribatuaren definizioz $F'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}$ da. F-ren adierazpenean ordezkatuz

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_X f(x,t_n)d\mu(x) - \int_X f(x,t_0)d\mu(x)}{t_n - t_0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

da. Batez besteko Balioaren Teorema erabiliz

$$\left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,\psi) \right|, \ \psi \in (t_0, t_n).$$

Berriz, t guztietarako $\frac{\partial f}{\partial t}$-ren goi-bornea den g_2 funtzio integragarria existitzen da, beraz Konbergentzia Menderatuaren Teoremaren baldintzak betetzen dira eta limitea integralaren barrura sar daiteke:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_X \left(\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \end{aligned}$$

■

Ekintza 2.3: Konbergentzia Monotonoa eta Konbergentzia Menderatuaren teorema eta Fatouren lemaren azterketa eta aplikazioa

EKINTZA 2.3	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 2 ordu
Presentziazkoa	Denbora estimatua: 5 ordu
Taldeka (hiru pertsona)	Entregatzekoa: egindako ariketak
Ekintza mota: c6, c7, c8, c9, c11	Ikaste-emaitzak: R_7, R_8

Ekintza hau taldeka egiteko lan bat da, non lana burutzeko ordu presentzialak eta presentzia gabekoak dauden.

Lehen zatia: ondoren agertzen den zerrendako bi ariketa ebatzi. (ordu bat)

Bigarren zatia: ariketak zuzendu, ariketa bakoitzaren balioa azken notako 0,1 puntukoa delarik kontuan hartuz (ordu bat).

Ekintza 2.4: Riemannen integrala eta Lebesgueren integralaren arteko erlazioa

EKINTZA 2.4	
Presentzia gabekoa	Denbora estimatua: 5 ordu
Taldeka (hiru pertsona)	Entregatzekoa: Egindako ariketak
Ekintza mota: c6, c7, c8, c9, c11	Ikaste-emaitzak: R_7, R_8, R_9

Ekintza hau taldeka eta ordu ez presentzialetan egitekoa da.

Lehen zatia: Irakurri eta aztertu ondorengo testua.

Bigarren zatia: Ondoko zerrendako bi ariketa ebatzi, irizpide hauek jarraituz: 1 eta 2 ariketen artean bat aukeratu, eta 3 eta 4 ariketen artean bat aukeratu. Ariketa bakoitzaren ebazpen zehatzak 0,1 puntu balioko ditu irakasgairen azken notarako.

Talde bakoitzak irakasleak finkatutako egunean entregatu beharko ditu ariketak, honek zuzen eta taldeei bueltatu ditzan.

LEHEN ZATIA:

Irakur ezazu ondorengo testua:

Lebesgueren integralak ezagutu eta gero interesgarria da Lebesgueren eta Riemannen integralaren arteko erlazioa ezagutzea. Hildo horretatik hurrengo emaitzak funtsezkoak dira:

- Berdinak ia nonahi diren bi funtzioren Lebesgueren integralak berdinak dira.
- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($b - a < \infty$ izanik) funtzio bornatua Riemann-integragarria da f jarraitua bada ia nonahi.
- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($b - a < \infty$ izanik) funtzio bornatua Riemann-integragarria bada, orduan Lebesgue-integragarria izango da eta bi integralak berdinak dira:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$
Alderantzizkoa ez da egia, hau da, Lebesgue-integragarria izan daiteke baina ez Riemann-integragarria. (Lebesgue-integragarriak diren funtzioen klasea, Riemann-integragarriak diren funtzioen klasea baino handiagoa da).
- Ia nonahi berdinak diren bi funtiotarako, bata jarraitua eta bestea jarraitua ia nonahi, bi funtzioen Lebesgue-ren integralak berdinak dira.
- f funtzioa Riemann-integragarria bada $[a, \infty)$ tartearen edozein $[a, c]$ azpitartetan, Riemannen integral inpropioa
$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)dx$$
eran definitzen da. Kasu honetan, f ez-negatiboa bada eta bere integral inpropioa konbergentea bada, Konbergentzia Monotonoaren Teorema
erabiliz, f funtzioa $[a, \infty]$ tartean Lebesgueren ikuspuntutik integragarria dela eta integral hori eta Riemannen integral inpropioa berdinak direla ondorioztatzen da.
- Funtzioa edozein zeinukoa denean, gerta daiteke Riemannen integral inpropioa existitzea baina Lebesgueren ikuspuntutik integragarria ez izatea. Edozein zeinuko funtzioetarako, f-ren integral inpropioa konbergentea izateaz gain, f eta $|f|$ Riemannen ikuspuntutik integragarriak izatea eskatu behar zaie Lebesgue-ren eta Riemann-en integralen arteko berdintza emateko.

Ekintza 2.5: Ikasitakoaren laburpen froga

EKINTZA 2.5	
Presentziazkoa	Denbora estimatua: ordu bat
Bakarka	Entregatzekoa: Moodle galdetegia
Ekintza mota: c7, c8, c9, c10, c11	Ikaste-emaitzak: R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9

Azken ekintza hau ordenagailu gelan egin beharreko banakako ekintza da. Sortutako dokumentu guztiak erabili ahal izango dira.

Banaka, http://moodle3.ehu.es/mod/quiz/attempt.php?id=344635 helbidean agertzen den galdetegiari erantzun ezazu. Lortutako notaren haztapena egingo da, kalifikazio maximoa 0,2koa dela kontuan izanik.

5 - ERANSKINAK

1 ERANSKINA. TALDEAREN FUNTZIONAMENDURAKO ARAUAK

TALDEA:

Kideak:

K1 -

K2 -

K3 -

K4-

TALDEAREN FUNTZIONAMENDURAKO ARAUAK

1. Batzar guztietara joateko konpromisoa hartzen dugu, bertan parte hartuz.
2. Tokatu zaigun lanaren zatia sasoiz egiteko eta aurkezteko konpromisoa hartzen
3. dugu.
4. Sortu daitezken arazoak ahalik eta hoberen konpontzen saiatuko gara.
5. Gure taldekideen ideiak onartzen eta eztabaidatzen konprometitzen gara.
6. Taldekideren bat bi bider baino gehiagotan bileretara ez badator edo ez badu
7. lana egiten taldetik kanporatua izango da.
8. Jarrera desegokiak kanporatzea inplikatzen du.
9. Gure akats guztiak zuzentzen eta onartzen konprometitzen gara.

Izena: Sinadura:	Izena: Sinadura:
Izena: Sinadura:	Izena: Sinadura:

2 ERANSKINA. TALDE LANEKO EBALUAZIORAKO GALDETEGIA

TALDE LANEKO EBALUAZIORAKO GALDETEGIA	
Taldearen funtzionamenduari buruzko iritzia eman. Zure erantzunak aztertuak izango dira eta kontuan hartuak izango dira taldeko ekintzen ebaluaziorako.	
TALDEA:	EKINTZA:
KIDEAK: K1- K2- K3- K4-	
Ondoko galderak erantzun taldeko kide bakoitzerako (zu barne) ondoko baremoa jarraituz: 5 = Guztiz ados, 4 = Ados, 3 = Berdin zait, 2 = Ez ados, 1 = Batere ez ados	

Taldeko kideak	K1	K2	K3	K4
Gelditu garenean puntuala izan da				
Lana entregatzeko orduan sasoiz egin du				
Egin duen lana ona izan da				
Ekintza desberdinetan parte hartu du				
Giro ona mantentzen saiatu da talde lana bultzatzeko				
Beti besteen iritziak errespetatu ditu				
Bere ezagutza besteekin konpartitu du				

3 ERANSKINA. BATZARREKO AKTA

BATZARREKO AKTA

Data:	**Hasiera ordua:**	**Amaiera ordua:**	**Hurrengo batzarreko data eta ordua:**

Taldea:	**Ekintzaren izenburua:**
Etorri diren kideak:	**Etorri ez diren kideak:**

TRATATUTAKO GAIAK :

HARTUTAKO AKORDIOAK:

HURRENGO BATZARRERAKO HELBURUAK :

TALDEKIDE BAKOITZAK EGINDAKO LANAREN BALORAZIOA:

ETORRI DIRENEN IZENA ETA SINADURA:

4 ERANSKINA. TALDEKO AHOZKO AZALPENAREN EBALUAZIOA

TALDEKO AHOZKO AZALPENAREN EBALUAZIOA

EBALUAZTZAILEA	
EBALUATUTAKO EKINTZA	

1 = Ezer 2 = Urri 3 = Zerbait 4 = Asko 5 = Guztiz

1. Gaiaren ezagutza	1	2	3	4	5
2. Informazioaren antolaketa	1	2	3	4	5
3. Lengoaiaren erabilera zuzena	1	2	3	4	5
4. Laguntza materialaren erabilera	1	2	3	4	5
5. Publikoa begiratzen du	1	2	3	4	5
6. Ahotsaren erabilera	1	2	3	4	5
7. Gorputz espresioa	1	2	3	4	5
8. Ziur sentitzen dira	1	2	3	4	5
9. Gogoz azaltzen dira	1	2	3	4	5
10. Emandako denbora errespetatzen dute	1	2	3	4	5

Taldeko dokumentazioaren balorazioa: (0tik 10era):

Alde positiboak:

Alde negatiboak:

5 ERANSKINA. TALDEKO IDATZIZKO DOKUMENTAZIOAREN EBALUAZIOA

TALDEKO IDATZIZKO DOKUMENTAZIOAREN EBALUAZIOA

EBALUAZTZAILEA	
EBALUATUTAKO EKINTZA	

1 = Ezer 2 = Urri 3 = Zerbait 4 = Asko 5 = Guztiz

1. Zehaztasuna	1	2	3	4	5
2. Lengoai matematikoaren erabilera zuzena	1	2	3	4	5
3. Edukien egitura zuzena	1	2	3	4	5
4. Adibideak ematen dira	1	2	3	4	5
5. Lortutako emaitzak aztertzen dira	1	2	3	4	5
6. Informazio iturriak ematen dira	1	2	3	4	5

Taldeko dokumentazioaren balorazioa: (0tik 10era):

Alde positiboak:

Alde negatiboak:

6 ERANSKINA. JARRAITUTAKO METODOLOGIARI BURUZKO GALDETEGIA

JARRAITUTAKO METODOLOGIARI BURUZKO GALDETEGIA

Eman zure iritzia gelan jarraitu den metodologiari buruz. Landu den guztia kontuan hartuz, planteamendu eta esperientziaren garapenaren zure **balorazio orokorra da:**

☐ batere ona

☐ ona

☐ nahiko ona

☐ oso ona

Zure balorazioa **arrazoitu:**

Jarraitutako metodologiak, **beste metodoekin konparatuz, ikasten zenbat lagundu** dizun baloratu:

☐ gutxiago

☐ berdin

☐ gehiago

☐ askoz gehiago

Baloratu nola **metodologiaren erabilerak lagundu dizun hurrengo kasuetan**:

("1" oso gutxi, "2" gutxi, "3" nahiko, "4" asko)

Eduki teorikoak ulertzen	1	2	3	4
Teoria eta praktikaren arteko erlazioa lortzen	1	2	3	4
Irakasgaiaren edukiak eta ikuspegi globalaren arteko erlazioa lortzen	1	2	3	4
Irakasgaiarekiko interesa eta motibazioa handitzen	1	2	3	4
Planteatutako lanari buruz nire kabuz ikertzen	1	2	3	4
Egoera erreal baten aurrean erabakiak hartzen	1	2	3	4
Arazoak konpontzen edo egoera errealei soluzioak ematen	1	2	3	4

<table>
<tr><td>Trebetasunak lantzen (ahozkoa edo idatzizkoa)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ikasteko autonomia lantzen</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ikaste prozesuaren aurrean jarrera parte-hartzailea hartuz</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Talde lanaren gaitasunak hobetzen</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ebaluazio sistema metodologiarekin bat dator</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="5">Prozesuan zehar irakasleak emandako jarraibideak, zure beharrak bete ditu ?
☐ Gutxi
☐ Justu
☐ Nahiko
☐ Asko</td></tr>
<tr><td colspan="5">Zerbait aldatuko zenuke? Hobetzeko proposamenik ba al duzu?</td></tr>
<tr><td colspan="5">Hurrengo ikasturte edo lauhilekoan aukeratu ahal izan ezkero, metodologia hau hartuko zenuke?
☐ Bai
☐ Ez</td></tr>
</table>

Oruetxebarria, O. (2013). Zelan neurtzen dira Rnko multzoak ? – IKD baliabideak 5 -
http://cvb.ehu.es/ikd-baliabideak/ik/oruetxebarria-5-2013-ik.pdf