Incertidumbre y Opciones Reales: Inversión y explotación de una pesquería (I)*

Arantza Murillas†

Abstract

La valoración de la oportunidad de explotar una pesquería es particularmente dificil por el alto grado de incertidumbre asociado al precio del recurso pesquero. Los métodos tradicionales de descuento como el valor actualizado neto (VAN) no capturan apropiadamente la flexibilidad de gestión de un determinado proyecto de inversión. Es por ello, que en este trabajo se hace uso de la Teoría de las Opciones Reales que incorpora flexibilidad de gestión en la valoración, en cuanto que se introduce la posibilidad de cerrar temporalmente la explotación de la pesquería a medida que se vaya obteniendo nueva información sobre los flujos futuros. En la literatura tradicional se ha venido utilizando la Teoría de las Opciones Reales para valorar explotaciones de recursos naturales no renovables distintos de los pesqueros. En este trabajo se presenta un modelo bioeconómico general para valorar una pesquería. Este modelo determina no sólo el valor de la misma cuando está siendo explotada y cuando está cerrada, sino que también, determina las políticas óptimas de explotación y capturas.

Palabras clave: Recursos Pesqueros, Opciones Reales, flexibilidad de gestión.

*Deseo expresar mi agradecimiento a Jose Manuel Chamorro, Marta Escapa y otros participantes de seminario en la Universidad del País Vasco los comentarios y aportaciones realizados a este trabajo. Asimismo agradecer la financiación recibida del Ministerio de Educación y Cultura (AP96).

†Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico, Universidad del País Vasco-EHU, Lehendakari Aguirre, 83, 48015, Bilbao, Spain. e-mail: etdmumaa@bs.ehu.es.

Contents

1. Introducción: Teoría de Opciones Reales.

Una de las principales desventajas de utilizar el valor actualizado neto (VAN) de los flujos futuros, u otros métodos de descuento, es que no capturan apropiadamente la flexibilidad de gestión de un determinado proyecto de inversión ante cambios de mercado inesperados. Estos métodos de descuento tradicionales se apoyan en supuestos implícitos referentes al escenario futuro de los flujos, los cuales son descontados a una tasa ajustada por riesgo. Una vez obtenido el valor actualizado, se decide aceptar el proyecto si éste es positivo, y rechazarlo en caso contrario.

Sin embargo, la realización de los flujos futuros podría ser diferente de lo que inicialmente se esperaba. A medida que se va obteniendo nueva información y la incertidumbre sobre los flujos futuros se va resolviendo, podría revisarse la estrategia que inicialmente se había propuesto llevar a cabo. En este contexto, se habla de una flexibilidad de gestión en cuanto a la posibilidad de posponer, expandir, contraer, cerrar e incluso alterar un proyecto durante la vida del mismo.

Los métodos tradicionales de descuento ignoran esta flexibilidad y es por ello que a menudo infravaloran los proyectos de inversión, propiciando decisiones miopes que pueden conducir a pérdidas de posición en el mercado.

La flexibilidad de gestión introduce una asimetría en la distribución de probabilidades del valor actualizado neto, que expande el verdadero valor de la oportunidad de inversión, incrementando las ganancias potenciales por un lado y limitando las pérdidas relativas a las expectativas iniciales derivadas de una gestión pasiva. El verdadero valor esperado de tal distribución asimétrica (que se llamará valor actualizado neto estratégico, VANE, en el sentido de que incorpora flexibilidad de gestión y adaptabilidad estratégica) excede su moda en una prima, la cual refleja el valor de dicha flexibilidad (opción de posponer, expandir, contraer...); se puede definir, por tanto, la siguiente relación: valor actualizado neto estratégico= valor actualizado neto tradicional (pasivo, estático) + prima.

La motivación que empuja a utilizar como instrumento de valoración la teoría de las opciones reales, en vez de los métodos tradicionales de descuento de flujos, proviene de su capacidad para conceptualizar y cuantificar esta prima o componente de flexibilidad y adaptabilidad. Esto no quiere decir que los métodos tradicionales deban ser abandonados; de hecho, éstos deben ser vistos como necesarios para la obtención del valor actualizado neto estratégico.

Dado que el valor de la flexibilidad y de las acciones estratégicas no puede ser capturado apropiadamente por los métodos de descuento de los flujos futuros, se puede plantear la valoración de la pesquería pensando en las oportunidades de inversión como opciones reales (opciones sobre bienes o activos reales)[1]. Como se sabe, el poseedor de una opción de compra americana ("call") sobre un activo financiero tiene el derecho, pero no la obligación, de adquirir el activo pagando un precio determinado (precio de ejercicio) en cualquier fecha hasta el vencimiento de la opción. Similarmente, quien se plantea invertir en un proyecto tiene el derecho, pero no la obligación, de adquirir el valor presente de los flujos futuros llevando a cabo una inversión costosa (precio de ejercicio) en cualquier fecha hasta que la oportunidad de inversión cese. Existe, por lo tanto, una analogía entre las opciones reales y las opciones de compra amerinanas.

Las primeras aplicaciones surgen en el área de las inversiones en recursos naturales; así, Brennan y Schwartz (1985) utilizan la teoría de las opciones reales para valorar una mina, incluyendo el valor de las opciones de cierre temporal y abandono definitivo de la misma.

Paddock, Siegel y Smith (1988) se apoyan en la teoría de las opciones reales para valorar un contrato de arrendamiento de una explotación petrolífera. El poseedor de un contrato de este tipo pasa por tres fases antes de obtener los hidrocarburos: exploración, desarrollo y extracción. Este es un ejemplo de opciones reales compuestas.

Por su parte, Bjerksun y Ekern (1990) muestran cómo una reserva petrolífera representa una oportunidad y no una obligación de explotación. La decisión de desarrollar el yacimiento puede tomarse ahora o más tarde en una fecha T fijada. Este tipo de flexibilidad de decisión se refiere a la posibilidad de posponer la inversión; son opciones de esperar y observar.

Por otro lado, Morck, Schwartz y Stangeland (1989) pretenden valorar recursos forestales cuando tanto el precio como las existencias son estocásticos.

Finalmente, Cortazar y Schwartz (1993) valoran una mina con dos etapas. La primera representa la extracción del mineral, mientras que la segunda incluye todas aquellas actividades relativas al procesamiento del mismo hasta convertirlo en producto final.

En principio, las opciones reales pueden ser valoradas de forma similar a las opciones financieras, incluso aunque no se comercialicen en un mercado, ya que el interés reside en determinar cuánto valdría la opción si se comercializase. Sin embargo, cabe destacar que la analogía entre las opciones reales y las opciones de compra financieras no es exacta.

Hasta ahora, la literatura de las opciones reales se ha utilizado principalmente para valorar recursos naturales no renovables, con la excepción ya indicada de Morck, Schwartz y Stangeland (1989). El interés de este trabajo es valorar una pesquería, esto es, valorar recursos naturales renovables. Sin embargo, a diferencia del trabajo anterior con recursos forestales, se contempla una dinámica más compleja del stock del recurso[2]. En particular,

[1] Los comentarios siguientes constituyen un resumen de Trigeorgis (1993. 1996, capítulos 1 y 4); Kemma (1993).

[2] La función de crecimiento que se adopta en el caso de los recursos forestales es una fracción

se incorporan funciones de crecimiento propias de la literatura de pesquerías; también se toman en cuenta consideraciones biológicas, como la existencia de unos umbrales mínimos para el stock del recurso y la posibilidad de su extinción, además de consideraciones económicas mediante la determinación de una estrategia óptima o precio crítico.

Los objetivos del trabajo se pueden resumir, pues, como sigue:
i) Modelar la incertidumbre inherente al precio del recurso pesquero como la principal fuente de riesgo en el modelo.
ii) Contemplar una gestión de la pesquería flexible, no pasiva, en el sentido de que a medida que se vaya conociendo nueva información y la incertidumbre asociada a los flujos que se obtendrán de la explotación pesquera se vaya disipando, se tenga la capacidad de adaptación suficiente para revisar la estrategia inicialmente planeada. En la valoración de la explotación pesquera se incorpora el valor de la opción de cierre temporal de la misma, ya que en cada periodo se observan tanto el precio del recurso como el nivel del stock de manera que, si éstos no superan unos umbrales mínimos, será mejor suspender temporalmente la actividad pesquera. Esta operación puede ser vista como una opción de compra americana a perpetuidad (simple, de propiedad).
La solución del modelo general de valoración viene dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales y sus respectivas condiciones de contorno. En general, no existe una solución analítica para este modelo. Es por ello que se analiza un caso particular (cuando las capturas se llevan a cabo bajo una base sostenible) en que sí es posible obtener una solución analítica, que es función del precio y del stock del recurso pesquero entre otras variables.
iii) Obtener soluciones analíticas para valorar tanto la oportunidad de explotar una pesquería cuando ello sea posible (caso de captura igual al crecimiento vegetativo del recurso pesquero).

El trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta un modelo pesquero que describe la dinámica que siguen el stock y el precio del recurso así como las funciones generales de la tasa de captura, los costes y los beneficios derivados de la actividad pesquera. En la sección 3 se propone un modelo de valoración de la oportunidad de explotar una pesquería que incorpora la opción de cierre temporal de la misma. La valoración se realiza en un contexto de equilibrio general con inversores aversos al riesgo. Para este modelo se analiza en la sección 4 un caso particular: aquél en que el rendimiento de la pesquería se lleva a cabo bajo una base sostenible. Este caso particular permite derivar fórmulas analíticas para calcular el valor de la pesquería. Finalmente se recogen las conclusiones más importantes así como posibles limitaciones y extensiones del trabajo.

---

constante del stock del recurso, lo cual tiene sentido cuando el stock del recurso se contempla de una manera muy simple.

2. Un modelo pesquero.

El objeto de esta sección es plantear un modelo del recurso pesquero, para lo cual se van a definir todas aquellas variables que permiten describir el estado de la biomasa pesquera en cualquier instante de tiempo. Si la estructura por edades del recurso, el sexo y otras características de la población fuesen importantes, entonces el modelo requeriría más de una variable de estado. Tales modelos, aunque llevan asociado un gran realismo biológico, son menos tratables matemáticamente. Por simplicidad, se supone que la evolución del recurso pesquero considerado puede ser descrita mediante una única variable de estado.

Se considera primeramente la dinámica natural de la población a lo largo del tiempo (evolución del stock, X, cuando no hay explotación pesquera), que puede ser descrita por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)), \tag{2.1}$$

donde $F(X(t))$ es la función de crecimiento instantáneo del stock del recurso[3]Esta ecuación sugiere que el cambio en el recurso depende del stock actual, $X(t)$[4]. La función de crecimiento $F(.)$ se supone que es positiva en el intervalo $(0, M)$, donde M es el mayor nivel posible de población, y cero para los valores $X = 0$ *y* $X = M$. Este supuesto no es el único posible, como se muestra en Clark (1976), sino que existen varias alternativas[5].
La tasa de capturas de la pesquería se puede expresar como sigue:

$$h = h(t),$$

Esta tasa de capturas se supone que viene determinada por:

[3]El supuesto de que $F(.)$ es función únicamente del stock se toma por simplificación (sea el modelo de Schaefer un ejemplo). Por el contrario, en el modelo de Beverton-Holt se supone que el crecimiento natural es función de las clases de edad del stock y no del total del mismo; en este modelo, la captura puede llevarse a cabo de forma selectiva.

[4]Dicho crecimiento se dice que es "density- dependent".

[5]Un modelo alternativo que usualmente se utiliza en la literatura es el llamado modelo "critical-depensation", según el cual existen dos valores $\underline{X}$ y $\overline{X}$,siendo $\underline{X} < \overline{X}$, para los cuales:

$$\begin{array}{rclll} F(X(t)) & \leq & 0 & si & 0 \leq X \leq \underline{X}; \\ F(X(t)) & > & 0 & si & \underline{X} < X < \overline{X}; \\ F(X(t)) & < & 0 & si & \overline{X} < X. \end{array}$$

$$h = h(E, X(t)), \tag{2.2}$$

donde E recoge lo que suele denominarse esfuerzo pesquero; representa una medida de la intensidad con la que se utilizan los diferentes factores de producción en la actividad[6].

Teniendo en cuenta que las capturas por parte de las empresas afectan directamente al nivel de biomasa, ahora la dinámica global de este recurso vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= F(X(t)) - h(t); \\ dX(t) &= [F(X(t)) - h(t)]dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Así, pues, el modelo describe el comportamiento de los recursos pesqueros en un contexto determinista[7].

Las empresas que explotan el recurso incurren en un coste. Se supone que el coste medio de explotación depende del stock del recurso[8]: $C = C(X)$.

Por otra parte, se supone que el precio al contado del recurso pesquero (output), S viene descrito por el siguiente proceso browniano geométrico[9]:

[6] Alternativamente, se podría escribir la función de producción de cada empresa i como:

$$h_i = h_i(E_i, X(t)), \qquad i = 1, 2, ...N$$

donde E_i recoge el esfuerzo pesquero de la empresa i.

Por lo tanto, puede obtenerse la captura total como sigue:

$$h = \sum_i h_i(E_i, X(t)), \quad i = 1, 2, ...N.$$

[7] Aunque se toma un proceso determinista para describir la evolución del stock, se introduce posteriormente en el modelo una restricción que limita las capturas del recurso cuando éste cae por debajo de un nivel biológico mínimo (piénsese por ejemplo en las catástrofes naturales).

En el caso particular de los recursos pesqueros recoger un proceso estocástico que tenga en cuenta las posibles catástrofes naturales no es tan importante como en otros recursos (los forestales, Morck, Schwartz y Stangelan (1989)) porque no se puede arbitrar ningún mecanismo de anticipación a dichas catástrofes.

[8] En otros trabajos se consideran los costes totales (CT) como función del esfuerzo pesquero:

$$CT = CT(E),$$

donde $CT(E) = \sum_i CT_i(E_i)$, $\;i = 1, 2, ...N$, calculado como suma de los costes totales de cada empresa i de la pesquería.

[9] Se trata del proceso estocástico utilizado generalmente en la literatura de valoración de recursos naturales para modelar la incertidumbre asociada al precio del recurso (Brennan y Schwartz (1985), Bjerksund y Ekern (1990), Pindyck (1988), Paddock, Siegel y Smith (1988), Cortazar, Schwartz y Salinas (1998), Cortazar y Schwartz (1993), Morck, Schwartz y Stangeland (1989)).

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ, \quad (2.4)$$

donde[10]:
μ : valor esperado en el cambio del precio del recurso pesquero. Este parámetro se suele denominar "deriva" o "tendencia", que puede ser estocástica.
σ : desviación estándar ("volatilidad") del cambio inesperado en el precio del recurso pesquero, que se supone conocida.
dZ : diferencial de un proceso de Gauss-Wiener o proceso browniano. Este proceso se caracteriza por la siguiente relación:

$$dZ = \varepsilon\sqrt{dt}, \quad (2.5)$$

donde ε es una variable aleatoria normal de media cero y varianza unitaria, $\varepsilon \sim N(0,1)$. El término dZ puede entenderse como el "ruido" que se añade a la senda seguida por S; la magnitud de este ruido es multiplicada por σ. Este proceso se toma como dado exógenamente.
A partir de estas funciones, se puede definir una función de beneficios totales de la pesquería como sigue:

$$B = [S - C(X)]h(t). \quad (2.6)$$

Por otra parte, este tipo de procesos estocásticos también se ha utilizado en la literatura de pesquerías para modelar la incertidumbre asociada al stock del recurso(Pindyck (1984), Olsen y Shortle (1996)).

[10]Se muestran a continuación los supuestos implícitos en los procesos brownianos: supóngase que el cambio de S sobre un período determinado $[0,T]$ es el resultado de acumular n pequeños cambios que ocurren regularmente: $S_T - S_0 = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1})$. Analícese el cambio sobre el k-ésimo intervalo. El cambio no anticipado (con valor esperado cero) en el precio viene dado por: $u_k = (S_k - S_{k-1}) - E_{k-1}(S_k - S_{k-1})$, donde E es el operador de esperanza. Supuestos 1 y 2 : los cambios no anticipados están idéntica e independientemente distribuidos. Supuesto 3: el cambio esperado por unidad de tiempo en el valor de S viene dado por: $\mu = E_{k-1}(S_k - S_{k-1})/\Delta t$, independiente de la longitud del intervalo. Luego se puede escribir que $(S_k - S_{k-1}) = \mu\Delta t + u_k$. Supuesto 4: la varianza condicional del cambio por unidad de tiempo en el valor de S es: $\sigma^2 = E_{k-1}[u_k^2]/\Delta t$. Con lo anterior, se define una variable aleatoria normal con media cero y varianza la unidad, $e_k = \frac{u_k}{(\sigma^2\Delta t)^{\frac{1}{2}}}$. Por último, se tiene $(S_k - S_{k-1}) = \mu\Delta t + \sigma e_k\sqrt{\Delta t}$, donde se suele definir $\Delta Z \equiv e_k\sqrt{\Delta t}$. En el límite, se obtiene el proceso en tiempo continuo con igual interpretación de las variables.

Por otra parte, se puede comprobar aplicando el lema de Itô que el suponer que S sigue un proceso browniano geométrico implica que la distribución de probabilidades supuesta para S es lognormal, $\ln S_T - \ln S \approx N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$.

Una introducción más amplia puede encontrarse en Pindyck (1991) y Fischer (1975).

3. Un modelo de valoración de la oportunidad de explotar una pesquería.

Obtener el valor de un activo, sobre todo cuando éste se caracteriza por una gran volatilidad dada la incertidumbre futura, es uno de los principales objetivos en economía financiera.

Una empresa en el desarrollo de su actividad debe hacer frente a múltiples incertidumbres. Algunas son de tipo económico y otras de tipo técnico, dependiendo de si se refieren o no a las condiciones del mercado. La teoría financiera tradicional considera que sólo la incertidumbre económica desempeña un papel relevante en la valoración de los "cash flows" esperados, ya que la incertidumbre técnica es diversificable.

Básicamente, como ya se ha citado en la introducción, se puede hablar de dos aproximaciones para valorar los flujos de un proyecto de inversión. Por una parte, los proyectos de inversión pueden valorarse mediante la obtención del Valor Neto Presente de los flujos futuros. Sin embargo, además de su simplicidad, los académicos han puesto de relieve sus principales limitaciones. De una parte, la dificultad de determinar el valor esperado de los flujos futuros (los cuales van a depender de las variables tanto económicas como técnicas), esto es, obtener una especificación completa de las propiedades estocásticas de dichos flujos, así como el desconocimiento del valor de los parámetros[11] para los cuales resulta dificil obtener buenos contrastes que proporcionen estimaciones adecuadas de los mismos.

Una aproximación alternativa viene dada de la mano de la teoría de las opciones reales, la cual se apoya en los modelos que Black, Merton y Scholes desarrollaron para opciones financieras[12]. Esta aproximación tiene algunas ventajas frente a los modelos que utilizan el Valor Neto Presente que ya se han comentado en la introducción del capítulo.

Dentro de esta literatura, existen dos vías para valorar la corriente de flujos futuros de un proyecto de inversión. Por una parte, se puede suponer la existencia de un mercado de futuros sobre el activo subyacente. En este caso, se trata de una valoración neutral al riesgo, ya que la ecuación diferencial

[11]Determinar, por ejemplo, cuál es la tasa de descuento ajustada por riesgo no es fácil en mercados con elevados niveles de incertidumbre. Este problema es especialmente agudo cuando se valoran inversiones en activos reales. Por ejemplo, tratándose de una inversión en una pesquería, los flujos futuros dependen del precio al contado futuro del recurso pesquero, así como de las cantidades físicas vendidas. Sin embargo, dicho precio es altamente volátil, siendo muy dificil predecirlo. Además, los niveles de producción física del recurso son dificiles de estimar, entre otras razones porque la empresa puede ajustarlos óptimamente en respuesta al nivel de precios vigente.

[12]Black y Scholes (1973), Merton (1973).

parcial que se obtiene no se ve afectada por variable alguna que dependa de las preferencias de los agentes; en particular, éste no sería el caso si dicha ecuación dependiese del rendimiento esperado del activo subyacente. Este método de valoración es utilizado en la literatura de valoración de recursos naturales por Brennan y Schwartz (1985), Cortazar y Schwartz (1993), entre otros.

Sin embargo, no es requisito necesario para la valoración de opciones reales la existencia de un mercado de futuros; dada la evidencia empírica[13], aquí no se supondrá la existencia de tal mercado para los recursos pesqueros[14], sino que se deriva un modelo análogo en un contexto de equilibrio general similar al desarrollado por Cortazar, Schwartz y Salinas (1998). Para ello, se supone la existencia de un activo (o cartera dinámica de activos) denominado activo "gemelo"[15] cuyo rendimiento está perfectamente correlado con el del precio del recurso pesquero; y se utiliza su tasa de rendimiento en equilibrio (aplicando el CAPM) como tasa de descuento apropiada. Así, pues, se supone que los mercados son completos, luego todo lo que se necesita para desarrollar la analogía de las opciones es la existencia de sustitutos suficientes (supuesto de "spanning"). Dado que la ausencia de posibilidades de arbitraje es un prerrequisito para el equilibrio, el valor en equilibrio de una opción sobre el proyecto de explotación de la pesquería deberá ser igual al valor libre de arbitraje de la opción sobre el activo del mismo riesgo.

Como se verá más adelante, el activo real va a ganar una tasa de rendimiento inferior a la de equilibrio (McDonald y Siegel, (1984)), diferencia que puede ser interpretada como una "tasa de conveniencia" (Lund y Oksendal, (1991)).

3.1. Notación.

Sea:
Q : valor de una pesquería o de la oportunidad de explotar la pesquería;
$K = kS$: tasa de conveniencia, recoge ciertos beneficios que los poseedores de los bienes de consumo disfrutan y que, sin embargo, no tienen lo poseedores de activos derivados sobre los mismos;
ρ: tipo de interés anual (continuamente compuesto) del activo seguro en t para una inversión que vence en T, que se supone constante;
t : fecha actual.

[13]Fama y French (1987) ofrecen un listado de las mercancias para las cuales existe mercado de futuros. Productos agrícolas: cacao, café, cereales, algodón, avena, semillas de soja, trigo, aceite de soja. Productos forestales: madera, tablero contrachapado. Productos animales: huevos, pollos, ganado vacuno, cerdos. Metales: cobre, oro, plata, platino.

[14]Esta alternativa está desarrollada en un apéndice que no se incluye en este trabajo y que puede ser facilitado en caso de interés.

[15]Se traduce así la palabra "twin".

3.2. Supuestos.

(i) La valoración de la inversión se lleva a cabo por inversores aversos al riesgo y bien diversificados, que necesitan ser únicamente compensados por el riesgo sistemático;
(ii) No existen oportunidades de arbitraje;
(iii) El intercambio de activos tiene lugar de forma continua en el tiempo;
(iv) No hay costes de transacción ni impuestos, y todos los activos son perfectamente divisibles;
(v) Los mercados son completos; existen sustitutos suficientes (supuesto de "spanning"); se supone que el precio del recurso pesquero, S, puede ser replicado por una cartera "gemela" de activos cuyo precio es Y y cuyo rendimiento está perfectamente correlado con el de S. La evolución de esta cartera es:

$$\frac{dY}{Y} = \mu_y dt + \sigma_y dZ, \tag{3.1}$$

donde μ_y es el rendimiento esperado en equilibrio de esta cartera de activos, que se supone es diferente de μ, $\mu_y > \mu$ (de no ser así, nunca se llevaría a cabo la explotación pesquera ya que como se analizará más adelante $\mu_y - \mu > 0$ puede entenderse como un coste de oportunidad de retrasar la explotación de la pesquería manteniendo viva la opción de hacerlo, de manera que si dicho coste fuese cero nunca se llevaría a cabo dicha explotación);
(vi) Se puede abrir (explotar) y cerrar (no explotar) la pesquería (en función de unos umbrales para el precio y el nivel de stock del recurso), sin coste alguno[16];
(vii) La opción de explotar la pesquería tiene una vida infinita.
($viii$) Nótese que cuando el valor principal del bien, en nuestro caso el recurso pesquero, es su consumo y no su valor como inversión, los poseedores de los bienes de consumo disfrutan de ciertos beneficios que no tienen los poseedores de activos derivados sobre ellos. Piénsese, por ejemplo, en la posibilidad de usar el bien en momentos de restricciones serias de oferta (escasez del recurso, paros biológicos). Estos beneficios se suelen denominar "tasa de conveniencia", y aquí se supone que puede escribirse como función del precio al contado [17]: $K = kS$ (Brennan y Schwartz, (1985); Cortazar y Schwartz, (1993); Cortazar,

[16] Aunque se supone ausencia de costes por simplicidad, en la realidad, hay una variedad de costes asociados al cierre temporal y posterior explotación en el marco de las pesquerías. Algunos autores han considerado diferentes costes en sus modelos. Brennan y Schwartz (1985) consideran los costes de abrir y cerrar una mina, los cuales pueden explicar "el histerismo" que con frecuencia ha sido observado en las industrias extractoras de recursos. Durante períodos de precios bajos, los gerentes continuan explotando minas que habían sido abiertas cuando lo precios eran elevados. Asimismo, gerentes que reabren minas que habían sido cerradas cuando los precios eran bajos.

[17] La tasa de conveniencia es de esperar que varíe inversamente con la cantidad de stock. Cuando el stock de un bien determinado es alto, no sólo la tasa de conveniencia tiende a ser baja, sino también lo será el precio al contado, y viceversa cuando el stock sea bajo.

Por simplicidad, se toma una tasa de conveniencia proporcional al precio al contado.

Schwartz y Salinas, (1998)). En definitiva, la tasa de conveniencia refleja las expectativas que existen en el mercado sobre la disponibilidad futura del recurso pesquero. Cuanto mayores sean las expectativas de escasez, mayor será dicha tasa.

3.3. La ecuación diferencial parcial que debe satisfacer el valor de la pesquería, Q

El valor de la de la pesquería, Q,va a depender del precio al contado del recurso S, el stock del recurso X, y el tiempo, t:

$$Q = Q(S, X, t). \tag{3.2}$$

Se considera la propia pesquería como un activo derivado, en la medida en que su "pago" va a depender del "pago" del activo subyacente (recurso pesquero). En particular, interesa conocer cómo varía el precio del activo derivado cuando el precio del activo subyacente sigue el proceso definido anteriormente. Aplicando el lema de Itô[18] a la ecuación anterior, se obtiene que dicho cambio instantáneo viene dado por:

$$dQ = Q_S dS + Q_X dX + Q_t dt + \frac{1}{2} Q_{SS} (dS)^2. \tag{3.3}$$

Utilizando (2.3) y (2.4), esta ecuación puede escribirse como:

$$dQ = \{Q_S S\mu + Q_t + \frac{1}{2} Q_{SS} \sigma^2 S^2 + Q_X \left[F(X) - h\right]\} dt + Q_S S \sigma dZ. \tag{3.4}$$

Así, pues, Q se ve afectado por la misma fuente de incertidumbre que S, a saber, la diferencial del proceso de Gauss-Wiener, dZ.

A continuación se deriva la ecuación diferencial que debe satisfacer el valor de la pesquería. Para ello, se toma el rendimiento obtenido por una cartera compuesta por una posición larga en el derivado y una posición corta con $\left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right)$ contratos del gemelo. Como se observará, esta cartera carece de riesgo, debido a que la fuente de incertidumbre ha sido eliminada; por lo tanto, el rendimiento de la misma deberá ser igual a $\rho \left(Q - \left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right) Y\right) dt$.

[18] El precio de cualquier activo derivado es una función del precio del activo subyacente y del tiempo. El lema de Itô proporciona el cálculo matemático que permite conocer cómo varía el precio del activo derivado cuando el precio del subyacente sigue un proceso de Itô.

En general, sea una variable cualquiera x que sigue un proceso de Itô: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, donde dz es un proceso de Wiener y a y b son dos funciones de x y t. El lema de Itô muestra que una función G de x y t sigue el proceso:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz.$$

donde dz es el mismo proceso de Wiener de antes.

Por otra parte, la titularidad de la pesquería otorga el derecho a explotar la misma; por lo tanto, de dicha titularidad se obtienen unos beneficios, $(S-C(X))hdt$. En principio, cabe pensar que cualesquiera beneficios derivados de la actividad pesquera se capitalizarían en el valor de la misma. Se considera en el modelo que el Estado puede imponer o recaudar un gravamen sobre la propiedad de la pesquería; por este motivo, los beneficios anteriores se minoran en λQdt, donde el parámetro λ se interpreta como la tasa impositiva proporcional sobre el valor de la pesquería[19].
Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene el cambio en el valor de la cartera:

$$dQ+(S-C(X))hdt-\lambda Qdt-\left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right)dY=\rho\left(Q-\left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right)Y\right)dt. \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.1) y (3.4) en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}&\{(S-C(X))h-\lambda Q+Q_S S\mu+Q_t+\frac{1}{2}Q_{SS}\sigma^2S^2+Q_X\left[F(X)-h\right]\}dt+\\&Q_S S\sigma dZ-\left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right)(\mu_y Ydt+\sigma_y YdZ)=\rho\left(Q-\left(\frac{S\sigma Q_S}{Y\sigma_y}\right)Y\right)dt.\end{aligned}$$

Agrupando y ordenando los términos:

$$(S-C(X))h-(\lambda+\rho)Q+Q_t+\frac{1}{2}Q_{SS}\sigma^2S^2+Q_X\left[F(X)-h\right]+SQ_S\left(\mu+\frac{\sigma}{\sigma_y}(\rho-\mu_y)\right)=0. \quad (3.6)$$

Ahora se hace uso del modelo de equilibrio general CAPM[20].Este modelo establece que, en equilibrio, la prima por riesgo de un activo va a ser proporcional a la covarianza entre su rendimiento y el del resto de activos del mercado. Sea α_i la tasa esperada de rendimiento del activo i-ésimo, σ_i su desviación típica y ρ_{im} la covarianza citada; la prima por riesgo viene dada, entonces, por:

$$\alpha_i-\rho=\theta\rho_{im}\sigma_i,$$

[19]Podría pensarse que el recurso pesquero es propiedad de los pescadores, en cuyo caso $\lambda=0$, o bien de todos los ciudadanos del país, en cuyo caso podría ser $\lambda=1$. Esta última interpretación se ha adoptado, por ejemplo, en Nueva Zelanda, aunque de momento el Gobierno no extrae la totalidad de las rentas. Cabe también otra interpretación distinta; en particular, λ podría representar el parámetro de un proceso de Poisson que refleje la posibilidad de expropiación de los propietarios de la pesquería. Entonces, la pérdida esperada provocada por la expropiación sería λQ, y la expresión $(S-C(X))h-\lambda Q$ representaría los beneficios esperados netos del coste de expropiación.

[20]Constantinides (1978), McDonald y Siegel (1985), Cortazar, Schwartz y Salinas (1998), Pindyck (1988).

donde $\theta = \frac{\alpha_m - \rho}{\sigma_m}$ es el precio de mercado del riesgo. Así pues, $\theta\rho_{im}\sigma_i$, es el ajuste en la tasa esperada de rendimiento debido al riesgo sistemático. α_m, es la tasa de rendimiento esperada de la cartera de mercado, σ_m^2, es la varianza de la tasa de rendimiento de la cartera de mercado.

Entonces, la tasa esperada de rendimiento ajustada por riesgo de la cartera gemela será:

$$r_y = \mu_y = \rho + \theta\rho_{ym}\sigma_y. \tag{3.7}$$

La tasa ajustada por riesgo para el activo subyacente es:

$$r_s = \mu + k = \rho + \theta\rho_{sm}\sigma, \tag{3.8}$$

donde ρ_{ym}, ρ_{sm} son las correlaciones instantáneas del rendimiento de Y y S con el rendimiento de la cartera de mercado, respectivamente.
Nótese que el rendimiento esperado de la cartera gemela y el del activo subyacente deben ser iguales; por lo tanto $\mu_y = \mu + k$, donde $k = \mu_y - \mu$ es un defecto de rendimiento o tasa de conveniencia[21].

Interpretación del parámetro k. En los siguientes párrafos se analiza la necesidad de incluir una tasa de conveniencia en el modelo.

Si $k > 0$, entonces el cambio esperado del rendimiento del precio del recurso pesquero será menor que el del activo gemelo. El parámetro k puede entenderse como un coste de oportunidad de retrasar la explotación de la pesquería manteniendo la opción de explotación; de esta manera, si $k = 0$, no habría tal coste de oportunidad y nunca se explotaría la citada pesquería, independientemente de que la corriente de flujos futuros implicase un valor actualizado neto positivo. Por otra parte, si k fuese muy grande, el valor de la opción sería muy pequeño, porque el coste de oportunidad de esperar sería muy grande.

La distinción entre las mercancías con $k \leq 0$ y aquéllas con $k > 0$ es muy importante. McDonald y Siegel (1985) comprueban para un deteminado activo si la tasa de conveniencia fuese $k \leq 0$ su valor presente sería infinito y para el caso contrario, $k > 0$, es siempre finito.

Algunos autores han tratado de encontrar un concepto similar a k en la teoría de las opciones financieras (McDonald y Siegel (1984) y (1985), Lund y ϕKsendal (1991), Paddock, Siegel y Smith (1988), Bjerksund y Ekern (1990)). El problema de la existencia de una tasa de rendimiento inferior a la de equilibrio ha sido reconocido en la literatura de las opciones financieras sobre acciones que pagan dividendos. Dado que el poseedor de una opción de compra

[21] McDonald y Siegel (1985) utilizan el término "rate of return shortfall", mientras que Brennan y Schwartz (1985) hablan de "convenience yield".

sobre una acción no tiene derecho a percibir los dividendos que paga ésta, el precio del activo que los pague tendrá una tasa de rendimiento por debajo de la de equilibrio; luego el supuesto de una tasa de rendimiento deficitaria es completamente análogo al del pago de unos dividendos continuos.

El hecho de que los precios de las mercancías ganen una tasa de rendimiento esperado por debajo de la de equilibrio puede parecer contradictorio si se piensa que la mayoría de ellos son almacenados en la realidad. Para explicar esto, se supone que los inversores obtienen alguna ventaja del propio almacenaje de los recursos. Esta ventaja es lo que se conoce con el nombre de tasa de conveniencia del bien, que como ya se ha visto se define como un defecto de rendimiento.

Por último, Cox y Ross (1976) y Constantinides (1978) proporcionan una regla para determinar el valor de mercado de un determinado proyecto en condiciones de neutralidad al riesgo.[22] Esta regla se aplica en dos pasos. Primer paso: se reemplaza el término de la "deriva" del precio al contado por la tasa de rendimiento real que gana el precio, esto es, se sustituye su tasa de crecimiento con la tasa equivalente cierta. En este trabajo se trataría de sustituir μ por:

$$\mu - (\mu_y - \rho) = \rho - k,$$

lo que proporciona un nuevo proceso estocástico para el precio con la misma volatilidad que antes. Segundo paso: se evalúa el proyecto como si el precio de riesgo del mercado fuese cero, utilizando una tasa de descuento libre de riesgo.

Se comprueba fácilmente, haciendo uso de (3.7) y (3.8) que:

$$\begin{aligned} \mu + \frac{\sigma}{\sigma_y}(\rho - \mu_y) &= (\rho - k + \theta\rho_{sm}\sigma) + \frac{\sigma}{\sigma_y}(\rho - (\rho + \theta\rho_{ym}\sigma_y)) \\ &= (\rho - k) + \theta\sigma(\rho_{sm} - \rho_{ym}). \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que $\rho_{sm} = \rho_{ym}$, entonces se tiene que $\mu + \frac{\sigma}{\sigma_y}(\rho - \mu_y) = \rho - k$. Introduciendo este resultado en (3.6) se obtiene la ecuación diferencial parcial siguiente:

$$\frac{1}{2}Q_{SS}\sigma^2 S^2 + Q_S S(\rho - k) - (\lambda + \rho)Q + Q_t + Q_X\left[F(X) - h\right] + (S - C(X))h = 0. \tag{3.9}$$

[22] Cox y Ross (1976) sugieren un método de valoración en el que no se aplica a cada flujo una tasa de descuento ajustada por riesgo. Para determinadas corrientes de flujos que son función de precios inciertos, el cálculo de una tasa de descuento ajustada por riesgo apropiada es muy dificil. El método sugiere, por contra, que el ajuste por riesgo debiera hacerse en el término de la deriva del precio del activo a considerar (la tasa esperada de rendimiento) y no en la tasa de descuento.

Así, pues, el valor de la explotación pesquera satisface (3.9) para cualquier política $\phi \equiv \{h, S, X\}$,donde h es la cuota de captura, S es el precio del recurso y X es el nivel de stock del recurso.

3.4. El modelo general de valoración de una pesquería y la determinación de la política de capturas óptima.

A partir de (3.9), el valor de la pesquería deberá satisfacer el siguiente problema:

$$\max_h \left[\frac{1}{2}Q_{SS}\sigma^2 S^2 + Q_S S(\rho - \delta) - (\lambda + \rho)Q + Q_t + Q_X\left[F(X) - h\right] + (S - C(X))h = 0\right].$$

La tasa de producción (capturas) h se localiza en un intervalo $\left[0, \overline{h}\right]$, donde $\overline{h}$ es la tasa máxima de capturas[23].

Derivando respecto de la variable de control, se obtiene la condición de primer orden que debe satisfacer dicha variable:

$$S - C(X) - Q_X = 0, \tag{3.10}$$

donde Q_X puede interpretarse como el precio sombra del recurso (Olsen y Shortle (1996); Pindyck (1984)).

Dado que el coste de producción es función de la variable de estado y no de la tasa de produción, la solución que se obtiene es de tipo "bang-bang". Esto es, se produce a la máxima tasa posible o no se produce nada.

Reescribiendo las variables en función de si la pesquería es o no explotada. El valor de la pesquería cuando se está explotando vendrá dado por $V(S, X, t)$, y cuando no se desarrolla la actividad (cierre temporal) vendrá dado por $W(S, X, t)$:

$$V(S, X, t) \equiv \max_\phi Q(S, X, t; 1, \phi)$$

$$W(S, X, t) \equiv \max_\phi Q(S, X, t; 0, \phi)$$

donde:

$\phi^* = \{\overline{h}, \widehat{S}, X^*\}$ es la política óptima;

$\overline{h}$: tasa máxima de capturas;

$\widehat{S}$: precio crítico, a partir de la cual la pesquería comienza a explotarse; para un precio por debajo del crítico la pesquería se cierra temporalmente. Este precio crítico se elige de modo que se maximice el valor de la pesquería.

[23]Esta tasa máxima de capturas podría ser el TAC (total admisible de capturas), o una cantidad máxima impuesta por restricciones técnicas, por ejemplo.

X^* : nivel óptimo del stock; es un umbral mínimo por debajo del cual se cierra temporalmente la pesquería hasta que la biomasa del recurso se recupera y alcanza de nuevo dicho umbral. Este umbral se elige de modo que se maximiza el valor de la pesquería, dado el precio crítico.
Nótese que cuando la pesquería no se explota, tanto la tasa de capturas como el precio sombra del recurso son cero.
El valor de la pesquería deberá satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales bajo la política óptima de capturas:

$$\max_{h\epsilon(0,\overline{h})}\left[\frac{1}{2}V_{SS}\sigma^2S^2+V_SS(\rho-k)-V(\lambda+\rho)+V_t+V_X\left[F(X)-h\right]+(S-C(X))h=0\right];$$

$$\left[\frac{1}{2}W_{SS}\sigma^2S^2+W_SS(\rho-k)-W(\lambda+\rho)+W_t=0\right].$$

Supóngase ahora que existe una tasa de inflación constante, π; se definen las siguientes variables deflactadas:

$$\begin{aligned} s &= Se^{-\pi t} && (3.11)\\ r &= \rho-\pi, \text{ el tipo de interés real} \\ c(X) &= C(X)e^{-\pi t} \\ v &= Ve^{-\pi t} \\ w &= We^{-\pi t} && (3.12) \end{aligned}$$

Se plantea nuevamente el problema a resolver en términos de las nuevas variables deflactadas[24]:

$$\max_{h\epsilon(0,\overline{h})}\left[\frac{1}{2}v_{ss}\sigma^2s^2+v_ss(r-k)-v(\lambda+r)+v_X(F(X)-h)+(s-c(X))h=0\right] \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}w_{ss}\sigma^2s^2+w_ss(r-k)-w(\lambda+r)+w_XF(X)=0. \tag{3.14}$$

Las condiciones de contorno que deben satisfacerse son las siguientes:
i) Si el precio al contado del recurso es cero, el valor de la pesquería también lo será:

[24] En este trabajo se supone que la opción tiene una vida infinita, siguiendo la línea de otros autores, como Brennan y Schwartz (1985). Sin embargo, algunas oportunidades de explotación en la realidad no son de vida infinita, sino que expiran en alguna fecha futura. Lo que se omite en el trabajo es, por lo tanto, el caso en el que la opción de explotación expire en una fecha conocida en el futuro. Aunque no es posible solucionar analíticamente el valor de la opción en el caso de vida finita, sí se podrían obtener soluciones numéricas.

$$w(0, X) = 0. \tag{3.15}$$

ii) El valor de la pesquería cuando se inicia la actividad pesquera es igual al valor de la misma cuando cesa dicha actividad. Así mismo, el valor marginal de la pesquería cuando se inicia la actividad es igual que cuando ésta cesa. Estas igualdades dicen que la función valor es continua y suave en el precio crítico $\widehat{s}$; de no ser así, podría ser mejor ejercer la opción en un punto diferente[25]:

$$\begin{aligned} w(\widehat{s}, X) &= v(\widehat{s}, X) \\ w_s(\widehat{s}, X) &= v_s(\widehat{s}, X). \end{aligned} \tag{3.16}$$

iii) El valor de la pesquería como porcentaje del precio al contado no debe explotar a medida que éste tienda a infinito:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{v(s, X)}{s} < \infty. \tag{3.17}$$

iv) Los recursos pesqueros se caracterizan por la existencia de un nivel máximo de biomasa[26] M, en el cual el valor de la pesquería no aumentará ante incrementos en el nivel de stock del recurso.

$$\frac{\partial v(s, X)}{\partial X} \mid_{X=M} = 0 \tag{3.18}$$

[25] Ingersoll (1987) propone un método para valorar opciones americanas así como la estrategía de ejercicio óptima, que brevemente se recoge en esta nota. Sea $f(s, t, \overline{s})$ la solución funcional de una ecuación diferencial determinada que debe satisfacer el valor de la opción americana; entonces, se busca aquella estrategia óptima ($\widehat{s}$) entre el total de estrategias arbitrarias ($\overline{s}$) tal que:

$$\begin{aligned} H(s, t) &= Max[f(s, t, \overline{s})] \\ \widehat{s} &= \arg Max[f(s, t, \overline{s})] \end{aligned}$$

donde H es la variable que debe satisfacer la ecuación diferencial que se obtenga.

Para llevar a cabo la valoración, es necesario que se satisfaga la llamada condición de "high contact" o "smooth pasting":

$$\frac{\partial H(\widehat{s}, t)}{\partial s} = \frac{\partial \widehat{H}(\widehat{s}, t)}{\partial \widehat{s}}$$

donde $\widehat{H}(\widehat{s}, t)$ representa la variable $H(\widehat{s}, t)$ evaluada en $\widehat{s}$.

Véase, además, Cortazar y Schwartz (1993), McDonald y Siegel (1985,1986).

[26] Es el nivel al que tenderá la población en ausencia de extracciones pesqueras, caracterizado por una tasa nula de crecimiento de la población. El comienzo de la actividad pesquera reducirá el tamaño de la población; es decir, la cantidad de biomasa X irá disminuyendo con respecto a este nivel Z de equilibrio.

$$\frac{\partial w(s,X)}{\partial X}\mid_{X=M}= 0. \tag{3.19}$$

v) La política de capturas que se lleva a cabo en la pesquería implica que en la medida la que el nivel de stock del recurso X sea inferior al stock óptimo, X^*, la pesquería dejará de ser explotada temporalmente hasta que el stock alcance dicho nivel (Clark (1976)):

$$h(X,E) = 0, \qquad \text{si } X < X^*. \tag{3.20}$$

Dado el precio crítico y la naturaleza "bang-bang" del problema,

$$\begin{aligned} h &= \overline{h} \text{ si } X > X^* \\ h &= 0 \text{ si } X < X^*. \end{aligned}$$

Las condiciones que debe satisfacer dicho nivel óptimo son las siguientes:

$$\begin{aligned} s - c(X) &= v_X \\ h &= F(X). \end{aligned}$$

$viii$) Se considera que existe un nivel de stock mínimo biológico, $X_{\min}$ de manera que, si el nivel de stock cae por debajo de este nivel, la pesquería dejará de ser explotada (Morck, Schwartz y Stangeland (1989)):

$$h(X,E) = 0, \qquad \text{si } X < X_{\min}. \tag{3.21}$$

ix) Si no hay recursos pesqueros, $X = 0$, el valor de la oportunidad de explotación será cero:

$$v(s,0) = w(s,0) = 0. \tag{3.22}$$

Las ecuaciones (3.13) a (3.22) constituyen un modelo general de valoración de una pesquería. Estas ecuaciones son suficientes para determinar el valor de la misma así como la política óptima. En general, no existe solución analítica para este modelo. Es por ello que, a continuación, se analiza un caso particular en que sí es posible obtener una solución analítica y, más adelante, se hace uso de un procedimiento numérico al objeto de resolverlo.

4. Un caso particular: la explotación sostenible de una pesquería.

La necesidad de obtener mejoras en el bienestar humano, y al propio tiempo aplicar políticas compatibles con la capacidad del entorno natural para sostenerlas a largo plazo, ha llevado estos últimos años al ideal del desarrollo sostenible. La noción de desarrollo comprende la de explotación o recolección de los recursos naturales; sin embargo, esta explotación debe estar limitada por la capacidad del recurso explotado y su medio ambiente natural de resistir a los efectos de la explotación, para que ese desarrollo sea sostenible. Es evidente que la sostenibilidad se refiere a los recursos y también a la pesquería que los explota.

Algunos autores (Perman, Ma y McGilvray (1996); Caddy y Griffiths (1996)) sostienen que la sostenibilidad puede apreciarse en función de cinco variables: diversidad, estabilidad, resistencia, producción y rendimiento.

Los índices de diversidad son medidas de riqueza (en número de especies de un ecosistema) y, en cierto grado, de regularidad (varianzas de la abundancia local de las especies).

La estabilidad encierra la capacidad de todas las variables características de una población de volver a unos valores iniciales de equilibrio después de una perturbación que altera ese equilibrio. (El sistema es localmente estable si la vuelta de esos valores responde a perturbaciones locales, y globalmente estable si lo es cuando todas las perturbaciones locales desaparecen al agregarse en toda el área de la especie).

La resistencia es una propiedad del ecosistema más que de las poblaciones. Es la propensión del sistema a mantener su estructura tras una perturbación. Un ecosistema resistente no implica necesariamente que todas las poblaciones del sistema sean estables; sin embargo, una población sólo podrá ser estable si el sistema es resistente.

La producción, en sentido estricto, es la biomasa generada por la población o ecosistema por unidad de tiempo, independientemente de que se explote o sea consumida dentro de la cadena alimentaria por otras especies. Se hace referencia a menudo a "producción pesquera", que se entenderá normalmente en el sentido de la biomasa capturada.

El rendimiento es la cantidad de biomasa que puede recolectarse sin comprometer la capacidad de la población para regenerarse. La expresión rendimiento sostenible se emplea a veces en ese mismo sentido, como el rendimiento que puede recogerse sin comprometer la continuidad de la producción pesquera.

En esta sección, se considera precisamente el caso en el cual el rendimiento

se realiza sobre una base sostenible, esto es, $\frac{dX}{dt} = 0$, de modo que las capturas coinciden con el crecimiento vegetativo[27].
Para este caso particular, el valor de la pesquería deberá satisfacer la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\frac{1}{2} q_{ss} \sigma^2 s^2 + q_s s(r - k) + (s - c(X))h - (\lambda + r)q = 0, \tag{4.1}$$

que no es sino (3.9) deflactada, donde se ha sustituido $F(X) - h = 0$.

Igual que antes, se distinguen dos posibles estados, el valor de la pesquería cerrada y el valor de la misma cuando está abierta. La estrategia en cada periodo consistirá en comparar el precio del recurso con el precio crítico (estrategia óptima): si el precio del recurso supera el crítico, será óptimo explotar la pesquería; si, por el contrario, no es lo suficientemente elevado, lo mejor será no explotarla (al menos, temporalmente). Por otra parte, si el stock no alcanza el nivel de stock mínimo, la pesquería permanecerá cerrada.
Se muestran a continuación las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que deberá satisfacer el valor de la oportunidad de explotar de la pesquería.
Pesquería cerrada: ningún barco la explota comercialmente, bien debido a que no se dan las circunstancias económicas o bien las biológicas. En cualquier caso, la tasa de capturas será cero: $h = 0$. La ecuación diferencial ordinaria es la siguiente:

$$\frac{1}{2} w_{ss} \sigma^2 s^2 + w_s s(r - k) - w(\lambda + r) = 0. \tag{4.2}$$

Pesquería abierta: En este caso, la política de capturas implica que $h \neq 0$. La ecuación diferencial ordinaria es:

$$\frac{1}{2} v_{ss} \sigma^2 s^2 + v_s s(r - k) + (s - c(X))h - v(\lambda + r) = 0. \tag{4.3}$$

Tomése la Figura 2. Un nivel de capturas h_1 puede conseguirse de una

manera sostenible con dos niveles distintos de biomasa pesquera: X_1, nivel bajo de población, y X_2, nivel alto de población. Ahora bien, el equilibrio biológico correspondiente al nivel de población alto es estable, mientras que el correspondiente al nivel de población bajo no lo es[28]; esta circunstancia podría conducir en situaciones extremas a $X = 0$.

[27]Cuando la biomasa recolectada (capturas) supere el crecimiento vegetativo de la población, la pesquería tenderá a su agotamiento o colapso ($\frac{dX}{dt} < 0$).

[28]En efecto, piénsese que si por razones accidentales en un determinado año el nivel de biomasa se reduce por debajo de X_2, la tasa natural de crecimiento aumentará y, manteniendo la captura constante, la biomasa volverá a alcanzar dicho nivel. Sin embargo, para el nivel X_1, una reducción del stock debida a razones accidentales, manteniendo constante la tasa de capturas, producirá un descenso en el nivel de biomasa; por tanto, si no se reduce el nivel de capturas h_1, acabará produciéndose el colapso de la pesquería.

Una vez planteadas las ecuaciones diferenciales, nótese que son ordinarias, lo que permite obtener una solución analítica cerrada para las mismas. Al objeto de obtener dichas soluciones, recuérdense las condiciones de contorno que deben satisfacerse:

$$w(0, X) = 0;$$

$$\begin{aligned} w(\widehat{s}, X) &= v(\widehat{s}, X) \\ w_s(\widehat{s}, X) &= v_s(\widehat{s}, X); \end{aligned}$$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{v(s, X)}{s} < \infty;$$

$$\frac{\partial v(s, X)}{\partial X} \mid_{X=Z} = 0;$$

$$\frac{\partial w(s, X)}{\partial X} \mid_{X=Z} = 0;$$

$$h(X, E) = 0, \qquad si \;\; X < X^*;$$

$$h(X, E) = 0, \qquad si \;\; X < X_{\min};$$

$$v(s, 0) = w(s, 0) = 0.$$

Por otra parte, la estrategia óptima (precio crítico) no se conoce, de manera que dicho precio crítico se determinará simultáneamente con la resolución de la ecuación diferencial ordinaria.
Tómese la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{1}{2} q_{ss} \sigma^2 s^2 + q_s s (r - k) + (s - c(X)) h - (\lambda + r) q = 0. \tag{4.4}$$

Se hace uso a continuación de la analogía entre las opciones reales y las opciones de compra estándar. Considérese la explotación de la pesquería análoga a una opción de compra americana a perpetuidad, para la cual en cada periodo se comparará el precio al contado del recurso con el precio crítico: si se ejerce la opción de explotación, se incurrirá en los costes variables $c(X)$ que son el precio de ejercicio[29]:

[29]La función de pagos $max(\widehat{s} - c(X), 0)$ no es diferenciable en todo su dominio; sin embargo, sí lo es en el tramo relevante $\widehat{s} - c(X)$.

$$q(\widehat{s}) = \widehat{s} - c(X), \tag{4.5}$$

$$q(0) = 0. \tag{4.6}$$

Por un lado, se tiene que la solución general (Elsgoltz (1977); Simons (1983)) a la ecuación diferencial anterior es:

$$q(.) = As^{d_1} + Bs^{d_2},$$

donde A y B son coeficientes a determinar. d_1y d_2 se definen como sigue:

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} - \frac{r-k}{\sigma^2} \\ \alpha_2 &= \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

El satisfacer la condición (4.6) implica hacer cero el coeficiente B, ya que $d_2 < 0$; por lo tanto, la solución general puede escribirse ahora como sigue:

$$q(.) = As^{d_1}. \tag{4.9}$$

Igualando las expresiones (4.5) y (4.9) para $s = \widehat{s}$ se tiene:

$$A = (\widehat{s} - c(X))\widehat{s}^{-d_1}. \tag{4.10}$$

Sustituyéndose en (4.9) la expresión encontrada para A se tiene:

$$q(s, X) = (\widehat{s} - c(X)) \left(\frac{s}{\widehat{s}}\right)^{d_1}. \tag{4.11}$$

Derivando $q(.)$ en (4.11) con respecto a $\widehat{s}$ e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{\widehat{s}}\right)^{d_1} - (\widehat{s} - c(X))d_1 \left(\frac{s}{\widehat{s}}\right)^{d_1 - 1} \left(\frac{s}{\widehat{s}^2}\right) &= 0 \\ 1 - \frac{(\widehat{s} - c(X))d_1}{\widehat{s}} &= 0. \end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene la expresión para el precio crítico[30]:

[30]Se comprueba a continuación que se satisface la condición ”high-contact”:

$$\widehat{s} = c(X)(\frac{d_1}{d_1 - 1}). \tag{4.12}$$

Una vez obtenida y analizada la expresión del precio crítico que debe satisfacerse junto a las ecuaciones diferenciales (4.2) y (4.3) para el valor de la pesquería, se obtiene la solución analítica de las mismas:

$$w(s) = c_1 s^{d_1} + c_2 s^{d_2} \tag{4.13}$$

$$v(s) = c_3 s^{d_1} + c_4 s^{d_2} + \frac{hs}{\lambda + k} - \frac{c(X)h}{\lambda + r} \tag{4.14}$$

donde d_1y d_2 son conocidos.
Dadas las condiciones de contorno, el valor w debe ser cero cuando el precio al contado del subyacente sea cero, y dado que $d_2 < 0$, el parámetro $c_2 = 0$. Así mismo, para el valor v tenemos que $\frac{v}{s}$ permanece finito en la medida en que $s \to \infty$; en consecuencia, dado que $d_1 > 0$, el parámetro $c_3 = 0$.
Introduciendo esto en las ecuaciones anteriores, éstas pueden reescribirse como sigue:

$$w(s) = c_1 s^{d_1} \tag{4.15}$$

$$v(s) = c_4 s^{d_2} + \frac{hs}{\lambda + k} - \frac{c(X)h}{\lambda + r} \tag{4.16}$$

$$H = q = (\widehat{s} - c(X)) \left(\frac{s}{\widehat{s}}\right)^{d_1}.$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = (\widehat{s} - c(X)) d_1 \left(\frac{s}{\widehat{s}}\right)^{d_1 - 1} \frac{1}{\widehat{s}}.$$

Evaluando la derivada en $\widehat{s}$:

$$\frac{\partial H}{\partial s} \mid_{s=\widehat{s}} = \frac{(\widehat{s} - c(X)) d_1}{\widehat{s}}.$$

Sustituyendo en la derivada la expresión obtenida para el precio crítico (4.12):

$$\frac{\partial H}{\partial s} \mid_{s=\widehat{s}} = 1.$$

Se comprueba por último que la condición se satisface:

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{s}} = \frac{\partial (\widehat{s} - c(X))}{\partial \widehat{s}} = 1 = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Al objeto de obtener una expresión para los coeficientes restantes, c_1 y c_4, se hace uso de las condiciones de contorno que todavía no han sido utilizadas. Deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$c_1 \widehat{s}^{d_1} = c_4 \widehat{s}^{d_2} + \frac{h\widehat{s}}{\lambda + k} - \frac{c(X)h}{\lambda + r} \tag{4.17}$$

$$d_1 c_1 \widehat{s}^{d_1 - 1} = d_2 c_4 \widehat{s}^{d_2 - 1} + \frac{h}{\lambda + k} \tag{4.18}$$

De aquí se derivan los siguientes coeficientes:

$$c_1 = \frac{A\widehat{s}(d_2 - 1) + Bd_2}{\widehat{s}^{d_1}(d_2 - d_1)} \tag{4.19}$$

$$c_4 = \frac{A\widehat{s}(d_1 - 1) + Bd_1}{\widehat{s}^{d_2}(d_2 - d_1)} \tag{4.20}$$

donde:

$$A = \frac{h}{\lambda + k} \tag{4.21}$$

$$B = -\frac{hc(X)}{\lambda + r}. \tag{4.22}$$

Análisis de los parámetros del precio crítico. A continuación se estudia el signo de las derivadas parciales del precio crítico con respecto al cánon (λ), la tasa de conveniencia (k), el tipo de interés real libre de riesgo (r), y la varianza (σ^2), para lo cual se toma la expresión (4.12).

$$\frac{\partial \widehat{s}}{\partial \lambda} = c(X) \left[\frac{\frac{\partial d_1}{\partial \lambda}(d_1 - 1) - d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \lambda}}{(d_1 - 1)^2} \right] = c(X) \left(\frac{-\frac{\partial d_1}{\partial \lambda}}{(d_1 - 1)^2} \right) < 0 \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\alpha_1^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{s}}{\partial k} = c(X) \left(\frac{-\frac{\partial d_1}{\partial k}}{(d_1 - 1)^2} \right) < 0 \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial k} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial k} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial k} \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\alpha_1^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{s}}{\partial r} = c(X)\left(\frac{-\frac{\partial d_1}{\partial r}}{(d_1-1)^2}\right) > 0 \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_1}{\partial r} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}(\alpha_1 - 1)\left(\alpha_1^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} < 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{s}}{\partial \sigma^2} = c(X)\left(\frac{-\frac{\partial d_1}{\partial \sigma^2}}{(d_1-1)^2}\right) \gtreqless 0 \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_1}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \sigma^2} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\alpha_1(r-k) - \frac{(\lambda + r)}{\sigma^2}\right)\left(\alpha_1^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\frac{\partial \widehat{s}}{\partial \lambda} < 0;\ \frac{\partial \widehat{s}}{\partial k} < 0;\ \frac{\partial \widehat{s}}{\partial r} > 0;\ \frac{\partial \widehat{s}}{\partial \sigma^2} \gtreqless 0$$

Obsérvese que cuanto mayores sean el tipo impositivo y la tasa de conveniencia mayores son las posibilidades de explotación de la pesquería, dado que el precio crítico a partir del cual comienza a explotarse la misma es menor. Lo contrario sucede para el tipo de interés real: cuanto mayor es éste, mayor es aquél y menores, por tanto, las posibilidades de explotación. Tal como se podrá comprobar con la ilustración numérica en la sección siguiente, precisamente cuanto menores sean el impuesto y la tasa de conveniencia así como mayor el tipo de interés real, el valor de la oportunidad de explotar la pesquería será mayor y mayor, por lo tanto, el coste de oportunidad de explotar, que a su vez reduce las posibilidades de explotación.

5. Conclusiones y extensiones.

En este trabajo se ha extendido la Teoría de las Opciones Reales a la valoración de un recurso natural renovable: una pesquería. La utilización de esta Teoría se prefiere a los métodos tradicionales de descuento, puesto que se trata de un activo cuyos flujos de caja dependen de una variable altamente volátil, el precio del recurso pesquero; los inversores/gestores pueden reaccionar ante las condiciones adversas que puedan producirse cerrando temporalmente una pesquería o retrasando el acceso a la explotación de la misma. En el análisis desarrollado se ha visto la necesidad de combinar la teoría de las Opciones Reales con un modelo de equilibrio general en el mercado, pero también se podría llevar a cabo la valoración adoptando el supuesto de que existe un mercado de futuros sobre el activo subyacente.

La solución del modelo general de valoración de la oportunidad de explotar una pesquería viene dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales y sus respectivas condiciones de contorno. En general, no existe una solución analítica para este modelo. Es por ello que se analiza un caso particular (cuando las capturas se llevan a cabo bajo una base sostenible) en que sí es posible obtener una solución analítica, que es función del precio y del stock del recurso pesquero entre otras variables.

Además, no sólo se llevan a cabo dichas valoraciones, sino también se determinan las políticas óptimas de explotación. En particular, para el caso de desarrollo sostenible es posible encontrar una expresión para la política óptima de explotación (precio crítico de explotación). Se comprueba que el precio crítico de explotación es un porcentaje de los costes medios. Este porcentaje es función a su vez del tipo de interés real, la tasa de conveniencia y la varianza del precio del recurso. Del análisis de estática comparativa realizado se observa como cuanto mayores sean el tipo impositivo y la tasa de conveniencia mayores son las posibilidades de explotación de la pesquería, dado que el precio crítico a partir del cual comienza a explotarse la misma es menor. Lo contrario sucede para el tipo de interés real, cuanto mayor es éste, mayor es aquél y menores, por tanto, las posibilidades de explotación.

El análisis propuesto tiene algunas limitaciones. Así, por ejemplo, sería más realista haber considerado que las varianzas fuesen función del precio, lo cual proporcionaría con seguridad diferentes valoraciones (McDonald y Siegel (1986)). También podría haberse modelado el stock del recurso, los costes y la tasa de conveniencia de forma estocástica. En la literatura de pesquerías, algunos autores han utilizado procesos de Wiener para modelar la evolución del stock del recurso de forma estocástica, (Olsen y Shortle (1996); Pindyck (1984)). Sundaresan (1984), suponen por su parte un proceso mixto de Wiener-Poisson. Este proceso mixto tiene su motivación en la necesidad de capturar dos fuentes de incertidumbre: de una parte, aquellas variaciones aleatorias que se producen a lo largo del tiempo (modeladas por el proceso de Wiener) y, de otra, los cambios en las existencias debidos a nuevos descubrimientos de reservas (capturados por el proceso de Poisson). En la literatura de Opciones Reales también se encuentran algunos autores que han modelado costes aleatorios, (McDonald y Siegel (1985,1986); Quigg (1993)). Por último, para la tasa de conveniencia Lund y ∅Ksendal (1991) recogen un trabajo de Brennan (1991) en el cual se muestran varios modelos estocásticos alternativos para la tasa de conveniencia. Pindyck (1988) introduce por su parte una función de demanda estocástica.

Por otra parte, otras funciones y procesos podrían tomarse en función de la evidencia empírica que se posea para el precio del recurso así como para la función de crecimiento del mismo. Cox y Ross (1975) modelan el precio mediante procesos de Poisson o con saltos que, a diferencia de los procesos de difusión, describen un movimiento determinista sobre el que se imponen saltos discretos. Pindyck (1991) plantea un proceso de reversión a la media para el precio. En cuanto a la función del crecimiento, dependiendo de la especie se podrían adoptar otras funciones como la de Gompertz, Beverton y Holt o Cushing.

Por último, se podrían haber incluido en el modelo unos costes fijos de abrir (explotar) y cerrar (no explotar) una pesquería. Puede comprobarse que la introducción de estos costes implicaría una modificación de la regla óptima de explotación. En el caso de desarrollo sostenible el precio crítico a partir del cual sería óptimo llevar a cabo la explotación de la pesquería sería mayor que los costes variables de explotación y el coste fijo de explotar o no explotar.

References

[1] Black, F; Scholes, M.: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy 81, May/June, 1973.

[2] Bjerksund, P., Ekern, S.: "Managing Investment Opportunities Under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies". Financial Management. Vol. 19, No 3, Autumn 1990.

[3] Brennan, M.J., Schwartz, E.S.:"Evaluating Natural Resource Investments". Journal of Business. Vol. 58, No. 2. 1985.

[4] Caddy, J.F., Griffiths, R.C.: "Recursos Marinos Vivos y su Desarrollo Sostenible:Perspectivas institucionales y medioambientales". FAO, Documento Técnico de Pesca, No. 353. Roma, FAO. 1996.

[5] Clark, C.V.: "Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources". John Wiley and Sons, 1976.

[6] Constantinides, G.M.: "Market Risk Adjustment in Project Valuation". The Journal of Finance. Vol. XXXIII, No.2, May 1978.

[7] Cortazar, G., Schwartz, E.S.: "A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories". Journal of Business. Vol. 66, No.4. 1993.

[8] Cortazar, G., Schwartz, E.S., Salinas, M.: "Evaluating Environmental Investments: A Real Options Approach". Management Science.Vol. 44, No. 8, August 1998.

[9] Cortazar, G., Schwartz, E.S., Löwener, A.: "Optimal Investment and Production Decisions and The Value Of The Firm". Mimeo, presentado en el French Finance Association Annual Meeting 1998.

[10] Cox, J.C., Ross, S.A.: " The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". Journal of Financial Economics 3: 145-166. 1976.

[11] Elsgoltz, L. "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional". Mir-Moscú. Segunda edición. 1977.

[12] Fama, E.F., French, K.R.: "Commodity Futures Prices: Some Evidence on Forecast Power, Premiums, and the Theory of Storage". Journal of Business. Vol. 60, No. 1. 1987.

[13] Fischer, S.: "The Demand for Index Bonds". Journal of Political Economy 83, 1975.

[14] Ingersoll, J.E.: "Theory of Financial Decision Making". Rowman & Littlefield Publishers, Inc. 1987.

[15] Kemma, A.G.Z.: " Case Studies on Real Options". Financial Management. 1993.

[16] Lund, D., ∅Ksendal, B.: "Stochastic Models and Option Values. Applications to Resources, Environment and Investment Problems". North-Holland. 1991.

[17] McDonald, R.L., Siegel, D.R.: "Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Return: A Note". The Journal of Finance. Vol.XXXIX, No. 1, March 1984.

[18] McDonald, R.L., Siegel, D.R.: "Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down". International Economic Review. Vol. 26, No. 2, June 1985.

[19] McDonald, R.L., Siegel, D.R.: "The Value of Waiting to Invest". The Quaterly Journal of Economics. Vol. CI, No. 4. November 1986.

[20] Merton, R.C.: "The Theory of Rational Option Pricing". Bell Journal of Economics and Management Science 4, Spring 1973.

[21] Morck, R., Schwartz, E., Stangeland, D.: "The Valuation of Forestry Resources under Stochastic Prices and Inventories". Journal of Financial and Quantitative Analysis.Vol. 24, No. 4. December 1989.

[22] Olsen, J.R. y Shortle, J.S.:"The Optimal Control of Emissions and Renewable Resource Harvesting Under Uncertainty". Journal of Environmental Economics and Management. 7:97-115. 1996.

[23] Paddock, J.L., Siegel, D.R., Smith, J.L.: "Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases". The Quarterly Journal of Economics. Vol. CIII, Issue 3, August 1988.

[24] Perman, R., Ma, Y., McGilvray, J.: "Natural Resource and Environmental Economics". Longman. 1996.

[25] Pindyck, R.S.: "Uncertainty in the Theory of Renewable Resource Markets". Review of Economic Studies, 51: 289-303. 1984.

[26] Pindyck, R.S.: "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm". The American Economic Review. Vol. 78, No.5, December 1988.

[27] Pindyck, R. S.: "Irreversibility, Uncertainty, and Investment". Journal of Economic Literature. Vol XXIX, September 1991.

[28] Quigg, L.: "Empirical Testing of Real Option-Pricing Models". The Journal of Finance. Vol. XLVIII, No. 2, June 1993.

[29] Simons, G.F.: "Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas". McGraw-Hill.1983.

[30] Sundaresan, S.M.: "Equilibrium Valuation of Natural Resources". Journal of Business. Vol. 57, No. 4, 1984.

[31] Trigeorgis, L.: "Real Options and Interactions with Financial Flexibility". Financial Management. Vol.22, No. 3, Autumn 1993.

[32] Trigeorgis, L.: Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1996.