

Tesi di Dottorato di Ricerca in  
MECCANICA DELLE STRUTTURE (VIII° ciclo)  
*Università di Bologna, Ancona, Padova e Parma*

**SUL PROBLEMA DELL'ACCOPPIAMENTO  
DI UN CAVO SCORREVOLE CON SOLIDI PRISMATICI**

Dott. Graziano Leoni

Tutori: *Chiar.mo Prof. Giovanni Menditto*  
*Università di Ancona*

*Chiar.mo Prof. Luigino Dezi*  
*Università di Ancona*

Coordinatore: *Chiar.mo Prof. Erasmo Viola*  
*Università di Bologna*

Ancona, Febbraio 1996



Tesi di Dottorato di Ricerca in  
MECCANICA DELLE STRUTTURE (VIII° ciclo)  
*Università di Bologna, Ancona, Padova e Parma*

**SUL PROBLEMA DELL'ACCOPIAMENTO  
DI UN CAVO SCORREVOLE CON SOLIDI PRISMATICI**

Dottorando: *Dott. Graziano Leoni*

Tutori: *Chiar.mo Prof. Giovanni Menditto*  
*Università di Ancona*

*Chiar.mo Prof. Luigino Dezi*  
*Università di Ancona*

Coordinatore: *Chiar.mo Prof. Erasmo Viola*  
*Università di Bologna*

Ancona, Febbraio 1996

*Alla memoria di mio padre Fabio*

*Rivolgo un ringraziamento particolare ai Proff.  
Giovanni Menditto e Luigino Dexi per i loro continui e  
preziosi suggerimenti, senza i quali non sarebbe stato possibile  
lo svolgimento di questa tesi. Voglio inoltre esprimere la mia  
gratitudine all' Ing. Andrea Dall' Asta per la sua  
costante e proficua presenza e per la disponibilità mostrata  
durante questi tre anni di lavoro.*

**INDICE**

<b>PREMESSA</b> .....	Pag.	1
<b>CAPITOLO 1 ACCOPPIAMENTO DI UN CAVO SCORREVOLE CON UN CONTINUO TRIDIMENSIONALE</b> .....	Pag.	6
PREMESSA .....	Pag.	7
1. CINEMATICA .....	Pag.	8
1.1. Definizione della configurazione di riferimento.....	Pag.	8
1.2. Definizione della configurazione deformata: moto del sistema .....	Pag.	10
1.2.1. Moto del continuo tridimensionale .....	Pag.	11
1.2.2. Moto del cavo.....	Pag.	13
1.2.3. Spazio tangente al vincolo: spostamenti e deformazioni ammissibili del cavo .....	Pag.	22
2. CONDIZIONI DI BILANCIO.....	Pag.	26
2.1. Prescrizioni costitutive sui materiali e definizione delle azioni esterne	Pag.	26
2.2. La condizione di bilancio globale .....	Pag.	29
2.3. Bilancio locale delle forze: l'interazione cavo-corpo.....	Pag.	31
2.3.1. Le forze reattive applicate sul cavo.....	Pag.	33
3. TEORIA LINEARIZZATA.....	Pag.	35
3.1. Linearizzazione delle grandezze cinematiche .....	Pag.	36
3.2. Linearizzazione dei legami costitutivi .....	Pag.	36
3.3. La condizione di bilancio linearizzata .....	Pag.	40
4. IL CASO DI CAVO OMOGENEO PRIVO DI MASSA.....	Pag.	42
4.1. Restrizione dello spazio delle deformazioni del cavo .....	Pag.	44
4.2. Condizione di bilancio .....	Pag.	45
4.3. Teoria linearizzata.....	Pag.	46

NOTAZIONI .....	Pag.	49
<b>CAPITOLO 2 ACCOPPIAMENTO DI UN CAVO SCORREVOLE CON</b>		
<b>SOLIDI PRISMATICI .....</b>	Pag.	52
PREMESSA E IPOTESI DI BASE .....	Pag.	53
1. CINEMATICA LINEARIZZATA DEL SISTEMA TRAVE-CAVO ....	Pag.	54
1.1. Configurazione di riferimento.....	Pag.	54
1.2. Configurazione deformata: moto del sistema cavo-trave .....	Pag.	56
1.2.1. Il vincolo sulla deformazione del solido cilindrico:		
moto della trave.....	Pag.	57
1.2.2. Il moto vincolato del cavo.....	Pag.	62
1.2.3. La trave in parete sottile: le funzioni di ingobbamento .....	Pag.	63
2. CONDIZIONI DI BILANCIO DEL SISTEMA TRAVE-CAVO .....	Pag.	67
2.1. Definizione delle forze agenti sul sistema tridimensionale .....	Pag.	67
2.2. La condizione di bilancio globale .....	Pag.	68
2.2.1. Variazione ammissibile della configurazione .....	Pag.	69
2.2.2. Le risultanti della sollecitazione interna alla trave .....	Pag.	70
2.2.3. Le caratteristiche dinamiche del cavo duali dei descrittori della		
deformazione.....	Pag.	71
2.2.4. Le risultanti della forze esterne.....	Pag.	72
2.2.5. Le masse risultanti .....	Pag.	73
2.2.6. La condizione di bilancio globale in termini di caratteristiche		
risultanti.....	Pag.	75
2.3. Le condizioni di bilancio locale in termini di caratteristiche risultanti	Pag.	76
3. IL PROBLEMA LINEARE ELASTICO .....	Pag.	78
3.1. Prescrizioni costitutive .....	Pag.	78
3.2. Formulazione globale del problema elastico lineare .....	Pag.	81
3.3. Formulazione locale del problema elastico lineare.....	Pag.	82

3.4. Osservazioni sulle travi in parete sottile .....	Pag. 83
3.4.1. Le inerzie della sezione correlate con l'ingobbamento .....	Pag. 83
3.4.2. Valutazione dello stato tensionale.....	Pag. 84
4. LA STABILITÀ INFINITESIMA DELLE CONFIGURAZIONI	
DI EQUILIBRIO.....	Pag. 89
4.1. Condizioni di stabilità .....	Pag. 89
4.2. Interazione tra valori critici di carico esterno e la forza di pretensione del cavo .....	Pag. 94
4.3. Percorsi stabilizzanti e instabilizzanti.....	Pag. 96
APPENDICE capitolo 2.....	Pag. 99
NOTAZIONI .....	Pag. 100
<b>CAPITOLO 3 ALCUNE APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA</b>	
<b>DELLA STABILITÀ .....</b>	<b>Pag. 103</b>
PREMESSA .....	Pag. 104
1. ANALISI NUMERICA DEI SISTEMI TRAVE CAVO .....	Pag. 105
1.1. Formulazione numerica del problema elastico .....	Pag. 106
1.2. Formulazione numerica del problema della stabilità infinitesima ....	Pag. 108
2. ALCUNE APPLICAZIONI SULL'ANALISI DELLA STABILITÀ DI TRAVI IN PARETE SOTTILE .....	Pag. 111
2.1. Osservazioni sui risultati.....	Pag. 113
<b>APPENDICE ALCUNE CONSIDERAZIONI SUI SOLIDI PRISMATICI CON</b>	
<b>CAVI INTERNI SCORREVOLI .....</b>	<b>Pag. 120</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>Pag. 127</b>

## PREMESSA

Il controllo degli stati deformativi e tensionali delle strutture è uno degli aspetti di maggior interesse nei diversi settori della meccanica. Nel campo della meccanica strutturale la tecnica di imporre opportune presollecitazioni alle strutture è usata sia per ottimizzare il comportamento in condizioni limite che per migliorare le prestazioni in esercizio. In altri settori, quali ad esempio la robotica, ciò che interessa maggiormente è invece la possibilità di imporre opportuni stati deformativi alle strutture. Accanto alle tecniche di *attuazione* di cui sopra, hanno senza dubbio altrettanta importanza quelle di *misura* degli stati deformativi (e quindi tensionali) prodotti dalle azioni esterne.

In questa tesi si esamina una tecnica di controllo degli stati di tensione e deformazione dei solidi che utilizza cavi ancorati solamente alle estremità e *liberi di scorrere* lungo percorsi vincolati rigidamente al corpo. Il fatto che il cavo sia *scorrevole*, rende il sistema particolarmente interessante dal momento che può essere impiegato sia come attuatore che come sensore dello stato deformativo. Imponendo, infatti, una forza di trazione sul cavo tramite l'estrazione di una porzione dall'ancoraggio (o in maniera più sofisticata sfruttando eventuali effetti termoelastici o piezoelettrici del cavo stesso) si ha la possibilità di produrre nel corpo prefissati campi di tensione e deformazione le cui caratteristiche sono regolate dalla geometria del percorso del cavo. Viceversa, ogni volta che è possibile misurare la tensione del cavo, il sistema può essere impiegato come sensore per ottenere informazioni sulla deformazione globale del corpo. In definitiva è *sufficiente controllare lo stato deformativo o tensionale in un solo punto*



*del cavo per ottenere informazioni sullo stato deformativo e tensionale globale del solido.*

Da un punto di vista teorico, la modellazione dell'accoppiamento di un cavo con un solido richiede particolare attenzione. In primo luogo le teorie devono essere basate su di una rigorosa descrizione cinematica del problema. In secondo luogo deve essere ben chiaro come le condizioni di bilancio del sistema riescono a cogliere l'accoppiamento globale cavo-corpo.

Nel campo dell'ingegneria strutturale, questo sistema trova un vastissimo impiego come tecnica di presollecitazione. Negli ultimi anni i progettisti di ponti si sono avvalsi dell'uso di cavi esterni (*external prestressing*), sia per strutture in conglomerato cementizio armato che per strutture metalliche, ottenendo apprezzabili risultati di ottimizzazione. La precompressione con cavi scorrevoli interni (*unbonded prestressing*), ha trovato invece un largo impiego nella realizzazione di importanti strutture per l'edilizia. La letteratura è ricca di lavori nei quali ci si occupa soprattutto dell'analisi elastica e post-elastica delle travi precomprese con cavi non aderenti (per una bibliografia più dettagliata si rimanda ad Alkhairi e Naaman (1993), Naaman e Alkhairi (1991), Saadatmanesh e Tong (1992)). Purtroppo c'è da osservare che la gran parte dei modelli proposti peccano in chiarezza proprio per quanto riguarda i due aspetti fondamentali sopradetti. La cinematica del sistema non è sempre descritta in maniera rigorosa e le equazioni di compatibilità sono oggetto di semplificazioni non completamente motivate o formulate mediante espressioni non lineari incoerenti con le trattazioni linearizzate negli spostamenti. Anche le condizioni di equilibrio, scritte in forma locale, risultano essere molto complesse dovendo rispecchiare l'accoppiamento globale tra struttura e cavo. Una trattazione più rigorosa è stata recentemente formulata in [Dall'Asta & Dezi, 1993] in cui si propone un modello cinematico in regime di spostamenti infinitesimi per lo studio delle travi presollecitate con cavi interni o esterni tenendo conto del comportamento non lineare dei materiali.

Solo molto recentemente, il problema dell'accoppiamento di un cavo con un solido generico è stato affrontato con rigore teorico in regime di spostamenti non lineari [Dall'Asta, 1995a,b] arrivando alla formulazione di un modello del tutto generale la cui importanza sta nell'aver chiarito alcune questioni basilari che devono essere tenute in conto nello sviluppo delle teorie semplificate.

Resta aperta dunque la questione di ottenere una modellazione adeguata a quelle che sono le esigenze dell'ingegneria strutturale. In particolare si avverte la necessità di un modello che permetta l'analisi degli stati elastici nonché lo studio della stabilità e della dinamica per solidi a geometria cilindrica (travi). In particolare, specifici problemi di stabilità non ancora completamente chiariti sono già stati messi in evidenza in alcune prove sperimentali su travi a parete sottile [Saadatmanesh et al., 1992] e in alcune applicazioni teoriche [Dall'Asta, 1995a]

Le considerazioni di cui sopra hanno stimolato l'interesse allo sviluppo di questa tesi di dottorato articolata sostanzialmente in due parti. La prima, costituita da un unico capitolo, con carattere di studio ed approfondimento degli aspetti generali del problema dell'accoppiamento cavo-solido nell'ambito di solidi tridimensionali; la seconda, suddivisa in due capitoli che contengono i contributi originali della ricerca svolta, finalizzata alla messa a punto di un modello linearizzato negli spostamenti in grado di descrivere in maniera adeguata il comportamento del sistema cavo-trave.

Scendendo un poco più nei dettagli, nel primo capitolo si riesamina il problema dell'accoppiamento tra un solido tridimensionale ed un cavo monodimensionale, di massa non trascurabile, libero di scorrere al suo interno lungo un percorso fisso [Dall'Asta, 1995b]. L'accoppiamento cinematico tra cavo e solido viene tradotto in veste analitica da una condizione di vincolo globale [Antman & Marlow, 1991] che riduce l'insieme delle possibili deformazioni del cavo sulla base della deformazione del corpo e della geometria iniziale del cavo stesso. La condizione di bilancio del sistema viene quindi scritta in forma globale sulla base del principio di Lagrange D'Alambert [Truesdell & Toupin, 1960]. consentendo di individuare le entità dinamiche del cavo duali dei descrittori cinematici del sistema. L'interpretazione locale, resa possibile dalla

definizione di opportune funzioni test, evidenzia alcuni aspetti caratteristici delle forze di interazione cavo-corpo. Particolare attenzione viene posta alla teoria linearizzata nell'intorno della configurazione di riferimento la quale permette di fare alcune considerazioni riguardo la qualità dell'equilibrio elastico delle configurazioni equilibrate. Infine, viene esaminato il caso di cavo omogeneo privo di massa per il quale l'insieme delle deformazioni vincolate si riduce ulteriormente derivandone una trattazione in cui l'accoppiamento globale tra i due componenti del sistema è ancor più evidente.

Nel secondo capitolo si propone il modello linearizzato per l'accoppiamento di cavi con solidi prismatici. La descrizione della cinematica della trave viene impostata sulle basi della teoria tridimensionale linearizzata introducendo un vincolo interno di indeformabilità trasversale per il solido cilindrico; il campo degli spostamenti ammissibili viene quindi ridotto introducendo un vincolo globale sulla deformazione del solido [Antman & Marlow, 1991], ipotizzando che l'ingobbamento della sezione possa descriversi con un numero finito di funzioni di ingobbamento note. La condizione di bilancio dinamico scritta secondo il principio di Lagrange-D'Alembert, permette quindi di definire le risultanti medie della tensione attiva sulla sezione, nonché le risultanti delle azioni esterne e delle masse significative per il campo degli spostamenti ammissibili adottato. È interessante notare come, accanto alla definizione delle risultanti di cui sopra, il modello di spostamenti permette di individuare grandezze puramente geometriche relative al cavo analoghe alle caratteristiche della sollecitazione interna grazie alle quali la scrittura della condizione di bilancio risulta particolarmente semplice. La successiva deduzione delle equazioni di equilibrio locale della trave permette di stabilire in maniera diretta l'influenza del cavo sulle caratteristiche risultanti della tensione interna della trave. Sotto l'ipotesi di materiali linearmente elastici, si esplicitano le condizioni di bilancio in termini di spostamenti ottenendo sia la formulazione debole (globale) che quella forte (locale) del problema. In particolare, a causa dell'accoppiamento globale che caratterizza il sistema, la formulazione locale è costituita da un sistema integro-differenziale che risulta essere non integrabile in forma

chiusa. Il problema della stabilità infinitesima viene quindi affrontato partendo dalla linearizzazione delle equazioni nell'intorno di una configurazione non naturale equilibrata introducendo il modello cinematico adottato. È possibile evidenziare sotto l'aspetto qualitativo il ruolo del cavo teso nei confronti della stabilità del sistema. In particolare, si mostra che il cavo può avere effetti stabilizzanti o instabilizzanti al variare della sola geometria del suo percorso per cui diventa naturale l'introduzione del concetto dei *percorsi stabilizzanti*.

Nel terzo capitolo si propone la soluzione numerica del problema a partire dalla formulazione variazionale con il metodo di Ritz applicato sia nella risoluzione del problema elastico che nel calcolo dei moltiplicatori critici di carico. Si presentano quindi i risultati di alcune applicazioni sulla stabilità delle travi in parete sottile evidenziando numericamente i concetti indagati, da un punto di vista teorico, nel secondo capitolo.

## **CAPITOLO 1**

# **ACCOPPIAMENTO DI UN CAVO SCORREVOLE CON UN CONTINUO TRIDIMENSIONALE**

## ***PREMESSA***

In questo capitolo si riesamina il modello proposto in [Dall'Asta, 1995a] per l'accoppiamento di un solido tridimensionale generico con un cavo monodimensionale. Tutti gli aspetti salienti del problema sono rivisti e commentati in maniera dettagliata in modo da creare le necessarie basi per lo sviluppo rigoroso degli argomenti trattati nel capitolo successivo.

Il capitolo si divide in quattro paragrafi. Nel primo si affronta la descrizione della cinematica del problema curando in maniera particolare gli aspetti connessi con il moto vincolato del cavo ed aggiungendo alcune considerazioni sulla definizione dello spazio tangente al vincolo. Nel secondo paragrafo si riprendono le condizioni di bilancio scritte in forma globale soffermandosi, in chiusura, sulla determinazione della forza di interazione applicata sul cavo. La teoria linearizzata viene quindi riportata nel terzo paragrafo ponendo particolare attenzione all'operazione di linearizzazione dello stato tensionale del cavo cercando di chiarire quali sono i meccanismi con cui viene influenzato dal vincolo cinematico. Infine nel quarto paragrafo si prende in considerazione il problema semplificato del cavo privo di massa giungendo sino alla condizione di bilancio linearizzata alla base dello sviluppo del capitolo successivo.

Ai riferimenti bibliografici riportati nel testo deve aggiungersi il lavoro [Dall'Asta, 1995b] al quale si è fatto continuo riferimento.

## 1. CINEMATICA

Si vuole descrivere la cinematica di un sistema generato dall'accoppiamento di un cavo e di un corpo tridimensionale. Si ipotizza che il cavo sia collegato alle estremità a due punti materiali del corpo e che possa scorrere lungo un tracciato individuato da una curva interna ad esso (Fig. 1.1). Tale accoppiamento viene tradotto in un vincolo globale per la deformazione del cavo espresso in base alla deformazione del corpo ed alla geometria iniziale del percorso. L'introduzione di una funzione a valori scalari che descrive gli scorrimenti cavo-corpo permette di esprimere in maniera significativa il moto vincolato del cavo.

### 1.1. Definizione della configurazione di riferimento

Il corpo  $\mathcal{B}$  sia una varietà tridimensionale i cui elementi (punti) vengono indicati con  $P$ . Si supponga che all'istante  $t_0$  esso occupi la regione  $\Omega$  dello spazio euclideo  $\mathcal{E}$ .  $\partial\Omega$  sia la frontiera di  $\Omega$ ; in essa, la parte  $\partial\Omega_u$  sia soggetta ad un moto noto, mentre la parte  $\partial\Omega_s$  sia soggetta ad un campo di forze superficiali. Definito l'elemento origine  $O$  di  $\mathcal{E}$ , si consideri lo spazio dei vettori posizione  $\mathcal{V}\mathcal{E}$  riferito alla base ortonormale  $\{\mathbf{A}_i\}$ . È possibile instaurare una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di un sottoinsieme di  $\mathcal{V}\mathcal{E}$  e quelli di  $\mathcal{B}$  associando il vettore  $\mathbf{P}(X_i) = X_i \mathbf{A}_i$  al punto materiale che, all'istante  $t_0$ , si trova ad occupare il posto da esso individuato. La terna  $(X_i ; i=1,2,3)$  delle componenti di  $\mathbf{P}$  viene assunta terna delle coordinate materiali del punto  $P$ .

Inoltre,  $\mathcal{H} = \{X_i = H_i(\eta); \eta \in I_\eta = [0, s] \subset \mathcal{R}\}$  sia un sottoinsieme di  $\mathcal{B}$  che descrive la curva regolare  $\mathbf{H}(\eta) = H_i(\eta)\mathbf{A}_i$  nella configurazione di riferimento. Il vettore tangente a detta curva  $\mathbf{H}_{,\eta}(\eta)^1$  è definito ovunque ed il suo modulo  $|\mathbf{H}_{,\eta}|$  è sempre positivo. Con  $\mathbf{G}(\eta) = \mathbf{H}_{,\eta}/|\mathbf{H}_{,\eta}|$  si denoti il vettore unitario tangente ad  $\mathbf{H}$ . I due punti materiali posti alle estremità di  $\mathcal{H}$ , che nella configurazione di riferimento occupano le posizioni  $\mathbf{H}(0) = X_{O_i}\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{H}(s) = X_{S_i}\mathbf{A}_i$ , sono indicati rispettivamente con  $P_O$  e  $P_S^2$ .

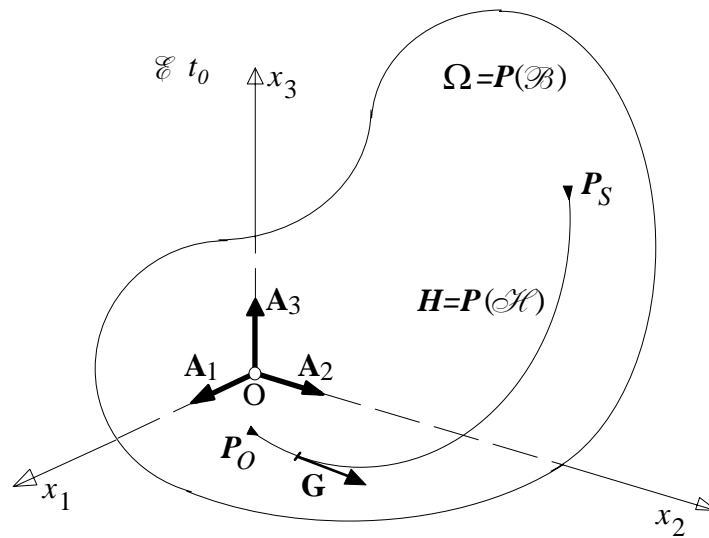


Fig. 1.1. Configurazione di riferimento

Per quanto riguarda il cavo  $\mathcal{C}$ , questo sia costituito da una varietà monodimensionale i cui punti materiali vengono individuati dal parametro  $\rho \in I_\rho = [0, s]$ . Dal momento che il cavo è obbligato a seguire la curva  $\mathcal{H}$ , deve valere la

$$\mathbf{R}(\rho) = \mathbf{H}(\rho), \quad \rho \in I_\rho, \quad (1.1)$$

dove con  $\mathbf{R}(\rho) = R_i(\rho)\mathbf{A}_i$  si è indicato il vettore che individua la posizione dei punti del cavo nella configurazione di riferimento. Con la (1.1) si è implicitamente assunto che,

<sup>1</sup> La virgola indica la derivata della funzione rispetto alla variabile che la segue.

<sup>2</sup> Gli indici  $O$  ed  $S$  verranno usati anche in seguito per individuare i valori assunti dalle generiche quantità in  $P_O$  e  $P_S$ .



all'istante  $t_0$ , la curva tracciata dal cavo e quella tracciata da  $\mathcal{H}$  sono espresse dalla stessa parametrizzazione. Per quanto detto, se si indica con  $\mathbf{E}(\rho) = \mathbf{R}_{,\rho}(\rho) / |\mathbf{R}_{,\rho}(\rho)|$  il vettore unitario tangente al cavo, esso deve necessariamente coincidere con  $\mathbf{G}$ . La lunghezza dell'arco di cavo compreso tra il primo ancoraggio  $P_O$  ed un generico punto dello stesso risulta descritto dalla funzione

$$\Lambda(\rho) = \int_0^\rho |\mathbf{R}_{,\zeta}| d\zeta, \quad \rho \in I_\rho. \quad (1.2)$$

### *Osservazione 1*

La scelta di assumere la stessa parametrizzazione per  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{H}$  deriva dal fatto che solitamente la parametrizzazione più comoda per descrivere una curva nello spazio è unica; la distinzione tra  $\rho$  ed  $\eta$  è stata fatta, comunque, per chiarezza poiché il primo individua una particella del cavo mentre il secondo individua una particella del corpo tramite le funzioni  $H_i(\eta)$ . Ovviamente solo nella configurazione di riferimento i punti di  $\mathcal{C}$  e di  $\mathcal{H}$ , caratterizzati dall'avere le stesse coordinate  $\rho$  ed  $\eta$ , occupano la stessa posizione.

## **1.2. Definizione della configurazione deformata - moto del sistema**

La generica configurazione del sistema può essere descritta mediante le funzioni di deformazione  $\mathbf{p}(X_k; t) = p_i(X_k; t)\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{r}(\rho; t) = r_i(\rho; t)\mathbf{A}_i$  che individuano le posizioni rispettivamente occupate dal corpo  $\mathcal{B}$  e dal cavo  $\mathcal{C}$  al generico istante  $t$  (Fig.1.2). Ovviamente, dal momento che il cavo risulta libero di scorrere lungo un percorso interno al corpo, la funzione di deformazione relativa ad esso non è del tutto libera, ma è soggetta ad un vincolo che caratterizza il sistema in esame (cfr. §1.2.2).

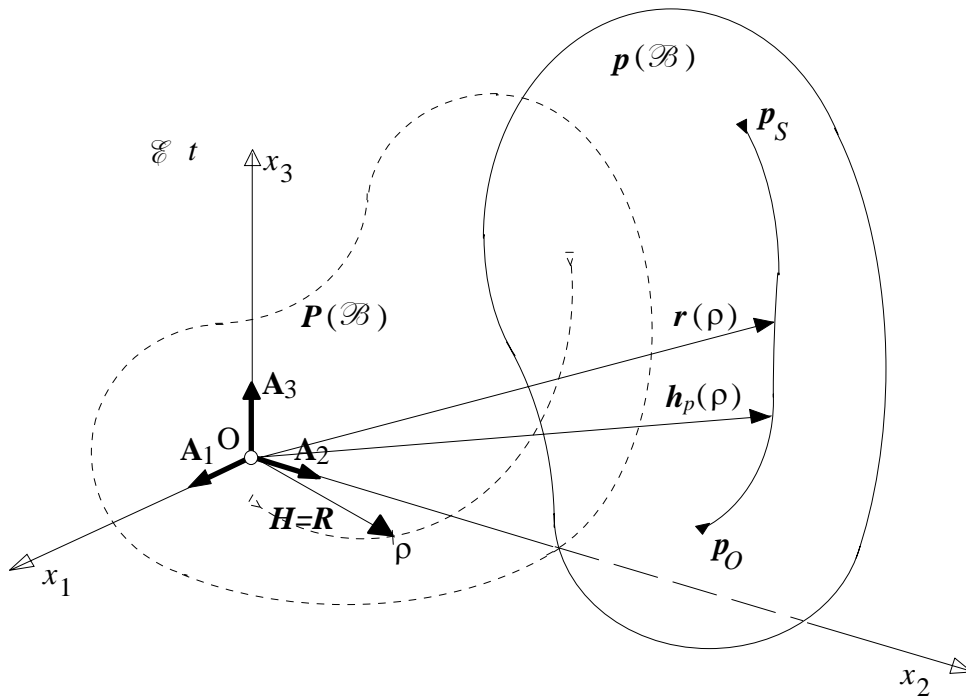


Fig. 1.2. Configurazione deformata del sistema continuo - cavo

### 1.2.1. Moto del continuo tridimensionale

La descrizione del moto del continuo tridimensionale viene affrontata secondo la classica teoria non lineare in regime di spostamenti finiti. Così, la configurazione di  $\mathcal{B}$  ad un generico istante  $t$  sia descritta dal campo  $\mathbf{p}(X_k; t) = p_i(X_k; t)A_i$  definito come

$$\mathbf{p} : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{V}^{\mathcal{E}}, \tag{1.3}$$

quasi ovunque continuo, monodromo e sufficientemente regolare affinché siano definiti gli operatori differenziali formali usati nel seguito. Inoltre esso sia compatibile con i vincoli esterni imposti sul continuo, per cui sulla parte di frontiera  $\partial\Omega_u$  si suppone che il moto sia descritto dalla funzione nota  $\tilde{\mathbf{p}}(X_k; t)$ <sup>3</sup>. La descrizione della deformazione rispetto alla configurazione di riferimento nell'intorno elementare di un punto materiale del corpo è fornita dalla parte lineare della funzione che ne descrive il moto, ovvero dal

<sup>3</sup> In particolare se  $\tilde{\mathbf{p}}(X_k; t) = \mathbf{P}(X_k)$  si ottiene il caso in cui si ha la parte di frontiera  $\partial\Omega_u$  vincolata a non muoversi.

gradiente  $\nabla \mathbf{p}(X_k; t) = p_{i,j}(X_k; t) \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j$ . Si richiede che la deformazione del continuo non comporti sovrapposizioni di materia per cui deve essere verificata la condizione di invertibilità locale almeno quasi ovunque su  $\mathcal{B}$  ( $\det(\nabla \mathbf{p}) > 0$ ) e lungo  $\mathcal{S}$  ( $|\nabla \mathbf{p} \mathbf{H}_{,\eta}| > 0$ ). La più complessa questione riguardante il problema dell'invertibilità globale esula dagli scopi di questo studio.

Per quanto riguarda la velocità e l'accelerazione del generico punto materiale del continuo, queste sono date rispettivamente dalle relazioni

$$\dot{\mathbf{p}}(X_k; t) = \dot{p}_i(X_k; t) \mathbf{A}_i, \quad (1.4)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(X_k; t) = \ddot{p}_i(X_k; t) \mathbf{A}_i, \quad (1.5)$$

dove con il punto si sono indicate le derivate rispetto al tempo  $t$ .

Essendo  $\mathcal{S}$  una curva materiale del corpo, il suo moto viene descritto dalla

$$\mathbf{h}_p(\eta; t) = (\mathbf{p} \circ \mathbf{H})(\eta; t) = \mathbf{p}(H_i(\eta); t), \quad (1.6)$$

ovvero dalla traccia del campo di deformazione del corpo lungo  $\mathcal{S}$ . Le derivate della funzione  $\mathbf{h}_p$  fatte rispetto al parametro  $\eta$  possono, ovviamente, essere messe in relazione con la deformazione del corpo. Per le note regole di derivazione delle funzioni composte si ha che

$$\mathbf{h}_{p,\eta}(\eta; t) = \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t) \mathbf{H}_{,\eta}(\eta), \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{p,\eta\eta}(\eta; t) &= [\nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t) \mathbf{H}_{,\eta}(\eta)]_{,\eta} \\ &= [\nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t)]_{,\eta} \mathbf{H}_{,\eta}(\eta) + \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t) \mathbf{H}_{,\eta\eta}(\eta) \\ &= \nabla \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t) [\mathbf{H}_{,\eta}(\eta) \otimes \mathbf{H}_{,\eta}(\eta)] + \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t) \mathbf{H}_{,\eta\eta}(\eta). \end{aligned} \quad (1.8)$$

---

<sup>4</sup>  $\nabla \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t)$  è il tensore del terzo ordine di componenti  $[\nabla \nabla \mathbf{p}(H_i(\eta); t)]_{jih} = \frac{\partial^2 p_i}{\partial X_j \partial X_h} = p_{i,jh}$ .

In particolare, il vettore  $\mathbf{h}_{p,\eta}$  è tangente al nuovo percorso del cavo e rappresenta la trasformazione lineare del vecchio vettore tangente  $\mathbf{H}_{,\eta}$ ; esso ha modulo positivo data l'ipotezzata invertibilità locale della funzione di deformazione. Dalla (1.8) è immediato, invece, passare al vettore curvatura del percorso grazie alla

$$\mathbf{k} = \frac{1}{|\mathbf{h}_{p,\eta}|^2} [\mathbf{I} - \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_p] \mathbf{h}_{p,\eta\eta}, \quad (1.9)$$

dove  $\mathbf{g}_p(\eta) = \mathbf{h}_{p,\eta} / |\mathbf{h}_{p,\eta}|$  è il vettore unitario tangente al percorso nella configurazione deformata.

Sarà utile in seguito, per descrivere il vincolo del cavo, l'aver valutato la lunghezza  $\sigma$  del tracciato dello stesso dalla sua origine  $P_O$  fino al generico punto individuato da  $\eta$ ; essa risulta dalla

$$\sigma = \gamma_p(\eta) = \int_0^\eta |\mathbf{h}_{p,\zeta}| d\zeta, \quad \eta \in I_\eta. \quad (1.10)$$

$\gamma_p: I_\eta \rightarrow [0, l_p]$  è una funzione continua strettamente crescente, e quindi invertibile, dipendente dalla deformazione del corpo e  $l_p$  denota la lunghezza totale del tracciato nella configurazione deformata. Ne deriva che la funzione  $\gamma_p^{-1}: [0, l_p] \rightarrow I_\eta$  fornisce la coordinata curvilinea  $\eta$  del punto che si trova all'estremità del tratto di tracciato di lunghezza  $\sigma$ . Ovviamente, ad ogni istante  $t$  corrisponde una diversa funzione in dipendenza della configurazione del corpo  $p$ .

### 1.2.2. Moto del cavo

Come già accennato (cfr. §1.2) si suppone che il moto del cavo sia descritto dalla funzione di deformazione  $\mathbf{r}(p;t) \in C^1$  invertibile, definita come

$$\mathbf{r} : I_\rho \times [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{V}_E^3. \quad (1.11)$$

Se si considera un intorno elementare del punto  $\rho$ , per la supposta regolarità di  $\mathbf{r}$ , la funzione di deformazione di un punto contenuto in esso ed occupante la posizione

$$\mathbf{R}(\rho + d\rho) = \mathbf{R}(\rho) + \mathbf{R}_{,\rho}(\rho)d\rho + o(d\rho), \quad (1.12)$$

è data dalla

$$\mathbf{r}(\rho + d\rho) = \mathbf{r}(\rho) + \mathbf{r}_{,\rho}(\rho)d\rho + o(d\rho), \quad (1.13)$$

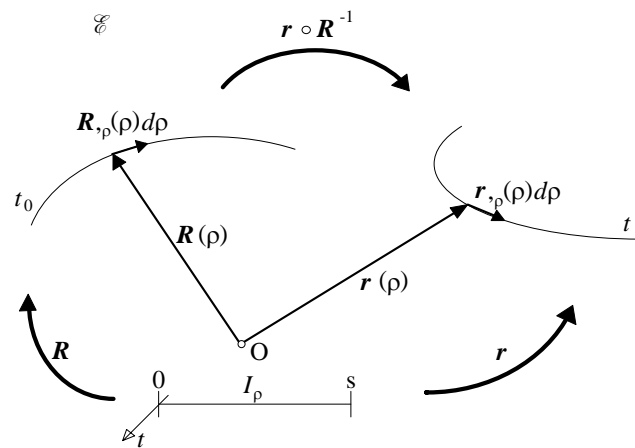


Fig. 1.3. Deformazione del cavo

dalla quale è evidente come l'elemento  $\mathbf{R}_{,\rho} d\rho$  si deforma nell'elemento  $\mathbf{r}_{,\rho} d\rho$  (Fig. 1.3). La funzione vettoriale  $\mathbf{r}_{,\rho}(\rho; t)$  verrà assunta quale descrittore della deformazione locale del cavo. Tuttavia nel seguito, in maniera del tutto equivalente, si farà riferimento alla

$$\mathbf{e}(\rho; t) = \mathbf{r}_{,\rho} / |\mathbf{R}_{,\rho}|, \quad (1.14)$$

che fornisce il vettore trasformato del vettore unitario tangente al cavo nella configurazione di riferimento. La (1.14) è una misura completa di deformazione, nel

senso che individua sia le variazioni in lunghezza che le rotazioni degli elementi di cavo. È immediato concludere che la quantità

$$a(\rho; t) = |\mathbf{e}(\rho; t)|; \quad (1.15)$$

misura la deformazione pura del cavo.

### *Osservazione 1*

$a$  è una quantità strettamente definita positiva. Infatti nella configurazione di riferimento deve essere  $a=1$ . Nell'ipotesi che la funzione di deformazione del cavo sia localmente invertibile deve inoltre risultare che  $|\mathbf{r}_{,\rho}|$  sia strettamente definito in segno. Ne segue che  $a>0$ .

Dalla (1.15), dal momento che il versore tangente al cavo nella configurazione deformata è dato dalla relazione  $\bar{\mathbf{e}}(\rho; t) = \mathbf{r}_{,\rho} / |\mathbf{r}_{,\rho}|$ , la deformazione locale può essere riscritta anche nella forma

$$\mathbf{r}_{,\rho} = a |\mathbf{R}_{,\rho}| \bar{\mathbf{e}}. \quad (1.16)$$

Similmente a quanto fatto per la curva  $\mathcal{H}$ , anche per il cavo è possibile definire la funzione che ne associa la lunghezza dell'arco alla generica coordinata materiale del punto che si trova all'estremità dello stesso; essa è data dalla

$$\sigma = \lambda_r(\rho) = \int_0^\rho |\mathbf{r}_{,\zeta}| d\zeta = \int_0^\rho a |\mathbf{R}_{,\zeta}| d\zeta \quad \rho \in I_\rho, \quad (1.17)$$

dove  $\lambda_r: I_\rho \rightarrow [0, l_r]$  è una funzione strettamente crescente, e quindi invertibile, dipendente dalla deformazione del cavo  $\mathbf{r}$  all'istante  $t$  e  $l_r$  è la lunghezza nella configurazione deformata del cavo.

*Osservazione 2*

Nei limiti consentiti dalla modellazione come varietà monodimensionale, le precedenti relazioni permettono di descrivere il moto di un cavo estensibile libero di muoversi nello spazio euclideo. Pertanto esse hanno validità del tutto generale. Nel caso che si sta esaminando con il presente lavoro, è evidente che occorre restringere lo spazio delle possibili configurazioni  $\mathbf{r}(\rho;t)$  in quanto il moto del cavo deve rimanere interno al tracciato individuato dalla curva  $\mathcal{H}$ , a sua volta fissato dal moto del solido, anche se i suoi punti materiali sono liberi di scorrervi consistentemente con le ipotesi di invertibilità locale.

*Descrizione del moto vincolato*

L'osservazione finale del precedente paragrafo evidenzia il fatto che su  $\mathbf{r}$  deve agire un vincolo globale il quale non può essere ridotto ad un vincolo locale prescrivendo semplici restrizioni sulle deformazioni. Prima di formalizzare tale vincolo, si preferisce fare alcune considerazioni di carattere qualitativo. Per le ipotesi fatte sul comportamento del sistema accoppiato, il cavo deve seguire il percorso individuato dalla deformata di  $\mathcal{H}$  pur non conservandosi la corrispondenza dei due parametri  $\rho$  e  $\eta$  che si aveva nella configurazione di riferimento. In altre parole, nella configurazione attuale le funzioni  $\mathbf{h}_p$  ed  $\mathbf{r}$  risultano avere lo stesso codominio pur essendo tra loro diverse (le due funzioni rappresentano diverse parametrizzazioni dello stesso insieme); risulta cioè che

$$\{\mathbf{r}(\rho;t); \rho \in I_\rho\} = \{\mathbf{h}_p(\eta;t); \eta \in I_\eta\}. \quad (1.18)$$

Servendosi delle (1.10) e (1.17) è possibile ottenere le relazioni che legano le due parametrizzazioni imponendo che  $\gamma_p(\eta) = \lambda_r(\rho)$  (Fig. 1.4).

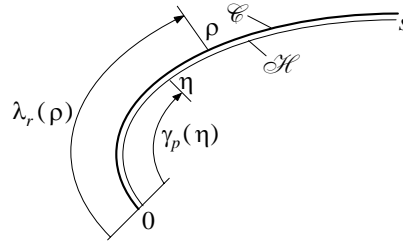


Fig. 1.4. Moto vincolato del cavo

Ricordando che le funzioni  $\gamma_p$  e  $\lambda_r$  sono invertibili, segue che

$$\begin{aligned} \eta(\rho) &= \gamma_p^{-1}(\lambda_r(\rho)) = (\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho), & \rho \in I_\rho, \\ \rho(\eta) &= \lambda_r^{-1}(\gamma_p(\eta)) = (\lambda_r^{-1} \circ \gamma_p)(\eta), & \eta \in I_\eta, \end{aligned} \quad (1.19)$$

le quali implicano che  $I_r$  e  $I_p$  devono essere uguali. La (1.19)<sub>1</sub> permette di esprimere il vincolo sul moto del cavo tramite la

$$\mathbf{r}(\rho; t) = \mathbf{h}_p(\eta(\rho); t), \quad \rho \in I_\rho, \quad (1.20)$$

che può essere riscritta come

$$\mathbf{r}(\rho; t) - (\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) = \mathbf{0}. \quad \rho \in I_\rho. \quad (1.21)$$

L'ultima relazione fornisce il vincolo che si stava cercando su  $\mathbf{r}$ . Essa varia nel tempo con il moto del corpo e può essere sostituita dalla condizione alternativa sulle misure di deformazione locale<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Per derivare la (1.22) occorre ricordare la regola generale di derivazione delle funzioni composte per la quale risulta che

$$(\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)_{,\rho}(\rho) = \mathbf{h}_{p,\eta}((\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho)) \gamma_{p,\sigma}^{-1}(\lambda_r(\rho)) \lambda_{r,\rho}(\rho).$$

Tenendo conto della (1.10), e che per la regola di derivazione delle funzioni inverse si ha  $\gamma_{p,\sigma}^{-1}(\lambda_r(\rho)) = [\gamma_{p,\eta}((\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho))]^{-1}$ , si ottiene (segue)



$$\mathbf{r}_{,p}(\rho; t) - a(\rho) \mathbf{R}_{,p}(\rho) (\mathbf{g}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) = \mathbf{0} \quad \rho \in I_p, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{r}(0; t) - \mathbf{h}_p(0; t) = \mathbf{0}. \quad (1.23)$$

Questa forma differenziale mostra come la misura di deformazione  $a$  del cavo non è in relazione con la deformazione locale del corpo ma dipende dalla deformazione globale del corpo lungo il percorso del cavo  $\mathcal{H}$  tramite le  $\gamma_p^{-1}$  e  $\lambda_r$  definite dalle (1.10) ed (1.17). Essa non può essere espressa in forma algebrica ma richiede una dipendenza funzionale che coinvolge la funzione di deformazione  $\mathbf{p}$  e la geometria iniziale del percorso descritta dalla funzione  $\mathbf{H}$ .

Sia la (1.21) che le (1.22) rendono possibile la formulazione del problema per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange [Antman & Marlow, 1991], tuttavia è più conveniente ottenere una rappresentazione delle deformazioni ammissibili del cavo per poter ridurre le dimensioni del problema. In particolare la (1.21) può essere utile per questo scopo osservando che  $\mathbf{h}_p$  e  $\gamma_p^{-1}$  derivano dalla deformazione del corpo mentre ogni funzione invertibile  $\lambda(,; t): I_p \rightarrow [0, l_r]$  può sostituire la particolare funzione  $\lambda_r$  per fornire una deformazione  $\mathbf{r}$  che sia ammissibile all'istante  $t$ . L'insieme delle  $\lambda$ , tramite la

$$\mathbf{r}(\rho; t) = (\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda)(\rho) \quad \rho \in I_p, \quad (1.24)$$

fornisce tutte le funzioni  $\mathbf{r}$  soddisfacenti il vincolo e può essere adottata per rappresentare il moto vincolato del cavo. Tuttavia, nella forma proposta, si possono

$$(\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)_{,p}(\rho) = a(\rho) \mathbf{R}_{,p}(\rho) \mathbf{h}_{p,\eta} \left( (\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) \right) \frac{1}{\gamma_{p,\eta} \left( (\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) \right)}.$$

Ricordando la (1.10) si giunge infine alla relazione

$$(\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)_{,p}(\rho) = a(\rho) \mathbf{R}_{,p}(\rho) (\mathbf{g}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho),$$

nella quale  $\mathbf{g}_p = \mathbf{h}_{p,\eta} / |\mathbf{h}_{p,\eta}|$  è il vettore unitario tangente al percorso del cavo. Si ha quindi

$$\mathbf{r}_{,p}(\rho; t) - a(\rho) \mathbf{R}_{,p}(\rho) (\mathbf{g}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) = \mathbf{0}.$$

avere difficoltà nell'invertire la funzione  $\gamma_p$  per cui risulta più conveniente descrivere la deformazione del cavo  $\mathbf{r}$  all'istante  $t$  per mezzo della funzione

$$\alpha(.,t) = (\gamma_p^{-1} \circ \lambda): I_\rho \rightarrow I_\eta, \quad (1.25)$$

che è ugualmente una funzione invertibile dal momento che la sua derivata è strettamente positiva<sup>6</sup>. La (1.25) permette di rappresentare le deformazioni ammissibili del cavo nella forma

$$\mathbf{r}(\rho;t) = (\mathbf{h}_p \circ \alpha)(\rho;t) = \mathbf{h}_p(\alpha(\rho;t)) \quad \rho \in I_\rho, \quad (1.26)$$

La relazione  $\eta = \alpha(\rho;t)$  stabilisce una corrispondenza tra i punti del cavo  $\mathcal{C}$  e quelli del tracciato  $\mathcal{H}$  che occupano la stessa posizione all'istante  $t$ .

In ultima analisi, il moto del sistema è completamente definito dalle due funzioni  $\mathbf{p}$  e  $\alpha$ : per quanto riguarda il moto del solido questo è descritto dalla sola funzione di deformazione  $\mathbf{p}$ ; per quanto riguarda il cavo occorre affiancare a  $\mathbf{p}$  la funzione scalare  $\alpha$  strettamente crescente e di classe  $C^1$ . La dipendenza non lineare (1.26) della deformazione del cavo dai due descrittori cinematici fornisce un forte accoppiamento tra la deformazione del corpo, lo scorrimento del cavo e la geometria del percorso. Da qui in avanti verranno esplicitate solamente le dipendenze delle generiche quantità dai due descrittori cinematici per analizzare il loro accoppiamento, mentre la dipendenza dalle coordinate materiali  $\rho$ ,  $X_i$  e dal tempo  $t$  verranno omesse.

---

<sup>6</sup> Da quanto visto nella nota 5 si ha che

$$\alpha_{,\rho} = \gamma_{p,\sigma}^{-1}(\lambda_r(\rho))\lambda_{r,\rho}(\rho) = a(\rho)\mathbf{R}_{,\rho}(\rho) \frac{1}{\gamma_{p,\eta}((\gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho))}$$

Dato che tutti i termini del prodotto sono strettamente definiti positivi, anche  $\alpha_{,\rho}$  risulta essere strettamente positiva.

*Osservazione 3*

Le misure di deformazione  $a$  e  $|\mathbf{r}_{,p}|$  sono strettamente positive come conseguenza della regolarità assunta per  $\alpha$  e  $\mathbf{p}$  e non si ha più la necessità di introdurre  $|\mathbf{r}_{,p}| > 0$  come ipotesi indipendente.

*Osservazione 4*

Dal momento che la funzione  $\alpha$  è di classe  $C^1$  con derivata strettamente positiva, essa risulta essere un diffeomorfismo di  $I_p$  in  $I_\eta$ , per cui la relazione (1.26) è geometricamente una relazione di equivalenza<sup>7</sup> tra le curve  $\mathbf{r}$  ed  $\mathbf{h}_p$ .

*Osservazione 5*

I parametri di deformazione  $\alpha$  e  $\alpha_{,p}$  e  $\mathbf{h}_{p,\eta}$ , l'ultimo dei quali valutato per  $\eta = \alpha(\rho; t)$  e dipendente da  $\nabla \mathbf{p}$  ed  $\mathbf{H}$ , contribuiscono alla deformazione locale del cavo

$$\mathbf{r}_{,p} = \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\alpha_{,p}, \quad (1.27)$$

dalla quale derivano immediatamente le quantità precedentemente definite

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\rho; t) &= \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\alpha_{,p}/|\mathbf{R}_{,p}|, \\ \bar{\mathbf{e}}(\rho; t) &= \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\alpha_{,p}/|\mathbf{r}_{,p}|, \\ a(\rho; t) &= |\mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\alpha_{,p}|/|\mathbf{R}_{,p}|. \end{aligned} \quad (1.28)$$

***Interpretazione fisica della funzione  $\alpha$*** 

La funzione  $\alpha$  trova spiegazioni fisiche intuitive. La descrizione del moto del cavo non poteva che essere fortemente dettata dal moto del continuo. Infatti, fissato il moto del continuo risulta noto il moto del percorso del cavo solidale ad esso.

---

<sup>7</sup> Due curve regolari a tratti  $\boldsymbol{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  e  $\boldsymbol{\psi}: [c, d] \rightarrow \mathfrak{R}^n$  si dicono equivalenti ( $\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{\psi}$ ) se esiste un diffeomorfismo  $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$  di classe  $C^1$ , tale che per ogni  $t \in [a, b]$  risulti  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(p(t))$  (e dunque  $\boldsymbol{\psi}(r) = \boldsymbol{\varphi}(p^{-1}(r))$  per ogni  $r \in [c, d]$ ).

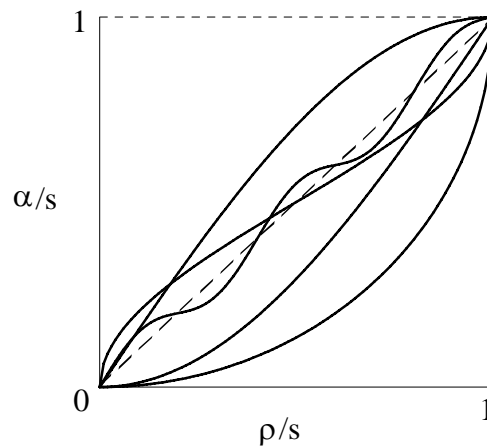


Fig. 1.5. Esempi della funzione  $\alpha$

Dal momento che il cavo può solo scorrere lungo il percorso ormai noto, resta da fissare una funzione scalare che descrive, istante per istante, quello che è lo scorrimento del cavo. La funzione  $\alpha$  assolve praticamente a questo compito permettendo di definire la funzione  $\xi(\rho;t) = \alpha(\rho;t) - \rho$  la quale descrive lo scorrimento dei punti del cavo lungo il proprio percorso<sup>8</sup>. In un piano  $\alpha/s - \rho/s$  le funzioni  $\alpha$  sono rappresentabili come tutte e sole le funzioni strettamente crescenti che collegano i punti (0, 0) e (1, 1) (Fig. 1.5).

*Osservazione 6*

La retta che collega direttamente i suddetti punti rappresenta la situazione in cui non avvengono scorrimenti. Per le ipotesi fatte, oltre a situazioni molto particolari, ciò è vero all'istante  $t_0$

**Velocità ed accelerazione del punto materiale del cavo**

Dalla (1.26), operando la derivata totale rispetto al tempo, si ottiene la velocità della particella del cavo espressa per mezzo dei due descrittori cinematici,

---

<sup>8</sup> Ovviamente, lo scorrimento fisico è dato dalla relazione  

$$\text{scorrimento} = \lambda_r(\rho) - \gamma_p(\rho) = \int_0^\rho |\mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)| \alpha_{,\zeta} |d\zeta - \int_0^\rho |\mathbf{h}_{p,\zeta}| d\zeta \cdot$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{h}}_p(\alpha) + \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{H}(\alpha)) + \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\dot{\alpha}, \quad (1.29)$$

la quale permette di distinguere due contributi: il primo termine è dovuto al trasporto indotto dal moto del percorso  $\mathcal{H}$ , ovvero al moto del continuo, mentre il secondo, tangente al percorso, è dato dalla velocità di scorrimento del cavo (esprime quindi la velocità relativa tra il punto del cavo e quello del continuo che occupano all'istante  $t$  la stessa posizione). Ovviamente quest'ultima componente può essere non nulla persino se il percorso del cavo  $\mathbf{h}_p$  non è soggetto a moto.

Per quanto riguarda l'accelerazione, derivando la (1.29) rispetto al tempo si giunge alla:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha)\ddot{\alpha} + \mathbf{h}_{p,\eta\eta}(\alpha)\dot{\alpha}^2 + \ddot{\mathbf{h}}_p(\alpha) + 2\dot{\mathbf{h}}_{p,\eta}(\alpha)\dot{\alpha}, \quad (1.30)$$

nella quale i primi due termini esprimono l'accelerazione relativa del cavo rispetto al corpo (in particolare il primo rappresenta una componente tangente al percorso mentre il secondo è dovuto alla curvatura dello stesso); il terzo termine rappresenta l'accelerazione di trascinamento indotta dal corpo; l'ultimo termine non è altro che l'accelerazione complementare dovuta alla velocità relativa del punto del cavo rispetto al punto del corpo occupante la stessa posizione.

### 1.2.3. Spazio tangente al vincolo: spostamenti e deformazioni ammissibili del cavo

La relazione non lineare (1.26), che definisce il vincolo per il moto del cavo, individua un sottospazio di quello più ampio in cui potrebbe essere definito il moto dello stesso in assenza di costrizioni; in definitiva, lo spazio delle configurazioni del sistema è costituito dagli elementi di (cfr. §1.2.2.)

$$U = \{(\mathbf{p}, \alpha): \Omega \times I_p \rightarrow \mathcal{V}_C^{\mathcal{E}} \times I_\eta \quad \text{t.c.} \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} \quad \forall P \in \partial\Omega_u \quad \text{e } \alpha_{,p} > 0, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(s) = s\}. \quad (1.31)$$

ed il moto dello stesso può essere rivisto come una curva parametrizzata da  $t$  in  $U$ .

Con riferimento ad un generico elemento  $(\mathbf{p}, \alpha) \in U$  (corrispondente ad un fissato  $t \in [0, +\infty)$ ) è possibile pensare di dare piccole variazioni alla configurazione cosicché la relazione del vincolo (1.26) possa essere linearizzata negli spostamenti. L'insieme delle *variazioni della configurazione* assunta dal cavo in un fissato istante  $t$  costituisce lo *spazio tangente al vincolo*. Quanto segue, oltre che aiutare a capire come il moto e la deformazione del cavo siano indotti dal mutuo accoppiamento con il solido, sarà indispensabile per impostare le condizioni di bilancio del sistema in forma globale, nonché per dedurre la teoria linearizzata del problema a partire da quella esatta.

In termini rigorosi, si consideri lo spazio

$$U_0 = \{(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\alpha}): \Omega \times I_p \rightarrow \mathcal{V}_C^{\mathcal{E}} \times I_\eta \quad \text{t.c.} \\ \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \forall P \in \partial\Omega_u \quad \text{e } \hat{\alpha}(0) = 0, \hat{\alpha}(s) = 0\}, \quad (1.32)$$

ogni elemento di  $U_0$ , tramite la

$$(\mathbf{p}^\tau, \alpha^\tau) = (\mathbf{p} + \tau\hat{\mathbf{p}}, \alpha + \tau\hat{\alpha}) \in U, \quad (1.33)$$

definisce unicamente una curva nello spazio delle configurazioni  $U$  del sistema la quale ha origine nella configurazione data  $(\mathbf{p}, \alpha)$ . In termini espliciti il vincolo per il cavo (1.26) nelle configurazioni individuate dalla curva (1.33) si riscrive come

$$\mathbf{r}^\tau = \mathbf{p}(\mathbf{H}(\alpha + \tau\hat{\alpha})) + \tau\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{H}(\alpha + \tau\hat{\alpha})). \quad (1.34)$$

A questo punto si definisce le variazioni ammissibili della configurazione del cavo nella direzione  $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\alpha})$  come

$$\hat{\mathbf{r}} = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\mathbf{r}^\tau) = \nabla \mathbf{p} \mathbf{H}_{,\eta} \hat{\alpha} + \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{H}) = \mathbf{h}_{p,\eta} \hat{\alpha} + \mathbf{h}_{\hat{p}}. \quad (1.35)$$

La (1.35) esprime l'azione del vincolo introdotto in §1.2.2 nei confronti della funzione di deformazione del cavo allorquando la configurazione del sistema subisce una variazione infinitesima.

### Osservazione 1

La variazione della configurazione del cavo per effetto delle variazioni infinitesime della deformazione del corpo e della funzione  $\alpha$  è data da una componente tangente al percorso del cavo nella configurazione attuale, dovuta alla variazione degli scorrimenti tra il cavo ed il corpo, e da una componente di trasporto dovuta alla variazione della configurazione del corpo.

Per quanto riguarda la variazione della misura di deformazione del cavo  $\hat{\mathbf{r}}_{,p}$  occorre riferirsi alla

$$\mathbf{r}^\tau_{,p} = \left\{ \left[ \nabla \mathbf{p}(\alpha + \tau \hat{\alpha}) + \tau \nabla \hat{\mathbf{p}}(\alpha + \tau \hat{\alpha}) \right] \mathbf{H}_{,\eta}(\alpha + \tau \hat{\alpha}) \right\} (\alpha + \tau \hat{\alpha})_{,p}, \quad (1.36)$$

la quale fornisce la misura di deformazione quando la configurazione varia secondo la (1.33). La variazione ammissibile della misura di deformazione del cavo in direzione  $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\alpha})$  si ottiene quindi dalla<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{,p} &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\mathbf{r}^\tau_{,p}) = \left[ \nabla \nabla \mathbf{p}(\mathbf{H}_{,\eta} \otimes \mathbf{H}_{,\eta}) + \nabla \mathbf{p} \mathbf{H}_{,\eta\eta} \right] \alpha_{,p} \hat{\alpha} + \nabla \hat{\mathbf{p}} \mathbf{H}_{,\eta} \alpha_{,p} + \nabla \mathbf{p} \mathbf{H}_{,\eta} \hat{\alpha}_{,p} = \\ &= \mathbf{h}_{p,\eta\eta}(\alpha) \alpha_{,p} \hat{\alpha} + \mathbf{h}_{\hat{p},\eta}(\alpha) \alpha_{,p} + \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha) \hat{\alpha}_{,p}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

<sup>9</sup> Ovviamente, la (1.37) si sarebbe potuta ottenere anche per derivazione rispetto a  $p$  della (1.35).

*Osservazione 2*

Nella variazione della misura di deformazione del cavo, generata da una variazione infinitesima della configurazione del sistema, si distinguono tre contributi: il primo è dovuto allo scorrimento  $\hat{\alpha}$  per effetto della curvatura del percorso; il secondo contributo è un termine di trasporto indotto dalla deformazione del corpo; il terzo è una componente tangente al percorso del cavo nella configurazione attuale dovuto alla sola variazione degli scorrimenti del cavo.



## 2. CONDIZIONI DI BILANCIO

Si scrivono le condizioni di bilancio per il sistema costituito dal solido tridimensionale e dal cavo. La scrittura a priori delle relazioni in forma globale tramite il principio di Lagrange D'Alambert è la più naturale per il sistema e permette di superare la descrizione locale del problema di contatto cavo-corpo. La condizione ottenuta verrà interpretata localmente onde ottenere informazioni qualitative sull'interazione tra i due componenti strutturali. La trattazione presentata può essere banalmente estesa al caso più complesso in cui siano presenti più cavi.

### 2.1. Prescrizioni costitutive sui materiali e definizione delle azioni esterne

Si assume che il corpo sia costituito da un materiale semplice iperelastico [Truesdell & Noll, 1965], per cui in ogni punto risulta definita la funzione  $w(X_i; \mathbf{C})$  a valori reali positivi che descrive la densità di energia elastica in funzione della misura di deformazione locale  $\mathbf{C} = (\nabla \mathbf{p})^T \nabla \mathbf{p}$ . Si suppone che per i casi estremi di deformazione, ovvero quando  $|\nabla \mathbf{p}|$  tende a zero o ad infinito, la funzione  $w$  sia tale da tendere all'infinito. Da questa è possibile ottenere le misure di tensione fornite dal primo e secondo tensore di Piola-Kirchhoff, indicati rispettivamente con  $\mathbf{S}$  e  $\bar{\mathbf{S}}$ , mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{S}(X_i; \nabla \mathbf{p}) = \nabla \mathbf{p} \bar{\mathbf{S}}(X_i; \nabla \mathbf{p}) = \nabla \mathbf{p} \frac{\partial w(X_i; \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (1.38)$$

Si assume che anche il cavo sia iperelastico ed omogeneo, nel senso che esiste una funzione a valori reali positivi  $\omega(\rho; \mathbf{e})$  la quale fornisce l'energia potenziale elastica specifica in funzione della misura locale di deformazione descritta in ogni punto  $\rho$  da  $\mathbf{e} = a\bar{\mathbf{e}}$ .

### Osservazione 1

Il principio di indifferenza rispetto al sistema di riferimento materiale richiede che sia soddisfatta la

$$\omega(\rho; a, \bar{\mathbf{e}}) = \omega(\rho; a, \mathbf{c} + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{e}}) \quad (1.39)$$

per ogni  $\mathbf{c} \in \mathcal{V}\mathcal{E}$  e  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^1$  i quali definiscono un generico moto rigido sovrapposto al moto del sistema. In particolare, dovendo valere la (1.39) anche nel caso in cui  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{c} = -\bar{\mathbf{e}}$  (per un fissato  $\rho \in I_\rho$ ) si conclude che  $\omega$  deve essere funzione solamente della misura di deformazione scalare del cavo  $a$ .

Similmente a quanto supposto per la funzione densità di energia elastica definita per il continuo, si assume che  $\omega$  sia divergente ad infinito quando il suo argomento  $a$  tende a zero o infinito. La derivata  $\tau(\rho; a)$  di  $\omega(\rho; a)$  rispetto ad  $a$  indica l'intensità della forza interna generata dalla deformazione, mentre la derivata rispetto a  $\mathbf{e}$  fornisce un vettore  $\boldsymbol{\tau}(\rho; \mathbf{e})$  tangente al cavo<sup>2</sup>, che descrive completamente tale forza,

$$\boldsymbol{\tau}(\rho; \mathbf{e}) = \omega_{,a}(\rho; a)\bar{\mathbf{e}}(\rho) = \tau(\rho; a)\bar{\mathbf{e}}(\rho). \quad (1.40)$$

In conclusione, il comportamento costitutivo del cavo è fornito dalla funzione  $\omega(\rho; a)$

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{Q} \in \text{Orth} \iff \mathbf{Q}: \mathcal{V}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}\mathcal{E} \quad \text{t.c.} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\mathcal{E} \implies \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

<sup>2</sup> Scrivendo  $a$  come  $a = \mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}}$  deriva immediatamente che  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{e}} = \omega_{,a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (\mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{e}}) = \omega_{,a} \bar{\mathbf{e}}$

che dipende dal particolare materiale di cui è costituito e che deve essere dedotta da osservazioni sperimentali, mentre  $\bar{\epsilon}$  dipende solamente dalla deformazione.

Per quanto riguarda l'interazione cavo-continuo si hanno problemi di definizione per il fatto che l'uno è una varietà monodimensionale di misura nulla in  $\mathfrak{R}^3$  mentre l'altro una varietà tridimensionale. Le forze di interazione sono infatti forze di linea per le quali esiste una soluzione al problema elastico del cavo isolato ma per le quali non si ha soluzione del problema elastico del solido tridimensionale. Anche se la geometria del cavo e della guaina in cui esso scorre rende conveniente un modello monodimensionale, in realtà la sua dimensione trasversale, pur essendo molto piccola, giuoca ugualmente un ruolo importante nell'interazione tra i due componenti. Per superare il problema si ricorre all'artificio di introdurre particolari prescrizioni costitutive per la regione  $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$  occupata dalla guaina di passaggio del cavo. Più precisamente, si assume che  $\mathbf{P}(\mathcal{S})$  occupi una piccola regione tubolare con asse  $\mathbf{H}$  nella configurazione di riferimento e si ipotizza che le deformazioni di tale regione siano del tipo della trave di Kirchhoff senza che venga incrementata l'energia di deformazione del sistema. In altri termini, se  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  sono elementi lineari giacenti sulla stessa sezione di  $\mathbf{P}(\mathcal{S})$  (e quindi anche tali che  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{G} = 0$ ), si suppone che  $\nabla_p \mathbf{A} \cdot \nabla_p \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , ovvero che la deformazione del corpo nella regione  $\mathcal{S}$  sia tale che la sezione della regione tubolare si mantenga indeformata e che l'energia di deformazione sia  $w(X_i, \mathbf{C}) = 0$  per le restanti deformazioni ammissibili.

Si completa la descrizione del sistema assumendo che esistano due funzioni positive scalari note  $m_0(X_i): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^+$  e  $\mu_0(\rho): I_\rho \rightarrow \mathfrak{R}^+$  che descrivono la densità di massa del corpo e del cavo, nella configurazione di riferimento. La funzione  $m_0$  è una massa per unità di volume mentre la funzione  $\mu_0$  è la densità dell'elemento materiale di cavo e corrisponde alla classica massa per unità di lunghezza (nella configurazione di riferimento) moltiplicata per  $|\mathbf{R}_{,\rho}|^3$ .

---

<sup>3</sup> Infatti se  $\mu_0^*$  è la massa per unità di lunghezza del cavo deve valere la  $\mu_0^* dl(\rho) = \mu_0 d\rho$ . Ricordando che  $dl(\rho) = |\mathbf{R}_{,\rho}| d\rho$ , si ottiene che  $\mu_0 = \mu_0^* |\mathbf{R}_{,\rho}|$ .

### **Definizione delle forze agenti sul sistema**

Si assume che il corpo subisca le forze di massa  $\mathbf{b}(X_i; t; \mathbf{p})$  agenti su  $\Omega$  e le forze di contatto  $\mathbf{f}(X_i; t; \nabla \mathbf{p})$  agenti sulla superficie descritta dalla parte  $\partial\Omega_s$  della frontiera di  $\Omega$ , mentre, come già detto, i punti giacenti sulla rimanente parte di frontiera  $\partial\Omega_u$  sono soggetti ad un moto noto descritto dalla funzione  $\tilde{\mathbf{p}}$ . Il cavo sia soggetto ad una generica distribuzione di forze di massa  $\boldsymbol{\beta}(\rho; t; \mathbf{p}, \alpha)$ . Come prima, affinché  $\boldsymbol{\beta}$  risulti riferita all'elemento materiale di cavo  $d\rho$  si suppone che essa sia ottenuta dalla forza per unità di massa moltiplicata per  $|\mathbf{R}_{,\rho}|$ .

### **2.2. La condizione di bilancio globale**

In base alle definizioni precedenti, la condizione di bilancio viene scritta in forma debole, o integrale, secondo il principio di Lagrange-D'Alembert<sup>4</sup> [Truesdell & Toupin, 1960]

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\nabla \mathbf{p}), \nabla \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} + \langle m_o(\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(\mathbf{p})), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f}(\nabla \mathbf{p}), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\partial\Omega_s} + \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_{,\rho}), \hat{\mathbf{r}}_{,\rho} \rangle_{I_p} + \langle \mu_o(\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), \hat{\mathbf{r}} \rangle_{I_p} = 0 \\ \forall (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}) \in \hat{U}; \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (1.41)$$

#### *Osservazione 1*

La forma assegnata al principio rappresenta tacitamente un'ipotesi sul comportamento meccanico del sistema. Nel caso considerato, esso implica che nessun lavoro virtuale è collegato alle forze di interazione tra cavo e corpo, sia agli ancoraggi che lungo la curva. Dal momento che compare esplicitamente la funzione  $\mathbf{r}$ , la (1.41) è valida per un sistema in cui non si hanno restrizioni imposte alla deformazione del cavo.

---

<sup>4</sup> Le parentesi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indicano la dualità tra due spazi di funzioni vettoriali definiti sullo stesso dominio. Le espressioni  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\Omega}$  e  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{I_p}$  coincidono con  $\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} d\Omega$  e  $\int_{I_p} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} d\rho$  per le funzioni con prodotto sommabile.

Non è tra gli intenti di questo lavoro analizzare le questioni riguardanti l'esistenza della soluzione del problema e si assume semplicemente che le forze, le tensioni del corpo e la trazione del cavo permettano di definire le precedenti relazioni di dualità sullo spazio  $\hat{U}$  delle deformazioni ammissibili  $(\hat{p}, \hat{r})$  definite su  $\Omega \times I_p$ .

Nel caso analizzato, tenuto conto del vincolo cui è soggetto il cavo, si possono esplicitare le variazioni della configurazione  $\hat{r}$  e della misura di deformazione  $\hat{r}_p$  secondo le (1.35) ed (1.37). La condizione di bilancio precedente diventa ora una forma lineare in  $(\hat{p}, \hat{\alpha})$  dove la parte relativa al corpo rimane inalterata mentre la parte relativa al cavo determina nuove relazioni di dualità tra gli enti cinematici scelti per descrivere la deformazione del sistema e nuovi enti dinamici. Il termine legato alla forza interna sul cavo  $\tau$ , che dipende questa volta da  $\nabla p$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_p$  per effetto della (1.37), assume la seguente forma

$$\begin{aligned} \langle \tau, \hat{r}_p \rangle_{I_p} &= \langle \tau, [\alpha_p \mathbf{h}_{\hat{p}, \eta}(\alpha) + \hat{\alpha}_p \mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha) + \hat{\alpha} \alpha_p \mathbf{h}_{p, \eta \eta}(\alpha)] \rangle_{I_p} \\ &= \langle \alpha_p \tau, \mathbf{h}_{\hat{p}, \eta}(\alpha) \rangle_{I_p} + \langle \tau \cdot \mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha), \hat{\alpha}_p \rangle_{I_p} + \langle \alpha_p \tau \cdot \mathbf{h}_{p, \eta \eta}(\alpha), \hat{\alpha} \rangle_{I_p}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Il vettore  $\mathbf{h}_{\hat{p}, \eta}(\alpha)$  che è il trasformato di  $\mathbf{H}_{, \eta}$  dovuto alla deformazione virtuale del corpo  $\hat{p}$  con  $\alpha$  fissato, è posto in dualità (ovvero fa compiere lavoro virtuale) con il vettore  $\alpha_p \tau$  tangente al percorso; il valore scalare  $\hat{\alpha}_p$  descrive una deformazione virtuale del cavo sul percorso fisso e fa compiere lavoro alla quantità  $\tau \cdot \mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha) = \tau \|\mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha)\|$  data dal prodotto scalare di due vettori paralleli e tangenti al percorso; infine  $\hat{\alpha}$ , che descrive lo scorrimento virtuale lungo il percorso fisso, fa compiere lavoro alla  $\alpha_p \tau \cdot \mathbf{h}_{p, \eta \eta}(\alpha)$ . Le dualità determinate dall'altro termine relativo al cavo, dovuto alla presenza delle forze esterne, sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \langle \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), \hat{r} \rangle_{I_p} &= \langle \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), [\mathbf{h}_{\hat{p}}(\alpha) + \hat{\alpha} \mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha)] \rangle_{I_p} \\ &= \langle \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), \mathbf{h}_{\hat{p}}(\alpha) \rangle_{I_p} + \langle \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{h}_{p, \eta}(\alpha), \hat{\alpha} \rangle_{I_p}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

In sostanza le forze di massa applicate sul cavo sono poste in dualità con la funzione

che descrive l'atto di moto di trasporto indotto dalla deformazione virtuale del corpo  $\hat{p}$ , e solo una loro componente tangenziale è posta in dualità con l'atto di moto relativo cavo-corpo  $\hat{\alpha}$ . Ovviamente l'accelerazione del cavo  $\dot{\mathbf{r}}$  è da valutarsi secondo la (1.30), anche se nello scrivere la (1.43) non si è operata l'esplicitazione per mantenere una forma più compatta.

Tenendo conto delle (1.42) e (1.43), la (1.41) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{S}(\nabla \mathbf{p}), \nabla \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} + \langle m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(\mathbf{p})), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f}(\nabla \mathbf{p}), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\partial \Omega_s} + \\ & + \langle \alpha_{,p} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{h}_{\hat{p},\eta}(\alpha) \rangle_{I_p} + \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha), \hat{\alpha}_{,p} \rangle_{I_p} + \langle \alpha_{,p} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha), \hat{\alpha} \rangle_{I_p} + \\ & + \langle \mu_o (\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), \mathbf{h}_{\hat{p}}(\alpha) \rangle_{I_p} + \langle \mu_o (\dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{h}_{p,\eta}(\alpha), \hat{\alpha} \rangle_{I_p} = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\alpha}) \in U_o; \forall t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (1.44)$$

che è la condizione di equilibrio cercata.

La condizione di bilancio relativa al momento angolare non è riportata in quanto non fornisce ulteriori informazioni dal momento che  $\bar{\mathbf{S}}$ , in questo caso, è simmetrico come conseguenza dell'esistenza della densità dell'energia di deformazione  $w(X_i; C)$ .

### 2.3. Bilancio locale delle forze: l'interazione cavo-corpo

Come già detto l'espressione (1.44), data al principio di D'Alambert, è sostanzialmente un'ipotesi sul comportamento del sistema. Stante la sua natura di globalità, essa non riesce ad evidenziare alcuni aspetti locali delle interazioni che intervengono tra il cavo ed il corpo e, in particolare, l'assenza di attrito o altre forze tangenziali interne lungo il percorso del cavo. In questo paragrafo si tenta di dare una interpretazione locale della relazione di bilancio globale precedentemente introdotta.

Se si considera l'insieme ridotto delle funzioni test  $\hat{p}$  il cui supporto consiste nella regione  $\Omega$  esclusi i punti appartenenti alla curva  $\mathcal{H}$ , e si suppone  $\hat{\alpha} = 0$ , per il teorema

fondamentale del calcolo delle variazioni e per il teorema generalizzato di Gauß la (1.44) si riduce alla ben nota condizione locale

$$- \text{Div} \mathbf{S} + m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad (1.45)$$

che deve valere, in senso generalizzato, sull'insieme dei punti in cui si sono definite le funzioni test. Viceversa, se sono considerate le sole variazioni  $\hat{\alpha}$  (ovvero  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ ) la forma globale risulta equivalente alla

$$[-\boldsymbol{\tau}_{,\rho} + \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta})] \cdot \bar{\mathbf{e}} = 0, \quad (1.46)$$

la quale implica che la variazione delle componenti delle forze interne lungo il cavo nella direzione della tangente dello stesso devono essere esclusivamente bilanciate dalle componenti di  $\boldsymbol{\beta}$  ed  $\ddot{\mathbf{r}}$  nella stessa direzione.

Si considerino ora le funzioni test  $\hat{\mathbf{p}}$  definite su di un supporto compatto contenente  $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ , e conseguentemente la curva  $\mathbf{H}$ . In particolare, questo supporto consista in un tubo contenente  $\mathbf{P}(\mathcal{S})$  ed avente una sezione costante  $\Gamma$  la quale può essere arbitrariamente piccola<sup>5</sup>. La (1.44) si riduce alla

$$\langle -\text{Div} \mathbf{S} + m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(\mathbf{p})), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega_{\mathcal{S}}} - \langle \boldsymbol{\tau}_{,\rho}, \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{p}}} \rangle_{I_p} + \langle \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}), \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{p}}} \rangle_{I_p} = 0. \quad (1.47)$$

Tenendo in conto la precedente condizione di bilancio (1.46), e considerando  $\hat{\mathbf{p}}$  come somma delle componenti  $\hat{\mathbf{p}}_{\bar{\mathbf{e}}} = (\bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{p}}$  e  $\hat{\mathbf{p}}_n = \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}}_{\bar{\mathbf{e}}}$ , rispettivamente tangente e ortogonale alla curva, è possibile scindere la (1.47) nelle

$$[-\text{Div} \mathbf{S} + m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b})] \cdot \bar{\mathbf{e}} = 0, \quad (1.48)$$

$$\langle -\text{Div} \mathbf{S} + m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}), \hat{\mathbf{p}}_n \rangle_{\Gamma} + [\mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\tau}_{,\rho}] \cdot \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{p}}_n} = 0. \quad (1.49)$$

<sup>5</sup> Il dominio delle funzioni test è dato dal prodotto cartesiano  $\Omega_{\mathcal{S}} = \Gamma \times [0, s]$ .

In definitiva, la (1.48) esprime come le componenti delle forze di massa  $m_o(\ddot{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\beta})$  nella direzione tangente alla curva siano bilanciate dal flusso della tensione attraverso  $\Gamma$ . Viceversa, la (1.49) implica che sulla superficie della guaina è richiesta una componente di tensione per bilanciare le forze sul cavo nel piano normale al percorso anche in assenza di forze esterne.

### *Osservazione 1*

Dal momento che le forze sul cavo  $\mu_o(\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta})$  sono analogamente bilanciate dalla sola variazione della forza interna  $\boldsymbol{\tau}$  lungo la stessa direzione, si può dedurre che il contatto avviene senza forze nella direzione tangente alla curva. In altri termini, l'aver scritto a priori la condizione di bilancio (1.44) implica una restrizione della famiglia delle forze di contatto che si possono avere lungo il cavo escludendo le forze di natura attritiva.

Alla stessa maniera, considerando funzioni test definite negli intorni delle estremità della curva si ha la possibilità di evidenziare le forze che assicurano l'equilibrio degli ancoraggi.

### **2.3.1. Le forze reattive applicate sul cavo**

Le forze che agiscono sul cavo hanno natura reattiva; esse intervengono per la presenza del vincolo elastico costituito dal percorso interno al solido e non sono deducibili dalla deformazione del cavo ma bensì da sole relazioni di equilibrio.

Isolando il cavo, e indicando con  $\mathbf{i}$  le forze di interazione che agiscono sul cavo lungo il proprio sviluppo, e con  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_O$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_S$  quelle di ancoraggio applicate alle estremità, deve essere soddisfatta la condizione di bilancio globale

$$\int_0^s \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}_{,p}) \cdot \hat{\mathbf{r}}_{,p} d\rho + \int_0^s [\mu_o(\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{i}] \cdot \hat{\mathbf{r}} d\rho - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_O \cdot \hat{\mathbf{r}}_O - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_S \cdot \hat{\mathbf{r}}_S = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.50)$$



dove  $\hat{\mathbf{r}}$  è una qualsiasi deformazione infinitesima ammissibile del cavo completamente indipendente dal moto del solido e tale che siano definiti gli integrali che compaiono nella relazione. La (1.50), per il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni, risulta essere equivalente alla condizione locale

$$\mathbf{i} = \mu_o (\ddot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\tau}_p, \quad (1.51)$$

con le associate condizioni al contorno

$$\boldsymbol{\tau}_o = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}_s = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_s. \quad (1.52)$$

La (1.51) permette di conoscere l'interazione cavo-continuo  $\mathbf{i}$  che, come era logico attendersi, è data da una componente di reazione alle forze di massa e da una componente di reazione dovuta al variare della forza interna lungo il percorso del cavo (in intensità e direzione). Ovviamente, dovendo valere la (1.46) si ha che  $\mathbf{i}$  è ortogonale al cavo. Le (1.52), invece, formalizzano l'ovvia osservazione che la tensione del cavo alle estremità debba essere equilibrata esclusivamente dalle forze di ancoraggio.

### *Osservazione 1*

La forza di interazione  $\mathbf{i}$  non è una forza definita sull'unità di lunghezza di cavo dal momento che è stata riferita all'elemento materiale di cavo. Infatti la curva tracciata da  $\mathcal{C}$  nella configurazione di riferimento non è parametrizzata secondo la rappresentazione naturale. La forza per unità di lunghezza del cavo si ottiene dividendo  $\mathbf{i}$  per la quantità  $|\mathbf{R}_p|$ .

### 3. TEORIA LINEARIZZATA

Nella soluzione delle equazioni non lineari ottenute in precedenza ed in numerose situazioni di interesse ingegneristico, risulta di fondamentale importanza lo studio del problema lineare che può essere derivato dalla precedente teoria assumendo che il moto si sviluppi in un intorno sufficientemente piccolo di una assegnata configurazione equilibrata tanto da rendere accettabile una formulazione lineare rispetto agli spostamenti (problema della deformazione infinitesima sovrapposta ad una deformazione finita [Truesdell & Noll, 1965]). La configurazione di riferimento è scelta coincidente con la configurazione nota equilibrata. L'ipotesi di base della trattazione consiste quindi nell'assumere che la norma degli spostamenti e degli scorrimenti, definiti dalle

$$\mathbf{u}(X_i; t) = \mathbf{p} - \mathbf{P}, \quad (1.53)$$

$$\xi(\rho; t) = \alpha - \rho, \quad (1.54)$$

nonché quelle delle loro derivate spaziali, sono piccole rispetto ad un parametro  $\varepsilon$ ; la teoria lineare sviluppata è quindi tale da coincidere con la teoria esatta quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e tale da differirvi per errori limitati da  $\varepsilon^2$ .

Nei paragrafi che seguono verranno linearizzate le grandezze cinematiche coinvolte nell'equazione di bilancio con particolare attenzione a quelle relative al cavo. Quindi,

una volta linearizzati anche i legami costitutivi nell'intorno dello stato tensionale noto, si procederà a riscrivere la condizione di bilancio globale.

### 3.1. Linearizzazione delle grandezze cinematiche

Data la piccolezza degli spostamenti  $\mathbf{u}$  e gli scorrimenti  $\xi$ , questi possono essere rivisti come variazioni ammissibili della configurazione nota (cfr. §1.2.5); la linearizzazione della deformazione del cavo deriva quindi dalla (1.35) ponendo  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{u}$ ,  $\hat{\alpha} = \xi$  e ricordando che nella configurazione di riferimento si ha  $\eta = \rho$ ; si ottiene quindi

$$\mathbf{r} \cong \mathbf{R} + \mathbf{h}_u(\rho) + \mathbf{R}_{,\rho} \xi, \quad (1.55)$$

Nella (1.55), la scrittura  $\mathbf{h}_u(\rho)$  denota che il campo di spostamenti  $\mathbf{h}_u$ , definito sull'insieme  $I_\eta$  dell'ascissa curvilinea di  $\mathcal{H}$  secondo la precedente relazione, è valutato per  $\eta = \alpha(\rho) = \rho$ . Dalla (1.55) l'espressione linearizzata della deformazione può essere dedotta per semplice derivazione nella forma

$$\mathbf{r}_{,\rho} \cong \mathbf{R}_{,\rho} + \mathbf{h}_{u,\eta}(\rho) + \xi \mathbf{R}_{,\rho\rho} + \xi_{,\rho} \mathbf{R}_{,\rho}. \quad (1.56)$$

Come già osservato (cfr. §1.2.2) tre termini contribuiscono alla deformazione del cavo. Essi sono relazionati alla deformazione del percorso del cavo  $\mathbf{h}_{u,\eta}$ , all'allungamento del cavo lungo la direzione tangente  $\mathbf{R}_{,\rho}$  e allo scorrimento  $\xi$  che fornisce una componente normale alla curva e proporzionale alla curvatura del percorso.

### 3.2. Linearizzazione dei legami costitutivi

Le forze applicate al sistema nella configurazione esaminata, equilibrata per ipotesi, sono costituite internamente da un campo di tensione noto  $\mathbf{T}_0(X_i)$  sul corpo ( $\mathbf{T}_0$  coincide con il tensore di stress di Cauchy) e da un campo di forze di trazione

$\boldsymbol{\tau}_0(\rho) = \tau_0 \mathbf{E}$ , anche questo noto, definito lungo il cavo. La tensione sul corpo e le forze sul cavo fanno equilibrio alle azioni esterne esistenti nella configurazione di riferimento, indicate con  $\mathbf{b}_0, \mathbf{f}_0$  e  $\boldsymbol{\beta}_0$ , ed alle forze di inerzia indotte dalle accelerazioni del moto incipiente del sistema  $(\ddot{\mathbf{p}})_0$  ed  $(\ddot{\mathbf{r}})_0$ . Il bilancio della configurazione di riferimento è espresso dalla

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{T}_0, \nabla \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} + \langle m_0 [(\ddot{\mathbf{p}})_0 - \mathbf{b}_0], \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\partial\Omega_s} + \left\langle \tau_0, \left[ \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}, \eta} + \hat{\xi}_{, \rho} \mathbf{R}_{, \rho} + \hat{\xi}_{, \rho\rho} \right] \right\rangle_{I_p} \\ & + \left\langle \mu_0 [(\ddot{\mathbf{r}})_0 - \boldsymbol{\beta}_0], \left[ \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\xi}_{, \rho} \mathbf{R}_{, \rho} \right] \right\rangle_{I_p} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\xi}) \in U_0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

che deriva direttamente dalla (1.44)

Nelle configurazioni diverse, da quella cui ci si riferisce, lo stato tensionale subisce un incremento in modo tale che sia garantito l'equilibrio alle variazioni delle forze esterne nonché alle variazioni delle forze di inerzia. Nel caso di spostamenti infinitesimi il secondo tensore di Piola-Kirchhoff relativo alla configurazione variata può calcolarsi linearizzando la legge costitutiva del materiale di cui è formato il solido nell'intorno dello stato di tensione  $\mathbf{T}_0$ . Per il generico punto  $(X_i)$  del corpo si ha

$$\bar{\mathbf{S}}(\nabla \mathbf{u}) \cong \mathbf{T}_0 + \mathbf{C}_0 [(\nabla \mathbf{u})^{Sym}], \quad (1.58)$$

dove  $\mathbf{C}_0$ , che rappresenta la rigidità tangente del materiale, è il tensore del quarto ordine definito dalla<sup>1</sup>

$$\mathbf{C}_0 = 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{I}}. \quad (1.59)$$

Anche il legame costitutivo del cavo può essere linearizzato nell'intorno della tensione  $\tau_0 \mathbf{E}$  propria della configurazione di riferimento; per il generico punto  $\rho$  si ottiene la relazione

---

<sup>1</sup> La derivata viene calcolata per  $\mathbf{C}=\mathbf{I}$  che rappresenta la misura di deformazione nella configurazione equilibrata di riferimento.

$$\tau(\mathbf{h}_{u,\eta}(\rho), \xi, \xi_{,\rho}) \cong \tau_0 \mathbf{E} + c_0 (a-1) \mathbf{E} + \tau_0 (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E}), \quad (1.60)$$

dove lo scalare  $c_0$  denota la derivata  $\left. \frac{d\tau}{da} \right|_{a=1}$  e rappresenta la rigidità tangente del cavo

valutata per  $a=1$  (valore della deformazione del cavo nella configurazione di riferimento). Ovviamente, coerentemente con l'ipotesi di spostamenti sovrapposti infinitesimi, la descrizione deve essere completata linearizzando le variazioni della misura di deformazione pura del cavo  $(a-1)$  e del versore tangente  $(\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E})$ . Ricordando la definizione di  $a = |\mathbf{r}_{,\rho}| / |\mathbf{R}_{,\rho}|$ , si ottiene:

$$a = |\mathbf{r}_{,\rho}| / |\mathbf{R}_{,\rho}| = \frac{(\mathbf{r}_{,\rho} \cdot \mathbf{r}_{,\rho})^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{R}_{,\rho}|} \cong 1 + \frac{[\mathbf{R}_{,\rho} \cdot (\mathbf{r}_{,\rho} - \mathbf{R}_{,\rho})]}{|\mathbf{R}_{,\rho}|^2} = 1 + \frac{(\mathbf{r}_{,\rho} - \mathbf{R}_{,\rho}) \cdot \mathbf{R}_{,\rho}}{|\mathbf{R}_{,\rho}|} = 1 + (\mathbf{e} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}, \quad (1.61)$$

In maniera più specifica, dalla (1.55), si ha che

$$a-1 \cong (\mathbf{e} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = [\mathbf{h}_{u,\eta}(\rho) + \xi_{,\rho} \mathbf{R}_{,\rho} + \xi \mathbf{R}_{,\rho\rho}] \cdot \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{R}_{,\rho}|}, \quad (1.62)$$

la quale può essere resa più esplicita introducendo le notazioni  $\mathbf{v}^t = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{v}$  per indicare le componenti del generico campo vettoriale  $\mathbf{v}$ , definito su  $I_\rho$ , rispettivamente secondo la direzione tangente e sul piano ortogonale alla tangente in ogni punto del percorso del cavo. Questo conduce alla seguente relazione equivalente alla (1.62):

$$a-1 \cong \left( \mathbf{h}'_{u,\eta}(\rho) + |\mathbf{R}_{,\rho}| \xi_{,\rho} + |\mathbf{R}'_{,\rho\rho}| \xi \right) \frac{1}{|\mathbf{R}_{,\rho}|}. \quad (1.63)$$

*Osservazione 1*

Nella teoria lineare, l'allungamento del cavo è dato dalla componente di  $(\mathbf{e} - \mathbf{E})$  tangente al percorso. In termini di descrittori cinematici,  $(a - 1)$  viene a dipendere direttamente dalla deformazione del corpo  $\nabla \mathbf{u}$ , dallo scorrimento  $\xi$  e dalla sua derivata  $\xi_{,p}$ .

Per quanto riguarda la variazione infinitesima del versore tangente occorre linearizzare la  $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{r}_{,p} / |\mathbf{r}_{,p}|$  nell'intorno della configurazione di riferimento nella quale il versore tangente al cavo è  $\mathbf{E}$ . Si ha che:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{r}_{,p} (\mathbf{r}_{,p} \cdot \mathbf{r}_{,p})^{-\frac{1}{2}} &\cong \mathbf{E} + \frac{\mathbf{r}_{,p} - \mathbf{R}_{,p}}{|\mathbf{R}_{,p}|} - \frac{[(\mathbf{r}_{,p} - \mathbf{R}_{,p}) \cdot \mathbf{R}_{,p}] \mathbf{R}_{,p}}{|\mathbf{R}_{,p}|^3} \\ &= \mathbf{E} + (\mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E})(\mathbf{e} - \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (1.64)$$

e quindi

$$\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E} \cong [\mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}](\mathbf{e} - \mathbf{E}) = [\mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}] \left[ \mathbf{h}_{u,\eta}(\rho) + \xi_{,p} \mathbf{R}_{,p} + \xi \mathbf{R}_{,pp} \right] \frac{1}{|\mathbf{R}_{,p}|}. \quad (1.65)$$

In base alle notazioni introdotte la precedente espressione può essere riscritta nella forma equivalente

$$\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E} \cong (\mathbf{h}_{u,\eta}^n(\rho) + \xi \mathbf{R}_{,pp}^n) \frac{1}{|\mathbf{R}_{,p}|}. \quad (1.66)$$

*Osservazione 2*

In questo caso la componente significativa di deformazione del cavo che comporta la variazione del versore tangente, è rappresentata dalla componente di  $(\mathbf{e} - \mathbf{E})$  normale al percorso. In termini di descrittori cinematici, solo la parte ortogonale al percorso della componente di deformazione del cavo legata alla deformazione del corpo  $\mathbf{h}_{u,\eta}(\rho)$  ed il termine legato allo scorrimento (dovuto alla curvatura del cavo)

contribuiscono alla variazione dell'orientamento della forza di trazione  $\boldsymbol{\tau}$ . Viceversa, il termine in relazione con la derivata  $\xi_{,p}$ , in quanto tangente al percorso, viene annichilito dal proiettore  $(\mathbf{I} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{E})$ .

### 3.3. La condizione di bilancio linearizzata

Le espressioni linearizzate delle quantità cinematiche (cfr. §3.1) e dinamiche (cfr. §3.2) possono essere usate per riscrivere la condizione di bilancio (1.44). Ricordando che affinché le tensioni iniziali  $\mathbf{T}_0$  e  $\boldsymbol{\tau}_0$  siano bilanciate dalle forze esterne  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{f}_0$  e  $\boldsymbol{\beta}_0$  nonché dalle forze di inerzia dovute alle accelerazioni del sistema, deve valere la (1.57) è possibile dare alla condizione di bilancio la seguente forma:

$$\begin{aligned} & \left\langle (\nabla \mathbf{u} \mathbf{T}_0 + \mathbf{C}_0 [(\nabla \mathbf{u})^{Sym}], \nabla \hat{\mathbf{u}} \right\rangle_{\Omega} + \langle m_0 (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b} + \mathbf{b}_0), \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\partial \Omega_s} \\ & + \left\langle \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\mathbf{R}_{,p}|} (\mathbf{h}_{u,\eta}^n(\rho) + \xi \mathbf{R}^n_{,pp}), (\mathbf{h}_{\hat{u},\eta}^n(\rho) + \hat{\xi} \mathbf{R}^n_{,pp}) \right\rangle_{I_p} \\ & + \left\langle \frac{c_0}{|\mathbf{R}_{,p}|} (\mathbf{h}_{u,\eta}^t(\rho) + |\mathbf{R}_{,p}| \xi_{,p} + |\mathbf{R}^t_{,pp}| \xi), (\mathbf{h}_{\hat{u},\eta}^t(\rho) + |\mathbf{R}_{,p}| \hat{\xi}_{,p} + |\mathbf{R}^t_{,pp}| \hat{\xi}) \right\rangle_{I_p} \\ & + \left\langle \mu_0 (\ddot{\mathbf{h}}_u(\rho) + \ddot{\xi} \mathbf{R}_{,p} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_0), (\mathbf{h}_{\hat{u}}(\rho) + \hat{\xi} \mathbf{R}_{,p}) \right\rangle_{I_p} = 0 \end{aligned}$$

$$\forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\xi}) \in U_0; \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (1.67)$$

#### Osservazione 1

La (1.67) è una forma bilineare  $q(\mathbf{u}, \xi; \hat{\mathbf{u}}, \hat{\xi}): U_0 \times U_0 \rightarrow \mathfrak{R}$  che può essere decomposta nella somma di quattro termini secondo la

$$q = q_c + q_t + q_f + q_m. \quad (1.68)$$

dove  $q_c$  raggruppa i termini relativi alle funzioni costitutive  $\mathbf{C}_0$  e  $c_0$  del solido e del cavo,  $q_t$  raggruppa i termini geometrici relativi agli stati tensionali interni  $\mathbf{T}_0$  e  $\boldsymbol{\tau}_0$  nel

corpo e nel cavo mentre  $q_f$  e  $q_m$  contengono rispettivamente i termini dovuti agli incrementi delle forze esterne  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  e quelli dovuti alle forze di inerzia causate dal moto infinitesimo del sistema.

### Osservazione 2

In assenza di incrementi delle forze esterne e nel caso statico, il fatto che la forma quadratica  $q = q_c + q_t$  sia definita in segno rappresenta la condizione sufficiente per l'unicità della soluzione del *problema incrementale*. Il caso in cui sia strettamente definita positiva implica che la configurazione di riferimento è *infinitesimamente superstabile* [Truesdell & Noll, 1965]. In generale, se i materiali costituenti il sistema sono stabili quasi ovunque, il termine  $q_c$  risulta definito positivo; il termine geometrico invece può non essere definito in segno. È quindi possibile raggiungere livelli tensionali critici per i quali cessa di esistere la condizione di unicità della soluzione del problema incrementale (*condizione di biforcazione*).

### Osservazione 3

Il fatto che  $q_t$  non sia definito positivo può produrre moti instabili nell'intorno infinitesimo della configurazione di riferimento rispetto alla norma dell'energia, cioè rispetto al funzionale di Liapunov

$$V(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}; t) = \langle m_0 \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} + \langle \mu_0 \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle_{I_p} + \langle \mathbf{C}_0[\nabla \mathbf{u}], \nabla \mathbf{u} \rangle_{\Omega} + \langle c(a-1), (a-1) \mathbf{R}_{,\rho} \rangle_{I_p} \\ + \langle \nabla \mathbf{u} \mathbf{T}_0, \nabla \mathbf{u} \rangle_{\Omega} + \langle \tau_0 (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E}), (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{E}) \mathbf{R}_{,\rho} \rangle_{I_p} . \quad (1.69)$$



#### 4. IL CASO DI CAVO OMOGENEO PRIVO DI MASSA

In molte applicazioni di interesse ingegneristico è piuttosto frequente il caso in cui la massa del cavo è molto minore di quella del solido cui è vincolato, e le sue caratteristiche meccaniche sono le stesse in ogni punto. Tale osservazione rende lecita la trattazione del problema in via semplificata sotto le ipotesi che la massa del cavo  $\mu_0$  sia nulla e che la funzione  $\omega(a)$ , che esprime la densità di energia elastica del cavo, è la stessa per ogni punto  $\rho$ . Infine si ipotizza che il materiale di cui è costituito il cavo non sia instabile per cui  $t(a)$  deve essere monotona o, equivalentemente,  $\omega(a)$  convessa.

Sotto le precedenti ipotesi, e ricordando la (1.40), l'equazione di bilancio locale del cavo (1.46) nella direzione tangente al percorso conduce alla seguente condizione

$$\tau_{,\rho} \cdot \bar{e} = (\omega_{,aa} a_{,\rho} \bar{e} + \omega_{,a} \bar{e}_{,\rho}) \cdot \bar{e} = 0 \quad (1.70)$$

dalla quale, dal momento che  $\bar{e}$  è un vettore unitario<sup>1</sup> e che  $\omega$  è convessa, si può dedurre la

$$a_{,\rho}(\rho; t) = 0, \quad (1.71)$$

la quale implica che la deformazione pura del cavo è la stessa in tutti i punti.

---

<sup>1</sup> Se  $\bar{e}(\rho)$  è un vettore unitario, deve essere  $\bar{e} \cdot \bar{e} = 1$ . Derivando rispetto a  $\rho$  si ha che  $\bar{e}_{,\rho} \cdot \bar{e} = 0$ .

*Osservazione 1*

La sola ipotesi di massa trascurabile del cavo implica che l'intensità della tensione del cavo è la stessa in tutti i punti. L'ipotesi di omogeneità e stabilità del materiale, implica successivamente che la misura della deformazione pura del cavo è costante.

*Osservazione 2*

L'ipotesi di assenza di massa ed omogeneità del cavo, insieme con le precedenti ipotesi di contatto perfettamente liscio implicitamente espressa dalla condizione di bilancio (1.44), conduce ad una riduzione dello spazio delle deformazioni in un suo sottospazio in cui la deformazione del cavo è omogenea. In [Dall'Asta, 1995a] la condizione  $a=cost$  veniva imposta come vincolo interno per il cavo, in questo caso la stessa relazione risulta da ipotesi sulle proprietà fisiche e meccaniche del cavo.

*Osservazione 3*

Dalla condizione (1.71) segue che  $a$  deve coincidere con il suo valore medio. Quest'ultimo può dedursi dal rapporto tra la lunghezza totale

$$l_p = \gamma_p(s) = \int_0^s |\mathbf{h}_{p,\eta}| d\eta, \quad (1.72)$$

del percorso nella configurazione deformata e la lunghezza totale

$$L = \Lambda(s) = \int_0^s |\mathbf{H}_{,\eta}| d\eta, \quad (1.73)$$

del percorso nella configurazione di riferimento, dove ambo le quantità possono essere derivate solamente dalle configurazioni del corpo. In definitiva,  $\alpha$  non influenza più la misura di deformazione del cavo che assume la forma

$$a(t) = \frac{l_p(t)}{L} = \frac{1}{L} \int_0^s |\mathbf{h}_{p,\eta}| d\eta. \quad (1.74)$$

La dipendenza funzionale della deformazione locale del cavo dalla deformazione globale del corpo diviene più esplicita in questo caso che non nel caso generale (1.22).

#### *Osservazione 4*

Ricordando che l'energia potenziale elastica contenuta nel cavo dipende esclusivamente dalla deformazione pura  $a$  dello stesso (cfr. §2.1) si può concludere che anche essa risulta costante e può essere dedotta semplicemente moltiplicando la lunghezza iniziale del cavo  $L$  per la densità di energia corrispondente alla deformazione  $a$ .

### **4.1. Restrizione dello spazio delle deformazioni del cavo**

L'aspetto fondamentale che rende il caso del cavo privo di massa sostanzialmente differente dal caso analizzato in precedenza è che non è più necessario introdurre la funzione  $\alpha(\rho;t)$  per descrivere la deformazione del sistema in quanto la deformazione del cavo può essere completamente determinata a partire da quella del corpo, come verrà mostrato nel seguito.

Per conoscere la posizione finale di ogni punto del cavo  $\rho$ , si ricorda che è stata introdotta la funzione  $\gamma_p(\eta)$  (cfr. §1.2.1). Questa, misura la lunghezza del percorso del cavo collegato al corpo (guaina) dal punto materiale  $(H_i(0))$  al punto  $(H_i(\eta))$ , nella configurazione deformata; la sua derivata soddisfa la disuguaglianza  $\gamma_{p,\eta} > 0$  per cui essa risulta invertibile. Il fatto che la deformazione  $a$  sia costante lungo il cavo assicura la seguente uguaglianza

$$a = \frac{l_p}{L} = \frac{\lambda_r(\rho)}{\Lambda(\rho)}, \quad (1.75)$$

dalla quale deriva che la funzione  $\lambda_r(\rho)$  definita dalla (1.17) risulta dipendente solamente dalla deformazione del corpo  $p$ , per cui nel seguito la si indicherà con  $\lambda_p(\rho)$ .

La funzione che determina la corrispondenza tra i due parametri  $\eta$  e  $\rho$ , che individuano i punti materiali della guaina e del cavo occupanti la stessa posizione nella configurazione deformata, può determinarsi invertendo la

$$\gamma_p(\eta) = \lambda_p(\rho), \quad (1.76)$$

dalla quale

$$\eta = \alpha(\rho; t) = (\gamma_p^{-1} \circ \lambda_p)(\rho). \quad (1.77)$$

Stante la (1.76), diventa possibile ricostituire la posizione di ogni punto del cavo per mezzo della relazione

$$\mathbf{r}(\rho; t) = (\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_p)(\rho), \quad \rho \in [0, s]. \quad (1.78)$$

#### *Osservazione 1*

Dalla (1.78) si ha che la configurazione del cavo risulta nota una volta fissata la deformata del solido. Pertanto l'unico descrittore cinematico del sistema risulta essere la funzione  $p$ .

## **4.2. Condizione di bilancio**

La condizione di bilancio globale può essere ora introdotta seguendo lo stesso procedimento illustrato in precedenza (cfr. §2.2), assumendo come deformazioni ammissibili per il cavo solo quelle che forniscono una deformazione omogenea. Sebbene possibile scrivere la condizione di equilibrio semplicemente sostituendo  $\alpha$  con la funzione precedentemente definita (1.77), ciò non è conveniente in quanto essa non è

facile da derivarsi dalla deformazione  $\mathbf{p}^2$ . In questo caso risulta più semplice sfruttare le particolarità del problema ora in esame e scrivere il termine di lavoro interno del cavo tenendo conto che

$$\hat{a} = \frac{1}{L} \int_0^s \bar{\mathbf{g}}_p \cdot \mathbf{h}_{\hat{p}, \eta} d\eta = \cos t. \quad (1.79)$$

La condizione di bilancio all'istante  $t$  caratterizzata dalla deformazione  $\mathbf{p}$  deriva quindi direttamente dalla (1.41) ed ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\nabla \mathbf{p}), \nabla \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} + \langle m_o (\ddot{\mathbf{p}} - \mathbf{b}(\mathbf{p})), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f}(\nabla \mathbf{p}), \hat{\mathbf{p}} \rangle_{\partial \Omega_s} + \tau(a) \int_0^s \bar{\mathbf{g}}_p \cdot \mathbf{h}_{\hat{p}, \eta} d\eta \\ \forall \hat{\mathbf{p}} \in \mathbf{U}; \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (1.80)$$

#### Osservazione 1

Una volta risolto il problema elastico, la deformazione locale del cavo può essere ricostruita attraverso la funzione  $\gamma_p^{-1}$  anche se ciò non è fondamentale per gli scopi pratici in quanto i parametri di progetto più interessanti sono la forza interna e l'allungamento del cavo, entrambe in relazione solamente con  $a$ .

### 4.3. Teoria linearizzata

Anche in questo caso è interessante ricavare le equazioni lineari che descrivono il moto infinitesimo vicino una assegnata configurazione equilibrata.

Come precedentemente fatto (cfr. §3), la configurazione di riferimento si sceglie coincidente con la configurazione nota mentre la deformazione del sistema viene individuata completamente dagli spostamenti  $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}$ . La teoria linearizzata è

---

<sup>2</sup> Tuttavia, l'uso di  $\gamma_p^{-1}$  può essere del tutto evitato valutando l'integrale del prodotto scalare tra  $\boldsymbol{\tau} = \tau \bar{\mathbf{e}}$  e  $\mathbf{r}_{,p} = (\mathbf{h}_p \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_p)_{,p}$  direttamente rispetto al parametro  $\eta$  della curva del corpo anziché rispetto alla coordinata del punto materiale del cavo  $\rho$ , tenendo in conto che  $\lambda_{p,\rho} d\rho = \gamma_{p,\eta} d\eta$ .

ottenuta assumendo che le norma di  $\mathbf{u}$ , e quelle delle sue derivate siano piccole rispetto ad un parametro  $\varepsilon$ . Ovviamente i termini relativi al corpo non variano rispetto a quelli che compaiono nella condizione di bilancio più generale (1.67), mentre sono da riscrivere quelli relativi al cavo. In questo caso, senza introdurre lo scorrimento  $\xi$ , è sufficiente linearizzare l'ultimo termine della (1.80).

La linearizzazione del modulo della tensione  $\tau$  sul cavo conduce alla

$$\tau \cong \tau_0 + c_0(a-1), \quad (1.81)$$

dove  $c_0 = \left. \frac{d\tau}{da} \right|_{a=1}$  è la rigidezza del cavo. Il termine  $(a-1)$ , che rappresenta l'allungamento del cavo dovuto al campo degli spostamenti  $\mathbf{u}$ , deve essere linearizzato coerentemente con l'ipotesi di spostamenti infinitesimi, ottenendo la

$$(a-1) \cong \frac{1}{L} \int_0^s \mathbf{h}_{u',\eta} \cdot \mathbf{G} d\eta = \frac{1}{L} \int_0^s |\mathbf{h}_{u',\eta}^t| d\eta, \quad (1.82)$$

nella quale si è usata la stessa notazione vista in precedenza per indicare le componenti tangenti al percorso (cfr. §3.2). La linearizzazione della variazione del funzionale  $\mathcal{F}$  nell'intorno dell'origine pone invece la

$$\hat{a} \cong \frac{1}{L} \int_0^s \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}_{\hat{u}',\eta} d\eta + \frac{1}{L} \int_0^s (\mathbf{I} - \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}) \frac{\mathbf{h}_{u',\eta} \cdot \mathbf{h}_{\hat{u}',\eta}}{|\mathbf{H}_{,\eta}|} d\eta = \frac{1}{L} \int_0^s |\mathbf{h}_{\hat{u}',\eta}^t| d\eta + \frac{1}{L} \int_0^s \frac{\mathbf{h}_{u',\eta}^n \cdot \mathbf{h}_{\hat{u}',\eta}^n}{|\mathbf{H}_{,\eta}|} d\eta. \quad (1.83)$$

Tenendo conto delle precedenti relazioni si ottiene la condizione di bilancio linearizzata

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \mathbf{u} \mathbf{T}_0 + \mathbf{C}_0 [(\nabla \mathbf{u})^{Sym}] \nabla \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} - \langle m_0 (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b} + \mathbf{b}_0), \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\partial\Omega}, \\ & + \frac{c_0}{L} \int_0^s |\mathbf{h}_{u',\eta}^t| d\eta \int_0^s |\mathbf{h}_{\hat{u}',\eta}^t| d\eta + \tau_0 \int_0^s \frac{\mathbf{h}_{u',\eta}^n \cdot \mathbf{h}_{\hat{u}',\eta}^n}{|\mathbf{H}_{,\eta}|} d\eta = 0, \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\forall (\hat{\mathbf{u}}) \in \mathbf{U}_0; \quad \forall t \in [0, \infty).$$

*Osservazione 1*

La (1.84) è una forma bilineare  $(\mathbf{u}; \hat{\mathbf{u}}): U_0 \times U_0 \rightarrow \mathfrak{R}$  e, come nel caso di cavo con massa non nulla, possono riconoscersi gli stessi quattro termini rappresentanti i contributi elastici, i contributi geometrici e quelli dovuti ai carichi ed alle forze di inerzia. Gli ultimi, ovviamente, non contengono i contributi del cavo.

*Osservazione 2*

Quale risultato del fatto che la tensione e la deformazione del cavo sono funzionali della deformazione globale del corpo, si ottiene che il termine elastico del solido è strutturalmente diverso da quello relativo al cavo; ovvero il primo è un funzionale bilineare in  $\mathbf{u}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$  mentre il secondo è il prodotto di due funzionali lineari.

*Osservazione 3*

Sotto l'ipotesi di materiali stabili, il termine  $q_c$  contenente i contributi elastici è definito positivo, per cui nell'analisi della stabilità infinitesima del sistema rappresenta un contributo stabilizzante. Si osservi però che la parte dovuta al cavo è costituita da un termine semidefinito positivo che fornisce un contributo stabilizzante solo se il campo di spostamenti  $\mathbf{u}$  comporta un allungamento globale del percorso del cavo.

*Osservazione 4*

Il termine  $q_t$  è costituito dai termini geometrici del corpo e del cavo. Mentre il primo non è definito in segno, ed è quindi il responsabile di una possibile instabilizzazione della struttura, il secondo è semidefinito positivo e rappresenta un contributo stabilizzante per il sistema.

## NOTAZIONI

$a$	= misura della deformazione pura del cavo;
$A_i$	= base ortonormale dello spazio vettoriale associato allo spazio euclideo;
$b$	= forza di massa agente sul volume unitario di solido nella configurazione di riferimento;
$\mathcal{B}$	= continuo;
$c_0$	= rigidezza del cavo;
$C$	= tensore della misura della deformazione locale del solido;
$\mathcal{C}$	= cavo;
$C_0$	= rigidezza del materiale costituente il solido;
$e$	= vettore tangente al cavo $\mathcal{C}$ nella configurazione deformata;
$\bar{e}$	= vettore unitario tangente al cavo $\mathcal{C}$ nella configurazione deformata
$E$	= vettore unitario tangente al cavo $\mathcal{C}$ nella configurazione di riferimento;
$f$	= forza di contatto sull'unità di superficie del solido nella configurazione di riferimento;
$\mathcal{E}$	= spazio euclideo;
$g_p$	= vettore unitario tangente al cavo nella configurazione deformata;
$G$	= vettore unitario tangente alla curva $\mathcal{H}$ nella configurazione di riferimento;
$\mathcal{G}$	= regione materiale di $\mathcal{B}$ occupata dalla guaina;
$h_p$	= posizione di $\mathcal{H}$ nella configurazione deformata;
$H$	= posizione di $\mathcal{H}$ nella configurazione di riferimento;
$\mathcal{H}$	= curva materiale che individua il percorso del cavo;
$i$	= forze di interazione applicate lungo lo sviluppo del cavo;
$I_\eta$	= intervallo di definizione di $\eta$ ;
$I_\rho$	= intervallo di definizione di $\rho$ ;
$I$	= tensore identico del secondo ordine;
$k$	= curvatura del cavo;



---

$l_p$	= lunghezza del tracciato del cavo nella configurazione deformata;
$L$	= lunghezza del cavo nella configurazione di riferimento;
$m_0$	= massa per unità di volume del solido nella configurazione di riferimento;
$O$	= origine dello spazio euclideo;
$p$	= funzione di deformazione del solido;
$\tilde{p}$	= deformazione imposta al solido sulla parte di frontiera $\partial\Omega_u$ ;
$P$	= punto materiale del solido;
$\mathbf{P}$	= vettore posizione relativo al continuo tridimensionale nella configurazione di riferimento;
$q$	= forma quadratica;
$r$	= funzione di deformazione del cavo;
$\mathbf{R}$	= vettore posizione del cavo nella configurazione di riferimento;
$\mathfrak{R}$	= insieme dei numeri reali;
$S$	= primo tensore di Piola-Kirchhoff;
$\bar{S}$	= secondo tensore di Piola-Kirchhoff;
$t$	= generico istante ( $t \in [t_0, +\infty)$ );
$\mathbf{T}$	= tensore di Cauchy;
$u$	= campo degli spostamenti;
$U$	= spazio delle configurazioni;
$U_0$	= spazio delle variazioni ammissibili della configurazione;
$V$	= funzionale energia del sistema;
$w$	= funzione densità di energia di deformazione del solido;
$X_i$	= coordinata materiale del punto del continuo;
$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}$	= spazio vettoriale associato allo spazio euclideo;
$\alpha$	= funzione che definisce la corrispondenza tra $\rho$ ed $\eta$ nella configurazione deformata;
$\beta$	= forze di massa sul cavo;

- $\gamma_p$  = funzione che fornisce la lunghezza dell'arco di percorso del cavo deformato;
- $\eta$  = parametro della curva materiale  $\mathcal{H}$  alla quale è vincolato il tracciato del cavo;
- $\lambda_r$  = funzione che fornisce la lunghezza dell'arco di cavo deformato;
- $\Lambda$  = lunghezza dell'arco di cavo nella configurazione di riferimento;
- $\mu_0$  = massa specifica del cavo riferita ai punti materiali;
- $\rho$  = coordinata materiale del punto del cavo;
- $\tau$  = tensione del cavo;
- $\bar{\tau}_O, \bar{\tau}_S$  = forze di ancoraggio del cavo;
- $\xi$  = scorrimento cavo;
- $\omega$  = funzione densità di energia elastica del cavo;
- $\Omega$  = regione dello spazio euclideo occupata da  $\mathcal{B}$  all'istante  $t_0$ ;
- $\partial\Omega$  = frontiera di  $\Omega$

## **CAPITOLO 2**

# **ACCOPIAMENTO DI UN CAVO SCORREVOLE CON SOLIDI PRISMATICI**

### ***PREMESSA E IPOTESI BASE***

In questo capitolo viene studiato l'accoppiamento tra un solido prismatico a sezione indeformabile (trave) ed un cavo ancorato alle estremità e libero di scorrere internamente alla trave lungo un percorso prestabilito. Il modello proposto è basato su di una descrizione linearizzata della cinematica del sistema considerando un vincolo globale sulla deformazione del solido cilindrico. Il cavo viene descritto da una varietà monodimensionale che verrà supposta omogenea e priva di massa. Pur sotto le precedenti ipotesi semplificative il modello è sufficientemente accurato per descrivere i problemi che generalmente si presentano nell'ingegneria strutturale.

Le equazioni di bilancio vengono proposte sia in forma globale che locale definendo opportune risultanti della tensione interna e dei carichi esterni duali dei descrittori cinematici. Accanto a queste risultanti vengono definite anche analoghe caratteristiche geometriche del cavo pervenendo ad una scrittura formale delle equazioni particolarmente semplice.

Infine si studia la stabilità di una configurazione equilibrata generica evidenziando quelli che sono i possibili problemi di interazione tra valori critici del carico esterno e la presollecitazione indotta dal cavo, giungendo a proporre un criterio per individuare i percorsi stabilizzanti ed instabilizzanti del cavo.

## 1. CINEMATICA LINEARIZZATA DEL SISTEMA TRAVE-CAVO

### 1.1. Configurazione di riferimento

Il solido cilindrico  $\mathcal{B}$ , di lunghezza  $L$ , sia costituito da una varietà tridimensionale dello spazio euclideo  $\mathcal{E}$  i cui punti materiali occupano, nella configurazione di riferimento all'istante  $t_0$ , la regione  $V$ . Una parametrizzazione conveniente di  $V$  è ottenuta introducendo un sistema di riferimento ortonormale  $\{A_i; i=1,2,3\}$  tale che il suo asse sia parallelo ad  $A_3$  (Fig.2.1).

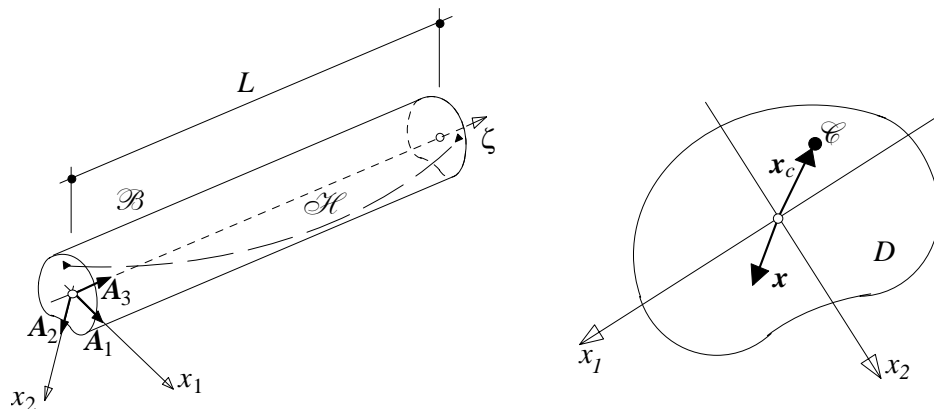


Fig.2.1. *Sistema trave - cavo*

La generica sezione trasversale del solido giace perciò in un piano parallelo al piano coordinato  $\{A_1, A_2\}$  ed occupa la regione monoconnessa  $D \subset \mathfrak{R}^2$  chiusa e limitata con frontiera  $\partial D$ . Di conseguenza risulta  $V = D \times [0, L]$  con frontiera

$\partial V = \{\partial D \times [0, L]\} \cup \{D_0, D_L\}$ , dove  $[0, L] \subset \mathfrak{R}$ . Il vettore posizione del punto materiale  $P \equiv (x_1, x_2, \zeta)$  è dato quindi da<sup>1</sup>

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbf{x} + \zeta \mathbf{A}_3 = x_\gamma \mathbf{A}_\gamma + \zeta \mathbf{A}_3, \quad (\mathbf{x}, \zeta) \in D \times [0, L] = V. \quad (2.1)$$

Per comodità, il sistema di riferimento viene scelto in maniera tale che i baricentri delle sezioni occupino le posizioni  $(0, 0, \zeta)$ . Con  $A$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_{12}$  si indicano l'area, i momenti di inerzia ed il momento centrifugo della sezione rispetto agli assi baricentrici coordinati

$$A = \int_D dD, \quad I_1 = \int_D x_2^2 dD, \quad I_2 = \int_D x_1^2 dD, \quad I_{12} = I_{21} = \int_D x_1 x_2 dD. \quad (2.2)$$

Analogamente a quanto visto nel capitolo precedente, il cavo può scorrere all'interno di una guaina solidale alla trave. Sotto l'aspetto geometrico, cavo e guaina possiedono sezioni estremamente ridotte rispetto alla loro lunghezza per cui verranno schematizzati come varietà monodimensionali.

In particolare, la guaina sia descritta dalla varietà monodimensionale  $\mathcal{H}$  coincidente con il suo asse e contenuta all'interno della trave ( $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ ). Nella configurazione di riferimento,  $\mathcal{H}$  descrive la curva

$$\mathbf{H}(\zeta) = \mathbf{x}_c(\zeta) + \zeta \mathbf{A}_3 = x_{c\gamma}(\zeta) \mathbf{A}_\gamma + \zeta \mathbf{A}_3, \quad \zeta \in [0, L]. \quad (2.3)$$

Indicando con  $(\cdot)'$  la derivata totale rispetto a  $\zeta$ , il versore tangente ad  $\mathbf{H}$  risulta essere

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} = \frac{x'_{c\gamma} \mathbf{A}_\gamma + \mathbf{A}_3}{\sqrt{x'^2_{c\gamma} + 1}}, \quad (2.4)$$

e la lunghezza totale iniziale della curva è data dalla

---

<sup>1</sup> Per la convenzione di somma sugli indici ripetuti si assume che gli indici in lettere greche possano assumere i valori  $\{1, 2\}$ , gli indici in lettere romane minuscole i valori  $\{1, 2, 3\}$ .

$$\Lambda = \int_0^L |\mathbf{H}'| d\zeta = \int_0^L \sqrt{x'_{c_y}{}^2 + 1} d\zeta. \quad (2.5)$$

### Osservazione 1

Pur essendo  $\zeta$  la lunghezza di un tratto del solido cilindrico, la parametrizzazione (2.3) non è *naturale* per il cavo. Risulterebbe tale solo se il cavo avesse percorso rettilineo e parallelo ad  $\mathbf{A}_3$ , per il quale  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}'$ .

### Osservazione 2

La parametrizzazione (2.3) è stata scelta per comodità in quanto permette di individuare il punto della curva  $\mathcal{H}$  con una relazione del tutto analoga alla (2.1). Come è evidente dall'espressione di  $\mathbf{G}$  (2.4), essa non è in grado di descrivere percorsi del cavo particolari quali i casi in cui il vettore tangente  $\mathbf{H}'$  è ortogonale o ha componenti in direzione opposta ad  $\mathbf{A}_3$ , o il caso in cui il cavo è ancorato in sezioni intermedie del solido. D'altra parte, nelle strutture usate nell'ingegneria civile il primo problema non si presenta mentre il secondo può essere studiato in maniera del tutto simile a quanto si vedrà nel seguito senza aggiungere complicazioni.

Il cavo  $\mathcal{C}$  sia schematizzato mediante una varietà monodimensionale i cui punti sono individuati dalla coordinata materiale  $\rho \in [0, L]$ . La posizione iniziale del cavo sia descritta dalla curva  $\mathbf{R}(\rho)$  tale che  $\mathbf{R}(\rho) = \mathbf{H}(\zeta)$  per  $\rho = \zeta$ ; si suppone cioè che le due parametrizzazioni coincidano nella configurazione di riferimento. L'ultima ipotesi è puramente di comodo e permette di definire in maniera più intuitiva lo scorrimento cavo-trave alla base della descrizione della cinematica vincolata del cavo (cfr. §1.2.2).

## 1.2. Configurazione deformata: moto del sistema cavo-trave

La generica configurazione del sistema deve essere descritta da due diverse funzioni di deformazione (cfr. Cap.1 §1.2), in quanto la trave ed il cavo sono due enti geometrici distinti. Volendo ottenere risultati di interesse applicativo per l'ingegneria strutturale, ci

si limita a fornire una descrizione della cinematica del sistema nell'ambito della teoria lineare della deformazione.

### 1.2.1. Il vincolo sulla deformazione del solido cilindrico: moto della trave

Nel paragrafo precedente si è fatto riferimento ad un solido che occupa la regione di  $\mathcal{C}$  definita dal prodotto cartesiano tra un sottoinsieme di  $\mathfrak{R}^2$  (sezione trasversale) ed un sottoinsieme di  $\mathfrak{R}$  (asse longitudinale). Tale caratterizzazione introduce una direzione privilegiata nella geometria del problema che suggerisce una decomposizione intuitiva dei campi vettoriali e tensoriali che caratterizzano la descrizione della meccanica del sistema.

Più precisamente, per quanto riguarda il campo degli spostamenti si può operare la decomposizione

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x}, \zeta; t) + u_\zeta(\mathbf{x}, \zeta; t)\mathbf{A}_3, \quad (2.6)$$

dove

$$\mathbf{u}_D = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3)\mathbf{u}, \quad u_\zeta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_3, \quad (2.7)$$

sono, rispettivamente, le componenti di  $\mathbf{u}$  ortogonali e parallele ad  $\mathbf{A}_3$ . Similmente, per quanto riguarda il tensore di deformazione lineare, definito classicamente come  $\mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u})^{Sym}$ , è possibile effettuare la seguente decomposizione

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{E}_D(\mathbf{x}, \zeta; t) + [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \zeta; t) \otimes \mathbf{A}_3]^{Sym} + \varepsilon(\mathbf{x}, \zeta; t)\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3, \quad (2.8)$$

dove  $\mathbf{E}_D$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ , ed  $\varepsilon$  denotano rispettivamente il campo di deformazione piana trasversale, il campo delle deformazioni di taglio e quello degli allungamenti assiali definiti dalle

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{x}, \zeta; t) = [\nabla_D \mathbf{u}_D]^{Sym}, \quad (2.9)_1$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \nabla_D u_\zeta + \mathbf{u}'_D, \quad (2.9)_2$$



$$\varepsilon(\mathbf{x}, \zeta; t) = u'_\zeta. \quad (2.9)_3$$

Nelle precedenti con  $\nabla_D(\cdot)$  si è indicato il gradiente delle funzioni definite su  $D$ .

Volendo ottenere un modello di trave dalla teoria elastica tridimensionale si introduce a questo punto l'ipotesi di indeformabilità nel proprio piano della sezione trasversale  $D$  del solido cilindrico. Questo viene fatto imponendo il vincolo interno

$$\mathbf{E}_D(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{0}, \quad \forall(\mathbf{x}, \zeta) \in D \times [0, L]. \quad (2.10)$$

Sotto tale ipotesi è possibile dimostrare [Davì, 1995] che il campo delle deformazioni (2.6) del solido, che d'ora in avanti verrà chiamato trave, deve assumere la forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u}_0(\zeta; t) + \boldsymbol{\varphi}(\zeta; t) \times \mathbf{x} + \Psi(\mathbf{x}, \zeta; t) \mathbf{A}_3, \quad (2.11)$$

dove la funzione  $\mathbf{u}_0 = u_{0i} \mathbf{A}_i$  descrive lo spostamento dell'asse baricentrico della sezione;  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_i \mathbf{A}_i$  è il vettore assiale del tensore antisimmetrico  $\Phi(\zeta) = (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}_i) \otimes \mathbf{A}_i$  (i.e.  $\Phi \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}$ ) che descrive la rotazione rigida infinitesima della sezione trasversale attorno ad un asse baricentrico;  $\Psi$  rappresenta l'ingobbamento della sezione. In maniera equivalente il campo delle deformazioni del solido può essere scritto come:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \zeta) + \left[ \mathbf{u}_0(\zeta; t) + \boldsymbol{\varphi}(\zeta; t) \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\varphi}(\zeta; t) \times \mathbf{x}_s + \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(\zeta; t) \psi_j(\mathbf{x}) \mathbf{A}_3 \right], \quad (2.12)$$

dove  $\chi_j$  sono le funzioni di intensità degli ingobbamenti  $\psi_j$  costituenti una successione completa nello spazio delle funzioni scalari definite sulla sezione. Con la (2.12), introducendo il proiettore  $\mathbf{I}_3 = \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3$ , si è separata la rotazione rigida in modo da descrivere gli spostamenti considerando la componente di rotazione lungo  $\mathbf{A}_3$  intorno al centro di taglio  $S$  della sezione, quest'ultimo individuato da  $\mathbf{x}_s$ .

Nel seguito, la formulazione del problema e la valutazione degli effetti legati al cavo, verrà svolta prendendo in considerazione un troncamento ai primi  $n_l$  termini dello sviluppo in serie di  $\Psi$ . Per compattare la notazione, sia le funzioni di ingobbamento che quelle intensità di ingobbamento verranno raccolte rispettivamente nei vettori  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\boldsymbol{\chi}$  con  $n_l$  componenti<sup>2</sup> per cui si ha definitivamente che

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \zeta; t) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \zeta) + [\boldsymbol{u}_0(\zeta; t) + \boldsymbol{\varphi}(\zeta; t) \times \boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}_3 \boldsymbol{\varphi}(\zeta; t) \times \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{\chi}(\zeta; t) \cdot \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{A}_3]. \quad (2.13)$$

### Osservazione 1

Si suppone che le funzioni di ingobbamento scelte soddisfino la condizione di ortogonalità

$$\int_D (c_\gamma x_\gamma + g) \boldsymbol{\psi} dD = \boldsymbol{0}, \quad \forall c_\gamma, g \in \mathfrak{R}. \quad (2.14)$$

Tale ipotesi, pur riducendo lo spazio delle funzioni scalari definite sulla sezione al sottospazio delle funzioni ortogonali alla funzione lineare, non penalizza il modello di spostamenti (2.13) che contempla comunque il moto rigido della sezione.

### Osservazione 2

La configurazione deformata viene univocamente individuata prescrivendo la terna di funzioni vettoriali  $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\chi})$ , definita su  $[0, L]$  con valori in  $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^{n_l}$ , per cui si indica con

$$C = \{ \boldsymbol{v} \equiv (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\chi}) : [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^{n_l} \}, \quad (2.15)$$

lo spazio funzionale delle deformazioni della trave.

---

<sup>2</sup> Per la convenzione di somma sugli indici ripetuti, ove usata, si assume che gli indici in lettere romane maiuscole assumano i valori  $\{0, \dots, n_l\}$ .

*Osservazione 3*

L'ipotizzare che gli spostamenti ammissibili per la trave siano tutti e soli quelli esprimibili dalla (2.13) equivale all'aver imposto un vincolo globale sulla deformazione della trave [Antman & Marlow, 1991].

*Osservazione 4*

I modelli di trave più semplici di Kirchhoff [Dill, 1992], Timoshenko (1945) e Vlasov (1961) possono rivedersi come casi particolari di quello usato nella presente trattazione.

A questo punto dalla (2.13) si può dedurre il gradiente  $\mathbf{F}$  del campo di deformazione e il gradiente  $\mathbf{U}$  del campo degli spostamenti  $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P}$ , i quali misurano le deformazioni ammissibili della trave:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{I} + \mathbf{U}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \mathbf{I} + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \zeta; t) \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D(\boldsymbol{\chi}(\zeta; t) \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\Phi}(\zeta; t), \quad (2.16)$$

dove

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \zeta; t) = \boldsymbol{\Gamma}(\zeta; t) + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_s + (\boldsymbol{\chi}' \cdot \boldsymbol{\psi}) \mathbf{A}_3, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\zeta; t) = \mathbf{u}'_0 - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}_3. \quad (2.17)$$

Conseguenza della (2.16) è che il tensore di deformazione lineare risulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \zeta; t) = (\mathbf{U})^{Sym} = (\mathbf{f}_0 \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi}))^{Sym}. \quad (2.18)$$

*Osservazione 5*

La deformazione ammissibile della trave viene descritta completamente dalla quaterna di funzioni vettoriali  $\mathbf{d} \equiv (\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi}')$ ; in particolare, le prime due rendono conto degli scorrimenti angolari medi che si verificano sull'asse della trave nonché dell'allungamento dell'asse stesso e delle deformazioni longitudinali dovute alla

rotazione delle sezioni; la terza rende conto degli scorrimenti angolari dovuti agli ingobbamenti della sezione mentre l'ultima descrive il contributo alla deformazione longitudinale dovuto agli ingobbamenti non uniformi lungo l'asse della trave.

Derivando rispetto al tempo la (2.11) si ottengono i campi delle velocità e delle accelerazioni dei punti della trave

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x}_s + \dot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\psi} \mathbf{A}_3, \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \zeta; t) = \ddot{\mathbf{u}}_0 + \ddot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \ddot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x}_s + \ddot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\psi} \mathbf{A}_3. \quad (2.20)$$

nelle quali si distinguono le velocità e le accelerazioni di traslazione della sezione, le velocità e le accelerazioni angolari della sezione e le velocità e le accelerazioni di ingobbamento.

Dal momento che il percorso  $\mathcal{H}$  su cui deve scorrere il cavo risulta solidale alla trave, nella configurazione deformata esso potrà essere dedotto dalla funzione  $\mathbf{p}$  e tratterà la seguente curva

$$\mathbf{h}(\zeta; t) = (\mathbf{p}(t) \circ \mathbf{H})(\zeta) = \mathbf{p}^H(\zeta; t) = \mathbf{H} + \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_c - \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_s + (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi}^H) \mathbf{A}_3, \quad (2.21)$$

dove con l'apice  $H$  si è indicata l'operazione di composizione  $\circ \mathbf{H}$ <sup>3</sup>. Stante la (2.21), la derivata rispetto a  $\zeta$  porge il trasformato del vettore tangente  $\mathbf{H}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'(\zeta; t) &= (\mathbf{F} \circ \mathbf{H})(\zeta) \mathbf{H}'(\zeta) = \mathbf{F}^H \mathbf{H}' \\ &= \mathbf{H}' + \mathbf{u}'_0 + \boldsymbol{\phi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}'_c - \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\phi}' \times \mathbf{x}_s + [(\boldsymbol{\chi}' \cdot \boldsymbol{\psi}^H) + \nabla_D (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi}^H) \cdot \mathbf{H}'] \mathbf{A}_3 \\ &= \mathbf{H}' + \mathbf{u}'_0 + (\boldsymbol{\phi}' \cdot \mathbf{A}_\gamma \times \mathbf{x}_c)' + [\boldsymbol{\phi}' \cdot \mathbf{A}_3 \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_s)]' + (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi}^H)' \mathbf{A}_3, \end{aligned} \quad (2.22)$$

<sup>3</sup> Anche se in Cap. 1 si è usata la notazione  $\mathbf{h}_p$  per indicare la curva tracciata da  $\mathcal{H}$  nella configurazione deformata, in questo capitolo si preferisce usare la notazione  $\mathbf{p}^H$ . In generale le grandezze caratterizzate dall'aggiunta di detto apice rappresenteranno la traccia lungo il percorso  $\mathcal{H}$  del cavo di una generica funzione definita sui punti della trave.

che descrive completamente la deformazione di un elemento unitario di  $\mathcal{H}$ .

### 1.2.2. Il moto vincolato del cavo

La descrizione della cinematica del cavo è esattamente la stessa vista nel precedente capitolo (cfr. Cap.1 §1.2.2). In questo paragrafo ci si limita a richiamarne qualitativamente i concetti base e solo dove necessario, per lo sviluppo della successiva trattazione del problema, si procederà alla specializzazione delle relazioni già note.

Si assume che il cavo rimanga ancorato alle estremità  $\mathcal{H}$  e tracci, durante ogni sua possibile deformazione  $\mathbf{r}$ , la medesima curva  $\mathbf{p}^H(\xi)$  tracciata da  $\mathcal{H}$  (eq. 2.21), pur potendosi manifestare scorrimenti reciproci tra cavo e guaina. Analiticamente, tutte le possibili deformazioni del cavo sono esprimibili grazie alla

$$\mathbf{r}(\rho; t) = (\mathbf{p}^H \circ \alpha)(\rho), \quad (2.23)$$

dove  $\alpha(\rho)$  è un diffeomorfismo  $\alpha: [0, L] \rightarrow [0, L]$  di classe  $C^1$  che descrive gli scorrimenti tra il cavo ed il percorso (cfr. Cap. 1 §§1.2.3 e 1.2.4). La misura di deformazione pura del cavo risulta quindi

$$a(\rho; t) = \frac{|\mathbf{r}_{,\rho}|}{|\mathbf{R}_{,\rho}|} = \frac{|\mathbf{h}'(\alpha)|}{|\mathbf{R}_{,\rho}|} \alpha_{,\rho}. \quad (2.24)$$

Il caso di cavo omogeneo con massa trascurabile è caratterizzato dall'avere la deformazione pura uguale in tutti i suoi punti per cui deve essere  $a_{,\rho} = 0$  (cfr. Cap.1 §4). In questo caso l'espressione di  $a$  può essere ottenuta, in alternativa alla (2.24), come rapporto tra la lunghezza  $\lambda$  del percorso del cavo nella configurazione deformata e la lunghezza iniziale  $\Lambda$  dello stesso. Ciò implica che la descrizione della deformazione pura del cavo è possibile sulla base di grandezze che sono deducibili dalla sola deformazione  $\mathbf{p}$  della trave. Inoltre, anche la funzione  $\alpha$  e l'intera deformazione del cavo possono essere ricostruite dalla deformazione della trave e dalla geometria del percorso

(cfr. Cap.1 §4.1) per cui la funzione  $\mathbf{p}$  diventa l'unico descrittore cinematico del sistema. Tenendo conto dell'espressione delle deformazioni ammissibili della trave (2.13), la deformazione del cavo è data dalla

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\lambda(t)}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L |\mathbf{h}'| d\zeta \\ &= \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \left[ \mathbf{H}' + \mathbf{u}'_0 + \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_c + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}'_c - \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\varphi}' \times \mathbf{x}_s + \left[ (\boldsymbol{\chi}' \cdot \boldsymbol{\Psi}^H) + \nabla_D (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^H) \cdot \mathbf{H}' \right] \mathbf{A}_3 \right] d\zeta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

nella quale la dipendenza funzionale di  $a$  da  $\mathbf{p}$  rispecchia l'accoppiamento che si stabilisce tra la deformazione locale del cavo e quella globale della trave. La relazione precedente è non lineare ma, coerentemente con l'ipotesi di spostamenti infinitesimi alla base della presente trattazione, può ritenersi

$$a \cong 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \frac{\mathbf{H}' \otimes \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \cdot \mathbf{U}^H d\zeta = 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \frac{\mathbf{H}' \otimes \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \cdot \left( \mathbf{f}_0^H \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^H) \right)^{Sym} d\zeta. \quad (2.26)$$

#### Osservazione 1

Ovviamente, con la (2.26) si ritrova il risultato del Capitolo 1 ottenuto dalla linearizzazione del problema generale ovvero: nel caso di piccoli spostamenti gli allungamenti del cavo sono prodotti solo dalle componenti di deformazione della trave nella direzione tangente al tracciato, mentre la parte antisimmetrica di  $\mathbf{U}$  non produce effetti.

### 1.2.3. La trave in parete sottile: le funzioni di ingobbamento

Fin qui non si sono fatte particolari ipotesi sulla sezione trasversale della trave per cui la descrizione cinematica precedente (cfr. §1.2.1) risulta valida per una trave con sezione generica (quindi anche compatta).

Mentre le travi classiche sono caratterizzate da un duplice ordine di dimensioni relative alla lunghezza e alla dimensione media della sezione trasversale, le travi in

parete sottile possiedono un triplice ordine di dimensioni: la lunghezza, la dimensione media della sezione e lo spessore della parete. Una loro trattazione rigorosa dovrebbe condursi secondo le teorie delle strutture bidimensionali ma l'ipotesi di indeformabilità nel proprio piano della sezione trasversale permette di ottenere soluzioni di grande interesse tecnico considerando modelli di spostamento monodimensionale "tipo trave".

Definito un sistema di ascisse curvilinee  $s$ , con sostegno coincidente con la traccia della superficie media di parete  $\mathcal{S}$ , è conveniente introdurre un riferimento locale individuato dal versore tangente alla curva di sostegno delle ascisse curvilinee ( $\mathbf{a}_1$ ) e dal versore normale  $\mathbf{a}_2$  orientato in maniera tale che la coppia di vettori ( $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ) sia sovrapponibile con una rototraslazione piana alla coppia ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ ) (Fig.2.2).

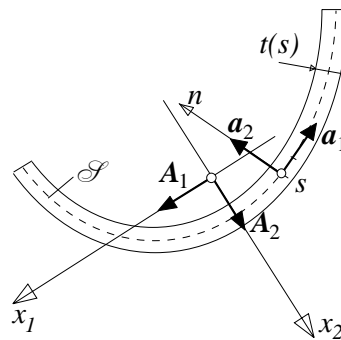


Fig.2.2. Sistemi di riferimento globali e locali

L'introduzione del sistema di riferimento locale non modifica le equazioni tensoriali precedentemente trovate ma permette di introdurre in maniera più immediata le ipotesi aggiuntive che sono generalmente alla base delle teorie delle travi in parete sottile. La prima ipotesi, grazie alla quale la descrizione dello stato di deformazione locale risulta particolarmente semplice, è che la direzione  $\mathbf{a}_2$  sia ortogonale, oltre che alla traccia della superficie media di parete, anche alle superfici esterne; ciò equivale a porre lo spessore di parete  $t$  costante e permette di ottenere risultati ancora accettabili se  $t$  varia lentamente lungo lo sviluppo della sezione. Nei casi pratici in cui si hanno brusche variazioni di  $t$  o ramificazioni del profilo della sezione, la teoria sviluppata si ritiene localmente valida con esclusione delle zone in corrispondenza dei punti singolari.

Per quanto riguarda le funzioni di ingobbamento, nell'ipotesi che gli spessori di parete siano molto piccoli, si può ritenere che siano costanti nella direzione  $\mathbf{a}_2$  e che quindi dipendano dalla sola ascissa curvilinea  $s$ , per cui si ha che

$$\boldsymbol{\psi}(s, n) \cong \boldsymbol{\psi}(s, 0) = \boldsymbol{\psi}(s), \quad \nabla_D \boldsymbol{\psi}_J(s) \cong \boldsymbol{\psi}_{J,s}(s) \mathbf{a}_1(s). \quad (2.27)$$

Anche se si è partiti da una formulazione in cui non si è specificato il numero delle funzioni di ingobbamento, nelle applicazioni che seguiranno per le travi in parete sottile l'ingobbamento della sezione verrà descritto da quattro diverse funzioni, adottando il modello proposto in [Laudiero & Savoia, 1990]. Nel caso specifico,  $\psi_0$  viene fatta coincidere con la funzione di ingobbamento da torsione uniforme che, per sezioni sottili aperte, risulta essere  $\psi_0(s, 0) = -\omega(s)$ , dove  $\omega(s)$  rappresenta il doppio dell'area settoriale della sezione riferita al centro di taglio della stessa [Vlasov, 1961]. Scegliendo opportunamente l'origine delle ascisse curvilinee, valgono le condizioni di ortogonalità

$$\int_D \psi_0 dD = 0, \quad \int_D x_1 \psi_0 dD = 0, \quad \int_D x_2 \psi_0 dD = 0. \quad (2.28)$$

Le altre funzioni  $\psi_1$  e  $\psi_2$  descrivono le funzioni di ingobbamento da taglio, mentre  $\psi_3$  è la funzione di ingobbamento secondario di torsione. Tali funzioni risultano espresse dalle [Capurso 1984, Laudiero & Savoia 1990].

$$\psi_j(s, 0) = \bar{\psi}_j(s, 0) - c_{1j} x_1(s) - c_{2j} x_2(s) - c_{\omega j} \omega(s) - c_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.29)$$

dove le  $\bar{\psi}_j$  sono da calcolarsi dall'integrazione delle

$$\frac{d}{ds} \bar{\psi}_1 = -\frac{S_2^*}{I_2 t}, \quad \frac{d}{ds} \bar{\psi}_2 = -\frac{S_1^*}{I_1 t}, \quad \frac{d}{ds} \bar{\psi}_3 = -\frac{S_\omega^*}{I_\omega t}, \quad (2.30)$$

in cui

$$I_\omega = \int_D \omega^2 dD, \quad S_1^* = \int_0^s x_2 t ds, \quad S_2^* = \int_0^s x_1 t ds, \quad S_\omega^* = \int_0^s \omega t ds. \quad (2.31)$$



Le dodici costanti che compaiono nelle (2.29) vengono infine determinate imponendo le condizioni di ortogonalità<sup>4</sup>

$$\int_D \psi_j dD = 0, \quad \int_D x_1 \psi_j dD = 0, \quad \int_D x_2 \psi_j dD = 0, \quad \int_D \omega \psi_j dD = 0, \quad j=1,2,3. \quad (2.32)$$

---

<sup>4</sup> Alle usuali condizioni di ortogonalità si aggiunge quella relativa alla funzione che descrive le aree settoriali e quindi l'ingobbamento da torsione pura.

## 2. CONDIZIONI DI BILANCIO DEL SISTEMA TRAVE-CAVO

Dalla condizione di bilancio scritta in forma variazionale avvalendosi del principio di Lagrange-D'Alembert, si individuano le grandezze dinamiche del cavo e della trave che risultano duali dei descrittori cinematici del sistema. In particolare si evidenzia un'analogia formale tra le caratteristiche puramente geometriche del percorso del cavo e le risultanti della sollecitazione interna della trave. Si procede quindi alla scrittura delle equazioni di equilibrio in forma locale. Infine viene espressa l'interazione del cavo nei confronti della trave definendo un insieme di caratteristiche di sollecitazioni esterne equivalenti.

### 2.1. Definizione delle forze agenti sul sistema tridimensionale

Volendo derivare le condizioni di bilancio da quelle valide nella teoria tridimensionale, si considera l'effettivo sistema di forze agente sul solido cilindrico costituito in generale da un campo di forze di contatto  $\mathbf{b}_S(\mathbf{x}, \zeta; t)$  definito sulla regione  $\partial V_S$  della frontiera di  $V$ , e da un campo di forze specifiche di massa  $\mathbf{b}_M(\mathbf{x}, \zeta; t)$  definito sui punti interni di  $V$ . Lo stato tensionale viene descritto dal tensore di Cauchy  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \zeta; t)$  che nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi coincide con i tensori di Piola-Kirchhoff. Si suppone inoltre che esiste una funzione scalare positiva nota  $\rho_0(\mathbf{x}, \zeta): V \rightarrow \mathfrak{R}^+$  che descrive la densità della trave nella configurazione di riferimento.

Il cavo, sotto l'ipotesi di massa nulla, è soggetto alle sole forze di interazione con la trave che, nel caso di contatto liscio, risultano dirette secondo la normale principale al percorso. Internamente lo stato tensionale è descritto completamente dal vettore  $\boldsymbol{\tau}$  tangente al percorso e con modulo  $\tau$  costante (cfr. Cap.1 §4).

L'aver assunto che le deformazioni ammissibili della trave sono espresse dalla (2.12), equivale all'aver imposto al solido un vincolo locale sulle deformazioni [Davì, 1995] mentre un vincolo globale viene introdotto nel momento in cui si considera un numero finito di funzioni d'ingobbamento [Antman & Marlow, 1991] secondo la (2.13). Ciò si riflette sullo stato tensionale che può decomporre in due parti: una reattiva ( $\boldsymbol{T}^R$ ) che ha il compito di imporre il vincolo e che non compie lavoro per gli spostamenti ammissibili, ed una parte attiva ( $\boldsymbol{T}^A$ ) che deriva dalla deformazione del corpo e che compie lavoro non nullo per effetto degli spostamenti ammissibili. In maniera analoga, dell'effettiva distribuzione di forze esterne applicate alla trave, interessa solamente la parte che compie lavoro per gli spostamenti ammissibili (2.13) la quale è descrivibile con un numero finito di grandezze dinamiche risultanti (*caratteristiche della sollecitazione esterna*).

## 2.2. La condizione di bilancio globale

La condizione di bilancio globale tra le forze interne e le forze esterne definite precedentemente (cfr. §2.1) si ottiene dall'espressione, linearizzata nell'intorno della configurazione naturale della trave, del principio di Lagrange-D'Alembert

$$\int_V \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{E}} dV + \tau \hat{\Lambda} - \int_V \rho_0 \boldsymbol{b}_M \cdot \hat{\boldsymbol{u}} dV - \int_{\partial V_s} \boldsymbol{b}_S \cdot \hat{\boldsymbol{u}} d\partial V_s + \int_V \rho_0 \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} dV = 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{u}}. \quad (2.33)$$

### Osservazione 1

Le forze di interazione cavo guaina compiono lavoro nullo dal momento che il mutuo contatto è stato ipotizzato perfettamente liscio (cfr. Cap.1 §2.4).

Dal momento che il solido è soggetto ad un vincolo globale, le variazioni degli spostamenti che compaiono nella (2.33) devono essere compatibili con quelli ammissibili definiti dalla (2.13). L'esplicitazione di  $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$  permette di definire nuove relazioni di dualità tra i descrittori cinematici del problema vincolato e certe caratteristiche dinamiche, le quali rappresentano le risultanti interne ed esterne delle forze nonché quelle delle masse. Ovviamente la sola conoscenza delle caratteristiche dinamiche così definite non è sufficiente a cogliere le effettive distribuzioni delle tensioni e delle forze che si hanno sul solido tridimensionale ma hanno una loro coerenza con l'introduzione del vincolo globale che, in effetti, permette di descrivere solo in modo approssimato il moto del solido tridimensionale.

### 2.2.1. Variazione ammissibile della configurazione

Prima di passare direttamente all'esplicitazione dei termini della (2.33), si scrivono le variazioni dei campi di spostamento e delle misure della deformazione in funzione delle variazioni dei descrittori cinematici del problema.

Una variazione infinitesima ammissibile della configurazione è individuata dalla terna di funzioni  $\hat{\mathbf{v}} \equiv (\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \in C_0 \subset C$  dove  $C_0$  è l'insieme degli spostamenti compatibili con i vincoli cinematici esterni. Il campo di spostamenti che ne deriva, coerentemente con la (2.13), è espresso dalla

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \zeta) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \zeta) = \hat{\mathbf{u}}_0(\zeta) + \hat{\boldsymbol{\phi}}(\zeta) \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \hat{\boldsymbol{\phi}}(\zeta) \times \mathbf{x}_s + \hat{\boldsymbol{\chi}}(\zeta) \cdot \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_3. \quad (2.34)$$

La variazione della misura di deformazione corrispondente viene descritta dalla quaterna di funzioni  $\hat{\mathbf{d}} \equiv (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}', \hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}')$  derivabile da  $\hat{\mathbf{v}}$ . Ricordando la (2.16), e definendo il tensore emisimmetrico  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  il cui vettore assiale è  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , è immediato ottenere l'espressione della variazione del gradiente di deformazione e degli spostamenti

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \zeta) = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \zeta) = \hat{\mathbf{f}}_0(\mathbf{x}, \zeta) \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D (\hat{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Psi}) + \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}), \quad (2.35)$$

in cui

$$\hat{\mathbf{f}}_0(\mathbf{x}, \zeta) = \hat{\mathbf{\Gamma}}(\zeta) + \hat{\boldsymbol{\phi}}' \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \hat{\boldsymbol{\phi}}' \times \mathbf{x}_s + (\hat{\boldsymbol{\chi}}' \cdot \boldsymbol{\Psi}) \mathbf{A}_3, \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}(\zeta) = \hat{\mathbf{u}}' - \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{A}_3. \quad (2.36)$$

Infine, dalla misura di deformazione linearizzata del cavo (2.26), deriva direttamente l'espressione di  $\hat{\mathbf{a}}$  in termini delle variazioni dei descrittori cinematici del sistema

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \frac{\mathbf{H}' \otimes \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \cdot (\hat{\mathbf{f}}_0^H \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D (\hat{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\Psi}^H))^{\text{Sym}} d\zeta. \quad (2.37)$$

### 2.2.2. Le risultanti della sollecitazione interna alla trave

Tenendo conto delle (2.35) il termine relativo al lavoro interno delle tensioni sulla trave può essere riscritto come

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_V \mathbf{T}^A \cdot (\hat{\mathbf{f}}_0 \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D (\hat{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\Psi}))^{\text{Sym}} dV \quad (2.38)$$

Per le (2.17), eseguendo l'integrazione sulla sezione della trave  $D$ , si giunge alla

$$\int_V \mathbf{T}^A \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L [N \cdot (\hat{\mathbf{u}}'_0 - \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{A}_3) + \mathbf{M} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}' + \mathbf{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\mu} \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}'] d\zeta \quad (2.39)$$

dove ( $\mathbf{t}_3^A = \mathbf{T}^A \mathbf{A}_3$ )

$$\begin{aligned} N(\zeta) &= \int_D \mathbf{t}_3^A dD, & \mathbf{M}(\zeta) &= \int_D \mathbf{x} \times \mathbf{t}_3^A dD - \mathbf{I}_3 (\mathbf{x}_s \times N), \\ \mathbf{v}_I(\zeta) &= \int_D \mathbf{t}_3^A \cdot \nabla_D \boldsymbol{\Psi}_I dD, & \boldsymbol{\mu}(\zeta) &= \int_D \boldsymbol{\Psi}_I^A \mathbf{t}_3^A dD, \end{aligned} \quad (2.40)$$

sono le risultanti della sollecitazione interna della trave duali dei descrittori della misura di deformazione. Esse esprimono risultante, momento risultante, bi-taglio e bi-momento

dello stato tensionale. Si conclude il paragrafo osservando che la (2.39) può essere riscritta in forma sintetica secondo la

$$\int_V \mathbf{T}^A \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L \mathbf{Q}(\zeta) \cdot \mathcal{D}\mathbf{v}(\zeta) d\zeta, \quad (2.41)$$

dove il vettore  $\mathbf{Q}$  raccoglie le risultanti generalizzate delle tensioni interne mentre  $\mathbf{v} \rightarrow \mathcal{D}\mathbf{v}$  è l'operatore differenziale formale che associa  $\mathbf{d}$  a  $\mathbf{v}$ , ovvero

$$\mathbf{Q}(\zeta) = \begin{bmatrix} N \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}_{(6+2n_t) \times 1}, \quad \mathbf{d} = \mathcal{D}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_0 - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}_3 \\ \boldsymbol{\varphi}' \\ \boldsymbol{\chi} \\ \boldsymbol{\chi}' \end{bmatrix}_{(6+2n_t) \times 1}. \quad (2.42)$$

#### Osservazione 1

Definendo l'operatore che associa direttamente il vettore delle risultanti  $\mathbf{Q}$  alla tensione sulla sezione  $\mathbf{t}_3^A$ , le (2.40) possono essere compattate nella

$$\mathbf{Q} = \int_D \mathcal{F}(\mathbf{x}, \zeta) \mathbf{t}_3^A dD. \quad (2.43)$$

### 2.2.3. Le caratteristiche dinamiche del cavo duali dei descrittori della deformazione

Prima di riscrivere il termine di lavoro interno del cavo, si osservi che, con semplici passaggi, la (2.37) può porsi nella forma

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \mathcal{F}^H(\zeta) \left[ \frac{\mathbf{H}'(\zeta) \otimes \mathbf{H}'(\zeta)}{|\mathbf{H}'(\zeta)|} \mathbf{A}_3 \right] \cdot \hat{\mathbf{d}}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \boldsymbol{\Theta} \cdot \hat{\mathbf{d}}(\zeta) d\zeta \quad (2.44)$$

dove

$$\Theta(\zeta) = \begin{bmatrix} \Theta_N \\ \Theta_M \\ \Theta_v \\ \Theta_\mu \end{bmatrix}_{(6+2n_I) \times 1} \quad \begin{aligned} \Theta_N(\zeta) &= \frac{\mathbf{H}' \otimes \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}'|} \mathbf{A}_3, & \Theta_M(\zeta) &= \mathbf{x}_c \times \Theta_N - \mathbf{I}_3(\mathbf{x}_s \times \Theta_N), \\ \Theta_{vI}(\zeta) &= \Theta_N \cdot \nabla_D \Psi_I^H, & \Theta_\mu(\zeta) &= \Psi^H(\Theta_N \cdot \mathbf{A}_3). \end{aligned} \quad (2.45)$$

In sostanza, la traccia su  $\mathbf{H}$  dell'operatore  $\mathcal{F}$  definito in chiusura del precedente paragrafo è - in questo caso - applicata alla quantità puramente geometrica rappresentata dalla proiezione lungo la tangente al percorso del cavo del vettore  $|\mathbf{H}'| \mathbf{A}_3$ , generando la funzione a valori vettoriali  $\Theta$ . In ultima analisi, il lavoro interno della tensione sul cavo risulta

$$\tau \hat{\alpha} \Lambda = \tau \int_0^L \Theta \cdot \hat{\mathbf{d}} d\zeta = \tau \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \hat{\mathbf{v}} d\zeta \quad (2.46)$$

#### Osservazione 1

La scrittura della (2.46), e quindi l'esistenza di caratteristiche cinematiche relative al cavo corrispondenti alle risultanti delle tensioni attive, deriva in ultima analisi dalla parametrizzazione scelta per descrivere il percorso del cavo e dall'ipotesi di *cavo omogeneo privo di massa e con contatto liscio* la quale permette di isolare il termine di tensione fuori dall'integrale nella scrittura del lavoro virtuale.

#### 2.2.4. Le risultanti delle forze esterne

Similmente a quanto fatto in §2.2.2, si considera il termine delle forze esterne e lo si riscrive tenendo conto della (2.34). Eseguendo le integrazioni sulla sezione e sulla frontiera della sezione<sup>1</sup> e raccogliendo i termini duali degli stessi descrittori dello spostamento si ha

<sup>1</sup> Si tenga presente che  $\partial V = \{\partial D \times [0, L]\} \cup \{D_0, D_L\}$ .

$$\begin{aligned}
& \int_V \rho_0 \mathbf{b}_M \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial V_s} \mathbf{b}_S \cdot \hat{\mathbf{u}} d\partial V_s \\
&= \int_0^L [\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{m} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}] d\zeta + \mathbf{n}_\vartheta \cdot \hat{\mathbf{u}}_{0\vartheta} \Big|_{\vartheta=0,L} + \mathbf{m}_\vartheta \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_\vartheta \Big|_{\vartheta=0,L} + \boldsymbol{\beta}_\vartheta \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}_\vartheta \Big|_{\vartheta=0,L}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

nella quale con

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(\zeta) &= \int_D \rho_0 \mathbf{b}_M dD + \int_{\partial D} \mathbf{b}_S d\partial D, \\
\mathbf{m}(\zeta) &= \int_D \rho_0 \mathbf{x} \times \mathbf{b}_M dD + \int_{\partial D} \mathbf{x} \times \mathbf{b}_S d\partial D - \mathbf{I}_3 (\mathbf{x}_s \times \mathbf{n}), \\
\boldsymbol{\beta}(\zeta) &= \int_D \rho_0 \boldsymbol{\psi} \mathbf{b}_M \cdot \mathbf{A}_3 dD + \int_{\partial D} \boldsymbol{\psi} \mathbf{b}_S \cdot \mathbf{A}_3 d\partial D
\end{aligned} \tag{2.48}$$

si sono indicate le risultanti dei sistemi di forze esterne agenti lungo la trave duali dei descrittori cinematici, mentre con

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_\vartheta &= \int_{D_\vartheta} \mathbf{b}_S dD_\vartheta, \quad \mathbf{m}_\vartheta = \int_{D_\vartheta} \mathbf{x} \times \mathbf{b}_S dD_\vartheta - \mathbf{I}_3 \mathbf{x}_s \times \mathbf{n}_\vartheta, \quad \boldsymbol{\beta}_\vartheta = \int_{D_\vartheta} \boldsymbol{\psi} (\mathbf{b}_S \cdot \mathbf{A}_3) dD_\vartheta, \\
&\qquad \qquad \qquad \vartheta = 0, L
\end{aligned} \tag{2.49}$$

si sono indicate le risultanti delle forze che agiscono sulle sezioni estreme  $\vartheta$  della trave.

Come nel caso precedente la (2.47) può scriversi in forma compatta secondo la

$$\int_V \rho_0 \mathbf{b}_M \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial V_s} \mathbf{b}_S \cdot \hat{\mathbf{u}} d\partial V_s = \int_0^L \mathbf{q}(\zeta) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\zeta) d\zeta + \mathbf{q}_\vartheta \cdot \hat{\mathbf{v}}_\vartheta \Big|_{\vartheta=0,L}, \tag{2.50}$$

in cui

$$\mathbf{q}(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}_{(6+n_I) \times 1}, \quad \mathbf{q}_\vartheta = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\vartheta \\ \mathbf{m}_\vartheta \\ \boldsymbol{\beta}_\vartheta \end{bmatrix}_{(6+n_I) \times 1}. \tag{2.51}$$

### 2.2.5. Le masse risultanti

Si considera il termine dovuto alla presenza delle forze di inerzia: tenendo conto dell'espressione del campo delle accelerazioni (2.20), nonché della (2.29), si ottiene la



$$\int_V \rho_0(\mathbf{x}, \zeta) \ddot{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV = \int_V \rho_0 [\ddot{\mathbf{u}}_0 + \ddot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \ddot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x}_s + \ddot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}_3] \cdot [\hat{\mathbf{u}}_0 + \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x} - \mathbf{I}_3 \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{x}_s + \hat{\boldsymbol{\chi}} \cdot \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}_3] dV \quad (2.52)$$

Per le condizioni di ortogonalità (2.14) delle funzioni di ingobbamento, nonché sotto le ipotesi semplificative che la sezione della trave sia omogenea ( $\rho_0 = \rho_0(\zeta)$ ) e che il sistema di riferimento introdotto, oltre che essere baricentrico (cfr. §1.1), sia anche principale di inerzia, la (2.52) si trasforma nella

$$\begin{aligned} \int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV &= \int_0^L [\rho_0 A \ddot{\mathbf{u}}_0 - \rho_0 A \ddot{\boldsymbol{\phi}}_3 \mathbf{A}_3 \times \mathbf{x}_s] \cdot \hat{\mathbf{u}}_0 d\zeta \\ &+ \int_0^L [-\rho_0 A \mathbf{I}_3 (\mathbf{x}_s \times \ddot{\mathbf{u}}_0) + \rho_0 (\mathbf{I}_p \mathbf{I} - \mathbf{J} + \mathbf{x}_s^2 A \mathbf{I}_3) \ddot{\boldsymbol{\phi}}] \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} d\zeta \\ &+ \int_0^L \rho_0 I_{\psi_i \psi_j} \ddot{\chi}_i \hat{\chi}_j d\zeta, \end{aligned} \quad (2.53)$$

dove  $\mathbf{J} = \int_D (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{A}_3 \times \mathbf{x}) dD$  è il tensore d'inerzia. Raccogliendo in un unico vettore i termini di accelerazione, la (2.53) può risciversi in forma compatta

$$\int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV = \int_0^L \mathbf{L} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta \quad (2.54)$$

in cui<sup>2</sup>

$$\mathbf{L}(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{u_0 u_0} & \mathbf{L}_{u_0 \phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{u_0 \phi}^T & \mathbf{L}_{\phi \phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{\chi \chi} \end{bmatrix}_{(6+n_I) \times (6+n_I)}, \quad \ddot{\mathbf{v}}(\zeta) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \\ \ddot{\boldsymbol{\chi}} \end{bmatrix}_{(6+n_I) \times 1}. \quad (2.55)$$

<sup>2</sup> Le espressioni dettagliate delle sottomatrici di  $\mathbf{L}$  sono riportate in appendice.

*Osservazione 1*

Nella matrice simmetrica  $\mathbf{L}$  vengono raccolte le *risultanti* delle masse significative per il modello. In particolare i termini diagonali rappresentano le masse che producono forze generalizzate di inerzia per effetto delle accelerazioni lineari, angolari e per le accelerazioni di ingobbamento. I termini fuori diagonale sono di accoppiamento. Sotto le ipotesi semplificative di cui sopra l'unico accoppiamento possibile è quello roto-traslazionale dovuto alla non coincidenza del centro di taglio con il baricentro della sezione. Ovviamente, tali termini si annullano per sezioni doppiamente simmetriche.

**2.2.6. La condizione di bilancio globale in termini di caratteristiche risultanti**

Sulla base delle espressioni ottenute nei precedenti paragrafi, è immediato riscrivere il principio di Lagrange-D'Alembert (2.33) in termini delle risultanti della sollecitazione interna, delle forze esterne e delle masse

$$\int_0^L \mathbf{Q} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta + \tau \int_0^L \mathbf{\Theta} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta - \int_0^L \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta - \mathbf{q}_g \cdot \hat{\mathbf{v}}_g|_{g=0,L} + \int_0^L \mathbf{L}\ddot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in C_0. \quad (2.56)$$

L'espressione ottenuta non contiene integrali di volume. Il problema di elasticità tridimensionale dal quale si è partiti è stato ridotto ad un problema monodimensionale in cui la caratteristica tridimensionale della trave si conserva *in media* grazie a grandezze dipendenti solamente da  $\zeta$ : dal punto di vista cinematico si hanno le funzioni che descrivono il campo di spostamenti vincolato e dualmente, dal punto di vista dinamico, si hanno le caratteristiche risultanti della tensione, delle forze esterne e delle masse definite nei precedenti paragrafi. Il fatto di aver individuato grandezze cinematiche del cavo analoghe alle risultanti della tensione interna sulla sezione rende particolarmente semplice l'equazione di bilancio.

### 2.3. Le condizioni di bilancio locali in termini di caratteristiche risultanti

Integrando per parti la condizione di bilancio globale si giunge alla

$$\int_0^L [-\mathcal{D}^*(\mathbf{Q} + \tau\Theta) - \mathbf{q} + L\ddot{\mathbf{v}}] \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta + \mathcal{L}(\mathbf{Q}(\zeta) + \tau\Theta(\zeta)) \cdot \hat{\mathbf{v}} \Big|_0^L - \mathbf{q}_g \cdot \hat{\mathbf{v}}_g \Big|_{g=0,L} = 0, \quad (2.57)$$

$$\forall \hat{\mathbf{v}} \in C_0.$$

dove gli operatori  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{D}^*\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{L}\mathbf{Q}$  sono definiti dalle

$$\mathcal{D}^*\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} N' \\ \mathbf{M}' + \mathbf{A}_3 \times N \\ \boldsymbol{\mu}' - \mathbf{v} \end{bmatrix}_{(6+n_f) \times 1}, \quad \mathcal{L}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} N \\ \mathbf{M} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}_{(6+n_f) \times 1}. \quad (2.58)$$

Per il teorema fondamentale del calcolo delle variazioni la relazione integrale (2.57) è equivalente alla seguente equazione differenziale

$$\mathcal{D}^*\mathbf{Q} = -\tau\mathcal{D}^*\Theta - \mathbf{q} + L\ddot{\mathbf{v}}, \quad (2.59)$$

alla quale sono da associarsi le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}\mathbf{Q}(L) + (\tau\mathcal{L}\Theta(L) - \mathbf{q}_L)] \cdot \hat{\mathbf{v}}_L &= 0, \\ [\mathcal{L}\mathbf{Q}(0) + (\tau\mathcal{L}\Theta(0) + \mathbf{q}_0)] \cdot \hat{\mathbf{v}}_0 &= 0. \end{aligned} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in C_0 \quad (2.60)$$

La (2.59) è la condizione di bilancio del concio di trave che mette direttamente in relazione le risultanti delle tensioni interne con le risultanti delle forze esterne.

#### Osservazione 1

Il termine relativo al cavo nella (2.59) permette di definire l'interazione trave-cavo in termini di opportune azioni distribuite lungo l'asse della trave che verranno dette *caratteristiche risultanti dell'interazione*. Tali caratteristiche sono definite dalle

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{n} \\ \bar{m} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix}_{(6+n_f) \times 1} = \tau \begin{bmatrix} \Theta'_N \\ \Theta'_M + A_3 \times \Theta_N \\ \Theta'_\mu - \Theta_\nu \end{bmatrix}_{(6+n_f) \times 1} = \tau \mathcal{D}^* \Theta, \quad (2.61)$$

Analogamente, le condizioni al contorno (2.60) permettono di definire le azioni concentrate di estremità

$$\bar{q}_L = -\tau \mathcal{L}\Theta(L), \quad \bar{q}_0 = \tau \mathcal{L}\Theta(0). \quad (2.62)$$

Nel caso particolare in cui il valore di  $\tau$  è noto, come avviene durante le fasi di messa in tensione dei cavi, i carichi equivalenti definiti con le (2.61) e (2.62) possono essere effettivamente considerati come carichi esterni, dato che  $\Theta$  è una grandezza che dipende esclusivamente dal percorso del cavo. In questo caso il problema può essere risolto formalmente prescindendo dalla presenza del cavo. Ovviamente, il valore della tensione non è più noto quando le azioni esterne intervengono dopo che le estremità del cavo siano state fissate alla trave.

### 3. IL PROBLEMA LINEARE ELASTICO

Si assume che la trave sia costituita da un materiale lineare elastico con la massima simmetria materiale compatibile con il vincolo di indeformabilità della sezione [Podio Guidugli & Vianello, 1992] ed il cavo presenti un comportamento lineare elastico. In base all'ipotesi che la trave sia nel suo stato naturale (tensioni nulle) nella configurazione di riferimento, si procede alla determinazione delle equazioni che risolvono il problema assumendo gli spostamenti come incognite. Le equazioni del moto che discendono direttamente dalle condizioni di bilancio vengono presentate sia in forma variazionale che in forma locale. L'accoppiamento tra deformazione globale della trave e deformazione locale del cavo conduce ad equazioni di equilibrio locale di carattere integro-differenziale.

#### 3.1. Prescrizioni costitutive

Per semplicità si suppone che la trave sia omogenea e costituita da un materiale trasversalmente isotropo con asse di simmetria parallelo all'asse della trave tale che la componente di tensione attiva sia descritta dai moduli di Young  $E$  e  $G$  tramite la seguente relazione:

$$\mathbf{T}^A = 2G\mathbf{E} + (E - 2G)(\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{E})\mathbf{I}_3, \quad (2.63)$$

Per la (2.18), dalla (2.63) deriva l'espressione dello stato tensionale attivo del solido cilindrico

$$\mathbf{T}^A = 2G(\mathbf{f}_0 \otimes \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi}))^{Sym} + (E - 2G)f_{03}\mathbf{I}_3, \quad (2.64)$$

per cui il vettore tensione sulla sezione trasversale  $\mathbf{t}_3^A = \mathbf{T}^A \mathbf{A}_3$  risulta

$$\mathbf{t}_3^A = G[u'_{0\gamma} \mathbf{A}_\gamma - \varphi_\gamma \mathbf{A}_\gamma \times \mathbf{A}_3 + \varphi'_3 \mathbf{A}_3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \nabla_D(\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi})] + E[u'_{03} \mathbf{A}_3 + \varphi'_\gamma \mathbf{A}_\gamma \times \mathbf{x} + (\boldsymbol{\chi}' \cdot \boldsymbol{\psi}) \mathbf{A}_3] \quad (2.65)$$

Tenendo conto della (2.65), le (2.40) permettono di definire i legami costitutivi tra le caratteristiche di sollecitazione interne della trave ed i descrittori cinematici adottati con il modello (2.13). Nell'ipotesi che la prima funzione di ingobbamento sia quella di torsione pura alla DSV e assumendo che gli assi di riferimento siano disposti secondo le direzioni principali di inerzia si ottengono le

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= GA(u'_{0\gamma} \mathbf{A}_\gamma - \varphi_\gamma \mathbf{A}_\gamma \times \mathbf{A}_3) - GA(\varphi'_3 \mathbf{A}_3 \times \mathbf{x}_s) + GC_{J\gamma} \chi_J \mathbf{A}_\gamma + EAu'_{03} \mathbf{A}_3, \\ \mathbf{M} &= G[J - C_{\psi 0}] \varphi'_3 \mathbf{A}_3 + G\chi_J C_{sJ} \mathbf{A}_3 \\ &\quad - GA[x_{s1}(u'_{02} + \varphi_1) - x_{s2}(u'_{01} - \varphi_2)] \mathbf{A}_3 + E(I_1 \varphi'_1 \mathbf{A}_1 + I_2 \varphi'_2 \mathbf{A}_2) \\ \mu_I &= E\chi'_J I_{\psi_J \psi_I}, \\ \nu_I &= (u'_{01} - \varphi_2) GC_{I1} + (u'_{02} + \varphi_1) GC_{I2} + \varphi_3 GC_{sI} + G\chi_J C_{\psi_I \psi_J}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

dove, oltre all'area ed ai momenti di inerzia definiti dalle (2.2), si sono introdotti il momento di inerzia torsionale alla DSV

$$J = \int_D (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) dD + A(\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_s) + C_{s0}, \quad (2.67)$$

e le ulteriori caratteristiche di inerzia sezionale legate alle funzioni di ingobbamento assunte

$$\begin{aligned}
 I_{\Psi_I\Psi_J} &= \int_D \Psi_I \Psi_J dD, & C_{\Psi_I\Psi_J} &= \int_D (\nabla_D \Psi_I \cdot \nabla_D \Psi_J) dD, \\
 C_{J_\gamma} &= \int_D \nabla_D \Psi_J \cdot \mathbf{A}_\gamma dD, & C_{s_J} &= \int_D |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \times \nabla \Psi_J| dD.
 \end{aligned}
 \tag{2.68}$$

In particolare, per  $I=J=0$  si hanno le inerzie definite nella trattazione della torsione non uniforme di Vlasov. Le (2.66) sono i legami che permettono di passare dai descrittori cinematici alle caratteristiche di sollecitazione ad essi duali, ovvero rappresentano i legami costitutivi del concio di trave. In forma matriciale si può scrivere

$$\mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{v}(\zeta), \quad \zeta \in [0, L], \tag{2.69}$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice delle rigidzze del concio di trave

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} & \mathbf{K}_{\Gamma\varphi'} & \mathbf{K}_{\Gamma\chi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\varphi'\Gamma} & \mathbf{K}_{\varphi'\varphi'} & \mathbf{K}_{\varphi'\chi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\chi\Gamma} & \mathbf{K}_{\chi\varphi'} & \mathbf{K}_{\chi\chi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\chi'\chi'} \end{bmatrix}_{(6+2n_I) \times (6+2n_I)}. \tag{2.70}$$

Per quanto riguarda il cavo, nell'ipotesi che anche questo sia omogeneo e costituito da un materiale iperelastico lineare, la tensione è misurata da  $\tau = c(e + e_0)$ , dove  $c$  è la costante di rigidzza del cavo,  $e = a - 1$  è la deformazione dello stesso a partire dalla configurazione di riferimento<sup>1</sup> ed  $e_0$  è la deformazione misurata nella configurazione di riferimento a partire dalla configurazione naturale per il cavo ( $\tau=0$ ).

---

<sup>1</sup> Che coincide con la configurazione naturale per la trave.

*Osservazione 1*

Prima di proseguire vale la pena soffermarsi ad osservare che la definizione della configurazione di riferimento per il sistema non è banale come in altri problemi di meccanica, in quanto essa è stata considerata coincidente con la configurazione in cui la trave ha stato tensionale attivo nullo (configurazione naturale). Ovviamente, in questo caso, lo stato tensionale nullo per la trave non coincide con l'assenza di carichi esterni ma si ottiene con uno degli infiniti sistemi di carico che hanno risultanti (2.51) capaci di equilibrare localmente le forze equivalenti di precompressione (2.61) e (2.62) in cui  $\tau$  è posto uguale a  $ce_0$ .

Dal momento che  $a$  risulta costante lungo lo sviluppo del cavo, e dipendente globalmente dallo stato di deformazione della trave, lo sarà anche la misura di tensione  $\tau$ . Considerando la misura linearizzata di deformazione (2.26), e facendo uso delle stesse notazioni introdotte precedentemente, si ha che

$$\tau = c(a(\mathbf{v}) - 1 + e_0) = \frac{c}{\Lambda} \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D}\mathbf{v} d\zeta + ce_0, \quad (2.71)$$

la quale rappresenta il legame esplicito tra la tensione del cavo e la deformazione della trave.

**3.2. Formulazione globale del problema elastico lineare**

Tenendo conto dei legami (2.65) e (2.67), la condizione di bilancio globale (2.56) porge la formulazione debole del problema elastico lineare che è rappresentato dall'equazione



$$\begin{aligned}
& \int_0^L \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{v} \cdot \mathcal{D} \hat{\mathbf{v}} d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \mathbf{v} d\zeta \right) \left( \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \hat{\mathbf{v}} d\zeta \right) \\
& = -c e_0 \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \hat{\mathbf{v}} d\zeta + \int_0^L \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta - \int_0^L \mathbf{L} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\zeta + \mathbf{q}_9 \cdot \hat{\mathbf{v}}_9 \Big|_{9=0,L}
\end{aligned} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in C_0 \quad (2.72)$$

La soluzione di tale problema va ovviamente ricercata nello spazio delle funzioni che soddisfano le condizioni cinematiche al contorno e che siano sufficientemente regolari da dare un senso alla (2.72) nella teoria dell'integrazione di Lebesgue. Nell'ipotesi di grandezze costitutive continue e limitate, si assume il seguente spazio delle incognite

$$U = \left\{ \mathbf{v} \in C ; \|\mathbf{v}\|_U = \left[ \int_0^L |\mathcal{D} \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}|^2 d\zeta \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}. \quad (2.73)$$

### 3.3. Formulazione locale del problema elastico lineare

Dall'integrazione per parti della (2.72) o, equivalentemente, tenendo conto delle (2.69) e (2.71) nell'esprimere le condizioni di bilancio locale (2.59) e le condizioni al contorno (2.60), si ottiene la formulazione forte del problema elastico che è espressa dall'equazione vettoriale

$$\mathcal{D}^* \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{v} + \mathbf{q} + c \left( \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \mathbf{v} d\zeta + e_0 \right) \mathcal{D}^* \Theta + \mathbf{L} \ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad \zeta \in (0, L) \quad (2.74)$$

e dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned}
& \left[ \mathcal{L} \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{v}_L + c \left( \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \mathbf{v} d\zeta + e_0 \right) \mathcal{L} \Theta - \mathbf{q}_L \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_L = \mathbf{0}, \\
& \left[ \mathcal{L} \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{v}_0 + c \left( \frac{1}{\Lambda} \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D} \mathbf{v} d\zeta + e_0 \right) \mathcal{L} \Theta + \mathbf{q}_0 \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{0}.
\end{aligned} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in C_0 \quad (2.75)$$

*Osservazione 1*

In questo caso la soluzione del problema deve essere scelta in uno spazio di funzioni più stretto di quello definito nel paragrafo precedente, ovvero devono considerarsi le funzioni per le quali  $|\mathcal{D}^* \mathcal{D}v(\zeta)| < \infty \quad \forall \zeta \in [0, L]$ .

*Osservazione 2*

La formulazione forte del problema non è di tipo differenziale ma di tipo integro differenziale. Come osservato in [Dall'Asta e Dezi, 1993], l'impostazione del problema in forma variazionale (o debole) è la più naturale da seguire. Infatti, l'accoppiamento globale tra la deformazione locale del cavo e la deformazione globale della trave si riflette pesantemente sulla formulazione forte del problema che non risulta governato da equazioni differenziali, ma da equazioni integrodifferenziali per le quali non si ha speranza di ottenere soluzioni in forma chiusa. La forma debole invece, esprimendo globalmente l'equilibrio del sistema, non risulta penalizzata dal particolare accoppiamento strutturale e verrà utilizzata in seguito per risolvere numericamente il problema.

**3.4. Osservazioni sulle travi in parete sottile****3.4.1. Le inerzie della sezione correlate con l'ingobbamento**

Le caratteristiche inerziali della sezione definite dalle (2.67) e (2.68) sono valide per travi con sezione generica. Nel caso di travi in parete sottile, se con  $\mathcal{S}$  si indica la traccia della superficie media della parete della trave, ponendosi nel sistema di riferimento locale definito in § 1.2.3, gli integrali di superficie possono essere riscritti nella forma

$$\int_D f(\mathbf{x}) dD = \int_{\mathcal{S}-t/2}^{t/2} \int_{\mathcal{S}} f(s, n) dn ds = \int_{\mathcal{S}} f(s, 0) t + O(t^3) ds. \quad (2.76)$$

Se  $t$  è molto minore dello sviluppo della linea media della sezione, le potenze di ordine maggiore o uguale di 3 possono trascurarsi per cui le (2.68) si riducono alle

$$\begin{aligned} I_{\psi_I \psi_J} &= \int_{\mathcal{S}} \psi_I(s,0) \psi_J(s,0) t ds, & C_{\psi_I \psi_J} &= \int_{\mathcal{S}} \psi_{I,s}(s,0) \psi_{J,s}(s,0) t ds, \\ C_{J\gamma} &= \int_{\mathcal{S}} \psi_{J,s}(s,0) t ds \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{A}_\gamma, & C_{sJ} &= \int_{\mathcal{S}} \psi_{J,s}(s,0) [\mathbf{x}(s,0) - \mathbf{x}_s] \times \mathbf{a}_1 t ds. \end{aligned} \quad (2.77)$$

In particolare le inerzie  $I_{\psi_I \psi_J}$  per  $I \oplus J$  risultano molto minori delle stesse ottenute con  $I = J$  per cui in seguito verranno trascurate [Laudiero et al., 1991].

Una discussione a parte merita la (2.67) per la quale un ragionamento simile a quello visto per le altre inerzie non fornisce una buona stima del valore reale di  $J$ . Nel caso delle travi in parete sottile con sezione aperta, infatti, il gradiente della funzione di ingobbamento di torsione pura ha le due componenti paragonabili e l'ipotesi di ingobbamento costante sullo spessore della parete deve essere rimossa. In tal caso una buona stima di  $J$  è data dalla ben nota

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_b} t_i^3 b_i. \quad (2.78)$$

valida per sezioni costituite da diversi tratti di lunghezza  $b_i$  e di spessore  $t_i$ .

### 3.4.2. Valutazione dello stato tensionale

La stima dello stato tensionale completo della trave ha importanza fondamentale sia nelle verifiche locali del raggiungimento delle tensioni limite del materiale, sia nel caso in cui si intenda eseguire l'analisi della stabilità dell'equilibrio delle configurazioni non naturali. Come già avuto modo di osservare lo stato tensionale, nel caso in cui si hanno vincoli interni (locali o globali), si decompone in una parte attiva, fornita dalla soluzione elastica del problema, ed in una reattiva solitamente indeterminata. Ovviamente lo stato tensionale completo dovrà soddisfare la condizione di equilibrio

locale la quale, in particolari situazioni, permette di calcolare la componente reattiva della tensione. Nel caso di sezioni compatte generiche, non è possibile determinare in modo univoco tale stato tensionale per cui le tensioni reattive sul piano della sezione rimangono indeterminate al pari dei campi di  $t_3$  che compiono lavoro nullo rispetto alle deformazioni ottenute con un numero limitato di funzioni di ingobbamento  $\psi_I$ .

Per le travi in parete sottile si riesce a stimare lo stato tensionale completo  $\mathbf{T}$  in maniera abbastanza semplice sotto diverse ipotesi semplificative<sup>2</sup> quali quelle di tensioni costanti sullo spessore, forze di massa e di inerzia nulle e forze esterne di contatto costituite da distribuzioni di carichi applicati in coincidenza delle linee di incontro delle diverse pareti che costituiscono il profilo<sup>3</sup> (Fig. 2.3). La determinazione avviene supponendo che  $\mathbf{T}$  abbia la seguente forma

$$\mathbf{T}(s, \zeta) = t_{33}(s, \zeta)\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3 + t_{3s}(s, \zeta)(\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{a}_1)^{Sym} + t_{ss}(s, \zeta)\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \quad (2.79)$$

e sfruttando le condizioni di bilancio per l'elemento di parete della trave

$$\begin{aligned} t_{33, \zeta} + t_{3s, s} &= 0 \\ t_{3s, \zeta} + t_{ss, s} &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

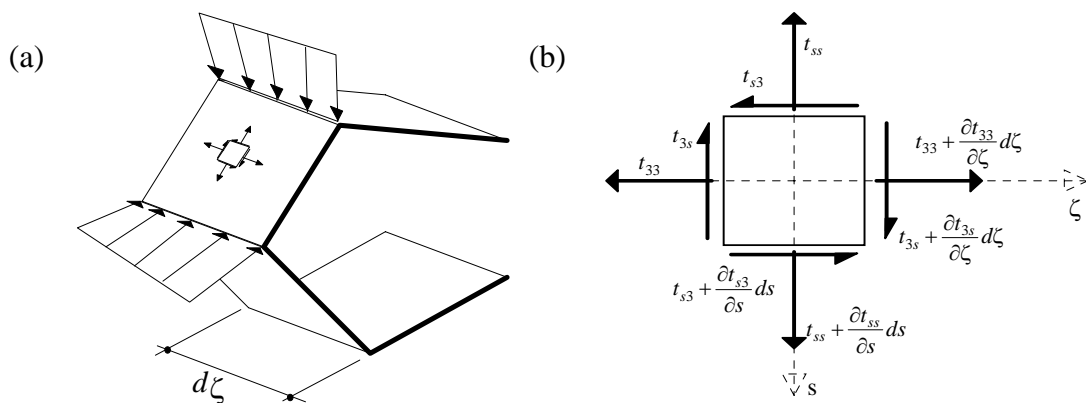


Fig.2.3. a) *Ipotesi semplificativa di carico*, b) *Elemento di parete*.

<sup>2</sup> In effetti la determinazione dello stato reattivo può essere fatta sotto ipotesi molto meno restrittive considerando le equazioni di bilancio locali dei gusci per l'elemento di parete [Gjelsvik, 1981].

<sup>3</sup> La prima ipotesi è tanto più vera quanto più lo spessore di parete è piccolo; la seconda ipotesi è verosimile, nel senso che le forze di massa dovute al peso proprio e le forze di inerzia sono generalmente molto basse in confronto alle forze di contatto esterne, le quali sono di norma applicate in prossimità di nodi di incontro delle diverse pareti che costituiscono la sezione onde evitare i fenomeni di flessione trasversale.

*Componente della tensione normale alla sezione ( $t_{33}$ )*

Si assume che la componente normale della tensione attiva rappresenti una buona misura della tensione effettiva ( $t_{33} \cong t_{33}^A$ ). Una volta risolto il problema elastico, ovvero nota la configurazione equilibrata del sistema trave-cavo, per le (2.65) e (2.66) la componente della tensione attiva, normale alla sezione sulla linea media di parete, è data dalla

$$t_3^A \cdot A_3 = t_{33}^A(s, \zeta) = \frac{N_3(\zeta)}{A} + \frac{M_1(\zeta)}{I_1} x_2(s) - \frac{M_2(\zeta)}{I_2} x_1(s) + \frac{\mu_J(\zeta) \psi_J(s)}{I_{\psi_J \psi_J}}. \quad (2.81)$$

*Osservazione 1*

La (2.81) non esprime la tensione totale longitudinale in quanto è depurata della parte reattiva della tensione. Gli effetti dell'interazione cavo-trave in direzione longitudinale sono percepiti solo in termini globali come conseguenza del numero limitato delle funzioni di ingobbamento considerate. Si osserva comunque che la componente più significativa della forza di interazione è generalmente quella ortogonale ad  $A_3$ .

*Componente della tensione tangenziale di parete ( $t_{3s}$ )*

Per l'ipotesi di tensioni costanti sullo spessore di parete della trave, la  $t_{3s}$  può calcolarsi integrando l'equazione (2.80)<sub>1</sub> lungo la traccia della linea media di parete  $\mathcal{S}$

$$t_3 \cdot \mathbf{a}_1 = t_{3s}(s, \zeta) = \frac{n_3(\zeta) + \bar{n}_3(\zeta)}{At(s)} s - \frac{(N_2(\zeta) - m_1(\zeta) - \bar{m}_1(\zeta)) S_1^*(s)}{t(s) I_1} - \frac{(N_1(\zeta) + m_2(\zeta) + \bar{m}_2(\zeta)) S_2^*(s)}{t(s) I_2} - \frac{(\nu_J(\zeta) - \beta_J(\zeta) - \bar{\beta}_J(\zeta)) S_{\psi_J}^*(s)}{t(s) I_{\psi_J \psi_J}} + t_{3s}(0, \zeta) \quad (2.82)$$

*Osservazione 2*

La (2.82) è simile alla formula dello Jourawski. Gli effetti della precompressione vengono descritti dalle distribuzioni di carico equivalenti (cfr. §2.4). Calcolando la costante di integrazione  $t_{3s}(0, \zeta)$  imponendo le condizioni al contorno nei diversi

bordi liberi della sezione, si ottengono automaticamente le condizioni di salto in corrispondenza dei punti della sezione in cui sono applicate le forze longitudinali (Fig.2.4). Tra queste forze, se pur modesta, è da rivedersi la componente di interazione longitudinale cavo-trave.

### Osservazione 3

Nel caso di travi con sezione trasversale per le quali risulta  $EI_{\psi_0\psi_0} = 0$ , come ad esempio le sezioni a stella o quelle rettangolari che non possiedono rigidità biflessionale, la (2.82) non è in grado di fornire distribuzioni di tensioni realistiche capaci di equilibrare i momenti torcenti; in questi casi occorre sovrapporre alla distribuzione di tensione uniforme una distribuzione a farfalla - sullo spessore della parete - data dalla

$$t_{3s}^{DSV}(s, n, \zeta) = \frac{6M_3^{DSV}(\zeta)}{\sum_{i=1}^{n_b} t_i^3(s) b_i} n, \quad (2.83)$$

dove  $M_3^{DSV} = GJ\varphi_3'$  è il contributo alla DSV del momento torcente totale.

### Componente della tensione normale di parete ( $t_{ss}$ )

L'equilibrio locale dell'elemento di parete richiede, oltre alle precedenti tensioni, anche la presenza della tensione normale  $t_{ss}$  diretta secondo  $\mathbf{a}_1$  del sistema di riferimento locale. Considerando la condizione locale di equilibrio (2.80)<sub>2</sub> in direzione  $\mathbf{a}_1$ , la  $t_{ss}$  può ottenersi dall'integrazione della  $t_{3s}$  sulla curva traccia da  $\mathcal{S}$  nel piano della sezione

$$t_{ss}(s, \zeta) = -\frac{n_2(\zeta) + \bar{n}_2(\zeta)}{tI_1} \int_0^s S_1^*(\xi) d\xi - \frac{n_1(\zeta) + \bar{n}_1(\zeta)}{tI_2} \int_0^s S_2^*(\xi) d\xi + \frac{v_J'(\zeta)}{tI_{\psi_J\psi_J}} \int_0^s S_{\psi_J}^*(\xi) d\xi + t_{ss}(0, \zeta) \quad (2.84)$$

*Osservazione 4*

I termini relativi alla precompressione, che compaiono come carichi equivalenti (cfr. §2.4) solo nel caso di cavi curvi, sono molto importanti in quanto generalmente la forza di interazione cavo-corpo ha la componente predominante diretta ortogonalmente all'asse della trave. Similmente alla (2.82), l'espressione (2.84) integrata a partire da diversi estremi del profilo della sezione per i quali si conoscono le condizioni al contorno, conduce automaticamente alla condizione di salto in corrispondenza del punto di passaggio del cavo (Fig. 2.4).

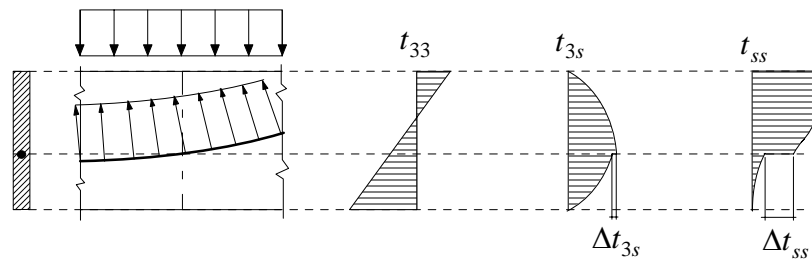


Fig. 2.4. Esempi qualitativi delle distribuzioni delle tensioni sulla sezione

#### **4. LA STABILITÀ INFINITESIMA DELLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO**

Le condizioni di bilancio adottate nel paragrafo precedente sono state dedotte linearizzando le relazioni della teoria rigorosa in corrispondenza di una configurazione di riferimento, non necessariamente equilibrata, in cui la trave si trova nel suo stato naturale, cioè con stato tensionale nullo. Questo conduce ad un problema ben posto e solitamente fornisce una previsione realistica delle tensioni e deformazioni del sistema, perlomeno nelle analisi strutturali. In questo paragrafo si intende studiare il problema nell'intorno infinitesimo di una generica configurazione equilibrata in cui siano presenti anche stati di tensione sulla trave, provocati dai carichi e dall'interazione con il cavo. Mediante l'analisi qualitativa delle equazioni di bilancio dedotte dalla teoria non-lineare, linearizzando il problema in corrispondenza della configurazione equilibrata nota [Truesdell & Noll, 1965] si ottengono alcuni risultati significativi per quanto riguarda i problemi della stabilità della configurazione di equilibrio.

##### **4.1. Condizioni di stabilità**

Scelta la configurazione di riferimento coincidente con la configurazione nota, l'equazione di bilancio linearizzata, ottenuta per il caso di solidi tridimensionali non vincolati, è data dalla (cfr. Cap.1 §4.3)



$$\begin{aligned}
& \int_V \mathbf{C}[\mathbf{E}] \cdot \hat{\mathbf{E}} dV + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) + \int_V \mathbf{U} \mathbf{T}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}} dV \\
& + \int_V \rho_0 (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}_M + \mathbf{b}_{M0}) \cdot \hat{\mathbf{u}} dV - \int_{\partial V_s} (\mathbf{b}_S - \mathbf{b}_{S0}) \cdot \hat{\mathbf{u}} d\partial V_s \\
& + \tau_0 \int_0^L \frac{\mathbf{I} - \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}}{|\mathbf{H}'|} \cdot (\mathbf{U}^H \mathbf{H}' \otimes \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}') d\zeta = 0, \quad \forall \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{U}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

L'unicità della soluzione del problema incrementale rappresentato dalla (2.85), e quindi la stabilità infinitesima della configurazione equilibrata del sistema, dipende dalle caratteristiche del funzionale bilineare

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = & \int_V \mathbf{C}[\mathbf{E}] \cdot \hat{\mathbf{E}} dV + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) \\
& + \int_V \mathbf{U} \mathbf{T}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}} dV + \tau_0 \int_0^L \frac{\mathbf{I} - \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}}{|\mathbf{H}'|} \cdot (\mathbf{U}^H \mathbf{H}' \otimes \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}') d\zeta,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

costituito dalla somma di quattro termini dei quali i primi due risultano legati alle caratteristiche costitutive della trave e del cavo (termini elastici) mentre gli ultimi due sono dipendenti dagli stati tensionali che si hanno nella configurazione equilibrata di riferimento (termini geometrici).

Per definizione, il sistema si troverà in una configurazione infinitesimamente stabile se la forma bilineare (2.86) risulta definita positiva (cioè  $\exists \alpha > 0: \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_U$ ) [Truesdell & Noll, 1965].

#### Osservazione 1

I termini prodotti dal cavo dipendono dalla grandezza  $\mathbf{U}^H \mathbf{H}'$  che esprime la differenza tra l'elemento  $\mathbf{h}'$  tangente al percorso nella configurazione deformata, e l'elemento  $\mathbf{H}'$ , tangente al percorso nella configurazione di riferimento. Si noti come la variazione di lunghezza dell'elemento tangente influenzi il termine elastico relativo al cavo mentre la variazione in direzione influenza il termine geometrico del cavo. Dalla (2.22), ricordando che il gradiente della deformazione  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{U}$ , tale grandezza

può essere dedotta in funzione dei descrittori della deformazione della trave secondo la

$$\mathbf{U}^H \mathbf{H}' = \mathbf{h}' = \mathbf{u}'_0 + (\varphi_\gamma \mathbf{A}_\gamma \times \mathbf{x}_c)' + [\varphi_3 \mathbf{A}_3 \times (\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_s)]' + (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^H)' \mathbf{A}_3 \quad (2.87)$$

#### *Osservazione 2*

L'esplicitazione dei campi di spostamento secondo la (2.13) e di quelli di deformazione secondo la (2.18) permetterà di ottenere una condizione di stabilità specializzata al caso del sistema cavo-trave. Nel seguito i quattro termini che costituiscono  $\Psi$  verranno analizzati uno ad uno.

#### *Termine elastico della trave*

Il primo termine della (2.86) è il classico termine che appare nell'analisi di stabilità dei continui tridimensionali. Come già accennato esso è legato alla grandezza costitutiva  $\mathbf{C}$  ed è conseguentemente definito positivo se il materiale è ovunque stabile per il campo tensionale in esame. Si conclude subito che tale termine costituisce un contributo stabilizzante per il sistema che, nel caso in esame di solido a geometria cilindrica con campo di spostamenti ammissibili descritto dalla (2.13), può essere posto sinteticamente nella forma

$$\int_V \mathbf{C}[\mathbf{E}] \cdot \hat{\mathbf{E}} dV = \int_0^L \mathbf{K} \mathcal{D}\mathbf{v} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta, \quad (2.88)$$

nella quale si è fatto uso dell'operatore differenziale  $\mathcal{D}$  già definito (cfr. §2.2.2).

#### *Termine geometrico della trave*

Il terzo termine della (2.86) è la classica componente *geometrica* del lavoro delle tensioni della configurazione equilibrata che compare nei problemi della stabilità dei

solidi tridimensionali. Esso non è definito in segno e può quindi essere il responsabile dell'eventuale instabilità della configurazione.

### Osservazione 3

Il termine geometrico in esame dipende da tutto il tensore di tensione e quindi deriva sia dalla parte attiva che da quella reattiva. In particolare, nel caso di travi in parete sottile le tensioni reattive possono giocare un ruolo fondamentale nella valutazione del carico critico, come avviene nel caso di travi semplicemente inflesse con risultante dei carichi non applicata sul centro di taglio della sezione [Como, 1967; Como e Grimaldi, 1995].

Esplicitando la dipendenza dal campo di spostamenti delle grandezze che descrivono la deformazione della trave si ottiene

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{U}} dV &= \int_V \mathbf{T}_0 \cdot [(\mathbf{f}_0 \cdot \hat{\mathbf{f}}_0) \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{A}_3] dV \\ &+ \int_V \mathbf{T}_0 \cdot [(\mathbf{f}_{03} \mathbf{I} - \hat{\Phi})(\mathbf{A}_3 \otimes \nabla_D(\hat{\chi} \cdot \psi)) + (\nabla_D(\chi \cdot \psi) \otimes \mathbf{A}_3)(\hat{\mathbf{f}}_{03} \mathbf{I} + \hat{\Phi})] dV \quad (2.89) \\ &+ \int_V \mathbf{T}_0 \cdot [\nabla_D(\psi \cdot \chi) \otimes \nabla_D(\psi \cdot \hat{\chi}) + [(\mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{f}_0) \hat{\Phi} - \hat{\Phi}(\hat{\mathbf{f}}_0 \otimes \mathbf{A}_3)] - \hat{\Phi} \hat{\Phi}] dV. \end{aligned}$$

Introducendo la matrice di coefficienti  $\mathbf{W} \in [(12+2n_f) \times (12+2n_f)]$  legata alle componenti di tensione e alle grandezze inerziali della sezione trasversale, e l'operatore formale differenziale lineare  $\mathbf{v} \rightarrow \mathcal{F}\mathbf{v}$  definito come segue,

$$\mathcal{F}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ \varphi \\ \varphi' \\ \chi \\ \chi' \end{bmatrix}_{(12+2n_f) \times 1}, \quad (2.90)$$

si può riscrivere l'equazione precedente nella forma sintetica

$$\int_V \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{U}} dV = \int_0^L \mathbf{W} \mathcal{G} \cdot \mathcal{G} d\zeta. \quad (2.91)$$

### *Termine elastico del cavo*

Per quanto concerne il termine di natura costitutiva del cavo si osserva che, pur essendo  $c$  una grandezza costitutiva del cavo e quindi definita positiva nel campo di risposta stabile del materiale, questo è solo semidefinito positivo e può espletare il suo ruolo stabilizzante solo per quei campi di spostamento che inducono globalmente un allungamento del percorso del cavo. Facendo uso degli operatori già descritti, il secondo termine dell'equazione (2.86) può essere riscritto nella forma

$$\frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) \left( \int_0^L \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}' d\zeta \right) = \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \mathbf{\Theta} \cdot \mathcal{D}v d\zeta \right) \left( \int_0^L \mathbf{\Theta} \cdot \mathcal{D}\hat{v} d\zeta \right). \quad (2.92)$$

### *Termine geometrico del cavo*

L'ultimo termine della forma bilineare (2.86) è il termine geometrico legato alla forza interna presente sul cavo nella configurazione di riferimento. Se si osserva che di norma il cavo viene preteso ed è progettato per rimanere tale sotto l'azione dei carichi esterni dal momento che la funzione all'interno dell'integrale è non negativa per  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ , deriva che questo termine può produrre esclusivamente effetti stabilizzanti. Tale termine è la generalizzazione del termine stabilizzante geometrico che assicura la stabilità delle funi tese.

#### *Osservazione 4*

Esiste una differenza sostanziale, ai fini della stabilità, tra una trave in cui agisce un campo di tensione  $\mathbf{T}_0$ , prodotto da carichi esterni, ed una trave in cui il medesimo stato di tensione è prodotto da un cavo teso interno, poiché la prima potrà trovarsi in

una condizione di instabilità mentre la seconda può essere ancora stabile. Questo si verifica ogni volta che la deformazione che si attua nel primo caso coinvolge spostamenti che provocano una deformazione trasversale del percorso del cavo.

Volendo esplicitare l'espressione di quest'ultimo termine in funzione del modello di deformazione assunto, occorre tener presente la (2.87). In forma sintetica, definendo la matrice  $\mathbf{W}^c \in [(12+2n_t) \times (12+2n_t)]$  legata alla sola geometria del percorso, si ottiene la

$$\int_0^L \frac{\mathbf{I} - \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}}{|\mathbf{H}'|} \cdot (\mathbf{U}^H \mathbf{H}' \otimes \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{H}') d\zeta = \int_0^L \mathbf{W}^c \mathcal{F}\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}\mathbf{v} d\zeta. \quad (2.93)$$

#### **Condizione di stabilità per il sistema trave-cavo**

Ricordando le precedenti relazioni, si perviene finalmente all'espressione della condizione di stabilità per il sistema costituito dall'accoppiamento di cavi scorrevoli con solidi cilindrici tipo trave

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = & \int_0^L \mathbf{K} \mathcal{D}\mathbf{v} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \mathbf{\Theta} \cdot \mathcal{D}\mathbf{v} d\zeta \right) \left( \int_0^L \mathbf{\Theta} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta \right) \\ & + \int_0^L \mathbf{W} \mathcal{F}\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}\hat{\mathbf{v}} d\zeta + \tau_0 \int_0^L \mathbf{W}^c \mathcal{F}\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}\hat{\mathbf{v}} d\zeta > 0 \quad \forall \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \in U. \end{aligned} \quad (2.94)$$

#### **4.2. Interazione tra i valori critici del carico esterno con la forza di pretensione del cavo**

Si consideri ora il caso in cui le azioni esterne sulla struttura varino proporzionalmente ad un moltiplicatore  $\kappa$ ; se il termine geometrico relativo alla trave non è definito in segno, esiste un valore critico  $\kappa_{cr}$  per il quale la condizione (2.94) risulta non più verificata e di conseguenza la configurazione del sistema sarà

infinitesimamente instabile. Si vuol studiare l'interazione tra i valori critici delle azioni esterne così definite e la forza di pretensione dei cavi del sistema.

Nei problemi di meccanica strutturale, lo stato di tensione presente nella configurazione nota è solitamente ottenuto da un'analisi lineare. Questo significa ritenere che la soluzione può essere ragionevolmente descritta nell'ambito di spostamenti e deformazioni infinitesime e che il materiale si mantiene nel campo di risposta lineare. Questa situazione permette di suddividere il termine geometrico (2.91) in due parti, una dovuta allo stato tensionale indotto dalla presollecitazione e l'altra dovuta allo stato tensionale indotto dalle azioni esterne. Il tensore di Cauchy può infatti scriversi come

$$\mathbf{T}_0 = \tau_0 \mathbf{T}_{0\tau} + \kappa \mathbf{T}_{0\kappa}, \quad (2.95)$$

in cui  $\mathbf{T}_{0\tau}$  e  $\mathbf{T}_{0\kappa}$  rappresentano rispettivamente le tensioni indotte dalla trazione unitaria del cavo e dalla combinazione di carichi esterni relativa a  $\kappa=1$ . Una osservazione simile va fatta sulla tensione del cavo  $\tau_0$  che, per la (2.71), può decomporre come

$$\tau_0 = \tau_0^* + \kappa \tau_{0\kappa} \quad (2.96)$$

dove  $\tau_0^*$  è la forza di pretensione del cavo mentre  $\tau_{0\kappa}$  è l'incremento di tensione dovuto ai carichi esterni relativi a  $\kappa=1$ . Con semplici passaggi, la (2.94) può riscriversi come

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = & \int_0^L \mathbf{K} \mathcal{D}\mathbf{v} \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D}\mathbf{v} d\zeta \right) \left( \int_0^L \Theta \cdot \mathcal{D}\hat{\mathbf{v}} d\zeta \right) \\ & + \tau_0^* \int_0^L (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) \mathcal{S}\mathbf{v} \cdot \mathcal{S}\hat{\mathbf{v}} d\zeta + \kappa \int_0^L [\tau_{0\kappa} (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) + \mathbf{W}_\kappa] \mathcal{S}\mathbf{v} \cdot \mathcal{S}\hat{\mathbf{v}} d\zeta > 0, \quad \forall \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \in U \end{aligned} \quad (2.97)$$

in cui le matrici  $\mathbf{W}_\tau$  ed  $\mathbf{W}_\kappa$  derivano dalla decomposizione del tensore di Cauchy (2.95).

*Osservazione 1*

L'ipotesi precedente sulla modalità di raggiungimento della configurazione equilibrata che si vuole analizzare, ha permesso di separare gli effetti dovuti alla tensione del cavo, da quelli imputabili alle azioni esterne, proporzionali a  $\kappa$ .

*Osservazione 2*

Nella (2.97) i termini geometrici del cavo e della trave non sono più separati per cui ambo i termini proporzionali a  $\tau_0^*$  e  $\kappa$  possono non essere definiti positivi.

Risulta naturale definire  $\kappa_{cr}$  e  $\tau_{0cr}^*$  come quei moltiplicatori dei carichi e della tensione iniziale del cavo che rendono la forma bilineare non definita positiva.

**4.3. Percorsi stabilizzanti ed instabilizzanti**

Ipotizzando l'assenza di azioni esterne e focalizzando l'attenzione sugli effetti del cavo, si osserva che se è verificata la condizione

$$\int_0^L (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) \mathcal{G} \cdot \mathcal{G} d\zeta > 0, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in U, \quad (2.98)$$

si può concludere che la condizione di stabilità (2.97) è verificata per cui non esiste una forza di pretensione critica  $\tau_{0cr}^*$  del cavo. Viceversa, se esistono campi di spostamento ammissibili  $\hat{\mathbf{v}}^*$  per i quali

$$\int_0^L (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) \mathcal{G}^* \cdot \mathcal{G}^* d\zeta < 0. \quad (2.99)$$

si può concludere che deve esistere<sup>1</sup> un  $\tau_{0cr}^*$  sufficientemente grande per cui (2.97) non risulta più soddisfatta.

#### *Osservazione 1*

L'integrale della relazione (2.98) raccoglie sia la parte della forma bilineare dovuta al cavo con forza interna  $\tau_0^*=1$ , sia la parte dovuta alle tensioni sulla trave richieste dall'equilibrio in questa condizione. In definitiva,  $W_\tau$  e  $W^c$  sono grandezze che possono dipendere solo dalla geometria del percorso  $\mathbf{H}$  e dalla geometria della trave (forma della sezione e lunghezza).

Una volta fissata una trave, indipendentemente da quale sia il valore della tensione del cavo, si definiscono i *percorsi stabilizzanti (instabilizzanti)* del cavo l'insieme delle curve  $\mathbf{H}$  per le quali la (2.98) è soddisfatta (non soddisfatta).

#### *Osservazione 2*

La definizione di percorso stabilizzante dipende inevitabilmente anche dal modello di spostamento adottato e un percorso stabilizzante rispetto alla (2.98) risulterà ancora tale per modelli di deformazione più "poveri" di quello rispetto al quale lo si è definito, mentre potrà non essere più tale nel caso di modelli più "raffinati" che contengono lo spazio delle soluzioni del problema  $U$  come sottoinsieme, o nel caso di modelli semplicemente diversi. L'osservazione ha interesse pratico soprattutto nel caso in cui sia necessario analizzare fenomeni di instabilità locale, per i quali generalmente si adottano modelli di spostamento più raffinati in cui la sezione trasversale può deformarsi.

---

<sup>1</sup> Resta in ogni caso da verificare che l'entità delle tensioni nella trave corrispondenti a tale valore della tensione del cavo siano compatibili con le ipotesi adottate per la determinazione della configurazione di partenza.



*Osservazione 3*

È evidente che anche il valore del moltiplicatore critico dei carichi  $\kappa_{cr}$  risente della presenza del cavo teso e, una volta fissato il suo percorso, sarà funzione di  $\tau_0^*$ . Più precisamente, si avrà  $\kappa_{cr}(\tau_0^*) \geq \kappa_{cr}(0)$  nel caso di percorsi stabilizzanti e  $\kappa_{cr}(\tau_0^*) \leq \kappa_{cr}(0)$  nel caso opposto.

## APPENDICE Capitolo 2

1. Si riportano le componenti della matrice di masse risultanti (2.55)<sub>1</sub>. Le grandezze geometriche sono state definite precedentemente. (Si sono considerati 4 termini di ingobbamento)

$$\mathbf{L}_{u_0 u_0} = \rho_0 \mathbf{A} \mathbf{I} \qquad \mathbf{L}_{u_0 \phi} = \mathbf{L}_{\phi u_0}^T = \rho_0 \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{s2} \\ 0 & 0 & -x_{s1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\phi \phi} = \rho_0 \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & (I_p + \mathbf{A} \mathbf{x}_s^2) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}_{\psi \psi} = \rho_0 \begin{bmatrix} I_{\psi_0 \psi_0} & I_{\psi_0 \psi_1} & I_{\psi_0 \psi_2} & I_{\psi_0 \psi_3} \\ I_{\psi_1 \psi_0} & I_{\psi_1 \psi_1} & I_{\psi_1 \psi_2} & I_{\psi_1 \psi_3} \\ I_{\psi_2 \psi_0} & I_{\psi_2 \psi_1} & I_{\psi_2 \psi_2} & I_{\psi_2 \psi_3} \\ I_{\psi_3 \psi_0} & I_{\psi_3 \psi_1} & I_{\psi_3 \psi_2} & I_{\psi_3 \psi_3} \end{bmatrix}$$

2. Si riportano le componenti della matrice di rigidezza del concio di trave (2.70). Le grandezze geometriche sono state definite precedentemente. (Si sono considerati 4 termini di ingobbamento)

$$\mathbf{K}_{\Gamma \Gamma} = \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{\Gamma \phi'} = \mathbf{K}_{\phi' \Gamma}^T = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & Ax_{s2} \\ 0 & 0 & -Ax_{s1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\Gamma \chi} = \mathbf{K}_{\chi \Gamma}^T = G \begin{bmatrix} C_{01} & C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{02} & C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\phi' \phi'} = \begin{bmatrix} EI_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & G(J - D_{s0}) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{\phi' \chi} = \mathbf{K}_{\chi \phi'}^T = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{s0} & C_{s1} & C_{s2} & C_{s3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\chi \chi} = G \begin{bmatrix} C_{\psi_0} & C_{\psi_0 \psi_1} & C_{\psi_0 \psi_2} & C_{\psi_0 \psi_3} \\ C_{\psi_1 \psi_0} & C_{\psi_1} & C_{\psi_1 \psi_2} & C_{\psi_1 \psi_3} \\ C_{\psi_2 \psi_0} & C_{\psi_2 \psi_1} & C_{\psi_2} & C_{\psi_2 \psi_3} \\ C_{\psi_3 \psi_0} & C_{\psi_3 \psi_1} & C_{\psi_3 \psi_2} & C_{\psi_3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{\chi \chi'} = E \begin{bmatrix} I_{\psi_0} & I_{\psi_0 \psi_1} & I_{\psi_0 \psi_2} & I_{\psi_0 \psi_3} \\ I_{\psi_1 \psi_0} & I_{\psi_1} & I_{\psi_1 \psi_2} & I_{\psi_1 \psi_3} \\ I_{\psi_2 \psi_0} & I_{\psi_2 \psi_1} & I_{\psi_2} & I_{\psi_2 \psi_3} \\ I_{\psi_3 \psi_0} & I_{\psi_3 \psi_1} & I_{\psi_3 \psi_2} & I_{\psi_3} \end{bmatrix}$$

## NOTAZIONI

$a$	= misura della deformazione pura del cavo;
$\mathbf{a}_\gamma$	= vettori unitari nel riferimento locale delle sezioni in parete sottile;
$A$	= area della sezione;
$\mathbf{A}_i$	= base ortonormale dello spazio vettoriale associato allo spazio euclideo;
$\mathbf{b}_M$	= forze di massa;
$\mathbf{b}_S$	= forze di contatto;
$\mathcal{B}$	= trave;
$c$	= rigidezza del cavo;
$C$	= grandezze d'inerzia legate alle derivate delle funzioni di ingobbamento;
$C$	= rigidezza del materiale della trave;
$\mathcal{C}$	= cavo;
$d$	= vettore dei descrittori della misura di deformazione;
$D$	= sezione trave;
$\mathcal{D}$	= operatore differenziale formale di congruenza;
$\mathcal{D}^*$	= operatore differenziale formale di equilibrio;
$e$	= allungamento del cavo;
$E$	= modulo di elasticità normale trave;
$\mathcal{E}$	= spazio euclideo;
$f_0$	= componente di deformazione;
$\mathbf{F}$	= gradiente della deformazione $\mathbf{p}$ ;
$G$	= modulo di elasticità tangenziale trave;
$\mathbf{G}$	= vettore unitario tangente al percorso del cavo;
$\mathcal{G}$	= operatore differenziale formale di congruenza;
$h$	= deformazione della guaina;
$\mathbf{H}$	= tracciato della guaina;
$\mathcal{H}$	= guaina;
$I$	= inerzie legate alla posizione dei punti e alle funzioni di ingobbamento;

---

$I$	= tensore identità;
$J$	= momento di inerzia torsionale alla DSV;
$J$	= tensore di inerzia;
$K$	= matrice di rigidità del concio di trave;
$L$	= lunghezza trave;
$\mathcal{L}$	= operatore lineare;
$m$	= momento risultante forze esterne;
$\bar{m}$	= vettore momenti equivalenti all'interazione cavo-trave;
$M$	= momento risultante tensioni;
$n$	= coordinate trasversali della sezione nel riferimento locale;
$n$	= risultante forze esterne;
$\bar{n}$	= vettore forze equivalenti all'interazione cavo-trave;
$N$	= risultante tensioni;
$p$	= deformazione trave;
$P$	= punto materiale della trave;
$P$	= configurazione indeformata trave;
$Q$	= vettore delle forze generalizzate sulla sezione;
$r$	= deformazione cavo;
$R$	= configurazione indeformata del cavo;
$\mathfrak{R}$	= insieme dei numeri reali;
$s$	= ascissa curvilinea trasversale del profilo della sezione;
$S$	= grandezze inerziali di primo grado della sezione;
$\mathcal{S}$	= superficie media della parete della trave;
$t$	= generico istante ( $t \in [t_0, +\infty)$ );
$t_i$	= tensione sul piano $A_i$ ;
$T$	= tensore di Cauchy;
$u$	= campo di spostamento della trave;
$u_0$	= spostamenti dell'asse della trave
$U$	= gradiente del campo degli spostamenti;

---

$\mathbf{v}$	= vettore degli spostamenti generalizzati;
$V$	= regione dello spazio euclideo occupata dalla trave nella configurazione di riferimento;
$\mathcal{W}$	= matrice definita nei termini geometrici della trave e del cavo;
$x$	= coordinate trasversali del punto della sezione;
$\alpha$	= funzione di scorrimento;
$\beta$	= vettore dei bimomenti risultanti delle forze esterne;
$\bar{\beta}$	= vettore dei bimomenti equivalenti all'interazione cavo-trave;
$\Gamma$	= termine di deformazione definito in eq. (9c);
$\zeta$	= coordinata che individua la sezione della trave;
$\Theta$	= termine geometrico de cavo;
$\kappa$	= moltiplicatore dei carichi esterni;
$\lambda$	= lunghezza del tracciato del cavo nella configurazione deformata;
$\Lambda$	= lunghezza iniziale del tracciato del cavo;
$\mu$	= vettore contenente i bimomenti risultanti delle tensioni attive sulla sezione;
$\mathbf{u}$	= vettore contenente i bitagli risultanti delle tensioni attive sulla sezione;
$\rho$	= coordinata materiale del punto del cavo;
$\tau$	= tensione del cavo;
$\tau_0$	= tensione iniziale del cavo;
$\phi$	= vettore rotazione rigida sezione;
$\Phi$	= tensore rotazione rigida sezione;
$\chi$	= vettore delle funzioni intensità di ingobbamento;
$\psi$	= vettore delle funzioni di ingobbamento;
$\omega$	= area settoriale.

## **CAPITOLO 3**

# **ALCUNE APPLICAZIONI NUMERICHE AL PROBLEMA DELLA STABILITÀ**

***PREMESSA***

In questo capitolo, dopo aver richiamato velocemente l'applicazione del metodo di Ritz per la risoluzione del problema elastico lineare e quello dell'instabilità infinitesima, discussi teoricamente nel capitolo precedente, si riportano i risultati di alcune applicazioni a sistemi costituiti da travi in parete sottile presollecitate con cavi non aderenti. L'attenzione verrà focalizzata su quelle che sono le questioni fondamentali inerenti ai problemi di stabilità, già evidenziati teoricamente, quali la definizione dei percorsi stabilizzanti dei cavi e l'interazione tra il moltiplicatore critico dei carichi esterni e la tensione di presollecitazione del cavo.

## 1. ANALISI NUMERICA DEI SISTEMI TRAVE-CAVO

La formulazione debole (o variazionale) dei problemi elastici presenta generalmente alcuni vantaggi, rispetto a quella differenziale, che possono essere evidenziati anche nel problema che si sta esaminando. Un primo aspetto riguarda la maggior generalità della formulazione debole la quale richiede una minor regolarità per le funzioni note ed incognite coinvolte nelle equazioni. Il secondo vantaggio è che il problema in forma debole può essere risolto numericamente per mezzo dei classici metodi di approssimazione del calcolo variazionale.

Nel problema specifico che si sta esaminando il fatto che l'equilibrio locale sia legato alla deformazione globale della trave a causa della presenza del cavo scorrevole, si traduce nelle equazioni integro-differenziali (cfr. Cap.2 eqnn. (2.74) (2.75)) che costituiscono la formulazione forte del problema per le quali non si ha la possibilità di ottenere soluzioni in forma chiusa. Viceversa, la formulazione debole che esprime l'equilibrio globale in maniera naturale, non si complica in alcun modo a causa del cavo scorrevole. In questo caso la globalità dell'accoppiamento strutturale si traduce nel fatto che il termine interno relativo al cavo è ottenuto dal prodotto di due funzionali lineari (cfr. Cap.2 eqn. (2.72)).

In conclusione l'approccio variazionale fornisce una formulazione più naturale del problema fisico che si traduce, anche da un punto di vista formale, in relazioni più semplici che permettono una soluzione numerica più diretta. Nei paragrafi che seguono



verrà utilizzato il classico metodo di approssimazione di Ritz per ottenere una formulazione numerica del problema elastico e di quello della stabilità.

### 1.1. Formulazione numerica del problema elastico

Se si suppone che lo spazio delle soluzioni del problema elastico  $U$  è uno spazio di Hilbert, una soluzione approssimata del problema elastico può essere ottenuta numericamente ricercandola in un sottospazio di dimensione finita  $U_n \subset U$  generato dal troncamento di una successione di funzioni completa in  $U$ . In altri termini, se  $v_i$  è l' $i$ -esima componente di  $\mathbf{v}$ , le soluzioni approssimate del problema sono esprimibili grazie alla<sup>1</sup>

$$v_i(\zeta) = w_{(i)j} y_{(i)j}(\zeta). \quad (3.1)$$

Raccogliendo opportunamente nell'unico vettore  $\mathbf{w}$  di dimensione<sup>2</sup>  $n$  tutti i coefficienti incogniti  $w_{(i)j}$ , e nella matrice  $\mathbf{Y}$  di dimensione  $(6+n_l) \times n$  le funzioni  $y_{(i)j}$ , si può riscrivere la (3.1) in forma compatta seconda la

$$\mathbf{v}(\zeta) = \mathbf{Y}(\zeta)\mathbf{w} \quad (3.2)$$

per cui la soluzione approssimata risulta descritta dal vettore  $\mathbf{w}$ . Considerando il caso di condizioni al contorno omogenee, lo spazio delle soluzioni risulta lineare e le variazioni ammissibili degli spostamenti sono rappresentabili nella stessa forma della soluzione del problema, ovvero come  $\hat{\mathbf{v}}(\zeta) = \mathbf{Y}(\zeta)\hat{\mathbf{w}}$ . Grazie alla (3.2) la condizione di bilancio globale (2.72), per il caso statico, si trasforma nella

---

<sup>1</sup> La convenzione di somma sugli indici ripetuti non deve considerarsi per gli indici entro parentesi.

<sup>2</sup>  $n = \sum_{i=1}^{6+n_l} m_i$  dove  $m_i$  è il numero dei termini della successione di funzioni  $y_i$ .

$$\int_0^L \mathbf{K} \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \hat{\mathbf{w}} d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \Theta \cdot \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \mathbf{w} d\zeta \right) \left( \int_0^L \Theta \cdot \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \hat{\mathbf{w}} d\zeta \right) + c e_0 \int_0^L \Theta \cdot \tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y} \hat{\mathbf{w}} d\zeta - \int_0^L \mathbf{q} \cdot \mathbf{Y} \hat{\mathbf{w}} d\zeta - \mathbf{q}_9 \cdot \mathbf{Y}_9 \hat{\mathbf{w}} \Big|_{9=0,L} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in \mathfrak{R}^n \quad (3.3)$$

dove  $\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y}$  è la matrice di dimensioni  $(6+2n_i) \times n$  costituita dai vettori colonna  $\mathcal{D} \mathbf{Y}_i$  (cfr. Cap.2 §2) ( $\mathbf{Y}_i$  rappresenta la  $i$ -esima colonna della matrice). Per una delle proprietà di definizione del prodotto scalare<sup>3</sup>, la (3.3) pone l'equazione vettoriale lineare con incognita  $\mathbf{w}$

$$\left[ \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \mathbf{K} (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y}) d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right) \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right)^T \right] \mathbf{w} = -c e_0 \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta + \int_0^L \mathbf{Y}^T \mathbf{q} d\zeta + \mathbf{Y}_9^T \mathbf{q}_9 \Big|_{9=0,L} \quad (3.4)$$

che può scriversi nella forma compatta

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{l} \quad (3.5)$$

dove

$$\mathbf{A} = \left[ \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \mathbf{K} (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y}) d\zeta + \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right) \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right)^T \right]_{n \times n} \quad (3.6)$$

è una matrice simmetrica invertibile che descrive la rigidità globale trave-cavo mentre

$$\mathbf{l} = \left[ -c e_0 \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}} \mathbf{Y})^T \Theta d\zeta + \int_0^L \mathbf{Y}^T \mathbf{q} d\zeta + \mathbf{Y}_9^T \mathbf{q}_9 \Big|_{9=0,L} \right]_{n \times 1} \quad (3.7)$$

<sup>3</sup> Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono due elementi di uno spazio vettoriale tali che  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  si ha che  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

è il vettore dei termini noti dipendente dalle azioni applicate esternamente sulla trave e dalla pretensione del cavo.

## 1.2. Formulazione numerica del problema della stabilità infinitesima

La verifica approssimata della stabilità infinitesima del sistema trave cavo può ottenersi sempre grazie al metodo di approssimazione di Ritz considerando, come precedentemente visto, un sottospazio degli spostamenti ammissibili  $U_n \subset U$  generato dalla  $\mathbf{v}(\zeta) = \mathbf{Y}(\zeta)\mathbf{w}$ . La condizione di stabilità (2.97) si traduce nella

$$\begin{aligned} \Psi &= \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y})^T \mathbf{K} (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y}) d\zeta \right) \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{w}} + \left[ \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \Theta \cdot (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y}) d\zeta \right) \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right)^T \right] \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{w}} \\ &+ \tau_0^* \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y})^T (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}) d\zeta \right) \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{w}} \\ &+ \kappa \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y})^T [\tau_{0\kappa} (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) + \mathbf{W}_\kappa] (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}) d\zeta \right) \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{w}} > 0 \quad \forall \mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}} \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

nella quale  $\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}$  è la matrice di dimensioni  $(12+2n_i) \times n$  costituita dai vettori colonna  $\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}_i$  (cfr. Cap.2 §4). Definendo le matrici simmetriche di dimensioni  $n \times n$

$$\mathbf{B} = \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y})^T \mathbf{K} (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y}) d\zeta + \left[ \frac{c}{\Lambda} \left( \int_0^L \Theta \cdot (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y}) d\zeta \right) \left( \int_0^L (\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{Y})^T \Theta d\zeta \right)^T \right], \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}^\tau = \int_0^L (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y})^T (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}) d\zeta, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B}^\kappa = \int_0^L (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y})^T [\tau_{0\kappa} (\mathbf{W}_\tau + \mathbf{W}^c) + \mathbf{W}_\kappa] (\tilde{\mathcal{S}}\mathbf{Y}) d\zeta, \quad (3.11)$$

la (3.8) può scriversi in forma compatta nella

$$\Psi = (\mathbf{B} + \tau_0^* \mathbf{B}^\tau + \kappa \mathbf{B}^\kappa) \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{w}} > 0 \quad \forall \mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}} \in \mathfrak{R}^n. \quad (3.12)$$

che rappresenta la condizione di stabilità infinitesima espressa in termini numerici.

#### *Osservazione 1*

La condizione espressa dalla (2.98), la quale permette di definire il concetto di *percorso stabilizzante*, può essere verificata numericamente sfruttando il teorema per le matrici reali simmetriche per il quale: *una matrice reale simmetrica è definita positiva (semidefinita positiva, indefinita) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (nonnegativi, di segno differente).*

Numericamente si può testare se un percorso è stabilizzante verificando che il minor autovalore di  $\mathbf{B}^\tau$  sia maggiore di zero.

#### ***Determinazione approssimata della tensione critica del cavo***

Una valutazione approssimata per eccesso della tensione critica del cavo, (nel caso in cui  $\mathbf{B}^\tau$  non sia definita positiva), può effettuarsi ponendo  $\kappa=0$  ed imponendo la condizione  $\Psi=0$  per ogni  $(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})$  che, per la stessa proprietà di definizione del prodotto cartesiano richiamata precedentemente, origina il problema agli autovalori

$$(\mathbf{B} + \tau_0^* \mathbf{B}^\tau) \mathbf{w} = 0. \quad (3.13)$$

La tensione critica del cavo  $\tau_{0_{cr}}^*$  è data dal minor autovalore del problema (3.13). L'autovettore corrispondente individua il primo modo di instabilizzarsi della trave soggetta alla sola precompressione.

***Interazione tra i valori critici di carico esterno e tensione del cavo***

Una determinazione per eccesso del valore critico del carico esterno, per un prefissato  $\tau_0^*$ , può effettuarsi imponendo la condizione critica  $\Psi=0$  per ogni  $(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}})$  che si traduce nel problema agli autovalori

$$\left[ (\mathbf{B} + \tau_0^* \mathbf{B}^\tau) + \kappa \mathbf{B}^\kappa \right] \mathbf{w} = 0 \quad (3.14)$$

La stima del moltiplicatore  $\kappa_{cr}$  è data dal minor autovalore del problema (3.14). Il corrispondente autovettore individua il modo di instabilizzarsi della struttura.

***Osservazione 2***

Ovviamente se  $\mathbf{B}^\tau$  risulta non definita in segno e  $\tau_0^* = \tau_{0cr}^*$  si ha che  $\kappa_{cr}=0$ .

## **2. ALCUNE APPLICAZIONI SULL'ANALISI DELLA STABILITÀ DI TRAVI IN PARETE SOTTILE**

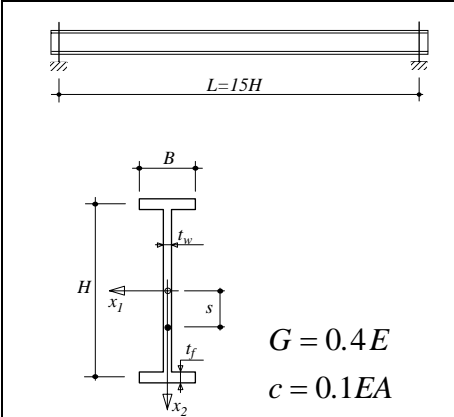
La presollecitazione con cavi scorrevoli trova impiego nelle travi in parete sottile con sezione aperta (in acciaio o conglomerato cementizio) usate nella realizzazione di impalcati da ponte o di importanti strutture edili. La presollecitazione di tali membrature viene di norma eseguita prima della loro messa in opera per cui nelle prime fasi di costruzione dell'impalcato, in attesa che si realizzino i traversi intermedi e la soletta di completamento di estradosso, si presenta la situazione in cui la trave presollecitata risulta vincolata solamente alle estremità. In tali fasi possono manifestarsi fenomeni di instabilità flessione torsionali dovuti alla scarsa rigidità torsionale della sezione. Il modello di accoppiamento proposto nel precedente capitolo viene applicato ad alcuni casi di travi in parete sottile presollecite con cavi curvi e rettilinei ponendo particolare attenzione ai fenomeni di instabilità cui si accennava.

Si considerano le due classi di sezione ad "I", riportate in Tab.1, caratterizzate da diversi spessori di parete espressi in funzione dell'altezza  $H$  del profilo della sezione, con l'intento di studiare il comportamento delle tipiche sezioni in acciaio e conglomerato cementizio. Lo schema statico che si suppone è quello di trave semplicemente appoggiata flessionalmente con le sezioni di estremità vincolate a non ruotare torsionalmente ma libere di ingobbarsi (appoggi torsionali). La presollecitazione viene eseguita a mezzo di cavi parabolici o rettilinei disposti internamente sul piano di simmetria della sezione. Occorre precisare che per quanto riguarda le travi in acciaio,

per le quali la precompressione interna non è di fatto eseguibile, il caso studiato è da rivedersi quale caso limite in cui il tracciato del cavo viene fissato grazie ad un elevato numero di dispositivi di deviazione. Come sistemi di carico esterno si considerano due schemi classici nella letteratura, ovvero il caso in cui la trave sia soggetta a carico uniformemente distribuito all'estradosso ed il caso di coppie flettenti applicate alle sezioni di estremità.

L'importanza degli scorrimenti angolari che generalmente si verificano sulla superficie media di parete delle travi, suggerisce di utilizzare un modello in grado di descrivere in maniera sufficientemente accurata la perdita di planarità della sezione. Si considera il modello proposto in [Laudiero & Savoia, 1991] con il quale si adottano dieci descrittori cinematici dipendenti dalla sola coordinata d'asse della trave ( $\zeta$ ). Oltre ai sei parametri che descrivono il moto rigido della sezione trasversale, si considerano gli spostamenti da ingobbamento alla Vlasov, nonché quelli dovuti ai tagli ed ai flussi di torsione non uniforme.

La risoluzione numerica del problema è affrontata con il metodo di approssimazione di Ritz assumendo, come funzioni di forma, troncamenti delle successioni complete ortonormali di seni, per le traslazioni e le rotazioni torsionali della sezione, e troncamenti degli sviluppi polinomiali completi di Tschebichef per gli altri descrittori (rotazioni flessionali ed intensità degli ingobbamenti).

	Trave in acciaio (tipo s)	Trave in calcestruzzo (tipo c)
	$B = \frac{H}{5}$ $t_w = \frac{1}{100}H$ $t_f = 2t_w = \frac{1}{50}H$	$B = \frac{H}{5}$ $t_w = \frac{1}{20}H$ $t_f = 1.5t_w = \frac{1.5}{20}H$

Tab. 1 - Sezioni tipo di prova

## 2.1. Osservazioni sui risultati

### *Cavi rettilinei*

Le figure 3.1 e 3.2 mostrano i risultati ottenuti per i due tipi di sezione precedentemente definiti nel caso in cui la presollecitazione sia eseguita con cavi rettilinei disposti secondo il tracciato

$$H(\zeta) = sA_2 + \zeta A_3, \quad (3.15)$$

dove  $s$  è la coordinata dell'ancoraggio del cavo nelle sezioni di estremità (Tab. 1).

In particolare nelle figure 3.1a e 3.2a si evidenzia l'influenza della tensione iniziale del cavo  $\tau_0^*$  (i diagrammi riportano la quantità adimensionale  $\bar{\tau}_0^* = \tau_0^* / EA \times 1000$ ) sui valori critici di carico esterno  $q_{cr}$  (i diagrammi riportano la quantità adimensionale  $\bar{q}_{cr} = q_{cr} L^2 H / EI_1 \times 1000$ ), che inducono instabilità flessione torsionale. Le curve ottenute per diversi valori di  $s$ , si diramano all'incirca dallo stesso punto in corrispondenza della tensione iniziale del cavo nulla. In questo caso  $q_{cr}$  è circa pari a quello ottenuto dall'analisi in assenza del cavo. Le figure 3.1b e 3.2b, diagrammando i valori di  $q_{cr}$  al variare della posizione del cavo  $s$  per prefissate tensioni  $\tau_0^*$ , mostrano lo stesso risultato da un altro punto di vista. Infatti, è immediato osservare come la curva relativa a  $\tau_0^* = 0$  sia molto vicina all'essere una retta. Questo permette di concludere che il termine stabilizzante elastico del cavo, ed i termini legati agli incrementi di tensione  $\tau_{0\kappa}$  indotti dall'aggiunta dei carichi esterni, non sono molto influenti nella valutazione del carico critico esterno.

Con il crescere di  $\tau_0^*$ , l'influenza della presollecitazione sulla qualità dell'equilibrio del sistema diventa palese. Le curve  $q_{cr} - \tau_0^*$  con pendenza positiva (Figg. 3.1a e 3.2a) sono relative a cavi con tracciato stabilizzante, viceversa le curve con pendenza negativa sono relative a cavi con tracciato instabilizzante. Ovviamente esiste un percorso per il quale la tensione iniziale del cavo  $\tau_0^*$  non ha influenza sui valori critici di



carico esterno. In corrispondenza di detto percorso le curve  $q_{cr} - \tau_0^*$  sono rette orizzontali (Figg. 3.1a e 3.2a) il che si riflette anche sui diagrammi delle figure 3.1b e 3.2b nei quali sono evidenti i due punti di intersezione delle curve relative a diversi  $\tau_0^*$ . Nel caso in esame di cavi rettilinei si hanno due percorsi indifferenti all'incirca simmetrici rispetto all'asse della trave. Con un modello cinematico più semplice alla Vlasov, Dall'Asta (1995) ha ottenuto che il percorso indifferente del cavo è posto, con buona approssimazione, ad una distanza dal baricentro della sezione pari a circa il raggio polare di inerzia  $\rho_p = \sqrt{(I_1 + I_2)/A}$ .

Nel caso di tracciato instabilizzante, esiste sempre una tensione  $\tau_{0cr}^*$  per la quale la configurazione di equilibrio risulta infinitesimamente instabile pur in assenza di carichi esterni. Mentre per le travi in conglomerato cementizio tali valori sono di norma molto elevati ed incompatibili sia con l'ipotesi di deformazioni infinitesime che con la resistenza del materiale (fig. 3.2a), per le travi in acciaio essi possono ricadere nei range di interesse applicativo (fig. 3.1a). In quest'ultimo caso si sono diagrammati i valori critici della tensione del cavo al variare della posizione dello stesso; gli asintoti verticali si hanno in corrispondenza del tracciato indifferente del cavo. Nel caso della trave in conglomerato cementizio, anche se non si hanno risultati evidenti come quelli ottenuti per la trave di acciaio, sono comunque da segnalare variazioni del carico critico esterno apprezzabili (da -20% a +15%) rispetto al carico ottenibile in assenza di pressollecitazione.

Si conclude osservando come il sistema sia molto sensibile alle variazioni della posizione del cavo per i tracciati posti nelle zone della sezione più lontane dal baricentro (Figg. 3.1b e 3.2b)

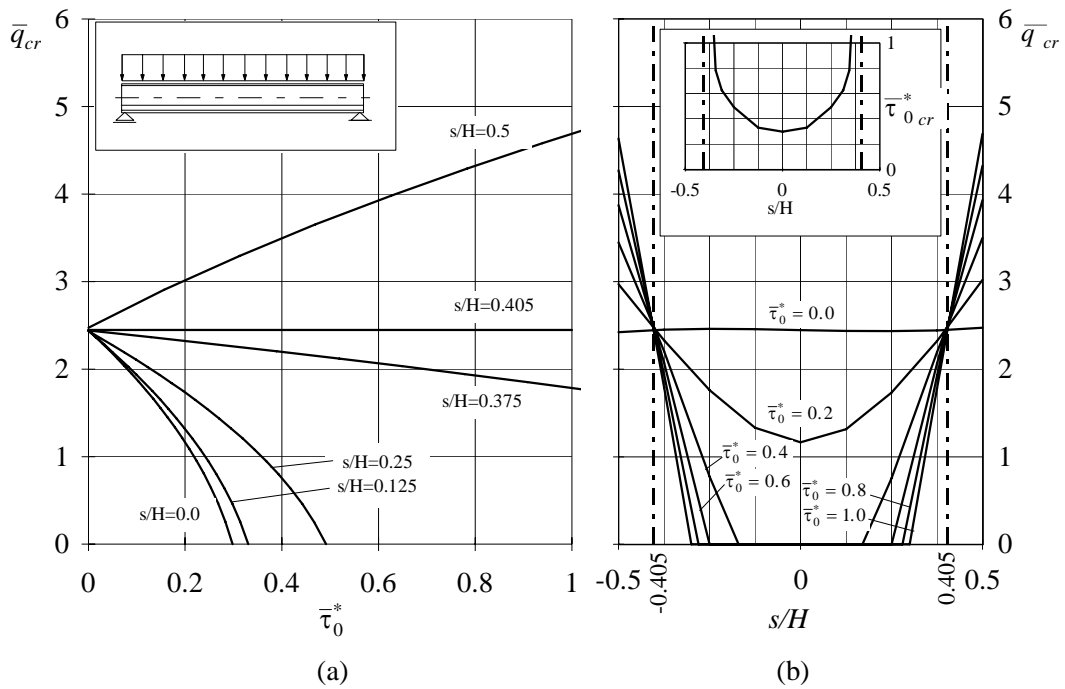


Fig. 3.1. Trave in acciaio - cavo rettilineo: (a) carico critico in funzione della tesatura del cavo; (b) carico critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

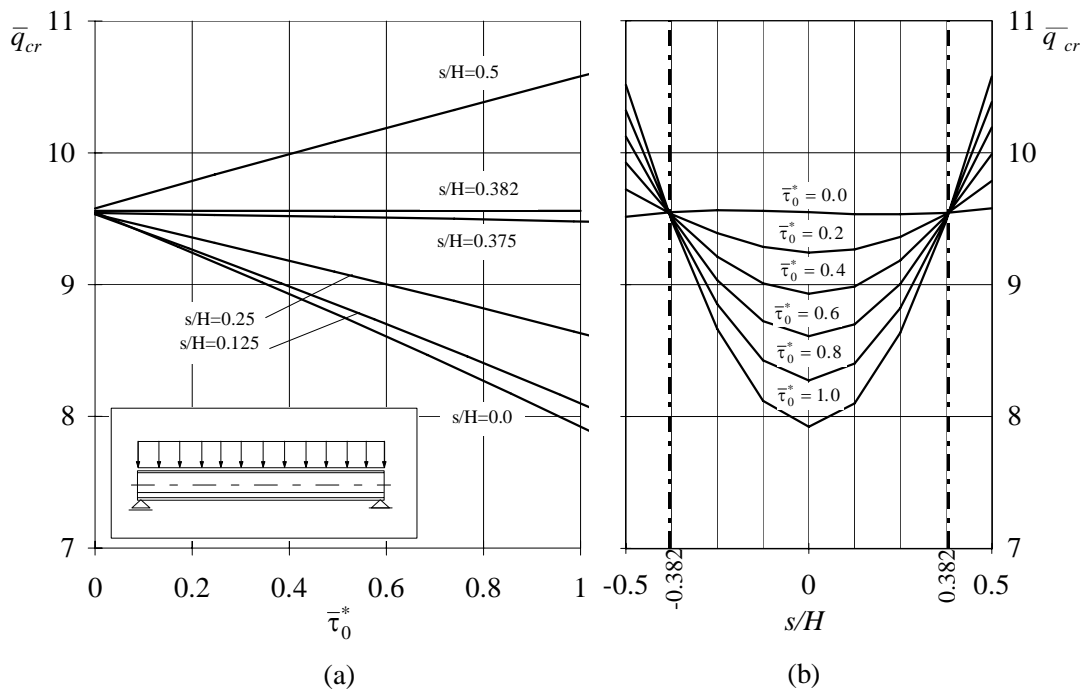


Fig. 3.2. Trave in calcestruzzo - cavo rettilineo: (a) carico critico in funzione della tesatura del cavo; (b) carico critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

*Cavi curvi*

Le figure 3.3-3.6 riportano i risultati ottenuti considerando il tracciato parabolico del cavo

$$\mathbf{H}(\zeta) = \left\{ (2H - 4s) \left[ \left( \frac{\zeta}{L} \right) - \left( \frac{\zeta}{L} \right)^2 \right] + s \right\} \mathbf{A}_2 + \zeta \mathbf{A}_3 \quad (3.16)$$

dove  $s$  è l'eccentricità dell'ancoraggio del cavo sulle sezioni di testata. Le prove numeriche sono state eseguite considerando i carichi uniformemente distribuiti all'estradosso della trave (Figg. 3.3 e 3.4) e le coppie flettenti di estremità (Figg. 3.5 e 3.6).

Qualitativamente i risultati possono essere rilette esattamente allo stesso modo del caso della presollecitazione eseguita con cavi rettilinei. È infatti possibile evidenziare come i tracciati del cavo possano avere influenza stabilizzante o instabilizzante sulla qualità dell'equilibrio del sistema. La particolarità del problema con cavi curvi sta nel fatto che, oltre alle tensioni normali longitudinali, l'interazione con il cavo di presollecitazione induce sulla trave importanti tensioni tangenziali ( $t_{3s}$ ) e normali di parete ( $t_{ss}$ ) (cfr. Cap.2 §3.4). In dipendenza dal punto di passaggio del cavo di precompressione rispetto al centro di taglio, tali tensioni possono generare effetti geometrici stabilizzanti o instabilizzanti; in particolare gli ultimi generalmente crescono con l'eccentricità del cavo mentre gli effetti geometrici dovuti alle tensioni longitudinali indotti dalla precompressione tendono a diventare stabilizzanti (cfr. cavi rettilinei). Agli effetti geometrici della trave (anche se indotti dalla presollecitazione) sono inoltre da aggiungersi gli effetti geometrici propri del cavo teso i quali sono sempre stabilizzanti e tanto maggiori quanto maggiore risulta l'eccentricità del cavo stesso. In generale risulta molto difficile stabilire qualitativamente il complesso gioco dei diversi contributi dovuti alla presollecitazione sulla qualità globale dell'equilibrio per cui si deve eseguire una analisi accurata che tenga conto in maniera opportuna dei vari effetti.

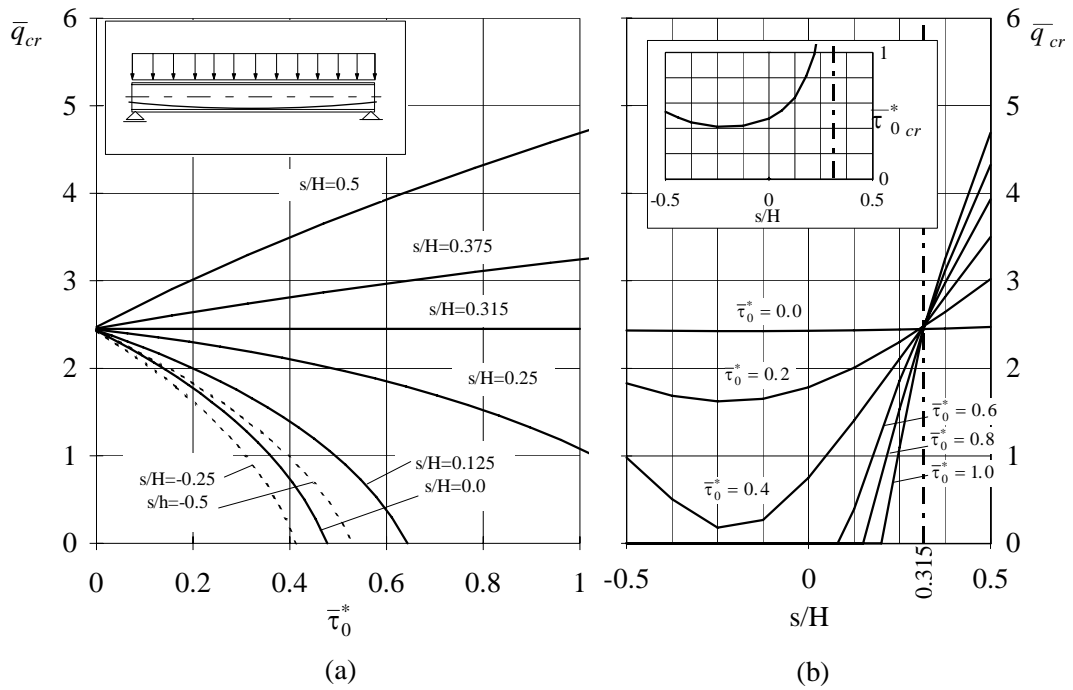


Fig.3.3 Trave in acciaio - cavo curvo: (a) carico critico in funzione della tesatura del cavo; (b) carico critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

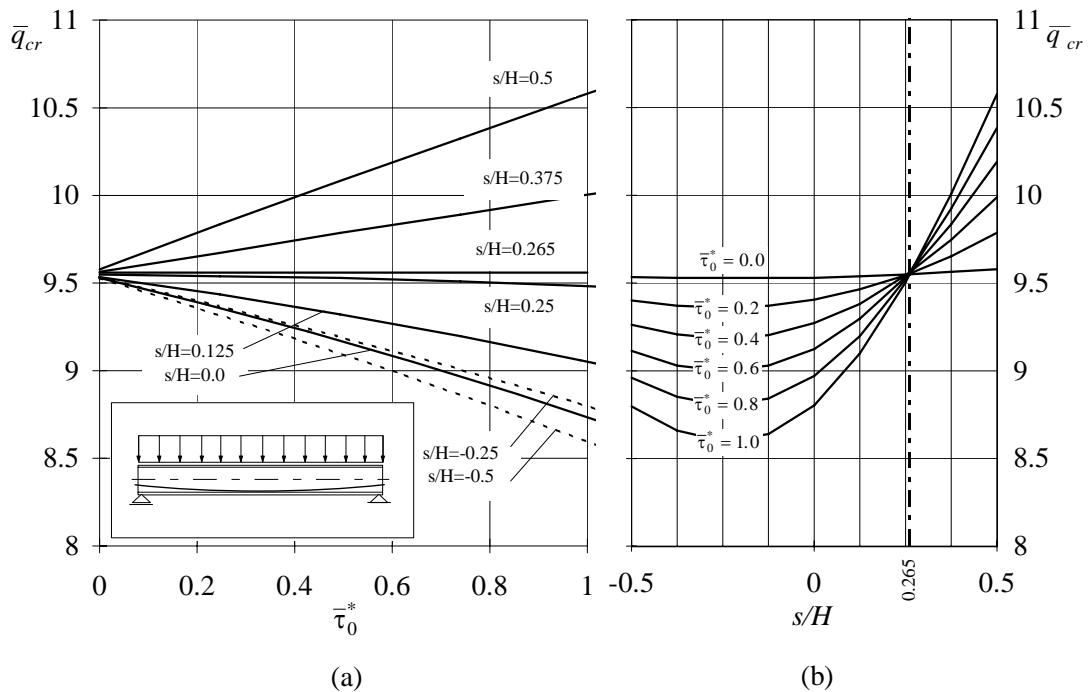


Fig.3.4 Trave in calcestruzzo - cavo curvo: (a) carico critico in funzione della tesatura del cavo; (b) carico critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

I diagrammi ottenuti nel caso di carichi uniformemente distribuiti all'estradosso della trave sono simili a quelli visti in precedenza, ed evidenziano solamente una minor sensibilità del sistema alla precompressione. I percorsi instabilizzanti sono infatti caratterizzati dall'aver valori delle tensioni critiche  $\tau_{0cr}^*$  maggiori di quelle ottenute nei casi di cavi rettilinei. Le curve delle figure 3.3b e 3.4b mostrano inoltre che si ha un unico percorso indifferente del cavo. Infine, è il caso di sottolineare che il sistema trave-cavo è maggiormente sensibile alle variazioni della posizione degli ancoraggi per le zone molto eccentriche della parte bassa della sezione (cavi quasi rettilinei) mentre si hanno minori variazioni dei carichi critici esterni per cavi ancorati nella zona medio-alta della sezione, come testimoniano anche le curve tratteggiate riportate nelle Figg. 3.3a e 3.4a relative a tracciati con ancoraggio nella metà superiore della trave.

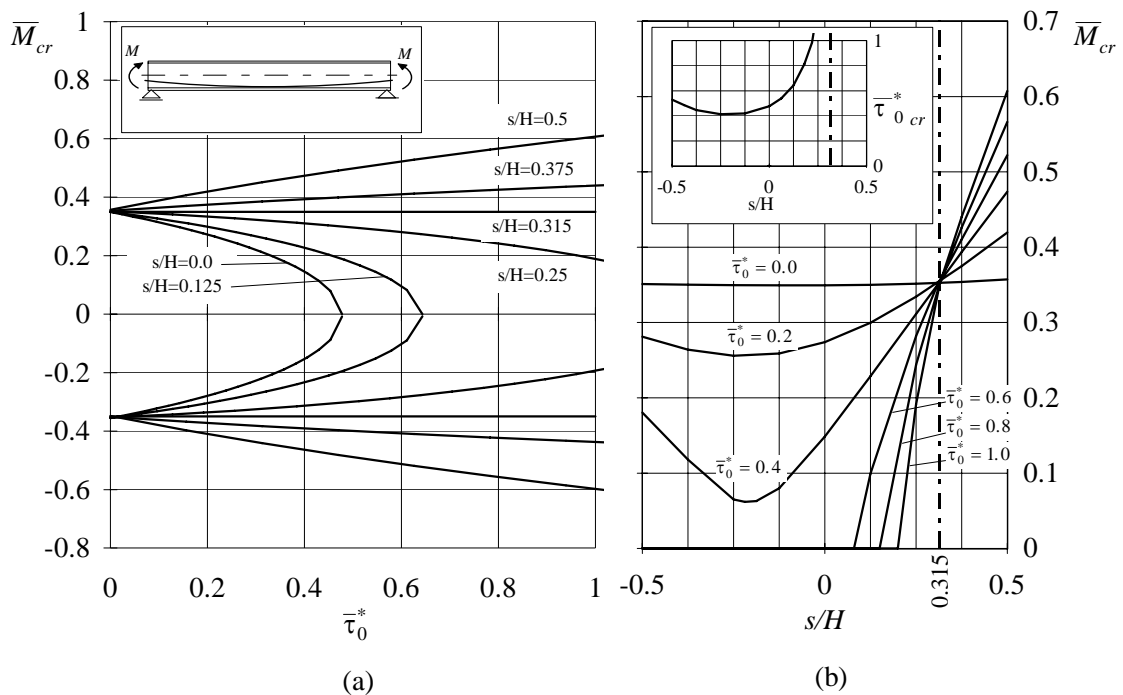


Fig.3.5 Trave in acciaio - cavo curvo: (a) momento critico in funzione della tesatura del cavo; (b) momento critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

Nel caso in cui l'azione esterna sia costituita da due coppie flettenti di estremità, i risultati sono molto simili a quelli visti per il carico uniformemente distribuito. In questo caso si riportano anche i rami negativi delle curve  $\bar{M}_{cr}-\tau_0^*$  (i diagrammi

riportano la quantità adimensionale  $\bar{M}_{cr} = M_{cr}H / E \times 1000$ ) (Figg. 3.5a e 3.6a) per le quali si constata una sostanziale simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Questo è dovuto al fatto che le coppie di esrementà non inducono tensioni normali di parete con effetto geometrico instabilizzante. A parità di tracciato del cavo, i valori di momento critico mostrano riduzioni più repentine per tensione del cavo  $\tau_0^*$  vicine agli eventuali  $\tau_{0cr}^*$  che non i carichi uniformemente ripartiti i quali si avvicinano più gradatamente al valore nullo in corrispondenza di  $\tau_{0cr}^*$ .

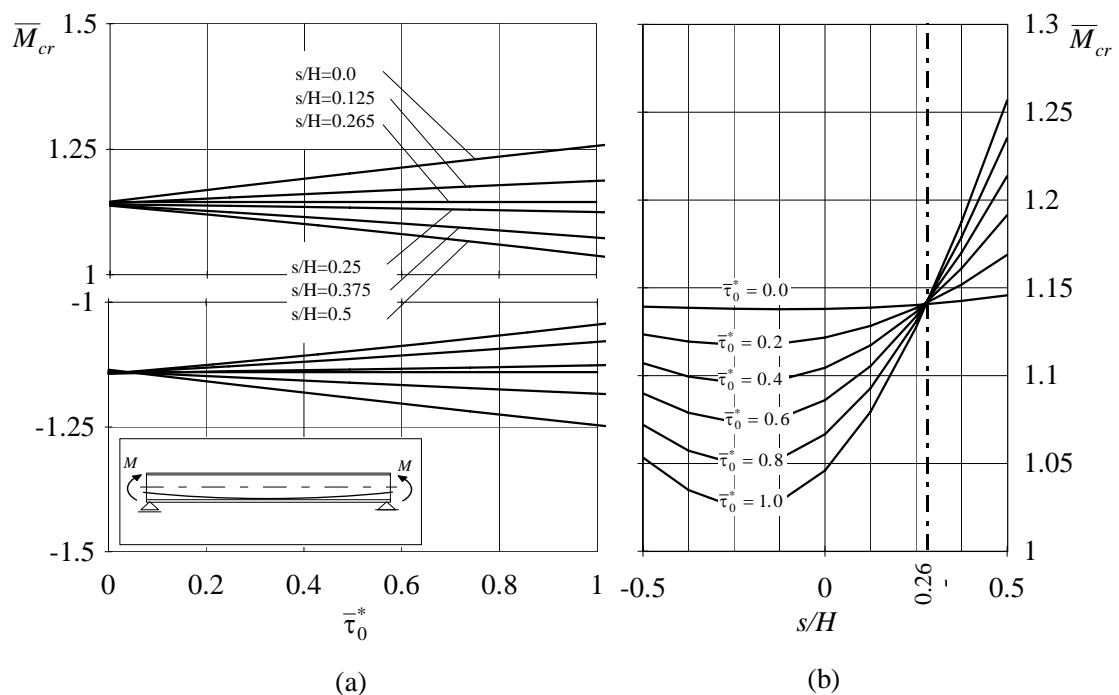


Fig.3.6 Trave in calcestruzzo - cavo curvo: (a) momento critico in funzione della tesatura del cavo; (b) momento critico in funzione dell'eccentricità di ancoraggio del cavo.

**ALCUNE CONSIDERAZIONI SUI SOLIDI PRISMATICI  
CON CAVI INTERNI SCORREVOLI**



AIMETA '95 - 3-6 OTTOBRE 1995 - NAPOLI - ITALIA  
XII CONGRESSO NAZIONALE DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA  
DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA

## ALCUNE CONSIDERAZIONI SUI SOLIDI PRISMATICI CON CAVI INTERNI SCORREVOLI

**A. Dall'Asta**

*Ist. Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Universita' di Ancona, Ancona, Italia*

**G. Leoni**

### SOMMARIO

Si presenta una descrizione di un sistema accoppiato costituito da una trave ed un cavo. Il cavo può scorrere lungo un percorso interno alla trave ed è ancorato alle estremità. Il sistema permette l'attuazione di stati tensionali e deformativi sulla trave mediante un controllo dello stato tensionale del cavo. Si presenta una formulazione di tipo statico, nell'ambito della teoria esatta dell'elasticità e una formulazione linearizzata nell'intorno di una configurazione nota.

### ABSTRACT

This paper furnishes a description of a coupled system consisting on a rod and a cable, where the cable is constrained to follow a path internal to the rod. The cable can slip along its path and is anchored at its ends. This system permits controlling the stress and strain fields on the rod by controlling the cable stress. A static formulation in the range of finite deformation theory is presented. Furthermore the incremental problem is described by means of linearization in the neighbourhood of an assigned configuration.

### 1. INTRODUZIONE

Nella presente nota si vuole presentare un modello descrittivo di un sistema costituito da una trave attraversata da un cavo vincolato a seguire un generico percorso interno ad essa. Nella trattazione proposta il cavo può scorrere senza attrito lungo il suo percorso e solo i suoi punti estremi sono ancorati alla trave.

L'assenza di attrito fornisce un'accoppiamento inscindibile tra deformazione locale del cavo e deformazione globale della trave, per cui lo stato tensionale del



primo risulta legato alla deformazione globale della seconda. Il sistema presenta un interesse applicativo nella robotica, nella meccanica strutturale e nelle tecniche di misura. Mediante questo accoppiamento si può pervenire ad un controllo dello stato deformativo e tensionale della trave mediante una opportuna disposizione del tracciato del cavo, ogni qual volta sia possibile tenerne sotto controllo lo stato tensionale. Ad esempio, si può indurre una tensione nel cavo estraendone una parte da un ancoraggio, imponendo delle deformazione termiche o, nel caso di consistenti effetti piezoelettrici o elettrostrittivi, modificandone la differenza di potenziale alle estremità. Il sistema si presta a soddisfare esigenze opposte, utilizzando il cavo come sensore invece che come attuttore e deducendo dal suo stato informazioni sulla deformazione del solido.

Alcuni aspetti qualitativi del problema sono stati recentemente analizzati con riferimento a solidi tridimensionali generici [Dall'Asta, 1995] mentre in questa sede si vuole procedere ad un'analisi del problema nel caso di un solido a geometria cilindrica, introducendo un modello cinematico vincolato adatto alla geometria in esame [Simo & Vu-Quoc, 1991]. Si ottiene in tal modo una riduzione dell'insieme delle deformazioni ammissibili e diviene possibile evidenziare alcuni aspetti dell'accoppiamento tra tracciato del cavo e grandezze deformative e dinamiche caratteristiche delle travi.

Si fornisce una descrizione della cinematica e delle equazioni di bilancio del sistema nell'ambito della teoria elastica esatta, privilegiando gli aspetti relativi al cavo scorrevole. Alcuni aspetti sulla stabilità locale delle soluzioni possono infine essere posti in evidenza linearizzando il problema nell'intorno di una configurazione nota, in presenza di tensioni residue.

## 2. DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

### 2.1 Aspetti cinematici

La trave  $\mathcal{B}$  è una varietà tridimensionale dello spazio euclideo  $\mathcal{E}$  i cui punti materiali occupano, nella configurazione di riferimento, la seguente regione cilindrica  $V$

$$P = x + \zeta A_3 = x_\alpha A_\alpha + \zeta A_3; \quad (x, \zeta) \in D \times [0, L] = V \quad (1)$$

con  $D \subset \mathbb{R}^2$  chiuso e limitato,  $[0, L] \subset \mathbb{R}$  e  $\{A_i; i = 1, 2, 3\}$  base ortonormale dello spazio vettoriale associato ad  $\mathcal{E}$ . Si assume inoltre che le sole deformazioni ammissibili  $p$  della trave sono rappresentabili nella forma [Simo & Vu-Quoc, 1991]

$$p(x, \zeta) = q(\zeta) + Q(\zeta)[x + g(\zeta)\psi(x)A_3] \quad (2)$$

per cui il solido è sottoposto ad un vincolo cinematico di tipo globale [Antman & Marlow, 1991]. La deformazione è descritta dalla curva  $q$  tracciata della linea d'asse; dalla rotazione rigida  $Q \in \text{Rot}$  della sezione trasversale e dalla funzione  $g$  che

fornisce l'intensità dell'ingobbamento descritto dall'assegnata funzione di forma  $\psi$ . Il gradiente di deformazione puo' essere posto nella forma

$$F = p_i \otimes A_i = QF_o = Q(I + f_o \otimes A_3 + gA_3 \otimes \nabla\psi) \quad (3)$$

con  $f_o(\Gamma, \omega, g) = F_o A_3 = \Gamma + \omega \times [x + g\psi A_3] + g_{,\zeta} \psi A_3$ ,  $\Gamma = Q^T q_{,\zeta} - A_3$  ed  $\omega$  vettore assiale di  $\Omega(\zeta) = Q^T(\zeta) Q_{,\zeta}(\zeta) \in Skw$ ; la misura di deformazione fornita dal tensore di Green  $D = (F^T F - I)/2$  assume la forma (apice  $s$  indica la parte simmetrica del tensore):

$$D = [(f_o \otimes A_3) + g f_{o3}(A_3 \otimes \nabla\psi)]^s + \frac{1}{2} g^2 (\nabla\psi \otimes \nabla\psi) + \frac{1}{2} |f_o|^2 (A_3 \otimes A_3) \quad (4)$$

Da quest'ultima si deduce che i parametri significativi della deformazione sono costituiti dalle grandezze  $\Gamma$ ,  $\omega$  e  $g$  che definiscono  $p$  a meno di un generico moto rigido. In particolare  $\Gamma$  rende conto dell'allungamento e di parte degli scorrimenti angolari sull'asse della trave mentre  $\omega$  descrive la rotazione rigida infinitesima della sezione ingobbata. Si rimanda all'articolo citato in precedenza per ulteriori dettagli sulla cinematica della trave.

Il cavo  $\mathcal{C}$  e' una variet  monodimensionale di coordinata materiale  $\rho \in [0, m]$  che traccia la curva  $R(\rho)$  nella configurazione di riferimento. Sia inoltre  $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$  un sottosieme della trave costituito da una variet  monodimensionale che occupa la curva  $H(\eta)$  ( $\eta \in [0, m]$ ) nella configurazione di riferimento e sia  $E(\eta)$  la sua tangente unitaria. Si assume che  $R(\rho) = H(\eta)$  se  $\rho = \eta$ .

Il cavo risulta ancorato alle estremit  di  $\mathcal{H}$  e vincolato a tracciare, durante ogni sua possibile deformazione  $r(\rho)$ , la medesima curva  $p^H(\eta) = (p \circ H)(\eta)$  tracciata da  $\mathcal{H}$  (l'apice  $H$  sar  usato anche nel seguito in luogo dell'operazione di composizione precedente). In ogni caso, la corrispondenza tra  $\rho$  e  $\eta$  si perde per effetto dello scorrimento tra cavo  $\mathcal{C}$  e percorso  $\mathcal{H}$  solidale alla trave. In conclusione, le deformazioni del cavo sono sottoposte ad un vincolo di tipo globale, legato alla deformazione della trave ed esprimibile introducendo le due funzioni invertibili a valori scalari  $\lambda_r(\rho)$  e  $\gamma_p(\eta)$  che misurano la lunghezza del cavo  $\mathcal{C}$  e del percorso  $\mathcal{H}$  nei tratti  $[0, \rho]$  e  $[0, \eta]$ , dopo che le deformazioni  $p$  e  $r$  sono avvenute. Il vincolo su  $r$  puo' essere scritto nella forma

$$r(\rho) - (p^H \circ \gamma_p^{-1} \circ \lambda_r)(\rho) = 0. \quad (5)$$

In questa sede si vuole esaminare un insieme particolare di deformazioni del cavo in cui la deformazione pura  $a(\rho) = |r(\rho)|/|R(\rho)|$  risulta uniforme ( $a_{,\rho} = 0$ ). In questo caso si puo' dimostrare che  $r$  non possiede gradi di libert  e puo' essere dedotta completamente dalla deformazione della trave, per cui  $p$  assume il

carattere di unica parametro cinematico indipendente del sistema [Dall'Asta, 1995]. La deformazione pura viene a coincidere con il suo valore medio che, grazie al particolare tipo di vincolo, può essere ottenuta come rapporto tra la lunghezza del percorso deformato e la lunghezza del percorso indeformato, facendo riferimento alla sola funzione  $p^H$  ed evitando di dover introdurre  $r$ , la cui deduzione da  $p$  risulta peraltro piuttosto complessa. Si ottiene

$$\alpha = |r_\rho| / |R_\rho| = \int_0^m |p_{,\eta}^H| d\eta / \int_0^m |H_{,\eta}| d\eta \quad (6)$$

dalla quale è evidente la dipendenza di carattere funzionale di  $\alpha$  su  $p$ . Tenuto conto che  $p_{,\eta}^H = F^H H_{,\eta}$  e indicando con  $\Lambda$  la lunghezza iniziale del percorso, la (5) può riscriversi come

$$\alpha = \frac{1}{\Lambda} \int_0^m |F_o^H E| |H_{,\eta}| d\eta = 1 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^m |f_o^H E_3 + g^H E^\Psi A_3| |H_{,\eta}| d\eta \quad (7)$$

dove  $E^\Psi = E \cdot \nabla \psi$ . In definitiva, per il modello cinematico assegnato, solo le componenti di deformazione nella direzione longitudinale e nella direzione parallela al gradiente di  $\psi$  contribuiscono all'allungamento  $\alpha-1$  del cavo.

### 2.2 Condizioni di bilancio

Si assume che il cavo non sia interessato da forze di massa o di attrito. Da questo consegue che la forza di trazione presente è costante in modulo e diretta secondo la tangente. Assumendo inoltre che questo sia elastico ed omogeneo si perviene alla condizione di deformazione pura uniforme già discussa.

Si preferisce procedere partendo da un'impostazione di tipo globale, sulla base del principio dei lavori virtuali, nella forma che segue

$$\int_V S(F) \cdot \hat{F} dV + t(\alpha) \hat{\alpha} \Lambda = 0 \quad \forall (\hat{F}, \hat{\alpha}) \quad (8)$$

dove  $S(F)$  e  $t(\alpha)$  sono le funzioni costitutive che forniscono il tensore di Piola sulla trave e la forza di trazione sul cavo. Si assume che non agiscano forze esterne e gli stati tensionali sino dovuti all'interazione trave-cavo. Diviene evidente la differenza sostanziale che esiste tra il termine legato alla trave, fornito dall'integrale di grandezze locali, e quello dovuta al cavo che risulta essere il prodotto di grandezze che possiedono una dipendenza funzionale sulla deformazione. L'espressione assegnata alla condizione di bilancio equivale in sostanza ad una dichiarazione implicita sulle caratteristiche del sistema e, nel caso specifico, implica che non esistano spostamenti relativi agli ancoraggi né attrito tra i componenti.

Per quanto concerne il termine legato alla trave, si osserva preliminarmente che la variazione  $\hat{F}$  di  $F$ , valutata sullo spazio tangente al vincolo in corrispondenza della deformazione attuale, è fornita dall'espressione

$$\hat{F} = \hat{Q}\hat{F}_o + Q\hat{F}_o = Q\hat{\Omega}F_o + Q[\hat{f}_o \otimes A_3 + \hat{g}(A_3 \otimes \nabla\psi)] \quad (9)$$

con  $\hat{f}_o = \hat{\Gamma} + \hat{\omega} \times [x + g\psi A_3] + \hat{g}\psi(\omega \times A_3) + \hat{g}_\zeta \psi A_3$ . Il termine relativo al corpo può essere scritto come

$$\int_V S(F) \cdot \hat{F} dV = \int_V (s_o \otimes A_1) \cdot \hat{F}_o dV = \int_0^L N_o \cdot \hat{\Gamma} + M_o \cdot \hat{\omega} + \nu_o \hat{g} + \mu_o \hat{g}_\zeta d\zeta = \int_0^L \int_D B_i s_o \cdot \hat{d} \quad (10)$$

dove  $s_o = S(F_o)A_1$ . Le grandezze  $N_o, M_o, \nu_o, \mu_o$  sono opportune medie dello stato di tensione sulla sezione ed esprimono risultante, momento risultante, bi-taglio e bi-momento. L'ultima scrittura vuole evidenziare la dipendenza lineare delle grandezze dinamiche sulle componenti  $s_o$  dello stato di tensione, introducendo i seguenti operatori  $B_i$  definiti sui punti  $(x; \zeta)$  della trave:  $B_2: v \rightarrow [0, 0, \nu_3 \psi, \alpha, 0]$  ( $\alpha=1,2$ );  $B_3: v \rightarrow [v, (x + g\psi A_3) \times v, \psi(\omega \times A_3) \cdot v, \psi A_3 \cdot v]$ . Si e' indicato con  $\hat{d}$  la possibile variazione  $[\hat{\Gamma}, \hat{\omega}, \hat{g}, \hat{g}_\zeta]$ .

La deformazione virtuale del cavo, sempre calcolata sullo spazio tangente al vincolo, risulta essere un funzionale delle possibili variazioni con la forma

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\Lambda} \int_{\Lambda} F_o^H E \cdot \hat{F}_o^H E |F_o^H E|^{-1} |H_{,\eta}| d\eta = \frac{1}{\Lambda} \int_0^m \hat{D}^H \cdot (E \otimes E) |F_o^H E|^{-1} |H_{,\eta}| d\eta. \quad (11)$$

La prima espressione pone in evidenza il legame con il versore tangente alla curva deformata e la seconda mostra il legame con la proiezione del tensore di Green

$$\hat{D}^H \cdot (E \otimes E) = (\hat{f}_o^H \cdot E) E_3 + (\hat{g}^H f_{o3}^H + g^H \hat{f}_{o3}^H) E^\psi E_3 + g^H \hat{g}^H E^{\psi^2} + f_o^H \cdot \hat{f}_o^H E_3^2 \quad (12)$$

nella direzione tangente alla posizione iniziale della curva.

Una deduzione del legame lineare che esiste tra  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{d}$  mediante sostituzione della (12) nella (11) conduce ad un'espressione piuttosto complessa e di difficile interpretazione. Si osserva pero' che un'interessante analogia formale, indotta in ultima analisi dalla particolare geometria del solido, puo' essere stabilita tra l'espressione delle grandezze dinamiche coinvolte nella scrittura del lavoro virtuale della trave e le grandezze puramente cinematiche necessarie alla determinazione della deformazione virtuale del cavo. Utilizzando la relazione  $F_o^H E \cdot \hat{F}_o^H E = E_i F_o^H E \otimes A_i \cdot \hat{F}_o^H$  si perviene alla seguente espressione del termine dovuto al cavo:

$$t(\alpha) \hat{\alpha} \Lambda = t(\alpha) \int_0^m B_i^H \tau_i \cdot \hat{d} d\eta \quad (13)$$

dove i vettori  $\tau_i$  sono grandezze cinematiche in cui parametri deformativi e parametri geometrici del tracciato del cavo risultano intimamente legati:

$$\tau_i = E_i F_o^H E |H_{,\eta}| |F_o^H E|^{-1} = E_i (E + E_3 f_o^H + g^H E^\psi A_3) |H_{,\eta}| |F_o^H E|^{-1}. \quad (14)$$

### 3. PROBLEMA LINEARIZZATO

Volendo valutare la possibilita' di fenomeni di instabilita' infinitesima dovuti agli stati tensionali indotti dall'interazione dei due componenti il sistema, si procede linearizzando il problema nell'intorno di una configurazione nota ed equilibrata, scelta per semplicita' coincidente con la configurazione di riferimento. Si assume che i parametri cinematici  $u_o = q - \zeta A_3$ ,  $Q - I$  e  $g$  che descrivono la differenza tra la configurazione deformata e quella di riferimento siano sufficientemente piccoli da rendere trascurabili i termini di ordine superiore al primo. Il campo di spostamenti puo' essere ricondotto alla forma

$$p(x, \zeta) - P = u_o(\zeta) + \omega(\zeta) \times x + g(\zeta)\psi(x)A_3 \quad (15)$$

ed il suo gradiente differisce dall'identita' per un tensore  $B$  definito come segue

$$F = I + B = I + [u_{o,\zeta} + \omega_{,\zeta} \times x + g_{,\zeta}\psi A_3] \otimes A_3 + [g\psi_{, \alpha} A_3 + \omega \times A_\alpha] \otimes A_\alpha \quad (16)$$

Procedendo alla linearizzazione delle relazioni costitutive e delle misure di deformazione, si perviene alla seguente condizione di bilancio:

$$\int_V (CB^t \cdot \hat{B}^t + BT^* \cdot \hat{B}) d\Omega + t^* \int_0^m (I - E \otimes E) \cdot (B^H E \otimes \hat{B}^H E) |H_{, \eta}| d\eta + c \int_0^m B^H E \cdot E |H_{, \eta}| d\eta - \int_0^m \hat{B}^H E \cdot E |H_{, \eta}| d\eta = 0 \quad \forall \hat{B} \quad (17)$$

dove  $T^*$  e  $t^*$  sono le tensioni residue sulla trave e la forza residua sul cavo mentre  $c = t_{, \alpha}(1)$  e  $C = \partial S / \partial F(I)$  indicano le rigidzze dei materiali. Si osserva che l'esistenza e l'unicita' del problema linearizzato dipende dagli stati di tensione residui  $T^*$ . Il cavo teso produce un effetto stabilizzante in parte dovuto alla forza  $t^*$  legata alle componenti di spostamento ortogonali al percorso e in parte dovuto alla sua rigidzza  $c$  legata alla componenti tangenti. Alcune applicazioni, non riportate per esigenze di spazio, mostrano che la presenza di un cavo interno teso influenza particolarmente fenomeni di instabilita' di tipo torsionale mentre possiede un'influenza meno sensibile nei confronti di quelli flessionali.

### BIBLIOGRAFIA

- Antman S. S. & Marlow R. S. (1991). Material constraints, Lagrange multipliers, and compatibility. Application to rod and shell theories. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 116, 257-299.
- Dall'Asta A. (1995). On the coupling between three dimensional bodies and slipping cables. (Accettato per la pubblicazione su *Int. J. Solids Structures*).
- Simo J. C., Vu-Quoc L. (1991). A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation, *Int. J. Solids Structures*, 27(3), 371-393.

**BIBLIOGRAFIA**

- Alkhairi F.M., Naaman A.E. (1993). Analysis of beams prestressed with unbounded internal or external tendons. *J. Strdt. Engrg., ASCE*, **119**(9), 2680-2700.
- Antman S.S., Marlow R.S. (1991). Material constraints, Lagrange multipliers and compatibility. Application to rod and shell theories. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **116**, 257-299.
- Capurso M. (1984). Influenza delle componenti di scorrimento nella deformazione delle travi in parete sottile con sezione aperta. *Giornale del genio civile*, **4,5,6**, 127-143.
- Como M., Grimaldi A. (1995). Theory of stability of continuous elastic structures. *CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo*.
- Como M. (1967). Teoria della stabilità dell'equilibrio elastico. *Liguori Editore, Napoli*.
- Dall'Asta A. (1995a). On the coupling between three-dimensional bodies and slipping cables. *Int. J. Solids Structures*, (in print).
- Dall'Asta A. (1995b). Dynamics of elastic bodies with internal slipping cables. *Nota tecnica n. 185 dell'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni dell'Università di Ancona*.
- Dall'Asta A. and Dezi L. (1993). Nonlinear analysis of beams prestressed by unbonded cables. *J. Engrg. Mech., ASCE*, **119**(4), 720-732.
- Dall'Asta A. and Leoni G. (1995). Alcune considerazioni sui solidi prismatici con cavi interni scorrevoli. *Proceedings of XII AIMETA*, Napoli, 345-350.
- Davì F. (1994). Dynamics of linear anisotropic rods. *Nota tecnica n. 173 dell'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni dell'Università di Ancona*.
- Dill E.H. (1992). Kirchhoff's theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences*, **44**(1), 1-23.
- Gjelsvik A. (1981). The theory of thin-walled bars. *Wiley, New York*.

- Laudiero F., Savoia M. (1990). Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section. *Thin Walled Structures*. **10**, 87-119.
- Laudiero F., Savoia M. and Zaccaria D. (1991). The influence of shear deformations on the stability of thin-walled beams under non-conservative loading. *Int. J. Solids Structures*. **27**(11), 1351-1370.
- Naaman A.E., Alkhairi F.M. (1991). Stress at ultimate in unbounded prestressing tendons. Part I: Evaluation of the state of the art. *ACI Struct. J.*, **88**(5), 641-651.
- Podio Guidugli P., Vianello M. (1992). The representation problem of constrained linear elasticity, *J. of Elasticity*, **28**, 271-276.
- Saadatmanesh H., Tong W. (1992). Parametric study of continuous prestressed composite girders. *J. Struct. Engrg. ASCE*, **118**(1), 186-206.
- Timoshenko S. (1945). Theory of bending, torsion and buckling of thin walled members of open section. *Journal of Franklin Institute*. **139**.
- Truesdell C., Noll W. (1965). The non-linear field theories of mechanics. *Handbuch der Physik*, Vol.III/3, Springer Verlag, Berlin.
- Truesdell C., Toupin R.A. (1960). The classical field theories. *Handbuch der Physik*, Vol.III/1, Springer Verlag, Berlin.
- Vlasov V.Z. (1961). Thin walled elastic beams. *2nd Russ. edn. Israeli Progr. for Scient. Trans.. Jerusalem*.