

УДК 537.8

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.11>

Купріяничук В.М.¹, аспірант
Будник М.М.², д.т.н., с.н.с.

V. M. Kupriianchuk¹, PhD student,
M. M. Budnyk², Dr. Sci., Assoc. Prof.

Розрахунок границь робочої зони круглого магнітного аплікатора

Calculation of boundaries of the working zone of the round magnetic applicator

¹Національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова 4Г,
e-mail: kupriianchuk.vladd@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University, 03680, Kyiv, Academician Glushkov avenue, 4G
e-mail: kupriianchuk.vladd@gmail.com

²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, 03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова 4Г,
e-mail: budnyk@meta.ua

²Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Science of the Ukraine, 03680, Kyiv, Academician Glushkov avenue, 4G,
e-mail: budnyk@meta.ua

Розглянута задача моделювання магнітного аплікатора круглої форми, призначеного для дії на об'єкт (мішень) постійним чи змінним магнітним полем. У зв'язку з тим, що магнітне поле монотонно спадає з ростом відстані до аплікатора, модель включає 3 аплікатори з різними радіусами, а задача вирішується на основі їх порівняння. При цьому більший та менший аплікатори мають радіуси, які більше чи менше радіуса середнього аплікатора в однакову кількість раз (коефіцієнт масштабу k). В наближенні витка зі струмом знайдено аналітичні залежності від k ближньої, дальньої границі та середини проміжної зони, тобто робочої зони, в якій повинна знаходитися мішень. Знайдено асимптотики у крайніх випадках мінімального ($k=1$) та великого ($k \gg 1$) коефіцієнтів масштабу. Показано, що середина робочої зони при $k=1$ рівна $R/\sqrt{2}$, (R – радіус аплікатора), а при $k \gg 1$ росте як $(R/2)k^{1/3}$. Ці результати дають вирішення «прямої» задачі – для аплікатора певного радіусу підібрати параметри мішені – розмір та відстань до неї. Такий підбір критичний, коли мішені мають достатньо великий розмір та відстань до яких не може перевищувати певної критичної величини (глибини залягання), що має місце зокрема при дії магнітним полем на певні органи чи області локалізації магнітних (нано)матеріалів всередині біооб'єктів, в т. ч. людини чи тварини.

Ключові слова: аплікатор магнітного поля, робоча зона, наноматеріали, локалізація наночастинок

We considered the problem of modeling a magnetic applicator of round shape, designed to act on an object (target) with a constant or variable magnetic field. Due to the fact that the magnetic field monotonically decreases with increasing distance to the applicator, the model includes 3 applicators with different radii, and the problem is solved based on their comparison. At the same time, the larger and smaller applicators have radii that are larger or smaller than the radius of the average applicator by the same number of times (scale factor k). Analytical dependences on k of the near, far boundary, and middle of the intermediate zone, i.e., the working zone, in which the target should be located, were found in the approximation of the current loop. Asymptotics were found in extreme cases of minimal ($k=1$) and large ($k \gg 1$) scale factors. It is shown that the middle of the working zone at $k=1$ is equal to $R/\sqrt{2}$, (R is the radius of the applicator), and at $k \gg 1$ it grows as $(R/2)k^{1/3}$. These results provide a solution to the "direct" problem of choosing target parameters for an applicator of a certain radius - size and distance to it. Such a selection is critical when the targets have a sufficiently large size and the distance to which cannot exceed a certain critical value (depth of occurrence), which takes place in particular for the action by magnetic field on certain organs or the area of localization of magnetic (nano)materials inside biological objects, including humans or animals.

Key Words: magnetic field applicator, working zone, nanomaterials, nanoparticles localization.

1. Вступ. Для направленої доставки ліків на магнітних носіях, необхідний зовнішній вплив магнітного поля, що має достатній градієнт для використання магнітних частинок в організмі. Для його створення використовується аплікатор магнітного поля. Створення магнітного аплікатора, який має здатність утримувати магнітні наночастинки на необхідній відстані всередині біологічного об'єкта - це нова, складна і погано досліджена задача. Оскільки об'єкт - це монодоменні феромагнітні наночастинки, то величина магнітної сили, яка діє на них, визначається градієнтом магнітного поля, яке створено аплікатором [1]. Такий аплікатор буде мати 3 зони: ближню, проміжну та дальню. В кожній з цих зон напруженість магнітного поля буде мати залежність від радіусу аплікатора, що використовується [2].

Крім того, магнітні наночастинки, які потрапляють у злоякісну клітину, здатні поглинати енергію зовнішнього змінного електромагнітного поля. В результаті можна очікувати локальний нагрів оточуючих тканин. Ця технологія називається магнітна гіпертермія й наразі активно досліджується [3]. Інші напрямки застосувань в біомедицині наведено в оглядах [4-5].

В роботі розглянута модель магнітного аплікатора круглої форми, призначеного для дії на об'єкт (мішень) постійним чи змінним магнітним полем. Ставиться задача підібрати параметри мішені - розмір та відстань до неї для аплікатора певного радіусу. На перший погляд задача тривіальна, тому що магнітне поле моно-тонно спадає з ростом відстані до аплікатора, та має лише один розв'язок, а саме - відстань повинна бути мінімальна, а розмір мішені не повинен перевищувати діаметра аплікатора.

Цей тривіальний розв'язок повністю справедливий з точки зору магнітостатики, проте, хибний для практичних застосувань, зокрема для створення магнітних аплікаторів. Для того, щоб підтвердити цю гіпотезу, розроблено теоретичну модель, яка включає 3 аплікатори з різними радіусами, а задача вирішується на основі їх порівняння. При цьому більший та менший аплікатори мають радіуси, які більше чи менше радіуса середнього аплікатора в однакову кількість раз (коефіцієнт масштабу k).

2. Магнітне поле витка зі струмом

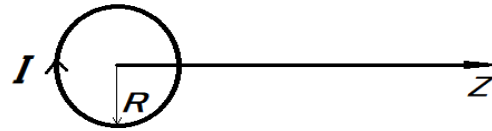


Рис. 1. Схематичне зображення витка зі струмом

Відомо, що напруженість магнітного поля (МП) має наступний вигляд:

$$H = \frac{wR^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}}, w = nI \quad (1)$$

де w - ампер-витки, n - кількість витків, I - струм у витку, R - радіус витка, Z - відстань від центру.

Розглянемо найпростіший випадок де кількість витків $n=1$, тоді поле набуває вигляду:

$$H = \frac{IR^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}} \quad (2)$$

В нормованому вигляді враховуємо $H_0 = \frac{I}{R}$ та $z = \frac{Z}{R}$ тоді залежність від відстані z матиме наступний відомий вигляд (3):

$$H(z) = H_0 \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

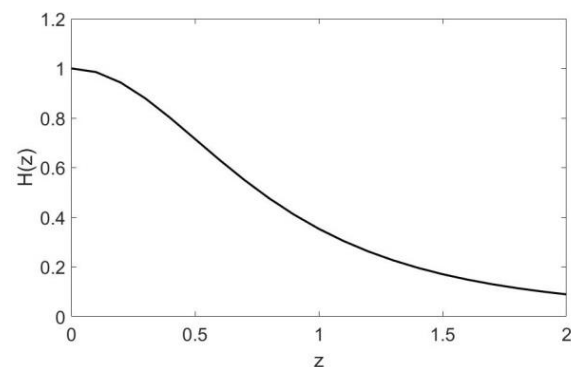


Рис. 2. Залежність амплітуди магнітного поля аплікатора на його осі від відстані z

З (1,3) можемо отримати вирази для ближньої (4а), проміжної (4б) та дальньої (4в) зон:

$$H_{БЗ} = H_0 = \frac{1}{R}, z \ll 1 \quad (4а)$$

$$H_{ПЗ} = \frac{H_0}{2\sqrt{2}}, z \approx 1 \quad (4б)$$

$$H_{ДЗ} = \frac{IR^2}{z^3}, z \gg 1 \quad (4в)$$

Бачимо, що в ближній зоні МП практично постійне H_0 , далі у проміжній зоні воно

зменшується в $2\sqrt{2} \approx 2.82$ рази, в дальній зоні поле пропорційне $H_{ДЗ} \sim \frac{M}{z^3}$, де $M = IR^2$ – відомий вираз для магнітного моменту диполя.

Недоліком виразу (4,6) є те, що середина проміжної зони є наближеною і вибрана нами без належного обґрунтування. Крім того, проміжна зона не має ширини, іншими словами – границь.

3. Визначення границь робочої зони для певного коефіцієнту масштабу. Введемо коефіцієнт масштабу k такий щоб:

$$R_1 = \frac{R_2}{k}, R_3 = R_2 k \quad (5)$$

$$z_1 = kz_2, z_3 = \frac{z_2}{k} \quad (6)$$

Тоді з виразу (3) отримаємо залежності для 2-х аплікаторів з різними радіусами R_1 та R_3 .

$$H_{R1}(z) = \frac{Ik}{R_2} \left(\frac{1}{(1+(kz_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (7)$$

$$H_{R3}(z) = \frac{I}{kR_2} \left(\frac{1}{(1+(\frac{z_2}{k})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (8)$$

Припустимо, що ми маємо певний об'єкт на глибині z . Тоді виникає питання – аплікатор з яким радіусом (R_1, R_2 , чи R_3) найкраще підійде для даної глибини z ? Для вирішення даної задачі скористаємось прикладом. Виберемо значення R_1, R_2, R_3 які будуть задовольняти умову:

$$R_1 < R_2 < R_3 \quad (9)$$

Наприклад, $R_1 = 0.25, R_2 = 1, R_3 = 4$, отже $k = 4$. Тоді залежності (7,8) набудуть вигляду (поле H_2 дає сться відомим виразом (3)).

$$H_1(z) = 4I \left(\frac{1}{(1+16z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (10)$$

$$H_3(z) = \frac{I}{4} \left(\frac{1}{(1+(\frac{z}{4})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (11)$$

Використовуючи графічне представлення можемо визначити дальню та ближню границі ПЗ, та її середину згідно виразів (12 - 14).

$$H_1(z_{min}) = H_2(z_{min}) \quad (12)$$

$$H_2(z_{max}) = H_3(z_{max}) \quad (13)$$

$$z_{cep} = \frac{z_{min} + z_{max}}{2} \quad (14)$$

В результаті отримаємо $z_{min} = 0.34, z_{max} = 1.34$, та $z_{cep} = 0.84$. Графічне представлення залежностей (12-14) подано на Рис. 3.

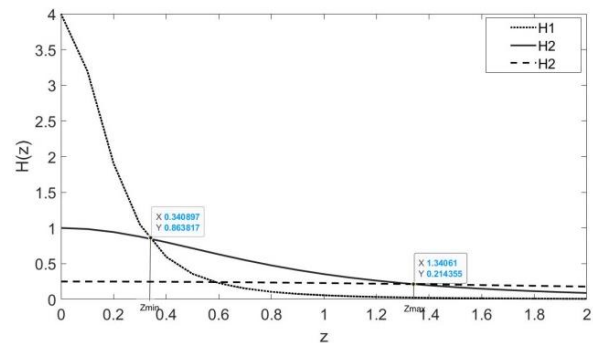


Рис. 3. Залежності напруженості МП для трьох аплікаторів з різними радіусами (R_1, R_2, R_3), z_{min}, z_{max} – границі проміжної зони.

На цій основі можемо уточнити визначення (4) просторових зон для аплікатору з середнім радіусом R_2 .

Для ближньої зони: $z_2 < z_{min}$ отже $z_2 < 0.34$

Проміжна зона: $z_{min} < z_2 < z_{max}$

тоді $z_2 \in (0.34; 1.34)$ (15)

Дальня зона: $z_2 > z_{max}$ звідси $z_2 > 1.34$

Також визначимо ширину робочої зони:

$$\Delta z_2 = z_{max} - z_{min} = 1 \quad (16)$$

4. Обчислення границь робочої зони для довільного коефіцієнту масштабу. Значення границь робочої зон (15-16) стосуються лише випадку $k=4$. Для довільного випадку знову розглянемо поле витка (3) та врахуємо умову (9) для 3-х аплікаторів з різними радіусами. Тоді для дальньої (z_{max}) та ближньої (z_{min}) границь робочої зони буде справджуватись рівність:

$$H_1(z_{min}) = H_2(z_{min}) \quad (17)$$

$$H_2(z_{max}) = H_3(z_{max}) \quad (18)$$

Звідси отримаємо:

$$z_{min} = f(R_1, R_2) \quad (19)$$

$$z_{max} = f(R_2, R_3) \quad (20)$$

На основі виразів (5) та (3) визначимо функцію для z_{min} :

$$\frac{1}{R_1 \left(1 + \left(\frac{z_1}{R_1} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R_2 \left(1 + \left(\frac{z_2}{R_2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (21)$$

$$R_1 \left(1 + \left(\frac{Z_1}{R_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = R_2 \left(1 + \left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

$$(R_1)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \left(\frac{Z_1}{R_1}\right)^2\right) = (R_2)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right) \quad (23)$$

Для того, щоб звільнитися від радикалів необхідно перейти до виразів через коефіцієнт масштабування k , такий щоб:

$$\left(\frac{R_2}{k}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + (kz_{min})^2) = (R_2)^{\frac{2}{3}} (1 + z_{min}^2) \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right) (1 + (kz_{min})^2) = 1 + z_{min}^2 \quad (25)$$

$$1 - k^{-\frac{2}{3}} = z_{min}^2 (k^{\frac{4}{3}} - 1) \quad (26)$$

$$z_{min} = \frac{1}{k^{1/3}} \sqrt{\frac{k^{2/3}-1}{k^{4/3}-1}} \quad (27)$$

Можемо спростити вираз використовуючи відому математичну формулу $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ при значенні $a = k^{2/3}$; $b = 1$:

$$(k^{4/3} - 1) = (k^{2/3} - 1)(k^{2/3} + 1) \quad (28)$$

$$z_{min} = \frac{1}{k^{1/3}} \sqrt{\frac{1}{k^{2/3}+1}} = \frac{z_{min}}{R_2} \quad (29)$$

Аналогічно, на основі виразів (6) та (3) визначимо функцію Z_{max} :

$$\frac{1}{R_2 \left(1 + \left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R_3 \left(1 + \left(\frac{Z_3}{R_3}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (30)$$

$$(R_2)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \left(\frac{Z_2}{R_2}\right)^2\right) = (R_3)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \left(\frac{Z_3}{R_3}\right)^2\right) \quad (31)$$

Переходимо до виразу через коефіцієнт масштабування k , тоді $Z_{max} = f(k, R_2)$:

$$(R_2)^{\frac{2}{3}} (1 + (Z_{max})^2) = (kR_2)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \left(\frac{Z_{max}}{k}\right)^2\right) \quad (32)$$

$$1 + Z_{max}^2 = k^{\frac{2}{3}} + Z_{max}^2 k^{-\frac{4}{3}} \quad (33)$$

$$1 - k^{\frac{2}{3}} = Z_{max}^2 (k^{-\frac{4}{3}} - 1) \quad (34)$$

$$Z_{max} = k^{2/3} \sqrt{\frac{1-k^{2/3}}{1-k^{4/3}}} \quad (35)$$

Спростимо вираз знову використавши різницю квадратів $(1 - (k^{2/3})^2)$:

$$Z_{max} = k^{2/3} \sqrt{\frac{1}{1+k^{2/3}}} = \frac{Z_{max}}{R_2} \quad (36)$$

Таблиця 1

Результати обчислень Z_{min} , Z_{max} , та $Z_{сер}$ при різних значеннях коефіцієнту масштабу k

k	Z_{min}	Z_{max}	$Z_{сер}$
2	0.49	0.98	0.73
3	0.39	1.18	0.78
4	0.34	1.34	0.84

Оскільки ми використовували нормовані значення Z_{max} та Z_{min} :

$$Z_{min} = R_2 z_{min}; Z_{max} = R_2 z_{max} \quad (37)$$

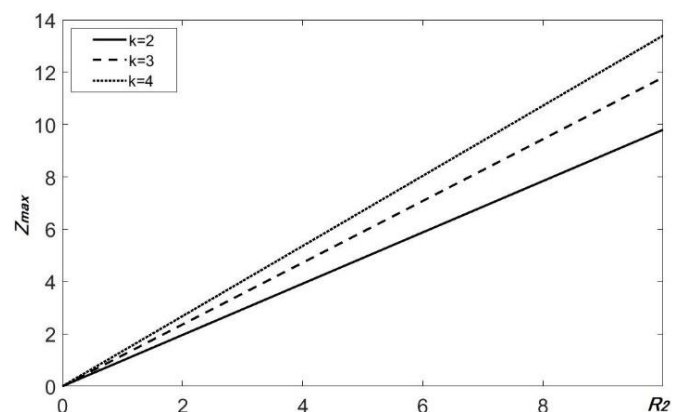


Рис.4. Залежність дальньої границі робочої зони від радіусу аплікатора

5. Асимптотика границь при граничних коефіцієнтах масштабу. Використовуючи вирази (29) та (37) побудуємо залежність Z_{min} , Z_{max} , та $Z_{сер}$ при будь-яких значеннях k . Проведемо аналіз асимптот для значень Z_{min} , Z_{max} , та $Z_{сер}$:

$$k \rightarrow 1: \text{всі } Z_{min}, Z_{max}, Z_{сер} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, \quad (38)$$

$$k \gg 1: Z_{min} \rightarrow k^{-\frac{1}{3}}, Z_{max} \rightarrow k^{\frac{1}{3}}, Z_{сер} \rightarrow \frac{1}{2} k^{\frac{1}{3}},$$

З даного графіку видно що Z_{max} та $Z_{сер}$ при $k \gg 1$ будуть збільшуватися, при цьому дальня границя Z_{max} буде зростати в 2 раз швидше за середину.

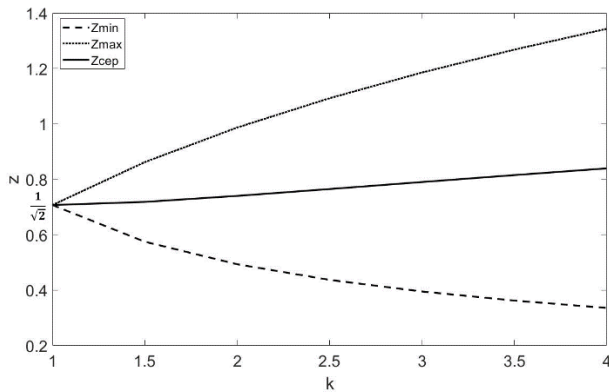


Рис.5. Залежність границь робочої зони від коефіцієнту масштабу k .

І навпаки, при $k \rightarrow 1$ обидві границі та середина робочої зони будуть наближатись до значення $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Висновки. В наближенні аплікатора як витка зі струмом знайдено аналітичні залежності від k ближньої, дальньої границі та середини робочої зони, в якій повинна знаходитися мішень. Знайдено асимптотики у крайніх випадках мінімального ($k=1$) та великого ($k \gg 1$) коефіцієнтів масштабу. Показано, що обидві границі та середина робочої зони при $k=1$ рівна $R/\sqrt{2}$, (R – радіус аплікатора), а при $k \gg 1$ ближня границя спадає як $Rk^{-2/3}$, дальня – росте як $(R)k^{1/3}$, а середина зони в 2 рази повільніше $(R/2)k^{1/3}$ (як середнє арифметичне від обох границь).

Отже, з асимптотичного аналізу маємо, що при збільшенні коефіцієнту масштабу робоча зона буде розширюватися, а її середина – повільно віддалятися від робочої поверхні аплікатора в напрямку до об'єкта (мішені).

Ці результати дають вирішення «прямої» задачі – для аплікатора певного радіусу підібрати параметри мішені – розмір та відстань до неї. Так, в 1-му наближенні (модель аплікатора як витка зі струмом) ширина робочої зони дає бли-зьку до оптимальної (квазиоптимальну) товщину (розмір) мішені. Також середина робочої зони – це по суті квазиоптимальна відстань до мішені. Квази, бо точну оптимальність автори розуміють як результат розв'язку певної екстремальної задачі, яка тут відсутня.

Це потрібно у сучасних застосуваннях, коли мішень має досить малий розмір та не може наблизитися до аплікатора ближче певної критичної відстані. Наприклад, у біомедичних застосуваннях при дії магнітним полем на певні органи чи магнітні (зокрема – нано) матеріали чи їх локалізації всередині біооб'єктів, в тому числі людини чи тварини.

Проте, для практики більш корисно вирішити «обернену» задачу - для мішені заданого розміру та відстані до неї знайти (виготовити) аплікатор з потрібними параметрами. Мовою математики це означає, що у подальшому потрібно вирішити задачу оптимізації параметрів конструкції аплікатора (в простій моделі витка зі струмом такий параметр лише один - радіус), і бажано не асимптотично, а «точно», тобто як результат розв'язку певної екстремальної задачі.

Подяки. Робота виконана за проектом «Розробка, дослідна експлуатація та впровадження у виробництво біомедичних інформаційно-діагностичних систем та інтелектуальних сенсорних приладів» в рамках цільової програми наукових досліджень НАНУ «Розумні» сенсорні прилади нового покоління на основі сучасних матеріалів та технологій» на 2018-2022 рр.

Список використаних джерел

1. Дудченко, А. К. Магнітний аплікатор для направленої доставки магнітних наночастиць в орган-мішень [Електронний ресурс] / А. К. Дудченко, Ю. А. Алексєйцев, Н. А. Дудченко, О. М. Михайлик – Інститут прикладних проблем фізики і біофізики НАНУ – 2008. – С. 1-4. - Доступ за посиланням: <https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/download/14013/12874/>
2. Будник М., Дудченко Н., Дудченко О., Алексєйцев Ю., Будник В. Магнітна система аплікатора для концентрації магнітних матеріалів у локальній області всередині біологічного об'єкту // Патент України на кор. модель UA 29313, опубл. 10.01.2008, Бюл. «Промислова власність», №1, 2008.
3. Jordan A. Magnetic fluid hyperthermia // Journal of magnetism and magnetic materials. – 1999. – Issue 201. -PP. 413-419.
4. Купріячук, В. М., Будник, М.М. Застосування магнітних наночастинок в

біології та медицині (огляд) // Book of Abstracts of VI Intern. Sci. and Practical Conf. "Trends and directions of development of scientific approaches and prospects of integration of Internet technologies into society". Stockholm, Sweden 2021. Pp. 492-497. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.VI URL: <https://isg-konf.com>.

5. Купріяничук, В. М., Будник, М.М. Метод флуоресцентної візуалізації наночастинок в тілі лабораторних тварин (огляд) // Book of Abstracts of XI Intern. Sci. And Practical Conf. "Topical issues of modern science and education". Tallinn, Estonia 2021. Pp. 202-206. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.XI URL: <https://isg-konf.com>

and Practical Conf. "Topical issues of modern science and education". Tallinn, Estonia 2021. Pp. 202-206. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.XI URL: <https://isg-konf.com>

Надійшла до редакції 21.01.2022

References

1. DUDCHENKO, A., ALEKSEYTSEV, A., DUDCHENKO, N., MYKHAILYK, O. (2008) *Magnetic applicator for directed delivery of magnetic nanoparticles to the target organ*. [Online] p. 1–4 – Available from: <https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/download/14013/12874>
2. BUDNYK M., DUDCHENKO N., DUDCHENKO O., ALEXEYTSEV YU., BUDNYK V. (2008) *Magnetic applicator system for concentration of magnetic materials in a local area inside a biological object* // Patent UA 29313, publ. 10.01.2008, Bull. "Industrial Property", No. 1, 2008.
3. JORDAN, A. (1989) *Magnetic fluid hyperthermia*, Issue. 201: Journal of magnetism and magnetic materials. – 1999. – Issue 201. -PP. 413-419.
4. KUPRIANCHUK, V.M., BUDNYK, M.M. (2021) Application of magnetic nanoparticles in biology and medicine (review) // Book of Abstracts of VI Intern. Sci. and Practical Conf. "Trends and directions of development of scientific approaches and prospects of integration of Internet technologies into society". Stockholm, Sweden 2021. Pp. 492-497. DOI: 10.46299/ ISG.2021.I.VI URL: <https://isg-konf.com>.
5. KUPRIANCHUK, V.M., BUDNYK, M.M. (2021) Method of fluorescence visualization of nanoparticles in the body of laboratory animals // Book of Abstracts of XI Intern. Sci.