

УДК

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.8>

Герасимюк Ю.С.¹, студ.,
Розора І.В.², д.ф.-м.н., доц.
Пашко А.О.³, д.ф.-м.н., проф.

Herasymiuk Y.S.¹, stud.,
Rozora I.V.², D.Sci., Associate Prof.
Pashko A.O.³, D.Sci., Prof.

Про оцінку ймовірності переповнення буферу для мереж зв'язку

On probability estimation of buffer overflow for communication networks

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: ¹yulyagerakyiv@gmail.com,
²irozora@knu.ua, ³aapashko@gmail.com

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ¹yulyagerakyiv@gmail.com,
²irozora@knu.ua, ³aapashko@gmail.com

У даній статті досліджується трафік у телекомунікаційних мережах, ймовірність переповнення буфера трафіку. Для цього у роботі проаналізовано процеси у телекомунікаційних мережах, зокрема залежності трафіку; проведено дослідження можливостей представлення реальних процесів у вигляді випадкових процесів на основі використання статистичного імітаційного моделювання; підібрано та проаналізовано необхідні математичні, статистичні моделі; програмно реалізовано дані моделі за допомогою середовища Matlab; побудовано необхідні графіки для порівняння отриманих даних; проведено аналіз отриманих моделей.

Ключові слова: випадковий процес, гауссівський процес, дробовий броунівський рух, індекс Хюрста, оцінка ймовірності, самоподібний трафік, статистичне імітаційне моделювання, телекомунікаційний трафік

In recent years, a large number of research of telecommunications traffic have been conducted. It was found that traffic has a number of specific properties that distinguish it from ordinary traffic. Namely: it has the properties of self-similarity, multifractality, long-term dependence and distribution of the amount of load coming from one source.

At present, many other models of traffic with self-similarity properties and so on have been built in other researched works on this topic. Such models are investigated in this paper, which considers traffic in telecommunications networks, the probability of overflow traffic buffer. Statistical models are built to analyze traffic in telecommunications networks, in particular to research the probability of buffer overflow for communication networks.

The article presents the results of the analysis of processes in telecommunication networks, in particular traffic; research of possibilities of representation of real processes in the form of random processes on the basis of use of statistical simulation model; the necessary mathematical and statistical models are selected and analyzed; software-implemented models using the Matlab environment; visual graphs for comparison of the received data are given; the analysis of the received models is carried out.

Keywords—Gaussian process, fractional Brownian motion, Hurst index, probability estimation, random process, self-similar traffic, statistical simulation modeling, telecommunication traffic

Вступ

За останні роки проведено велику кількість досліджень трафіку телекомунікаційних систем. Було виявлено, що трафік має ряд специфічних властивостей, які відрізняють його від звичайного трафіку. А саме: властивості самоподібності, мультифрактальності, тривалої залежності та розподілу величини навантаження, що надходить від одного джерела.

Наразі в інших досліджених роботах з даної тематики вже було побудовано чимало моделей трафіку, які мали задані властивості самоподібності тощо. У роботі досліджуються такі моделі, методи моделювання трафіку та його перевантаження. Отримано оцінки ймовірності перевищення буфера самоподібного трафіку.

Об'єктом дослідження даної статті є трафік у телекомунікаційних мережах, предметом – ймовірність переповнення буфера такого трафіку.

Метою даної роботи є побудова статистичних моделей для аналізу трафіку у телекомунікаційних мережах, зокрема для дослідження ймовірності переповнення буферу для мереж зв'язку.

Основна частина

Розглянемо тепер детальніше дробовий броунівський рух, використовуючи наступні математичні позначення. Нехай (Ω, \mathcal{B}, P) – стандартний імовірнісний простір. Дробовим броунівським рухом (ДБР) з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссівський процес $B_\alpha(t), t \in [0,1]$, якщо $B_\alpha(0) = 0$, $EB_\alpha(t) = 0$ і він має наступну функцію кореляції

$$R_\alpha(t, s) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha} \right)$$

При $\alpha = 1/2$ маємо стандартний вінерівський процес.

Далі введемо деякі позначення. Нехай $A(t)$ це буде обсяг трафіку, який надходить у мережу за певний проміжок часу $[0, T]$. Приріст позначимо як $A(s, t) = A(t) - A(s)$, $t > s > 0$. Використовуючи введені позначення, зобразимо вхідний трафік у наступному вигляді $A(t) = mt + \sqrt{am}B_\alpha(t)$, де m – середня швидкість трафіку, $B_\alpha(t)$ – ДБР з індексом Хюрста $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, a – деяка константа.

Так, якщо в мережі є один пристрій зі швидкістю обслуговування $C > m$, процес завантаження визначається за

формулою $Q(t) \equiv \sup_{s \leq t} (A(s, t) - C(t - s))$. Враховуючи n незалежних ідентично завантажених пристроїв отримуємо $Q_n(t) \equiv \sup_{s \leq t} \left(\sum_{i=1}^n A_i(s, t) - nC(t - s) \right)$, де символ \equiv означає ідентично розподілену кількість.

Тепер перейдемо до дослідження ймовірності перевантаження з порогом b для $Q(t)$ на деякому інтервалі часу $[0, T]$. Будемо використовувати далі такі позначення $Q \equiv \sup_{t \in [0, T]} (Q(t))$, $\pi(b) = P\{Q \geq b\}$.

Для знаходження верхньої оцінки ймовірності перевантаження

$$P\{Q \geq b\} \leq P\left\{ \sup_{t \in [0, T]} (Q(t)) > b \right\} \text{ виконаємо наступне}$$

$$\begin{aligned} Q(t) &\equiv \sup_{s \leq t} (A(s, t) - C(t - s)) = \\ &= \sup_{s \leq t} (\sqrt{am}(B_\alpha(t) - B_\alpha(s)) - (C - m)(t - s)) \leq \\ &\leq 2\sqrt{am}(|B_\alpha(t)|) - (C - m)t. \\ Q &\equiv \sup_{t \in [0, T]} (Q(t)) = \sup_{t \in [0, T]} (2\sqrt{am}(|B_\alpha(t)|) - (C - m)t) = \\ &= 2\sqrt{am} \sup_{t \in [0, T]} (|B_\alpha(t)|) - T(C - m). \end{aligned}$$

Тоді отримаємо

$$P\{Q \geq b\} \leq P\left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|B_\alpha(t)|) > \frac{b + T(C - m)}{2\sqrt{am}} \right\}$$

Покладемо

$$x = \frac{b + T(C - m)}{2\sqrt{am}} \quad (1)$$

Таким чином виконується наступна теорема (Теорема 1):

Для $x \geq D$ маємо

$$P\left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|B_\alpha(t)|) > x \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{(x - D)^2}{2A} \right\}, \quad \text{де}$$

$$D = \sqrt{2}(T) \text{ і } A = \frac{\gamma}{1-p} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2}$$

Тоді, якщо виконується умова (1), дана теорема справедлива.

Наведемо ще одну теорему (Теорема 2):

Якщо $x \geq D$, то маємо

$$P\left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|B_\alpha(t)|) > x \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{(x - D)^2}{2V} \right\},$$

$$\text{де } D = \sqrt{2} \left(T^\alpha \ln^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{\alpha}} + 1 \right) + 4 \int_0^{\frac{T^\alpha}{4}} \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u^\alpha} + 1 \right) du \right),$$

та $V = 4T^{2\alpha}$.

Використовуючи отримані оцінки, можемо визначити, яким має бути поріг, щоб ймовірність перевищення була меншою за задану.

$$\text{Таким чином, } P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|B_\alpha(t)|) > x \right\} \leq \varepsilon_b, \text{ якщо}$$

$$x \geq D \text{ і } 2 \exp \left\{ -\frac{(x-D)^2}{2V} \right\} \leq \varepsilon_b$$

І поріг має бути $b \geq 2D\sqrt{am} - T(C-m)$.

У разі передачі сигналу в деякій системі слід враховувати не тільки процес введення, а й реакцію системи. Для цих цілей можна використати розподіл супремум квадратно-гауссових процесів.

Розглянемо інваріантну в часі лінійну систему з інтегрованою в квадраті функцією імпульсної характеристики $H(\tau)$, яка визначена в кінцевій області $\tau \in [0, T]$. Це означає, що реакція системи на вхідний сигнал $X(t)$, який спостерігається на проміжку $[-T, T]$, має такий вигляд

$$Y(t) = \int_0^T H(\tau) X(t-\tau) d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

та $H \in L_2([0, T])$.

Дробовий броунівський рух можна зобразити у вигляді випадкового ряду

$$B_\alpha(t) = X_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k) \quad (3),$$

де $\{X_k, Y_k\}$ - незалежні стандартні гауссові випадкові величини,

$\{x_k\}$ - нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,
 $\{y_k\}$ - нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_k)}, \quad b_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_k)},$$

$$C = \frac{\Gamma(2\alpha+1) \sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Для обчислення нулів функцій Бесселя можна використати наступне зображення.

$$x_n = \left(n + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \pi - \frac{4\alpha^2 - 1}{2\pi(4n + 3 - 2\alpha)} + \dots$$

$$y_n = \left(n + \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \pi - \frac{4(1-\alpha)^2 - 1}{2\pi(4n + 1 + 2\alpha)} + \dots \quad (4)$$

А для обчислення функцій Бесселя можна використати таке зображення.

$$J_{1-\alpha}^2(x_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_n}} \left(\cos \left(x_n + \frac{2\alpha\pi - \pi}{4} \right) - \frac{4\alpha^2 - 1}{8x_n} \sin \left(x_n + \frac{2\alpha\pi - \pi}{4} \right) \right),$$

$$J_{-\alpha}^2(y_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi y_n}} \left(\cos \left(y_n + \frac{2(1-\alpha)\pi - \pi}{4} \right) - \frac{4(1-\alpha)^2 - 1}{8y_n} \sin \left(y_n + \frac{2(1-\alpha)\pi - \pi}{4} \right) \right). \quad (5)$$

Припустимо, що функція імпульсної характеристики відома. Ми також припускаємо, що вхідним сигналом у системі є ДБР із індексом Хюрста α . З цього випливає, що вихід системи можна $Y(t)$ представити у вигляді

$$Y(t) = Y_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)), \quad \text{де функції}$$

$c_k(t), s_k(t)$ рівні

$$c_k(t) = b_k \int_0^T H(\tau) (1 - \cos(y_k(t-\tau))) d\tau,$$

$$s_k(t) = a_k \int_0^T H(\tau) \sin(x_k(t-\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Так, наприклад, для $H(\tau) = 1$ функції $c_k(t), s_k(t)$ дорівнюють

$$s_k(t) = \frac{2a_k}{x_k} \sin \left(x_k t - \frac{x_k T}{2} \right) \sin \left(\frac{x_k T}{2} \right)$$

$$c_k(t) = b_k T - \frac{2b_k}{y_k} \cos \left(y_k t - \frac{y_k T}{2} \right) \sin \left(\frac{y_k T}{2} \right). \quad (7)$$

Розглянемо перевантаження системи вхідним сигналом ДБР $X(t)$ з урахуванням реакції системи (вихідного процесу). Для отримання таких результатів ми використовуємо теорію квадратно-гауссових випадкових величин і процесів. Іноді вхідний процес невідомий, і можна побудувати модель процесу, а потім оцінити ймовірність переповнення.

Позначимо

$$\phi_{kl}^1 = \phi_{kl}^1(t) = b_k a_l (1 - \cos(y_k t))(1 - \cos(y_l t)) + c_k(t) c_l(t);$$

$$\phi_{kl}^2 = \phi_{kl}^2(t) = 2(b_k a_l (1 - \cos(y_k t)) \sin(x_l t) + c_k(t) s_l(t));$$

$$\phi_{kl}^3 = \phi_{kl}^3(t) = a_k a_l \sin(x_k t) \sin(x_l t) + s_k(t) s_l(t).$$

Тоді маємо, що процес $\xi(t)$ можна записати у такому вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\phi_{kl}^1(t) \xi_k \xi_l + \phi_{kl}^2(t) \xi_k \eta_l + \phi_{kl}^3(t) \eta_k \eta_l).$$

Позначимо прирости функцій наступним чином

$$\Delta\phi_{kl}^1 = \phi_{kl}^1(t) - \phi_{kl}^1(s); \quad \Delta\phi_{kl}^2 = \phi_{kl}^2(t) - \phi_{kl}^2(s);$$

$$\Delta\phi_{kl}^3 = \phi_{kl}^3(t) - \phi_{kl}^3(s).$$

Для виконання основного результату ми спочатку представляємо допоміжні співвідношення щодо середнього, дисперсії та дисперсії приростів для процесу $\xi(t)$.

Наведемо наступну лему.

Лема 1.

$$E\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_{kk}^1(t) + \phi_{kk}^3(t));$$

$$D\xi(t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(2(\phi_{kl}^1(t))^2 + (\phi_{kl}^2(t))^2 + 2(\phi_{kl}^3(t))^2 \right);$$

$$D(\xi(t) - \xi(s)) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(2(\Delta\phi_{kl}^1)^2 + (\Delta\phi_{kl}^2)^2 + 2(\Delta\phi_{kl}^3)^2 \right).$$

Наступна теорема дає верхню оцінку переповнення буфера системи з урахуванням вхідного та вихідного процесу з рівними ваговими показниками.

Теорема 4. Припустимо, що вхідним процесом системи є ДБР $X_{\alpha}(t)$. Якщо

$$x_0 > \frac{2\sqrt{2} \max\{\delta_0, K(T/2)^{\beta}\}}{\beta}, \quad \text{тоді виходить}$$

наступна нерівність

$$P\{Q > b\} < 4e^{\frac{3}{\beta}} \exp\left\{-\frac{x_0}{2\sqrt{2}\delta_0}\right\} \left\{\frac{x\beta}{2\sqrt{2}\delta_0}\right\}^{2/\beta} \left(1 + \frac{2x_0}{\sqrt{2}\delta_0}\right)^{1/2}.$$

Результати статистичного моделювання (обчислювального експерименту)

Як результати обчислювальних експериментів наведемо декілька різних програмних реалізацій моделювань для функцій Бесселя, дробово броунівського руху, індекса Хюрста.

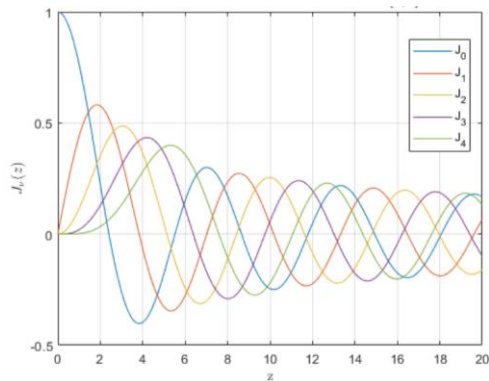


Рис. 1 – Вигляд функцій Бесселя

Спочатку розглянемо вигляд графіків функцій Бесселя (4),(5) першого роду для вхідних параметрів 0, 1, 2, 3, та 4, побудованих за допомогою середовища Matlab (див. рис.1).

На рис.2 та рис.3 приведені результати побудови графіків для (6) і (7), наприклад, при заданих параметрах $a = 1$; $b = 1$; $T = 10$ функції $c_k(t)$, $s_k(t)$ мають такий вигляд на відрізку $[-1,1]$.

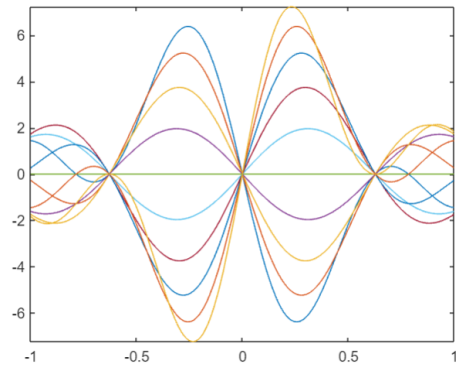


Рис. 2 – Вигляд функції $S_k(t)$

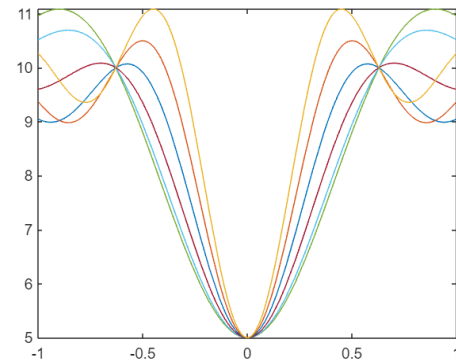


Рис. 3 – Вигляд функції $C_k(t)$

Далі наведемо результати експериментів з дробовим броунівським рухом з різними індексами Хюрста.

Відповідно до значення параметра Хюрста (α), ДБР виявляє для далеку залежність і для коротку або проміжну залежність. Продемонструємо кожний із цих двох випадків на графіках.

Як можна побачити на рис.4 на рис.5, чим вище параметр Хюрста, тим плавнішою буде крива.

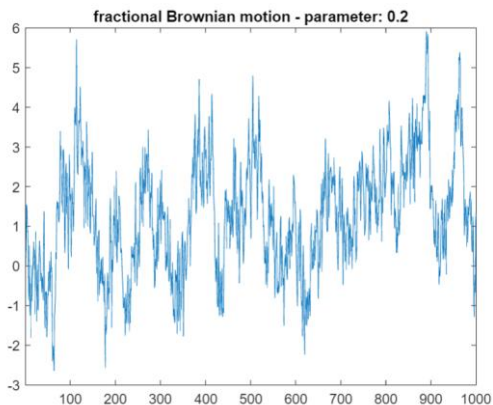


Рис. 4 – Графік ДБР з індексом Хюрста 0.2

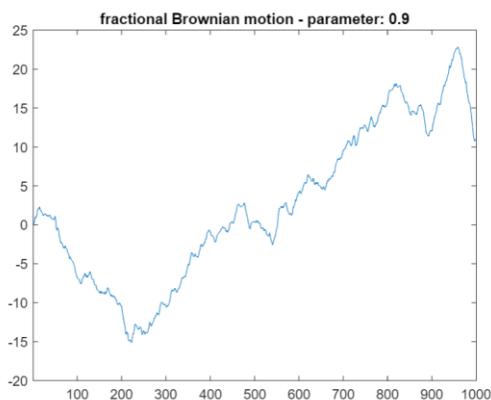


Рис. 5 – Графік ДБР з індексом Хюрста 0.9

Як уже згадувалося раніше, при $\alpha = 1/2$ маємо стандартний вінерівський процес – рис.6.

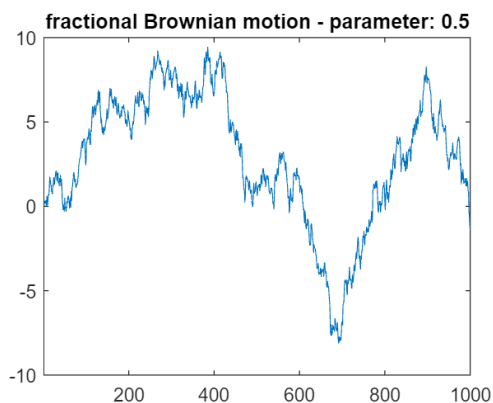


Рис.6 – Графік процесу з індексом Хюрста 0.5

Розглянемо залежності верхньої межі переповнення буферу на практичних розрахунках та побудовах. Skorистаємося для цього наступними позначеннями m – середня швидкість трафіку, C – швидкість обслуговування (необхідно, щоб $C > m$), α – індекс Хюрста, T – часовий період, на якому розглядається процес обслуговування, a – деякий коефіцієнт трафіку,

ймовірність переповнення буферу менше за задану ϵ_b .

Використовуючи Теорему 2 та підставляючи наступні значення у вище описані параметри: $\epsilon_b = 0.05$; $C = 100$; $m = 90$; $a = 1$; $T = 1$; $\alpha = 0.9$, отримаємо наступну оцінку верхньої межі $b \geq 62,6$. А для $\epsilon_b = 0.05$; $C = 100$; $m = 90$; $a = 1$; $T = 1$; $\alpha = 0.2$ поріг буде $b \geq 131.2$.

Так, якщо задати $\alpha = 0.7$, маємо верхню межу $b \geq 69,8$, а для $\alpha = 0.3$ буде $b \geq 106$.

Таким чином, змінюючи значення індексу Хюрста α як вхідного параметра (та не змінюючи значення швидкості обслуговування C та середньої швидкості надходження трафіку m), маємо наступну залежність, зображену на рис.7.

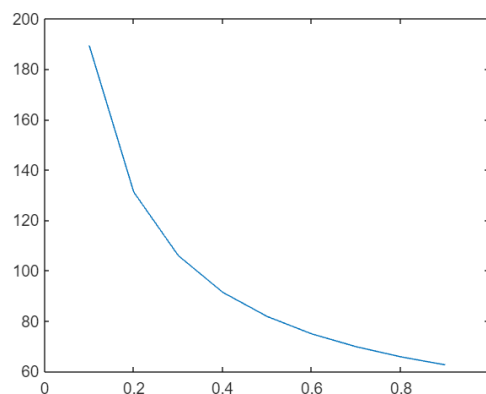


Рис. 7 – Залежність порогу від індексу Хюрста

Висновки

У даній роботі було поставлено та вирішено наступні задачі: проаналізовано процеси у телекомунікаційних мережах, зокрема залежності трафіку; проведено дослідження можливостей представлення реальних процесів у вигляді випадкових процесів на основі використання статистичного імітаційного моделювання; підбрано та проаналізовано необхідні математичні, статистичні моделі; програмно реалізовано дані моделі за допомогою середовища Matlab; побудовано необхідні графіки для порівняння отриманих даних; проведено аналіз отриманих моделей.

Список використаних джерел

1. Пашко А.О. Аналіз точності моделювання дробового броунівського руху в рівномірній метриці / А.О. Пашко, І.В.Розора // Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. –2018.– №1.– С.60-65.
2. Gautam N. Stochastic Models in Telecommunications for Optimal Design, Control and Performance Evaluation, chapter 7.– Handbook of Statistics.–2003.– Elsevier, Vol. 21.– P. 243-284. [https://doi.org/10.1016/S0169-7161\(03\)21009-9](https://doi.org/10.1016/S0169-7161(03)21009-9).
3. Nomos I. On the Use of Fractional Brownian Motion in the Theory of Connectionless Networks / IEEE journal on selected areas in communications.–1995.–vol. 13, No. 6.–P. 953-962.
4. Pashko A., Estimation of the Probability of Buffer overflow for self-similar Traffic /A. Pashko, I.Rozora // 2021 IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology, PIC S and T 2021.–2021.– P.28-32.
5. Козаченко Ю.В. Моделювання дробового броунівського руху у просторі $L_p([0, T])$ / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко, О.І.Василик// Теорія ймовірностей та математична статистика.–2017.– Вип. 97.–С.97-108.
6. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion. Master thesis, University of Twente, Amsterdam. – 2004. <http://www.columbia.edu/~ad3217/fbm/thesis.pdf>
7. Воропаєва В.Я., Теорія телеграфіку: навч. посіб. /В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб, В.В.Турупалов// Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ».–2011. – 202 с.
8. Документація MATLAB [Електронний ресурс] / <https://ch.mathworks.com/help>

References

1. PASHKO A., ROZORA I. (2018) Analysis of the accuracy of fractional Brownian motion modeling in a uniform metric / *Bulletin of the Taras Shevchenko National University. Series Physics and Mathematics*, vol. 1, pp. 60-65.
2. GAUTAM. N. (2003) *Stochastic Models in Telecommunications for Optimal Design, Control and Performance Evaluation* , chapter 7, Handbook of Statistics, Elsevier, Vol. 21., p. 243-284. [https://doi.org/10.1016/S0169-7161\(03\)21009-9](https://doi.org/10.1016/S0169-7161(03)21009-9).
3. NOMOS I. (1995). On the Use of Fractional Brownian Motion in the Theory of Connectionless Networks / *IEEE journal on selected areas in communications*, Vol. 13, No. 6, p.953-962.
4. PASHKO A., ROZORA I. (2021) Estimation of the Probability of Buffer overflow for self-similar Traffic / 2021 IEEE 8th International Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology, PIC S and T 2021.–2021.– P.28-32.
5. KOZACHENKO YU., PASHKO A., VASILYK O. (2017) Modeling of fractional Brownian motion in space $L_p([0, T])$ / *Probability theory and mathematical statistics*, Vol. 97, p.97-108.
6. DIEKER T. (2004). Simulation of fractional Brownian motion. Master thesis, University of Twente, Amsterdam. <http://www.columbia.edu/~ad3217/fbm/thesis.pdf>
7. VOROPAIEVA V., BESSARAB V., TURUPALOV V. (2011). *Theory of teletraffic: textbook*. Donetsk: DonNTU, 202 p.
8. MATLAB Documentation [Electronic resource] / <https://ch.mathworks.com/help>

Надійшла до редакції 15.01.2022