



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Análisis de errores y dificultades en el aprendizaje de las fracciones en la transición entre Educación Primaria y Secundaria de un centro educativo

Autor/es

Xabier Iurgi Arguinizoniz Cebreiro

Director/es

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2021-22



***Análisis de errores y dificultades en el aprendizaje de las fracciones en la transición entre Educación Primaria y Secundaria de un centro educativo,*** de Xabier Iurgi Arguinzoniz Cebreiro

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.

Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor, 2022

© Universidad de La Rioja, 2022

[publicaciones.unirioja.es](http://publicaciones.unirioja.es)

E-mail: [publicaciones@unirioja.es](mailto:publicaciones@unirioja.es)

# **Trabajo de fin de Máster**

**Análisis de errores y dificultades en el aprendizaje  
de las fracciones en la transición entre Educación  
Primaria y Secundaria de un centro educativo**

*Analysis of errors and difficulties with fractions in the transition  
between primary and secondary education in a school in Spain*

Máster: Máster universitario en profesorado de Educación Secundaria  
Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanzas de idiomas  
Especialidad en matemáticas



**Autor:** Xabier Iurgi Arguinzoniz Cebreiro

**Tutor Universidad de la Rioja:** Juan Miguel Ribera Puchades

**Año académico:** 2021-2022

## RESUMEN

Motivado por la preocupación de un centro educativo, se hace un estudio de los errores más comunes que cometen en el manejo de las fracciones los estudiantes desde 4º de primaria hasta 2º de secundaria de un colegio mediante un test. Se propone una clasificación de respuestas que tiene en cuenta las causas y las manifestaciones de los errores y se emplea para analizar qué nivel de conocimiento tienen los estudiantes del centro y las posibles causas de sus problemas con las fracciones. Se evidencia que los problemas más frecuentes son la suma de numerador y denominador al sumar fracciones o la ordenación de fracciones por su denominador. Además, se concluye que tienen relación con métodos didácticos empleados como la equipartición o el doble conteo. Se propone el uso de este método de clasificación como herramienta práctica de medición y seguimiento para que los centros puedan evaluar el nivel de conocimiento de su alumnado y actuar con medidas.

*Palabras clave:* fracciones, dificultades con fracciones, clasificación de errores en fracciones, obstáculos didácticos

## ABSTRACT

Following the concern of a school about the skill level of their students, a study is conducted on the most common errors made when working with fractions by 4th grade primary school students through 2nd grade secondary school students. A model for classifying the errors is proposed, taking into account the causes and type of errors. The model is then used to analyze the level of understanding on the different courses. The results show that most common errors consist in adding up both numerator and denominator when doing summations and ordering fractions by only looking at one of the two factors. It is concluded that the didactical methods, such as double counting or equipartition of objects, relate to many of the errors made by the students. Finally, the classification method is proposed as a practical tool for schools to

evaluate the level of understanding on fractions of their students in order to take action to improve.

*Keywords:* fractions, difficulties with fractions, classification of errors with fractions, didactic obstacles

### **AGREDECIMIENTOS**

Este trabajo ha sido posible gracias a la inestimable ayuda de Saioa, que ha organizado y coordinado todo lo que podía necesitar y a Juanmi, que ha sido un guía sin el que me habría perdido en mis propias reflexiones. Eskerrik asko, benetan! Moltes gràcies!

Quiero agradecer especialmente a Manuela su paciencia, apoyo y comprensión durante estas semanas. Y a mi hermana por convencerme.

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2 OBJETIVO</b>	<b>5</b>
<b>3 MARCO TEÓRICO</b>	<b>7</b>
3.1 Introducción: sobre la dimensión del problema y su relevancia	7
3.2 Los significados de las fracciones y su comprensión	8
3.3 La complejidad didáctica de las fracciones	11
3.4 Errores y sus causas en la comprensión y operación de fracciones	15
<b>4 METODOLOGÍA</b>	<b>21</b>
4.1 Participantes	21
4.2 Infraestructura y materiales	22
4.3 Procedimiento	22
4.3.1 Diseño de los ejercicios	23
4.3.2 Categorización de errores	25
4.3.3 Descripción de los ejercicios y criterios de evaluación	28
4.3.3.1 Filtrado de ejercicios por curso	28
4.3.3.2 Apartado 1: identificación de fracciones a partir de figuras	29
4.3.3.2.1 Corrección y evaluación	30
4.3.3.2.2 Errores esperables	31
4.3.3.3 Apartado 2: ordenación de fracciones	31
4.3.3.3.1 Corrección y evaluación	32
4.3.3.3.2 Errores esperables	32
4.3.3.4 Apartado 3	33
4.3.3.4.1 Corrección y evaluación	34
4.3.3.4.2 Errores esperables	34
4.3.3.5 Apartado 4	35
4.3.3.5.1 Corrección y evaluación	36
4.3.3.5.2 Errores esperables	36
4.3.3.6 Apartado 5	36

4.3.3.6.1 Corrección y evaluación	37
4.3.3.6.2 Errores esperables	37
4.3.4 Diseño de la hoja de pruebas	38
4.4 Análisis de los datos	39
<b>5 RESULTADOS</b>	<b>41</b>
5.1 Apartado 1: resultados agregados de los distintos cursos	41
6.2 Resultados por ejercicio	44
6.2.1 Ejercicio 1.a	44
6.2.2 Ejercicio 1.b	45
6.2.3 Ejercicio 1.c	47
6.2.4 Ejercicio 2.a	48
6.2.5 Ejercicio 2.b	51
6.2.6 Ejercicio 3.a	53
6.2.7 Ejercicio 3.b	54
6.2.8 Ejercicio 3.c	55
6.2.9 Ejercicio 4.a	55
6.2.10 Ejercicio 4.b	56
6.2.11 Ejercicio 4.c	57
6.2.12 Ejercicio 5.a	58
6.2.13 Ejercicio 5.b	59
6.2.14 Ejercicio 5.c	60
6.3 Resultados por tipo de error	61
<b>7 DISCUSIÓN</b>	<b>64</b>
7.1 Análisis general de la situación a través de los resultados	64
7.2 Análisis de los errores más frecuentes y sus posibles causas	66
7.3 Propuesta de una clasificación práctica de errores	70
7.4 Propuesta de mejora	71
<b>8 CONCLUSIONES</b>	<b>73</b>
<b>9 REFERENCIAS</b>	<b>75</b>

<b>Apéndice A - Test empleado para la investigación</b>	<b>77</b>
1go ariketa	77
2. ariketa	78
3. ariketa	79
4. ariketa	80
5. ariketa	81
<b>Apéndice B - Temario por curso (Primaria) en Lauaxeta Ikastola</b>	<b>82</b>

## 1 INTRODUCCIÓN

Como estudiante de profesor de matemáticas para secundaria, mientras realizaba prácticas en un centro de enseñanza secundaria, se me planteó la posibilidad de realizar una investigación: en el centro estaban preocupados porque sus alumnos de primaria y secundaria recibían clases sobre fracciones durante al menos 6 cursos y, sin embargo, los alumnos de cursos superiores seguían teniendo importantes problemas con las fracciones.

Según los docentes de matemáticas del centro existían múltiples motivos para su preocupación. Por un lado, el principal motivo, estaba el hecho de que alumnos de bachillerato aún tuvieran problemas para operar y comprender las fracciones conceptualmente. Por otro lado, tenían la impresión de que los alumnos terminaban el ciclo de primaria con un mejor manejo de las fracciones que el que tenían los de secundaria.

Los docentes buscaban explicaciones para ambos problemas. En su opinión, el alumnado olvidaba lo aprendido de un año para otro. Si fuera así, sin embargo, no veían una explicación de por qué esto parecía afectar particularmente a las fracciones. Tenían constancia de que esto es algo que efectivamente ocurre, pero se da con todas las áreas de las matemáticas. Y el problema parecía más pronunciado con las fracciones. Respecto al nivel de salida de los alumnos de primaria, su deducción era que estos alumnos reciben otro tipo de formación; con más ejemplos, diagramas, apuntes elaborados por el propio centro, y un especial énfasis en la comprensión de las propias fracciones. Todo esto podría estar facilitando la comprensión de las fracciones durante dichos cursos. Pero el olvido interanual podría ser la explicación de que, a medida que avanzaban los cursos, los alumnos olvidaran parcialmente sus conocimientos. Además, las explicaciones de refuerzo en secundaria no estaban tan centradas en la conceptualización más básica de las fracciones que es lo que ayuda, en definitiva, a su comprensión.

Como se mostrará a lo largo del presente estudio, los problemas con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones son un tema conocido y recurrente. Antes de iniciar la investigación ya se puede predecir que esto no

es un problema específico del centro Lauaxeta sino que viene ocurriendo desde muy atrás (tal vez desde que se enseñan fracciones). Existen decenas de estudios en torno a esta temática.

Estos estudios resaltan, además, lo que los docentes del centro me transmitían: las fracciones son un conocimiento importante en las matemáticas puesto que sirven para comprender muchos otros conceptos y aparecen en sus distintos significados en múltiples áreas de las matemáticas.

Volviendo a la preocupación que me expresaron desde el centro, como yo tenía que realizar un Trabajo de Fin de Máster, decidí, junto con el centro y mi tutor de máster que sería interesante llevar a cabo una investigación acerca de la enseñanza-aprendizaje de fracciones en el centro. Así surgió la motivación para hacer este estudio que consiste en comprender mejor por qué los alumnos de secundaria, e incluso muchos de bachillerato, del centro Lauaxeta Ikastola tienen problemas al operar con fracciones.

Se trata de algo complejo de analizar puesto que existen muchos factores que pueden influir en este caso: la calidad de los materiales empleados, la metodología de enseñanza, el acierto o la disposición de los profesores al explicar el tema, el olvido de un año para otro de la materia y un largo etc. Este estudio ha servido como primer análisis de la realidad del centro y tal vez ayude a diseñar y aplicar medidas para la mejora de la enseñanza de fracciones. Es posible que con esa información se pueda avanzar en la investigación o incluso proponer algún cambio (didáctico, de materiales, etc.) basado en investigaciones previas al respecto.

En definitiva, lo que se buscaba es medir y clasificar cuáles son los errores que comete el alumnado a lo largo de los distintos cursos académicos. Con dicha información se pretende dilucidar si existen errores adquiridos en las primeras etapas y que se arrastran a lo largo de los cursos, si los errores son nuevos a medida que se enseñan nuevos conceptos y operaciones (por el aumento de la complejidad del tema) o si puede tratarse de errores inconexos entre cursos sin ningún patrón aparente.

Al analizar los datos, el estudio muestra que algunos errores persisten más que otros en el tiempo y son, precisamente, algunos de los más frecuentes. Siendo por ambas características que dichos problemas requieren de una especial atención. Se han mostrado indicios de problemas derivados de mecanismos docentes habituales (como el doble conteo o la equipartición) que obstaculizan el aprendizaje de otros conceptos (como la suma/resta de fracciones). Y por último se ha mostrado que los errores, como era de esperar, se van reduciendo progresivamente con el avance de los cursos. Aunque eso no significa que se reduzcan con suficiente celeridad.

La información arrojada por el estudio parece de evidente interés para el centro (y posiblemente para otros puesto que el problema es común) y se espera que pueda servir para enseñar mejor las fracciones, reduciendo la aparición de errores y acelerando su desaparición.



## **2 OBJETIVO**

El objetivo del presente trabajo de investigación es medir y analizar los errores cometidos por estudiantes de 4º de Educación Primaria hasta 2º de ESO en la realización de ejercicios y operaciones con fracciones, con el fin de ayudar a prevenir las dificultades con el concepto de fracción y sus operaciones asociadas.

Además, hay una serie de objetivos secundarios:

- Análisis y categorización de los tipos de error.
- Análisis cuantitativo de cada tipo de error.
- Análisis de la evolución de los errores a lo largo de los cursos.
- Proponer al centro posibles líneas de actuación para mejorar los resultados en la enseñanza de fracciones



### **3 MARCO TEÓRICO**

#### **3. 1 Introducción: sobre la dimensión del problema y su relevancia**

Las fracciones son una de las áreas de las matemáticas que más problemas presentan en la enseñanza-aprendizaje. Se trata de un asunto que ha despertado interés en la comunidad académica desde hace décadas, pero que también se traslada o, más bien, tiene su origen en las aulas e instituciones públicas. Mucho se ha estudiado acerca de la enseñanza de las fracciones y sin embargo, como apuntan Cortina et al. (2013), los estudiantes siguen presentando graves problemas en el aprendizaje de las fracciones y poco se ha consensuado respecto a lo que se debe hacer para mejorarlo.

Diversos autores han estudiado esta idea desde distintos puntos de vista: Olkun S. y Toluk-Uçar Z. (2007) (como se citó en Aliustaoğlu et al., 2018) señalan que el concepto de fracción es más difícil para los estudiantes que muchos otros temas del currículo y es conocido que les resulta muy difícil la comprensión de las fracciones como número y cómo operar con ellas.

Las dificultades en el aprendizaje de fracciones están ampliamente extendidas. Esto es particularmente preocupante debido a la importancia de las fracciones a la hora de comprender y conseguir destreza en otras áreas matemáticas así como por su extenso uso en la vida diaria. Las fracciones están relacionadas con las proporciones, porcentajes, razones y ratios, son una operación común en múltiples áreas de la matemática y de uso habitual en otras áreas de la ciencia (física, química, estadística...). Aparecen, además, en nuestro día a día en la probabilidad, en las tasas de interés bancario, los prorrateos de sueldos y facturas, e innumerables otros casos igualmente comunes y relevantes para la vida diaria.

De hecho, autores como Mazzoco y Devlin (2008, como se citó en Hansen et al., 2015) concluyen que los alumnos con problemas de comprensión de las fracciones tienen mayores dificultades para el aprendizaje de las matemáticas posteriormente. De acuerdo con la NMAP (National Mathematics Advisory Panel, 2008, como se citó en Hansen et al., 2015) y Siegler et al. en 2012 (como se citó en Hansen et al., 2015), el dominio de las fracciones ayuda a los

estudiantes a tener éxito en álgebra, que sirve de pasarela para las profesiones del ámbito STEM.

Debido a su relevancia, existe una extensa literatura que estudia las fracciones y su enseñanza y aprendizaje. Algunos se han centrado en la complejidad de su enseñanza, o en las dificultades del alumnado para el aprendizaje. Otros autores han analizado el concepto en sí de las fracciones, deteniéndose en analizar y clasificar sus múltiples significados. Muchos otros autores han abordado el estudio de los errores más comunes que se cometen por parte de los estudiantes. También hay una amplia literatura que estudia el propio proceso cognitivo de aprendizaje de las fracciones e incluso llegan a hacerse propuestas sobre herramientas didácticas.

### **3.2 Los significados de las fracciones y su comprensión**

Al contrario de lo que intuitivamente uno podría llegar a pensar, las fracciones no son un concepto matemático particularmente antiguo. Su conceptualización es relativamente reciente y la herramienta operativa (su notación y propiedades) lo son aún más.

En la cultura clásica griega, que fue tan prolífica y referente o incluso punto de inicio de muchas áreas de la matemática, existía aún una diferenciación, como señala Obando (2003), entre la unidad aritmética y la geométrica; la primera se refería a las cantidades y estaba muy ligada a lo discreto, a lo contable y era indivisible. Por otro lado, la unidad geométrica era relativa a la medida de lo continuo y como tal .

Esta diferencia entre unidades discretas y continuas es particularmente significativa en el caso de las fracciones. Las fracciones pueden representar porciones o partes de un todo discreto (3 canicas de un conjunto de 10) o continuo ( $\frac{3}{4}$  de Kg de merluza). Estas concepciones, para una persona que ya domina las fracciones (a menudo a base de usarlas en el día a día, pero sin tener un conocimiento teórico-operativo necesariamente alto), están muy interiorizadas y parecen fáciles, casi intuitivas. Sin embargo, no es así para quien lo está aprendiendo.

La unificación en la cultura occidental de estos tipos de unidades para convertirlas en una sola, abstracta y aplicable a cualquier tipo de situación, polisémica al fin y al cabo, se da en el s. XVI, de la mano de Simón Stevin que, de acuerdo con Obando (2003), busca un sistema de medición y conteo que ayude al creciente comercio en la Europa de la época. Así, se desarrollan una serie de herramientas aritméticas, se potencia el uso de los decimales y se establecen sistemas de medida con decimales (precursores del Sistema Internacional), lo cual propicia la unión de facto de esos dos tipos de unidades antes separados. Es decir, la polisemia de las fracciones no es algo natural e innato que sepamos intuitivamente, sino algo que durante mucho tiempo estuvo separado en cuanto a que había distintos tipos de unidad y unificarlas es una decisión con sentido pero arbitraria.

En definitiva, este pequeño e incompleto repaso histórico, sirve a Obando (2003) para justificar el hecho de que para comprender las fracciones (la divisibilidad de la unidad) es necesario interiorizar y fundamentar bien los conceptos de unidad discreta y continua, de conteo y medida, de cantidad y magnitud. Concluye también que esa relación entre el comercio y la aritmética, la aproximación práctica, es muy útil para abordar la comprensión de las fracciones.

Esa explicación histórica nos sirve para explicar la polisemia de las fracciones y su relación con el tipo de unidad a la que se refiere, así como lo reciente de la herramienta matemática en sí. Sin embargo, su novedad relativa no es obstáculo para que la fracción posea muchos más significados y se pueda entender de diversas formas. Tanto es así que diversos autores han estudiado posibles clasificaciones de los significados de la fracción. En su artículo "Significados y significantes relativos a las fracciones", Mancera (1992) recoge y cita las clasificaciones hechas por Dienes (1972), Kieren (1976, 1981 y 1988), Streefland (1978), Hart (1981), Rasimba-Rajohn (1982), Freudenthal (1983), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Borasi y Michaelsen (1985), Post, Behr y Lesh (1986) y Ohlsson (1988). Y estos son solo algunos ejemplos.

En este artículo de Mancera (1992) queda a la vista la enorme complejidad que supone definir todos los posibles significados de las fracciones. A modo

ejemplos, en 1976, Kieren (como se citó en Mancera, 1992), define 7 posibles significados o usos para las fracciones, y en 1983 Bher et al. (como se citó en Mancera, 1992) hicieron lo propio con otros 7 significados. Es tal la variedad semántica de las fracciones que resulta difícil clasificarla.

Si nos fijamos solamente en los significados para las fracciones que se presentan a los estudiantes en sus primeros años de manejo de fracciones, estos son también variados. Las fracciones se presentan a veces como una relación parte-todo (porción del todo que representa la parte), como una partición o fractura de un todo del que se toman partes, como números decimales o como proporciones entre números. En este sentido, Llinares y Sánchez en 1997 (como se citó en Pruzzo de Di Pego, 2012) proponen que se enseñen las fracciones en todas estas acepciones:

- a.- La fracción como un todo dividido en partes y sus relaciones ( $\frac{3}{4}$  de la barra de chocolate);
- b.- la fracción como cociente (dividir tres barritas entre cuatro personas, es decir  $3 \div 4$ ).
- c.- la fracción como razón;
- d.- la fracción como operador.

En definitiva, la polisemia de las fracciones es algo conocido y patente desde las primeras enseñanzas, pero que no puede definirse de una sola manera. Así pues, no es de extrañar que se trate de un concepto difícil de enseñar y de aprender.

Otro de los obstáculos mencionados por varios autores para la comprensión de las fracciones es el propio aprendizaje de los números enteros. Cortina et al. (2013) citan a varios autores (Streefland, 1991; Post et al., 1993; Kieren, 1993) que defienden que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales. A modo de ejemplo, las reglas aritméticas aprendidas para los números naturales (suma, resta, división, multiplicación) no sirven para las fracciones. También ocurre que al dividir un número entero por otro este se vuelve más pequeño y al multiplicarlo más grande; algo que no ocurre con las fracciones.

Finalmente, autores como Gould (2005) también mencionan que la representación elegida para las fracciones no ayuda a su comprensión; se trata de 2 números enteros, el numerador y el denominador. Por ejemplo, prosigue, algunos estudiantes entienden  $3/7$  como 3 partes de 7 posibles lo que hace totalmente inviable la existencia de  $7/3$ .

### 3.3 La complejidad didáctica de las fracciones

La enseñanza de las fracciones no está exenta de dificultad. No solamente la polisemia y homonimia mencionadas son un problema, sino también su notación o la diversidad de unidades a las que se pueden aplicar las fracciones (discretas, continuas, definidas, indefinidas...) o incluso las propias estrategias y herramientas didácticas empleadas para su enseñanza.

Mancera (1992) hace referencia a esto último mencionando los diversos modelos que se pueden emplear para su enseñanza como se muestran en la Tabla 1. Tanta variedad de todos y partes a los que se puede aplicar el concepto de fracción con diversas concepciones del propio significado de fracción, hacen difícil la enseñanza del concepto.

**Tabla 1**

*Modelos de referencia que se pueden emplear para explicar fracciones.*

Tipos de todos	Tipos de partes	Dimensionalidad geométrica
Discreto	Discreta	Unidimensional
Continuo	Continua	Bidimensional
Definido	Definida	Tridimensional
Indefinido	Indefinida	
Estructurado	Estructurada	
No estructurado	No estructurada	

López et al. (2017) señalan que los estudiantes ya llegan con nociones relacionadas con las fracciones a sus primeras lecciones en el colegio y, dice también, que múltiples investigaciones han evidenciado que la mejor forma de

aprender es mediante la construcción del conocimiento propio; dando sentido a lo que se hace, manipulando diversas representaciones e implicándose personalmente el estudiante en el proceso.

Hablando de la didáctica, Gould (2005), explica cómo uno de los principales métodos de enseñanza de fracciones, los estudiantes aprenden a dividir objetos en partes iguales; a continuación, aprenden a contar el número de partes de interés (o partes tomadas) y colocar el resultado de dicho conteo sobre el total de partes.

En esta misma línea, previamente, Kieren (1988, como se citó en Gould, 2005) dice que los modelos parte-todo de las fracciones permiten crear un lenguaje de fracciones con el que tanto profesores como libros de texto orientan a los estudiantes a una concepción de las fracciones de doble cuenta. Kieren continúa añadiendo que los jóvenes son capaces de responder correctamente a algunas operaciones habiendo desarrollado, sin embargo, un modelo mental inapropiado (partes de un todo), en lugar de una potente medida de inclusión (comparación con la unidad). Es decir, algunos de los mecanismos empleados en la enseñanza llevan a los estudiantes a crear concepciones limitadas de las fracciones basadas en mecanismos de cálculo en lugar de abstracciones generalistas.

Una de las formas en que se introduce a los estudiantes a las fracciones es mediante la partición de figuras. Concretamente se hace mediante la representación de figuras fácilmente divisibles en partes iguales (círculos y rectángulos primordialmente). Este mecanismo de introducción a las fracciones no está exento de opiniones encontradas.

Cortina et al. (2013) defienden que la enseñanza basada en la equipartición es un obstáculo para el aprendizaje. Obstáculo en el sentido de obstáculo didáctico como lo define Brousseau (1997, como se citó en Cortina et al., 2013); un obstáculo por el que aprender las fracciones de esa manera dificulta el aprendizaje posterior de conceptos más complejos sobre las fracciones. Referenciando los trabajos de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) cita 3 aprendizajes de los estudiantes que pueden suponer un obstáculo en el futuro aprendizaje de fracciones: la fracción como transformación de un

objeto (donde una tarta es dividida en pedazos, el alumno concibe que para que separar  $\frac{2}{5}$  de una tarta, esta debe ser dividida irremediable e irreversiblemente en 5 pedazos iguales), la fracción como tanto de tantos (donde el numerador y el denominador representan el resultado de un conteo) y la fracción como una parte incluida en un entero (derivada de la anterior y que limita los posibles usos de las fracciones y sus valores).

En ese mismo trabajo, Cortina et al. (2013) mencionan a diversos autores (Mack, 1990; Kieren, 1993; Steffe y Olive, 2010; Pitkethly y Hunting, 1996; Confrey y Maloney, 2010) proponen este mecanismo de la equipartición como la única y más ventajosa herramienta didáctica para introducir a los estudiantes a las fracciones.

También es habitual el uso de la recta numérica como herramienta didáctica para la enseñanza de las fracciones. Fazio y Siegler (2010) recomiendan el uso de las rectas numéricas porque es “una manera eficaz de asegurar que los estudiantes entiendan que las fracciones son números con magnitudes, es utilizando rectas numéricas durante la instrucción.” (p. 10).

Uno de los problemas del aprendizaje de las fracciones se deriva de lo que Skemp (1978) denomina entendimiento instrumental; en referencia a que algunos estudiantes y profesores consideran que entender algo significa ser capaz de reproducir los pasos o utilizar las herramientas para llegar a la solución sin entender realmente el porqué o sin lo que él llama entendimiento relacional. Gould (2005) hace referencia a esto señalando que es un problema común en las enseñanza-aprendizaje de fracciones.

En opinión de Gould (2005), desarrollar un entendimiento instrumental es, a menudo, mucho más rápido y menos exigente cognitivamente que desarrollar un entendimiento relacional. En consecuencia, es más gratificante a corto plazo y ayuda a resolver los ejercicios más rápidamente. Gould se cuestiona qué motivo tendría un estudiante para esforzarse en conseguir un entendimiento relacional de las fracciones.

Skemp (1978) se cuestiona si el aprendizaje instrumental es intrínsecamente peor que el relacional. Él mismo argumenta que el entendimiento instrumental,

por lo general, requiere de aprender más normas específicas. Cualquier nueva variante o excepción requiere de nuevas normas. Mientras que el aprendizaje relacional permite aprender menos principios de más amplia aplicación.

En esta misma línea, Fazio y Siegler (2015) mencionan:

Por ejemplo, un estudiante podría dominar el conocimiento de los procedimientos para resolver problemas de división de fracciones, a través de la inversión del divisor y multiplicando el divisor invertido por el dividendo, pero a la vez puede carecer del conocimiento conceptual que explica por qué este procedimiento es matemáticamente justificado y por qué se produce el resultado obtenido.

Y también:

Niños que comprenden por qué un denominador común es necesario en la adición de fracciones, serán más propensos a recordar el procedimiento correcto que aquellos niños que no comprenden por qué los denominadores comunes son obligatorios. Por lo tanto, los docentes deben enfocarse en desarrollar la comprensión conceptual junto con la fluidez procedimental.

Hasemann (1981) corrobora esta; hablando de los distintos entendimientos que describió Skemp, dice que el entendimiento instrumental es de un orden inferior y, a menudo, ni siquiera considerado como entendimiento propiamente dicho. Pero que a veces es necesario aprender cosas sin entenderlas (acertadamente menciona como ejemplo el uso de la tecnología en el día a día). Opina que a la hora de aprender nuevos conceptos es habitual que sea necesario un aprendizaje instrumental acompañando al relacional/conceptual.

Hablando también de esto, Godino (2004) señala lo negativo del entendimiento instrumental pero justifica por qué los docentes tienden a adoptar ese tipo de enseñanza de conocimientos instrumentales o mecánicos:

1. Porque son fáciles de aprender. Son procesos mecánicos repetitivos.
2. Requieren menos conocimientos para interiorizarlos.
3. Producen éxitos aparentes a corto plazo.

Llinares y Sánchez (1997) y Pujadas y Eguiluz (2000, como fueron citados en Pruzzo de Di Pego (2012), critican la tendencia a enseñar las fracciones desde todas las perspectivas posibles. Mencionan cómo se muestra a los estudiantes los distintos significados de las fracciones (un todo dividido en partes, un cociente de reparto, una razón, un operador...) simultáneamente, con el agravante de que algunas de dichas concepciones tienen varias subdivisiones (como pueden ser las fracciones de unidades continuas frente a discretas) y esto dificulta la asimilación de conceptos.

Pruzzo de Di Pego (2012) continúa reflexionando, basándose en Llinares y Sánchez (1997), sobre la complejidad conceptual que se transmite a los alumnos:

“La compleja presentación de las fracciones se aumenta con esta enorme mezcla de conceptos, a la vez que desaparecen las antiguas categorías de números mixtos, fracciones propias e impropias porque se incluyen (todas juntas) como casos de fracciones. Además, se trabaja simultáneamente con números decimales, medidas de tiempo, capacidad, longitud, superficie, peso, volumen, etc.; las representaciones gráficas de las fracciones se complejizan con el uso de la recta numérica y con imágenes de figuras geométricas de todo tipo. Se les presenta también, la noción de fracción como cociente en contextos de reparto, en fin, una dispersión de casos, que complejiza la construcción del concepto, sin aportes a su consolidación.”

Hablando de operaciones como la división de fracciones, Gómez y Contreras (2009) opinan que de los muchos posibles algoritmos de división de fracciones, hay una tendencia a emplear el algoritmo de los productos cruzados o el de invertir y multiplicar, además, sin dar ningún contexto. Este hecho parece que pudiera facilitar los aprendizajes instrumentales.

### **3.4 Errores y sus causas en la comprensión y operación de fracciones**

Los errores que los estudiantes cometen al emplear fracciones y, más genéricamente, los errores en el aprendizaje de las matemáticas se han abordado por diversos autores desde distintos ángulos.

En su libro Fracciones, Llinares y Sánchez (Llinares y Sánchez, 1997) categorizan algunos errores comunes en el manejo y operación de fracciones:

- Errores en la noción de equivalencia de fracciones
- Errores en la adición o sustracción de fracciones
- Errores en la multiplicación y la división

En Fracciones, Llinares y Sánchez (1997) achacan la mayoría de los errores a la transición del manejo de los números naturales a las fracciones. Bien por su similar grafía como por transposición de las operaciones de los naturales a las fracciones (que utilizando los mismos símbolos no siguen las mismas reglas operativas).

Godino et al. (2004) hacen una clasificación de las causas de los errores y dificultades de aprendizaje en las matemáticas:

- Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos
- Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas
- Dificultades que se originan en la organización del centro.
- Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado
- Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos
- Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores. (pp. 74-78)

Este marco propuesto por Godino et al. (2004) es más amplio en cuanto que abarca a las matemáticas en general (y podría argumentarse que algunas de las dificultades afectan también a otras áreas del conocimiento), pero también aportan una visión interesante sobre las causas de los errores.

A la hora de hablar específicamente de los errores en las fracciones, Godino et al. (2004) redirigen al lector a la obra de Llinares y Sánchez.

Otro autor citado a menudo en la clasificación de errores es Egodawatte, en su obra "Secondary school students' misconceptions in Algebra" (Egodawatte, 2011), propone distintos tipos de error relacionados con las fracciones. Sin embargo siempre relacionados con el álgebra y la notación simbólica, no aritmética. Si bien algunas de sus propuestas son interesantes, no parecen

encajar completamente con una clasificación del aprendizaje de fracciones en sí.

De hecho, Egodawatte (2011) en su trabajo dice, citando a Radatz:

“[...] los errores de los estudiantes pueden categorizarse siguiendo las etapas de resolución de problemas. De acuerdo con Radatz, varias causas de error en matemáticas se pueden identificar examinando los mecanismos de obtención, procesamiento, retención y reproducción de la información en las tareas matemáticas. Estos son (1) errores debidos al procesado representaciones gráficas, (2) errores debidos a deficiencias en el dominio de habilidades, hechos y conceptos necesarios previamente, errores de asociación incorrecta of rigidez de pensamiento que deriva en una flexibilidad inadecuada para codificar y decodificar nueva información y en la inhibición del procesamiento de nueva información, y (4) errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes” (p. 36).

Por su parte, siguiendo con las clasificaciones, López et al. (2017) listan los errores típicos que cometen los alumnos según lo que ellos encuentran en la literatura: errores en la ordenación y comparación de fracciones, errores en las operaciones entre fracciones, a la hora de reconocer fracciones en diferentes esquemas, al entender y manipular la equivalencia, la simplificación etc.

Estos trabajos sirven como referencia para poder clasificar los errores cometidos por los estudiantes pero no terminan de ser suficientemente explícitos para la investigación que se ha planteado. Así, resulta necesario aprender más sobre los errores y por qué se cometen.

Para poder analizar las causas de los errores, es interesante atender a lo que dice Brousseau (1991), concretamente sobre su concepto de los obstáculos didácticos:

Los errores no son únicamente consecuencia de la ignorancia, la incertidumbre o el azar, como abrazaron las teorías del aprendizaje empiristas o conductistas, sino también el efecto del aprendizaje previo

de una pieza de conocimiento que era interesante y exitosa pero que se presenta ahora como falsa o simplemente inadecuada. (p. 82)

Esto lleva a pensar que no solo es necesario fijarse en los errores en sí sino en cómo se enseñan las fracciones, o cualquier otro conocimiento, puesto que se pueden emplear métodos y estrategias contraproducentes. Muchos de los errores pueden estar motivados por la didáctica empleada para explicarlas y no necesariamente por la dificultad propia de las fracciones.

En una aproximación más empírica, son frecuentes las referencias a los errores causados por la partición y conteo.

Pruzzo di Pego (2012) dice que “la doble o triple representación de la unidad por cada operación que se realiza con sus partes, se constituye en un obstáculo para que el alumno construya el concepto de fracción en su nivel básico, como relación parte-todo”. Es decir, explicar un reparto de una tableta de chocolate dibujando 2 tabletas, una con  $\frac{1}{4}$  sombreado y la otra con  $\frac{1}{2}$  sombreado para decir que se han repartido  $\frac{3}{4}$  dificulta una correcta conceptualización de la fracción, puesto que introduce un caso muy específico y poco generalizable de la concepción de fracción.

Chamorro (2003) citó a Ratsimba-Rajohn (1990) diciendo que la enseñanza de fracciones partiendo de la equipartición puede dificultar la interiorización de futuras concepciones sobre fracciones.

En esta misma línea, Cortina et al. (2013), advierten sobre la equipartición como método didáctico porque puede llevar a los alumnos a concebir “las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos”.

Enseñar las fracciones explicando que implican partes de un entero, según Fazio y Siegler (2010), dificulta que los niños entiendan que el concepto de fracción unidad o de fracciones impropias, llegando incluso a negar que  $\frac{4}{3}$  pueda existir puesto que nada que esté dividido en 3 trozos puede tener 4.

En un estudio acerca de la enseñanza de fracciones según Siegler presentado por Español (2017), se citan algunos errores conceptuales comunes a la hora de manejar fracciones:

- Considerar que  $6/18$  es más grande que  $1/2$  solo porque los números son mayores.
- Confundir las operaciones con fracciones con aquellas de los números enteros.
- No comprender que una fracción puede representarse de formas muy diversas.
- La tendencia a pensar que en un diagrama visual el todo representa el 1.
- Sumar o restar fracciones haciendo lo propio tanto con los numeradores como los denominadores.
- Buscar el denominador común en la multiplicación, como si de una suma se tratase.

Para abordar la investigación, resulta aclaradora la apreciación que hacen López et al. (2017) sobre las cosas a tener en cuenta a la hora de entender los errores cometidos: “a) las propiedades de las fracciones y los diferentes significados del concepto de fracción; b) los diferentes modelos empleados en la enseñanza, y c) el manejo operativo de la fracción.”



## **4 METODOLOGÍA**

La investigación se ha llevado a cabo en el centro Lauaxeta Ikastola, una cooperativa educativa situada en Amorebieta-Etxano, Bizkaia. En el centro se imparten todos los cursos desde infantil hasta bachillerato. La mayoría de los alumnos de 4º, 5º y 6º de primaria están en el centro desde 1º. Sin embargo, en 1º de secundaria entran 40 o 50 alumnos procedentes de otros centros cada año. En consecuencia, el historial formativo de los alumnos de secundaria es más variado que los de primaria. Esto implica que muchos alumnos de secundaria han recibido enseñanza sobre fracciones en otros centros y con otras metodologías docentes e incluso otras técnicas y materiales. El centro Lauaxeta Ikastola emplea una metodología de aprendizaje basado en proyectos. Se aplica desde primaria, incluidas las matemáticas. No emplean libros sino apuntes producidos por los propios docentes del centro.

La investigación se ha realizado en junio de 2022, en la última semana lectiva, asegurándose así que todo el contenido de fracciones ha sido impartido en todos los cursos participantes en la investigación.

### **4.1 Participantes**

La investigación se ha llevado a cabo en los cursos 4º, 5º y 6º de Educación Primaria y, 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria. En los cursos de primaria han participado 3 aulas por curso, el total disponible, sumando un total de 3 aulas. En secundaria se ha limitado a dos aulas por curso. El centro tiene una diferenciación por capacidad durante la secundaria, de manera que existen aulas de matemáticas avanzadas; para la investigación, se han elegido un aula normal y una de matemáticas avanzadas de cada curso de la ESO. La Tabla 2 muestra un resumen de los participantes.

**Tabla 2**

*Aulas y alumnos participantes en la investigación.*

	4º Prim.	5º Prim.	6º Prim.	1º ESO*		2º ESO		TOTAL
				Normal	Avanzado	Normal	Avanzado	
Aulas	3	3	3	1	1	1	1	13
Alumnos	71	76	71	-	-	16	27	263

Los test realizados a los alumnos de 1º de ESO se perdieron posteriormente a la realización del mismo y por motivos de tiempo, encaje con el calendario lectivo y evitar incomodar nuevamente al alumnado con una prueba, se decidió no repetir la prueba. Además, es posible que repitiendo la prueba los resultados hubieran sido diferentes.

#### **4.2 Infraestructura y materiales**

Para llevar a cabo el test de nivel de conocimiento de fracciones, se han empleado unas hojas de ejercicios preparadas al efecto. No ha sido necesario emplear ningún otro material, más allá de los útiles de escritura del alumnado. Por supuesto, dada la naturaleza de los tests, se ha prohibido explícitamente el uso de calculadora en aquellos cursos donde ya ha sido introducida a los estudiantes.

El test al completo está disponible para su consulta en el Apéndice A. El test está redactado en euskera que es el idioma que se emplea en el centro.

En cuanto a la infraestructura, las pruebas se han realizado en las propias aulas del centro Lauaxeta.

#### **4.3 Procedimiento**

La investigación está centrada en medir la tipología de errores conceptuales y aritmético-operativos cometidos por el alumnado al trabajar con fracciones. Para ello, se ha diseñado un test que pretende enfrentar al estudiantado a los

ejercicios de concepto y de operación definidos por Aliustaoğlu et al. (2018). Estos consisten en 1) la concepción de la fracción como relación parte-todo, 2) la comparación de fracciones entre sí y 3) las operaciones con fracciones. En ese mismo trabajo también se estudian los errores de representación de fracciones en la recta real; sin embargo, esto es algo que no se enseña en el centro Lauaxeta Ikastola, como se ha podido comprobar en sus apuntes docentes (índice de temas de primaria disponible en el Apéndice B), ni está recogido explícitamente en el currículo para primaria ni secundaria del Gobierno Vasco (Consejería de Educación, Política Lingüística y Cultura, 2015).

El test consiste en 5 pruebas relacionadas tanto conceptos como operaciones con fracciones. Cada una de las pruebas se ha diseñado con el objetivo de aislar, en la medida de lo posible, un concepto u operación con fracciones que los estudiantes deben conocer de acuerdo al currículo, con el fin de ver si lo comprenden bien o, por el contrario, si cometen errores y de qué tipo.

Para la clasificación de errores, se ha hecho una primera corrección preliminar identificando los tipos de errores concretos. Estos se han empleado para hacer una clasificación flexible que permitiera incorporar nuevos elementos a la misma de forma dinámica. Una vez hecha la corrección preliminar y generado el modelo de clasificación, se ha validado la corrección mediante triangulación y se ha procedido a la corrección y clasificación de errores del conjunto de tests al completo.

#### *4.3.1 Diseño de los ejercicios*

La de las fracciones es un área muy estudiada y con muchas ramificaciones. Esto es a la vez una ventaja y una desventaja al plantear un nuevo estudio; por un lado existen muchos precedentes en los que apoyarse y con los que establecer un marco de trabajo para la investigación. Pero también supone un problema debido a las múltiples facetas que se pueden abordar y las distintas direcciones que puede tomar el estudio, por no mencionar el riesgo de abordar un ámbito demasiado extenso.

Debido a lo extenso de la literatura y a las múltiples facetas que se pueden abordar, la opción elegida ha sido la de buscar estudios similares y elegir aquel que más adecuado parecía para el objetivo de éste. Esto permite acotar el alcance de la investigación, que por el contrario podría haber sido demasiado amplia.

Los ejercicios seleccionados para la investigación están basados directamente en los empleados por Aliustaoğlu et al. (2018); sin embargo se han hecho algunas modificaciones.

El principal cambio radica en la eliminación del ejercicio en que se pedía al alumnado que colocaran unas fracciones en la recta de los números reales. Como este tipo de conocimiento no se exige en el currículo del País Vasco, no es impartido como tal en el centro Lauaxeta y, por tanto, no tendría sentido pedir dicho ejercicio al alumnado.

Aparte de eso, se han hecho algunas modificaciones a los valores de los ejercicios y pequeños cambios (principalmente en los gráficos) para poder hacerlos con las herramientas de que se disponía.

El diseño de los ejercicios, en su versión original de Aliustaoğlu et al. (2018) así como en la adaptación para este estudio, busca que sirvan para sacar a la luz razonamientos conceptuales incorrectos así como mecanismos de operación erróneos. Cada subapartado trata de minimizar los conocimientos necesarios para resolverlos, de manera que las causas de error provengan, en la medida de lo posible, del mínimo número de problemas conceptuales posibles. Sin embargo, esto no es fácil y probablemente sea una de las áreas de mejora para futuras investigaciones. Como se verá en los resultados y la discusión, algunos ejercicios arrojan resultados ambiguos o difíciles de clasificar. Al fin y al cabo, no solo influye el conocimiento de los estudiantes sino también su forma de expresarse, algo que ha marcado mucho la corrección de los ejercicios.

Otro factor que se ha tenido en cuenta en el diseño del test ha sido el número de ejercicios correctos o incorrectos presentados al alumnado. Algunos de los ejercicios están resueltos y la estudiante solo ha de decir si es correcto o

no; el total de subapartados de este tipo es de 9, de los cuales 7 son incorrectos. El ratio elegido es similar al empleado por Aliustaoğlu et al. (2018).

También se han tenido en cuenta los errores más habituales que cometen los alumnos. Para ello se ha elaborado una lista basándose en la experiencia del autor y del tutor del centro universitario así como de los docentes del centro Lauaxeta Ikastola.

#### *4.3.2 Categorización de errores*

Se trata de una parte fundamental del procedimiento puesto que nos permitirá analizar los datos de forma coherente con un sistema y extraer información útil. La clasificación de los errores determina el carácter del análisis a realizar puesto que la información que se puede extraer es tan genérica o específica como la categorización que se haga.

Para la investigación se buscaba en la literatura previa un modelo que permitiese medir y clasificar los errores cometidos por los estudiantes, comprender sus causas y ver su evolución. Sin embargo, en las obras consultadas no se ha encontrado un modelo que satisfaga dichos intereses. Entre otras cosas se buscaba un modelo de clasificación que tuviera en cuenta las causas de los errores y la manifestación de los mismos; además debía ser muy sencillo de extender si aparecían errores no esperados y práctico para poder clasificar rápidamente miles de ejercicios corregidos. Esto es particularmente relevante teniendo en cuenta que no se ha realizado solamente de una corrección y medición cuantitativa sino que también existe un campo de respuesta abierto a la explicación.

Por ello, se ha diseñado un modelo de clasificación de errores al uso, basado en el marco teórico consultado y que cumpliera con los requisitos de esta investigación. En la Tabla 3 se muestra una relación de errores y categorías resultantes.

**Tabla 3***Clasificación de errores por tipo.*

Código	Nombre	Descripción
E0	Error de diseño	Causados por un planteamiento ambiguo del ejercicio.
E1	Error inevitable	Cometidos por despiste, distracción, aleatorios.
E2	Error de mecánico	Cometidos al seguir un procedimiento correcto de forma incorrecta.
E3	Error conceptual	Muestran un desconocimiento del concepto en cuestión o una mala comprensión del mismo.
E4	Error por obstáculo didáctico	Cometidos por emplear mecanismos aprendidos pero que no son válidos para el caso general.
E5	Error por obstáculo epistemológico / de conocimiento	Cometidos por desconocer saberes previos o por no comprender lo que se pide.
O	Otros	Errores no categorizados o inexplicables/incomprensibles.

Se han ordenado por relevancia según el criterio del autor. Los errores de diseño (E0) no son necesariamente achacables al estudiante sino más bien al profesor.

Los errores inevitables (E1) son aquellos que ocurren de forma aleatoria, por despiste. Por ejemplo, que el alumno o la alumna cuente mal o copie mal un dato. Los errores mecánicos (E2) son similares pero cuando el estudiante está llevando a cabo un procedimiento mecánico o una operación y comete un error por no conocerlo o recordarlo con precisión; un ejemplo es el cálculo de denominador común para comparar fracciones.

Los errores conceptuales (E3) recogen situaciones donde el estudiante demuestra que no entiende el concepto teórico en cuestión. Por ejemplo, no sabe qué son las fracciones equivalentes y por tanto no sabe que puede simplificarlas.

Los errores por obstáculos didácticos (E4) se refiere a aquellos errores que el alumnado comete por seguir un procedimiento que se les enseñó para

facilitar la comprensión de algún concepto pero que son intrínsecamente incorrectos, no aplican en todos los escenarios (son específicos, no generales) o conducen al estudiante a adquirir concepciones incorrectas. Son particularmente graves porque llevan emparejado una falta de comprensión conceptual con una confusión procedimental enseñada desde fuera. En este caso se podrían citar los errores cometidos por la concepción de las fracciones como un doble conteo de partes sombreadas y blancas.

Los errores por obstáculos de conocimiento (E5) son aquellos cometidos por desconocer conceptos previos necesarios para comprender los actuales (las fracciones). Por ejemplo, estudiantes que no saben representar una fracción o no saben dividir. Estos son errores preocupantes puesto que pueden indicar un nivel cognitivo o de conocimientos insuficiente para la materia.

Por último está el apartado de otros errores (Ot) para aquellos errores que no encajan en ninguna categoría de las anteriores o no se puede explicar dónde está el error o su origen.

Se prestará especial atención a los errores de tipo E2, E3 y E4. Ya que los errores E0 y E1 no son necesariamente debidos a problemas con las fracciones. Los errores E5 se espera que sean poco frecuentes y su problemática, nuevamente, trasciende la enseñanza de las fracciones. Finalmente los otros errores también serán considerados secundarios salvo aquellos que se considere interesante resaltar por alguna particularidad.

Cada categoría de error arriba listada puede acoger múltiples errores diferentes. La Tabla 4 recoge el catálogo de errores por categoría.

#### **Tabla 4**

##### *Catálogo de errores por categoría según su manifestación.*

Tipo	Código	Descripción
E0	dia	Considera el diagrama como 2 partes de un todo
E0	nos	No comprende que se trate de una suma de fracciones
E1	cal	Errores de cálculo o copia
E2	inv	Invierte el numerador y el denominador
E2	mt	Multiplica numerador y denominador ( $a \cdot b/c = ab/ac$ )

Tipo	Código	Descripción
E2	div	No conoce el mecanismo de división de fracciones
E2	mul	No conoce el mecanismo de multiplicación de fracciones
E3	imp	No comprende que las fracciones impropias $> 1$
E3	sim	No sabe simplificar o no identifica cuándo
E3	est	Dificultades por presentar la información no estructurada
E4	nsb	Coloca las sombreadas en el numerador y las blancas (no el total) en el denominador
E4	tam	No identifica que si las partes no tienen el mismo tamaño, la proporción cambia
E4	for	No identifica la diferencia de proporción cuando se corta irregularmente una figura no habitual
E4	itam	Solo aplica la igualdad de tamaños en el numerador
E4	dis	Ordena basándose en la distancia del numerador al denominador (similar a la cercanía a la unidad)
E4	ordg	Ordena solo por denominador: si es grande, trozos pequeños
E4	ordp	Ordena solo por denominador: si es grande, el todo es mayor
E4	ornum	Ordena solo por el numerador
E4	st	Suma denominador y numerador
E5	snum	Solo suma el numerador y elimina el denominador
O	otros	Otros (conceptos extraños, explicaciones incomprensibles...)

### 4.3.3 Descripción de los ejercicios y criterios de evaluación

#### 4.3.3.1 Filtrado de ejercicios por curso

El test consiste en 5 apartados con un total de 14 ejercicios en total. Sin embargo, no todos los participantes son del mismo curso y no tienen los mismos conocimientos de fracciones por lo que se han hecho 2 modelos de test.

Los apartados 1 a 4 se han diseñado para que los puedan resolver los estudiantes de todas las edades. El apartado 5 está diseñado en exclusiva para el alumnado de secundaria puesto que en primaria aún no conocen la división de fracciones. Esta selección se ha hecho teniendo en cuenta los apuntes didácticos del centro (ver Apéndice B).

Debido a diversos factores (pérdida de material y errores logísticos) finalmente se ha limitado la planificación inicial. Los alumnos de primaria solo

han completado los 3 primeros apartados. Los de 1º de secundaria ninguno y los de 2º de secundaria todos. La Tabla 5 muestra qué ejercicios ha hecho cada grupo o aula de estudiantes.

**Tabla 5**

*Relación de ejercicios realizados por cada grupo de estudiantes.*

	4º Primaria	5º Primaria	6º Primaria	1º ESO	2º ESO
Apartado 1	x	x	x	-	x
Apartado 2	x	x	x	-	x
Apartado 3	x	x	x	-	x
Apartado 4	-	-	-	-	x
Apartado 5	-	-	-	-	x

#### 4.3.3.2 Apartado 1: identificación de fracciones a partir de figuras

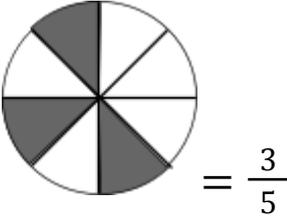
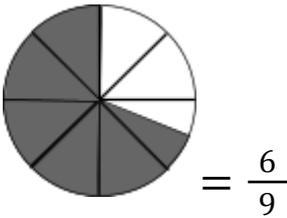
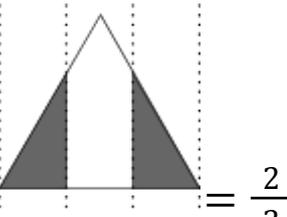
El primer ejercicio consiste en unos dibujos de figuras divididas en partes, algunas sombreadas y otras no. Cada figura está igualada a una fracción que se supone que representa la proporción entre partes sombreadas y el total.

En este apartado se plantean 3 ejercicios con distintas representaciones (Figura 1) para medir si el alumnado entiende qué representa una fracción con respecto a una figura que representa un todo. El alumnado debe responder si la igualdad es correcta y explicar su razonamiento.

## Figura 1

### Primer apartado de ejercicios.

---

a		<p>Se muestra un círculo dividido en 8 con 3 partes sombreadas. Sin embargo la disposición no es estructurada (Freudenthal 1983, como citó Mancera, 1992).</p> <p>A esto se une la igualación a <math>\frac{3}{5}</math> que resultaría de poner en el numerador las partes sombreadas y en el denominador las no sombreadas. Esto sería un error derivado del conteo doble.</p> <p>Se trata de un error poco frecuente en el estudio de Aliustaoğlu et al. (2018)</p>
b		<p>Este ejercicio pretende medir si los alumnos han interiorizado que si las partes de una división no son iguales, entonces el método del doble conteo no sirve.</p> <p>En este caso, uno de los sectores sombreados es la mitad que los demás, con lo que la respuesta correcta no es <math>\frac{6}{9}</math> sino <math>\frac{11}{16}</math>.</p>
c		<p>Las zonas sombreadas tampoco tienen el mismo tamaño que la no sombreada (son algo menos de la mitad); por tanto el resultado es incorrecto.</p> <p>En este caso los alumnos deben ser capaces de ver las proporciones a pesar de no emplear una forma habitual (círculo/rectángulo).</p>

---

#### 4.3.3.2.1 Corrección y evaluación

En el 1.a solo se considerarán correctas aquellas respuestas que respondan que el resultado es incorrecto y expliquen correctamente por qué o aporten en la explicación el resultado correcto.

En el 1.b se consideran correctas aquellas respuestas que den por incorrecto el resultado y expliquen de alguna manera que hay tamaños de distintas fracciones y no corresponden a  $\frac{6}{9}$ .

En el 1.c se consideran correctas aquellas que, además de identificar como incorrecto el resultado, expliquen que las fracciones no son iguales.

#### 4.3.3.2 Errores esperables

En este ejercicio se esperan encontrar los errores descritos en la Tabla 6.

**Tabla 6**

*Relación de posibles errores esperados en el apartado 1.*

Tipo	Código	Descripción
E4	nsb	Coloca las sombreadas en el numerador y las blancas (no el total) en el denominador
E4	tam	No identifica que si las partes no tienen el mismo tamaño, la proporción cambia
E4	for	No identifica la diferencia de proporción cuando se corta irregularmente una figura no habitual)
E4	itam	Solo aplica la igualdad de tamaños en el numerador
E3	est	Dificultades por presentar la información no estructurada
O	otros	Otros (conceptos extraños, explicaciones incomprensibles...)

#### 4.3.3.3 Apartado 2: ordenación de fracciones

El segundo conjunto de actividades se refiere a la ordenación de fracciones. Es habitual que los alumnos aprendan a clasificarlos según el tamaño del denominador o del numerador (o que retengan solamente esa parte). También es común que calculen la distancia hasta la fracción unidad.

Son dos conjuntos de 3 fracciones desordenadas y el alumnado debe ordenarlos de menor a mayor, explicando a continuación el por qué de la respuesta. La Figura 2 muestra los ejercicios planteados y su motivación.

## Figura 2

### Ejercicios del apartado 2. Ordenación de fracciones

---

Ordena de menor a mayor	a	$\frac{1}{4}, \frac{7}{8} \text{ y } \frac{5}{16}$	En este caso es necesario utilizar el 16 como m.c.m (mínimo común múltiplo) y entonces la ordenación es sencilla.
Ordena de menor a mayor	b	$\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \text{ y } \frac{3}{3}$	Se espera que algunos alumnos los ordenen en base al numerador o denominador o con su distancia respecto a la fracción unidad.
Ordena de menor a mayor			Este ejercicio tiene una fracción propia, una unidad y una impropia. Se busca confirmar si comprenden bien el concepto o la regla de comparación entre fracciones.
			Habrán alumnos que apliquen mecanismos instrumentales (Gould 2005) en lugar de relacionales y otros que no comprendan las fracciones impropias.

---

#### 4.3.3.3.1 Corrección y evaluación

Se consideran correctas aquellas respuestas que han ordenado bien las fracciones (tengan explicación o no). Pero también aquellas que siguiendo un procedimiento acertado (mínimo común denominador, aproximación a la unidad etc.) hayan cometido algún error de cálculo, dando una respuesta incorrecta a pesar de comprender cómo comparar fracciones. Esto se debe a que no se está evaluando la capacidad de cálculo del alumnado sino su comprensión conceptual y operativa de las fracciones.

#### 4.3.3.3.2 Errores esperables

En este ejercicio se esperan encontrar los errores descritos en la Tabla 7.

**Tabla 7**

---

Tipo	Código	Descripción
E1	cal	Errores de cálculo o copia
E3	imp	No comprende que las fracciones impropias $> 1$
E4	dis	Ordena basándose en la distancia del numerador al denominador (similar a la cercanía a la unidad)

---

Tipo	Código	Descripción
E4	ordg	Ordena solo por denominador: si es grande, trozos pequeños
E4	ordp	Ordena solo por denominador: si es grande, el todo es mayor
E4	ornum	Ordena solo por el numerador
O	otros	Suma denominador y numerador (ST)

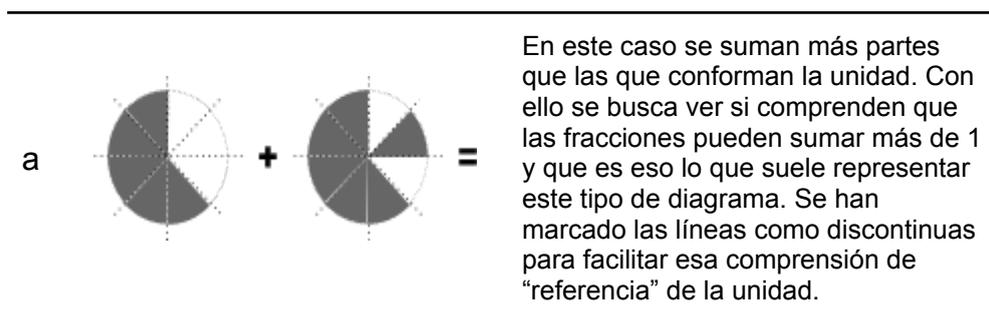
#### 4.3.3.4 Apartado 3

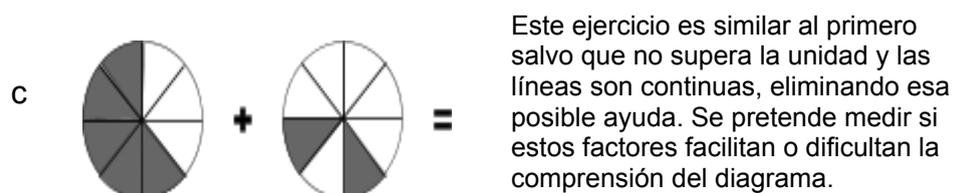
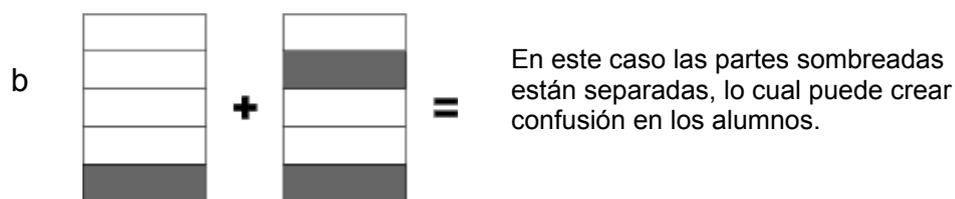
En el tercer ejercicio se mide la capacidad de sumar fracciones expresadas de forma gráfica. Se trata de un tipo de operación compleja puesto que implica una comprensión abstracta de los diagramas. No se trata de 2 unidades divididas en trozos iguales de los que se toman algunos, sino que se trata de trozos iguales de una unidad del mismo tamaño utilizada 2 veces como referencia. Este es un tipo de representación habitual en los libros de texto y que crea ciertas dificultades añadidas y así aparece en varios ejemplos de los materiales didácticos del centro.

Se trata de 3 operaciones gráficas de fracciones representadas en la Figura 3. Se pide al alumnado que calcule el resultado y lo explique razonadamente.

#### Figura 3

*Apartado 3. Ejercicios de suma gráfica.*





#### 4.3.3.4.1 Corrección y evaluación

Este conjunto de ejercicios se evalúan todos igual y debe hacerse con especial atención. Por un lado, se trata de una “suma gráfica”; algo a lo que los estudiantes están acostumbrados por el tipo de ejercicios trabajados en el aula, pero que son, por diseño, ambiguas. En un dibujo, distintos alumnos y alumnas pueden interpretar cosas diferentes. Por ejemplo, uno puede entender que se trata de 2 figuras unitarias donde se nos muestra la partición para que se entienda el tamaño de los trozos (denominador) y cuántos se suman en cada miembro de la operación (numerador). Mientras que otra alumna podría suponer que hay 2 tartas divididas en un número de trozos de los cuales se toman los oscuros (o los claros, puesto que no se especifica). En este caso su razonamiento bien puede ser que en la primera suma se toman 11 trozos de 16 posibles.

Por otro lado, no todos los alumnos han dado explicaciones sobre su razonamiento, lo que dificulta diferenciar si efectivamente no comprenden la operación de suma de fracciones de igual denominador o si el problema es que el diagrama les evoca algo diferente a lo que el docente (en este caso el autor de la investigación) pretende representar.

#### 4.3.3.4.2 Errores esperables

En este ejercicio se esperan encontrar los errores descritos en la Tabla 8.

**Tabla 8***Listado de errores esperables en el apartado 3.*

Tipo	Código	Descripción
E0	nos	No comprende que se trate de una suma de fracciones
E0	dia	Considera el diagrama como 2 partes de un todo
E1	cal	Errores de cálculo o copia
E2	inv	Invierte el numerador y el denominador
E3	imp	No comprende que las fracciones impropias > 1
E4	st	Suma denominador y numerador
E4	nsb	Coloca las sombreadas en el numerador y las blancas (no el total) en el denominador
E5	snum	Solo suma el numerador y elimina el denominador
O	otros	Otros (conceptos extraños, explicaciones incomprensibles...)

#### 4.3.3.5 Apartado 4

El cuarto ejercicio empieza con las operaciones aritméticas. Concretamente con la suma de fracciones de igual denominador y la multiplicación de fracciones por un número natural o, de otra manera, calcular el valor de la fracción correspondiente de un número entero.

Se trata de 3 operaciones con resultado dado. El alumnado debe responder si la igualdad es correcta o no y explicar su respuesta razonadamente.

Este apartado está diseñado para todos los cursos, sin embargo, por motivos de organización finalmente solo se ha resuelto por el alumnado de secundaria. Los ejercicios se muestran en la Figura 4.

**Figura 4***Apartado 4. Ejercicios de operaciones básicas.*

a	$\frac{7}{6} + \frac{2}{6} = \frac{9}{12}$	La suma se hace con denominadores iguales y con fracciones propias e impropias. El ejercicio muestra una operación incorrecta resultado de sumar
---	--	--

		por separado numeradores y denominadores. Ayuda a mostrar si saben sumar fracciones con igual denominador.
b	$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$	En la multiplicación se presenta un resultado incorrecto, consecuencia de hacer la multiplicación tanto en el numerador como en el denominador, error muy común.
c	$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 2$	El último ejercicio de suma es nuevamente incorrecto, en este caso la equivalencia del resultado está mal aplicada. Se busca señalar si el estudiante sabe simplificar.

#### 4.3.3.5.1 Corrección y evaluación

La evaluación de este ejercicio es puramente algebraica y muy directa. Se consideran como incorrectas todas las respuestas que no señalen los errores.

#### 4.3.3.5.2 Errores esperables

En este ejercicio se esperan encontrar los errores descritos en la Tabla 9.

### Tabla 9

*Listado de errores esperables en el apartado 4.*

Tipo	Código	Descripción
E1	<b>cal</b>	Errores de cálculo o copia
E2	<b>mt</b>	Multiplica numerador y denominador ( $a \cdot b/c = ab/ac$ )
E3	<b>mul</b>	No conoce el mecanismo de multiplicación de fracciones
E3	<b>sim</b>	No sabe simplificar o no identifica cuándo
E4	<b>st</b>	Suma denominador y numerador
O	<b>otros</b>	Otros (conceptos extraños, explicaciones incomprensibles...)

#### 4.3.3.6 Apartado 5

El último ejercicio está reservado a los alumnos de secundaria puesto que los de primaria aún no han aprendido el producto y división de fracciones. En

este caso se busca medir si el alumnado conoce estas operaciones y las ejecuta correctamente. También se presenta una actividad de suma con distinto denominador.

Se trata de las 3 operaciones con resultado dado recogidas en la Figura 5. El alumnado debe responder si la igualdad es correcta o no y explicar su respuesta razonadamente.

### Figura 5

#### *Apartado 5. Ejercicios con operaciones avanzadas.*

a	$\frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{4}{10}$	Suma con diferente denominador donde se da un resultado erróneo, consecuencia de sumar tanto numeradores como denominadores.
b	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$	Multiplicación de dos fracciones realizada correctamente.
c	$\frac{10}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	División entre dos fracciones realizada correctamente. Además, el resultado está simplificado.

#### *4.3.3.6.1 Corrección y evaluación*

Se considerarán como correctos aquellos resultados que señalen si adecuadamente la operación es correcta o no. En el ejercicio se necesitan 2 conocimientos específicos: la operación de división y la simplificación (identificar que es una fracción equivalente a otra). Si un estudiante no es capaz de hacer la división, no se podrá obtener información sobre si sabe simplificar o no. A pesar de ello, se contabilizarán también los errores de simplificación puesto que su frecuencia, en los casos en la que los podamos medir, puede resultar interesante.

#### *4.3.3.6.2 Errores esperables*

En este ejercicio se esperan encontrar los errores descritos en la Tabla 10.

**Tabla 10**

*Errores esperados en el apartado 5.*

Tipo	Código	Descripción
E1	cal	Errores de cálculo o copia
E2	mul	No conoce el mecanismo de multiplicación de fracciones
E2	div	No conoce el mecanismo de división de fracciones
E3	sim	No sabe simplificar o no identifica cuándo
E4	st	Suma denominador y numerador
O	otros	Otros (conceptos extraños, explicaciones incomprensibles...)

#### *4.3.4 Diseño de la hoja de pruebas*

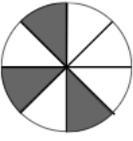
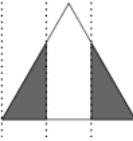
En la prueba se quiere recoger tanto si los estudiantes resuelven bien cada ejercicio como el razonamiento que han seguido o, al menos, cómo explican lo que les ha llevado a responder así. Para ello hay que dejar espacio para responder al ejercicio, a veces es un “verdadero” o “falso” y en otros casos tienen que dar una fracción como resultado. Pero también se deja un espacio para que expliquen brevemente los motivos de su respuesta.

Al tratarse de alumnos de un abanico de edades amplio (nacidos en 2011 hasta nacidos en 2007), que tendrán letras de muy diverso tamaño, con una claridad y limpieza muy variada a la hora de escribir, se ha estimado conveniente delimitar todas las áreas de respuesta. Con ello se pretende que todos los resultados estén más o menos acotados y ordenados, evitando posibles desórdenes que puedan dificultar la corrección.

Así pues los ejercicios están metidos en cajas, al igual que el área de respuesta y el dedicado a sus explicaciones. La Figura 6 muestra un apartado con sus 3 ejercicios tal y como se les presenta a los estudiantes. El idioma en que se han hecho los tests ha sido el euskera. Todas estas características de diseño pueden observarse en el Apéndice B.

## Figura 6

### Apartado 1 - Ejercicios de identificación gráfica de fracciones.

1go ariketa		
Ezkerreko irudia eta alboan duen zatikia berdina adierazten al dute? Erantzun "Zuzena" edo "Okerra" eta ondoren azaldu zergaitik uste duzun hori.		
a	 $= \frac{3}{5}$	Zuzena ala okerra da? _____ Azaldu hemen zergaitik:
b	 $= \frac{6}{9}$	Zuzena ala okerra da? _____ Azaldu hemen zergaitik:
c	 $= \frac{2}{3}$	Zuzena ala okerra da? _____ Azaldu hemen zergaitik:

#### 4.4 Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se han recogido 261 tests realizados por los alumnos de 4º, 5º y 6º de primaria y 2º de secundaria. Los exámenes de 1º de secundaria se perdieron en el proceso y no se han podido recuperar ni repetir.

Los tests se han corregido y los resultados y anotaciones digitalizados empleando una herramienta de edición de hojas de cálculo.

El test contiene dos campos de respuesta: uno discreto y otro abierto. El discreto puede requerir que el estudiante evalúe una expresión dada o que de la respuesta a una operación. El abierto pide al estudiante explicar razonadamente su respuesta. Puede ocurrir que un estudiante acierte si la expresión es correcta o no, pero en la explicación quede claro que ha sido por suerte o porque ha seguido un razonamiento no relacionado con la respuesta.

Por tanto, para considerar una respuesta como válida, se tendrán en cuenta ambos campos.

Las respuestas se han clasificado cuantitativamente como correcta, incorrecta o vacía y se han trasladado a una hoja de cálculo.

También se han evaluado los razonamientos a todas las respuestas y se ha especificado en todos los casos en que la respuesta era incorrecta, el posible motivo de error. Las causas de error o razonamientos incorrectos se han clasificado y organizado en otra hoja de cálculo, donde se han contabilizado cada una de dichas respuestas. Esta segunda hoja servirá para hacer un análisis cualitativo (además de cuantitativo) de los errores más comunes en cada curso por ejercicio.

Las hojas de ejercicio se han numerado para cada curso comenzando en el 1 y hasta el número total de hojas con el fin de tenerlas identificadas y poder corroborar cualquier resultado recogido en las hojas de cálculo.

Con el objetivo de triangular la investigación, ésta se ha llevado a cabo con la participación de 2 personas además del autor. La primera es profesora de secundaria y bachillerato en el centro Lauaxeta ikastola y el segundo el tutor del TFM en la universidad.

El rol de la profesora de Lauaxeta ha sido el de validar la adecuación de las preguntas para los distintos niveles a los que iban dirigidos (los contenidos para alumnos de primaria han sido revisados por el director de docencia del ciclo de primaria en el centro). La profesora de secundaria, asimismo, ha sido quien ha coordinado la preparación, ejecución y recogida de tests en el centro, asegurándose que se cumplían todas las condiciones necesarias.

El análisis de los resultados se ha realizado mediante una triangulación con la participación del propio investigador, del tutor de la Universidad de La Rioja y la docente del centro que servía de enlace y apoyo del centro en la investigación. Para ello, los investigadores han revisado de forma independiente entre un 7 y un 10% de los tests de cada curso y se han comparado estos análisis. Posteriormente, se han consensado los criterios de análisis de los ejercicios.

## 5 RESULTADOS

Los resultados de los tests se han recogido y analizado desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo. En primer lugar se presentan los resultados cuantitativos de respuestas correctas o incorrectas, que reflejan el grado de comprensión de los distintos grupos de estudiantes. A continuación se muestran los resultados cualitativos donde se explican los tipos de errores detectados y la frecuencia con la que han ocurrido en total y en cada curso.

Finalmente se hace un breve resumen de algunas relaciones detectadas entre errores o encadenamiento de errores. Si bien este tipo de análisis de los resultados requiere de mayor precisión y profundidad de análisis y realizar un estudio significativo de los mismos queda fuera del alcance de la presente investigación.

### 5.1 Apartado 1: resultados agregados de los distintos cursos

El total de alumnos que han realizado el test ha sido de 261. Teniendo en cuenta los dos modelos de test que existían (para primaria y secundaria), en total se ha respondido a 2.346 ejercicios. Las respuestas correctas suman un 51,62% (1.211), las incorrectas el 47,91% (1.124) y solamente se han dejado sin responder el 0,47% (11). Es decir, el grado de participación y ejecución ha sido muy alto (superior al 99%). Debido a la diferencia de estudiantes por curso, resulta más ilustrativo mostrar los resultados porcentuales. La Tabla 11 recoge estos resultados así como los obtenidos curso por curso.

**Tabla 11**

*Resultados absolutos por curso y totales.*

Curso	4 Prim.	5 Prim.	6 Prim.	2 Sec.	Total
Alumnos	71	76	71	16	261
Total respuestas	568	608	568	224	2.346
Correctas	196	307	282	426	1.211
Incorrectos	369	299	286	170	1.124
NC	3	2	0	6	11

Observado los resultados desde una proporción porcentual, recogidos en la Tabla 12, se percibe una mejora gradual en el dominio de las fracciones: desde 4º de primaria donde solo el 34,51% de las respuestas dadas son correctas hasta 2º de secundaria donde un grupo responde al 66,52% correctamente y el grupo avanzado responde bien al 78,04%. El porcentaje de aciertos mejora en todos los tramos analizados excepto entre 5º y 6º de primaria donde el porcentaje de aciertos retrocede (si bien es similar en ambos cursos).

Como no se tienen datos de 1º de secundaria no es posible ver si en ese curso se produce o no la mejora gradual. Sin embargo, la tendencia se confirma con los resultados de 2º de ESO donde más de  $\frac{2}{3}$  de las respuestas dadas son correctas.

**Tabla 12**

*Resultados porcentuales por curso y agregado.*

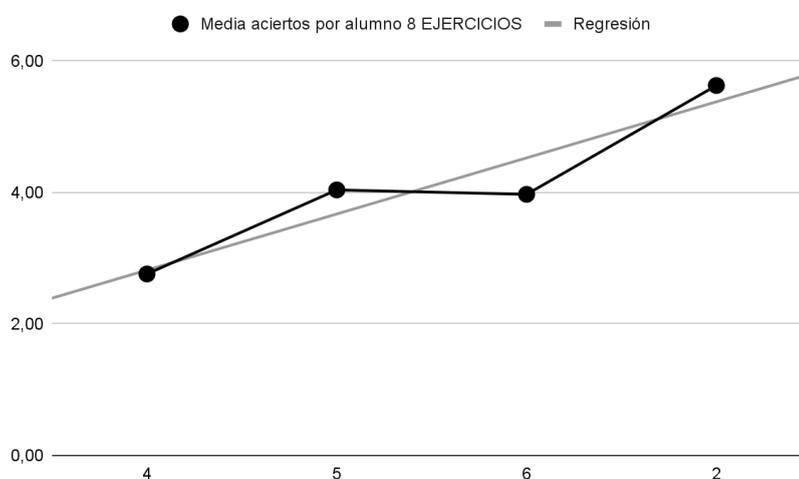
Curso	4 Prim.	5 Prim.	6 Prim.	2 Sec.	Total
Alumnos	71	76	71	16	261
Total respuestas	568	608	568	224	2.346
Correctas	34,51%	50,49%	46,65%	70,76%	51,62%
Incorrectos	64,96%	49,18%	50,35%	28,24	47,91%
NC	0,53%	0,33%	0,00%	1,00%	0,47%

Otro resultado de interés es la media de aciertos o errores cometidos por alumno en cada curso. Ambos son prácticamente complementarios teniendo en cuenta que hay menos de un 1% de apartados sin resolver. Esto puede ayudar a identificar la distribución de los errores; puede que se comentan principalmente por determinados estudiantes que cometen muchos errores o bien estar distribuidos entre todos los estudiantes.

La Figura 7 muestra los aciertos medios por alumno en cada curso. Para el segundo curso de ESO se han tenido en cuenta las respuestas comunes con el test de primaria.

**Figura 7**

*Número medio de aciertos por curso.*



La media de aciertos en los alumnos de 4º de primaria es de 2,76 de 8. En 5º de primaria asciende a 4,04 y se reduce ligeramente hasta los 3,97 en 6º de primaria. En segundo de la ESO la media de aciertos es de 5,63 de 8. En este curso, donde el alumnado está dividido en aulas ordinaria y avanzada, el grupo ordinario consiguió 5,06 aciertos frente a los 5,96 del grupo avanzado.

Por último, la Tabla 13 muestra el número y porcentaje de alumnos por curso que ha respondido a todos los ejercicios bien o ha respondido mal a la mitad de los ejercicios como referencia.

**Tabla 13**

*Número y porcentaje de alumnos y su grado de acierto (todo, >=50%, <50%)*

	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
Sin errores	1	1,39	1	1,30	1	1,39	4	8,51
>=50% de aciertos	25	34,72	42	54,55	39	54,17	39	82,98
<50% de aciertos	46	63,89	34	44,16	32	44,44	4	8,51

## 6.2 Resultados por ejercicio

Ahora explicar pregunta a pregunta los resultados. Primero cuantitativo y luego cualitativo (para cada pregunta). Meter ejemplos claros de errores que se cometen.

### 6.2.1 Ejercicio 1.a

Los resultados del primer ejercicio se muestran en la Tabla 14. La gran mayoría de los estudiantes han resuelto bien este ejercicio; en torno al 90% de todos los cursos.

**Tabla 14**

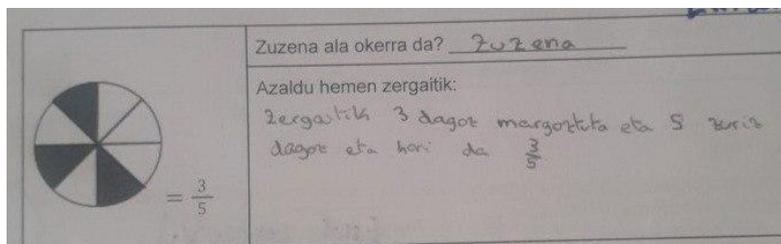
*Resultados del ejercicio 1a por curso.*

Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas	71		76		71		43	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Aciertos	59	83,10	75	98,68	65	91,55	43	100
nsb	5	7,04	0	0	5	7,04	0	0
Fallos								
tam	0	0	0	0	1	1,41	0	0
est	4	5,63	0	0	0	0	0	0
otros	3	4,23	1	1,32	0	0	0	0

El curso con más errores cometidos es 4° de primaria, mientras que el siguiente es 6° de primaria. El error más cometido se da en 4° y es hacer el conteo porciones sombreadas y el de porciones blancas y colocar el primero en el numerador y el segundo en el denominador como se ve en el ejemplo de la Figura 8.

### Figura 8

*Error de doble conteo donde las negras van al numerador y las blancas al denominador.*

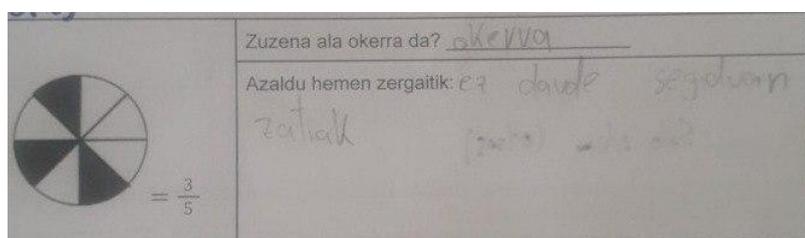


*Nota.* Traducción: “Porque hay 3 pintados y 5 en blanco y eso es  $\frac{3}{5}$ ”

En 4º de primaria también aparecen errores debido a que las fracciones se muestran de forma no estructurada como muestra el ejemplo de la Figura 9.

### Figura 9

*Dificultades de comprensión en dibujos de fracciones no estructuradas.*



*Nota.* Traducción: “los trozos no están seguidos”.

### 6.2.2 Ejercicio 1.b

**Tabla 15**

*Resultados del ejercicio 1b por curso.*

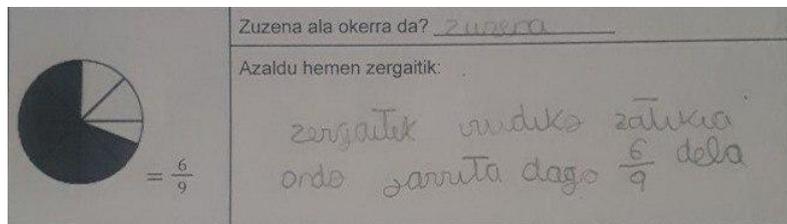
	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas		71		76		71		43	
		f	%	f	%	f	%	f	%
Aciertos		32	45,07	62	81,58	47	66,20	36	84
Sin respuesta		1	1,41	0	0	0	0,00	0	0

	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
	nbs	2	2,82	0	0	5	7,04	0	0
	tam	26	36,62	10	13,16	19	26,76	6	14
	for	0	0	0	0	0	0	1	2
Fallos	itam	5	7,04	3	3,95	0	0	0	0
	est	3	4,23	0	0	0	0	0	0
	cal	1	1,41	0	0	0	0	0	0
	otros	3	4,23	1	1,32	0	0	0	0

La principal causa de error en este ejercicio es contar el número de trozos del dibujo sin tener en cuenta que tienen distinto tamaño y, por tanto, no todos representan la misma proporción respecto al todo. Este error es el más repetido en todos los cursos. La Figura 10 muestra un ejemplo.

### Figura 10

*Respuesta que no tiene en cuenta el tamaño de las porciones.*

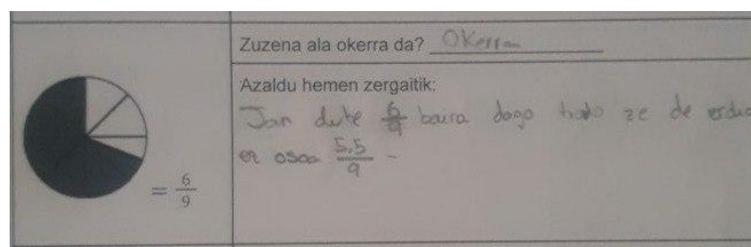


*Nota.* Traducción literal: “porque la fracción de la imagen está bien puesta que es 6/9”.

Otro error similar, como se puede ver en la Figura 11, consiste en tener en cuenta el tamaño de las fracciones pero solamente para el numerador; el estudiante entiende que todas las porciones que se cuentan en el numerador han de ser iguales, pero para el numerador basta con contar el número de porciones.

## Figura 11

*Ejemplo de conteo diferente entre numerador y denominador.*



*Nota.* Traducción: “Se han comido 6/9 pero está mal porque es la mitad, no entero. 5,5/9”

Además, sigue apareciendo el error del doble conteo donde en el denominador no colocan la suma total sino las porciones blancas. También hay 3 casos de error por la estructura del diagrama.

### 6.2.3 Ejercicio 1.c

La Tabla 16 muestra los resultados del ejercicio 1.c por curso.

**Tabla 16**

Resultados del ejercicio 1.c por cada curso.

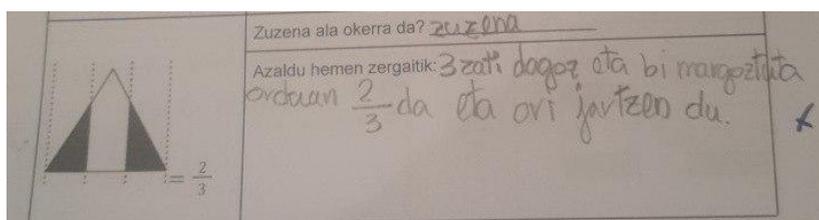
	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas		71		76		71		43	
		f	%	f	%	f	%	f	%
Aciertos		14	19,72	6	7,89	12	16,90	15	35
Sin respuesta		0	0	1	1,32	0	0	0	0
	nsb	1	1,41	0	0	5	7,04	0	0
	tam	25	35,21	13	17,11	18	25,35	4	9
Fallos	for	25	35,21	55	72,37	36	50,70	24	56
	est	3	4,23	0	0	0	0	0	0
	otros	3	4,23	1	1,32	0	0	0	0

En este ejercicio, los problemas más repetidos son aquellos relacionados con la forma de las fracciones y su proporción equivalente respecto al todo. El primer error de este tipo, ya presente en el ejercicio 1.b, es el de hacer el conteo sin tener en cuenta el tamaño de cada porción representada; este error lo comete un tercio del alumnado de 4º y uno de cada 6 lo comete en 5º curso, y algunos más en 6º.

El segundo error relacionado con la forma de las fracciones se refiere a no identificar la diferencia de proporción entre los tamaños cuando la figura empleada para ser partida no es una de las convencionales (círculo o rectángulo). La Figura 12 reproduce uno de estos casos, de un estudiante que ha respondido correctamente a la 1.b pero no a la 1.c.

**Figura 12**

*Respuesta incorrecta debido a la forma del dibujo.*



*Nota.* Traducción: “hay 3 trozos y dos pintados, entonces es  $\frac{2}{3}$  y eso pone”

Aparecen otros errores con menor frecuencia como el de no identificar las fracciones cuando es información no estructurada.

#### 6.2.4 Ejercicio 2.a

La Tabla 17 recoge los resultados obtenidos en el ejercicio 2.a.

**Tabla 17**

*Resultados del ejercicio 2.a para cada curso.*

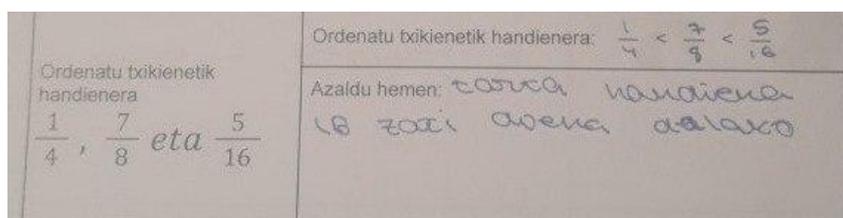
Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas	71		76		71		43	
	f	%	f	%	f	%	f	%

	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Aciertos		3	4,23	21	27,63	14	19,72	31	72
	dis	13	18,31	27	35,53	26	36,62	3	7
	ordg	5	7,04	6	7,89	10	14,08	1	2
Fallos	ordp	32	45,07	10	13,16	14	19,72	4	9
	ornum	13	18,31	4	5,26	4	5,63	0	0
	cal	5	7,04	9	11,84	0	0	4	9
	otros	1	1,41	0	0,00	3	4,23	0	0

El error más repetido es ordenar las fracciones según su denominador. Hasta 60 alumnos entre todos los cursos han ordenado las fracciones considerando que un denominador mayor implica un todo mayor. La Figura 13 es un ejemplo de este caso donde un estudiante ha ordenado las fracciones de menor a mayor según su denominador.

### Figura 13

*Respuesta basada en que menor denominador implica mayor fracción tamaño del todo.*



*Nota.* Traducción: “Porque la tarta más grande es la que tiene 16 trozos”.

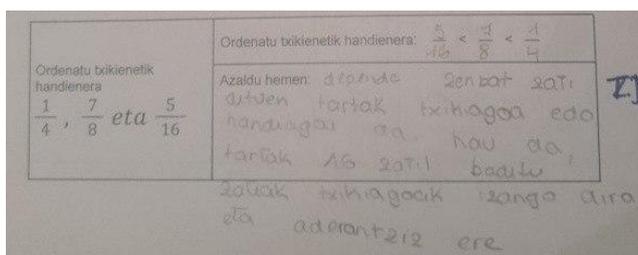
Como se ve en la Figura 14, otros han usado el mismo mecanismo de ordenar por denominador pero en orden inverso, es decir, a mayor denominador, menor es la fracción sin tener en cuenta el numerador.

Ordenar las fracciones en función a su numerador es un error también habitual en 4 de primaria (13 ocasiones) y se va reduciendo en cursos posteriores (4 en 5º y 6º y ninguna ocurrencia en 2º de secundaria). Un ejemplo

de este razonamiento se puede ver en la Figura 15 donde una estudiante ha ordenado correctamente las fracciones pero su razonamiento es erróneo.

**Figura 14**

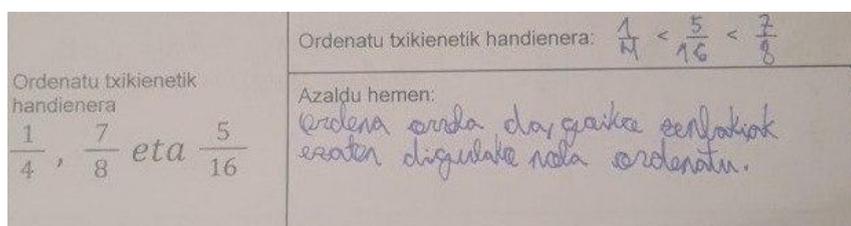
*Respuesta basada en que mayor denominador implica menor tamaño de fracciones.*



*Nota.* Traducción: “Depende de cuántos pedazos tenga la tarta será menor o mayor. Es decir, si la tarta tiene 16 pedazos estos serán más pequeños y al revés igual.”

**Figura 15**

*Ordenación de fracciones según su numerador.*



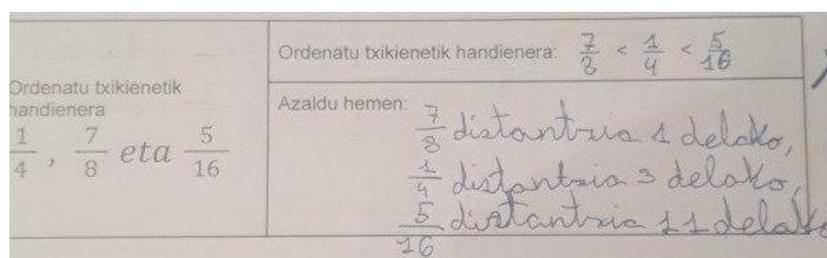
*Nota.* Traducción “El orden es así, porque es el número de arriba el que nos dice cómo ordenarlo”.

Es frecuente el error de ordenarlos basándose en la distancia a la fracción unidad (dis) como se muestra en la Figura 16. Este caso es menos frecuente en 4º de primaria, donde se producen otro tipo de errores.

En este ejercicio se han producido algunos errores de cálculo de alumnos que trataban de encontrar el mínimo común denominador o de aproximar las fracciones a números decimales como el caso de la Figura 17 donde un alumno calcula el valor decimal de las fracciones pero lo hace mal.

**Figura 16**

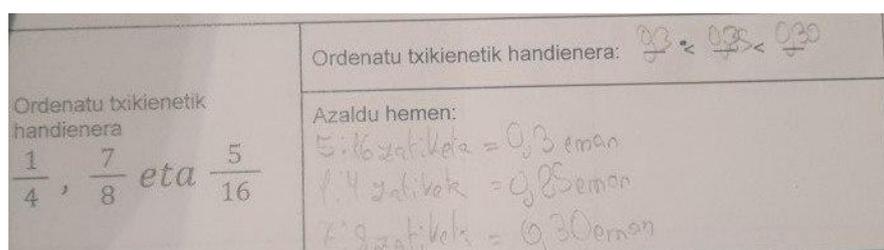
*Ordenación en base a la distancia con la fracción unidad.*



*Nota.* Traducción: “porque la distancia es 1 en  $\frac{7}{8}$ , 3 en  $\frac{1}{4}$  y 11 en  $\frac{5}{16}$ ”.

**Figura 17**

*Cálculo incorrecto del valor de cada fracción a la hora de ordenarlas.*



*Nota:* Traducción: “La división 5:16 da 0,3. 1:4 da 0,25. 7:8 da 0,3”.

### 6.2.5 Ejercicio 2.b

La Tabla 18 recoge los resultados obtenidos en el ejercicio 2.a.

**Tabla 18**

*Resultados del ejercicio 2.b para cada curso.*

	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas		71		76		71		43	
		f	%	f	%	f	%	f	%
Aciertos		13	18,31	51	67,11	44	61,97	31	72
Sin respuesta		2	2,82	1	1,32	0	0	1	2

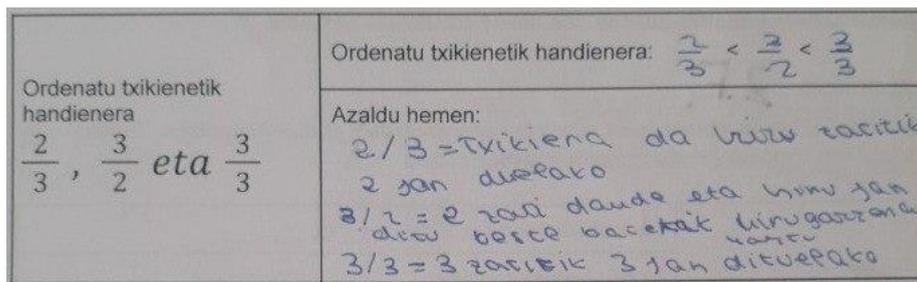
	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
	dis	12	16,90	7	9,21	5	7,04	1	2
	ordg	4	5,63	1	1,32	1	1,41	0	0
	ordp	21	29,58	7	9,21	11	15,49	4	9
Fallos	ornum	4	5,63	2	2,63	2	2,82	0	0
	imp	22	30,99	7	9,21	7	9,86	4	9
	cal	2	2,82	1	1,32	1	1,41	3	7
	otros	3	4,23	1	1,32	1	1,41	0	0

En este ejercicio los errores más comunes son nuevamente aquellos relacionados con el tamaño del denominador sin tener en cuenta el numerador. 25 alumnos de 4 han cometido ese tipo de errores (*ordg* y *ordp*), 8 de 5º y 12 de 6º. En secundaria solo 4 alumnos lo cometen.

Otro error casi igual de frecuente es el de no entender bien las fracciones impropias (*imp*). La Figura 18 muestra un ejemplo de un estudiante que no concibe que una fracción pueda ser mayor que 1.

### Figura 18

*Error de comprensión de fracciones impropias.*



*Nota.* Traducción: “ $\frac{2}{3}$  es el más pequeño porque de 3 trozos ha comido 2.  $\frac{3}{2}$  = hay dos trozos y ha comido 3, cogiendo de otro el tercero.  $\frac{3}{3}$  = porque ha comido 3 trozos de 3”.

### 6.2.6 Ejercicio 3.a

En este ejercicio se buscaba la comprensión de representación gráfica de fracciones, la suma con igual denominador y el concepto de fracción impropia ( $>1$ ).

La Tabla 19 recoge los resultados obtenidos en el ejercicio 3.a

**Tabla 19**

*Resultados del ejercicio 3.a para cada curso.*

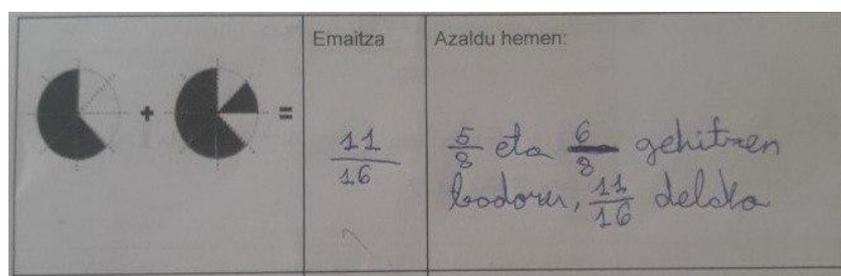
Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Respuestas	71		76		71		43	
Aciertos	25	35,21	30	39,47	32	45,07	28	65,12
cal	0	0	1	1,32	0	0	1	2,33
nsb	3	4,23	0	0	0	0	0	0
inv	0	0	0	0	1	1,41	0	0
imp	0	0	1	1,32	2	2,82	0	0
Fallos	26	36,62	27	35,53	27	38,03	9	20,93
dia	7	9,86	16	21,05	8	11,27	5	11,63
nos	1	1,41	0	0	0	0,00	0	0
snum	6	8,45	0	0	1	1,41	0	0
otros	3	4,23	1	1,32	1	1,41	0	0

El error más frecuente es sumar tanto numerador como denominador (por separado). En primaria se mantiene más o menos constante la frecuencia, con en torno a un tercio del alumnado cometiendo este error. Se reduce significativamente pero no del todo en secundaria. La Figura 19 muestra un ejemplo explícito de este tipo de error.

Otro error frecuente en este caso es la interpretación incorrecta o inesperada del diagrama (dia). La Figura 20 muestra un estudiante que interpreta que hay 2 tartas divididas en 8 trozos (el todo está dividido en 16) y se han comido 11 pedazos.

**Figura 19**

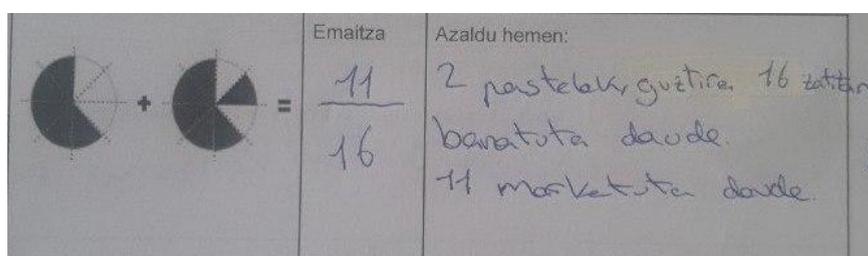
*Ejemplo de suma de numerador y denominador.*



*Nota.* Traducción: "Porque si sumas 5/8 y 6/8 es 11/16".

**Figura 20**

*Ejemplos de estudiantes que consideran que se representa un todo compuesto por dos tartas divididas en 8 pedazos y se pregunta cuántos se han comido.*



*Nota.* Traducción: "Los dos pasteles están divididos en total en 16 pedazos. Hay 11 marcados"

### 6.2.7 Ejercicio 3.b

En este ejercicio se buscaba la comprensión de representación gráfica de fracciones, la suma simple con igual denominador. La Tabla 20 recoge los resultados obtenidos en el ejercicio 3.b.

En este ejercicio el error más frecuente es nuevamente sumar el numerador y el denominador. De hecho, se repiten todos los mismos resultados excepto uno, puesto que un alumno de secundaria cometió un error de copia en el ejercicio 3.a.

**Tabla 20***Resultados del ejercicio 3.b para cada curso.*

	Cód.	4 Primaria		5 Primaria		6 Primaria		2 Secundaria	
Respuestas		71		76		71		43	
		f	%	f	%	f	%	f	%
Aciertos		25	35,21	31	40,79	34	47,89	29	67
	nsb	3	4,23	0	0,00	0	0,00	0	0
	inv	0	0,00	0	0,00	1	1,41	0	0
	st	26	36,62	28	36,84	27	38,03	9	21
Fallos	dia	7	9,86	16	21,05	8	11,27	5	12
	nos	1	1,41	0	0,00	0	0,00	0	0
	snum	6	8,45	0	0,00	1	1,41	0	0
	otros	3	4,23	1	1,32	1	1,41	0	0

### 6.2.8 Ejercicio 3.c

El ejercicio 3.c arrojó exactamente los mismos resultados que el 3.b, por lo que se han omitido por criterios de extensión y legibilidad.

### 6.2.9 Ejercicio 4.a

Este ejercicio y los siguientes solo fueron resueltos por los estudiantes de secundaria.

En la Tabla 21 se muestran los resultados del ejercicio 4.a para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

**Tabla 21***Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 4.a*

	Cód.	2 Secundaria	Ordinario	Avanzado
Respuestas		43	16	27

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
		f	%	f	%	f	%
Aciertos		35	81,40	14	87,50	21	77,78
Fallos	st	8	18,60	2	12,50	6	22,22

El ratio de errores es de un 19% para todo el curso y todos han cometido el mismo error de sumar el numerador y el denominador. En el grupo ordinario han cometido el error 2 estudiantes mientras que en el avanzado lo han hecho 6.

#### 6.2.10 Ejercicio 4.b

En la Tabla 22 se muestran los resultados del ejercicio 4.b para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

**Tabla 22**

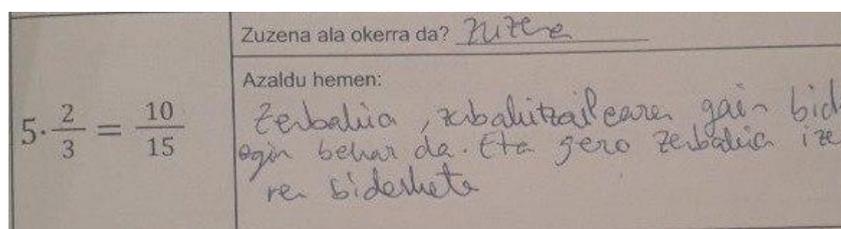
*Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 4.b*

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
		f	%	f	%	f	%
Respuestas		43		16		27	
Aciertos		30	69,77	8	50,00	22	81,48
Sin respuesta		1	2,33	0	0	1	3,70
	cal	1	2,33	1	6,25	0	0
Fallos	mt	9	20,93	5	31,25	4	14,81
	mul	2	4,65	2	12,50	0	0

Se producen 2 errores de multiplicación diferentes. En primer lugar, el más frecuente, es el de multiplicar tanto numerador como denominador (mt); 5 estudiantes del grupo ordinario y 4 del avanzado lo cometen (ejemplo en la Figura 21). Por otro lado, 2 estudiantes del grupo ordinario desconocen cómo multiplicar una fracción. Un ejemplo de esto último se puede ver en la Figura 22. Además, un alumno ha dejado la pregunta sin responder.

**Figura 21**

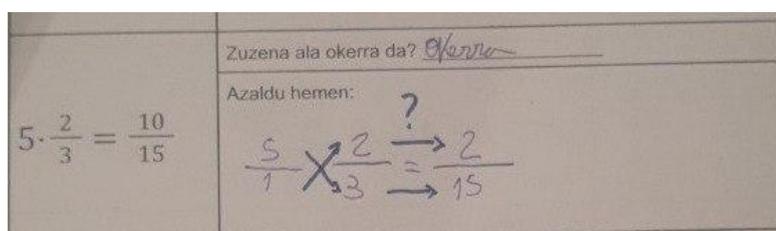
Un alumno multiplica  $a \cdot b/c = (ab)/(ac)$ .



*Nota.* Traducción: “El número hay que multiplicarlo por el numerador. Y después el número hay que multiplicarlo por el denominador”.

**Figura 22**

*Ejemplo de alumno que desconoce la forma mecánica de multiplicar y la confunde con la división.*



### 6.2.11 Ejercicio 4.c

En la Tabla 23 se muestran los resultados del ejercicio 4.c para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

**Tabla 23**

*Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 4.c.*

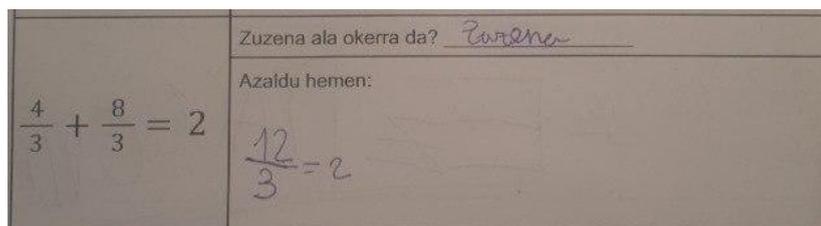
	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Respuestas		43		16		27	
		f	%	f	%	f	%
Aciertos		31	72,09	11	68,75	20	74,07
Sin respuesta		1	2,33	0	0	1	3,70

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Fallos	st	6	13,95	1	6,25	5	18,52
	sim	4	9,30	4	25,00	0	0
	cal	1	2,33	1	6,25	0	0
	otros	1	2,33	0	0	1	3,70

El error de sumar también el denominador lo han cometido 6 alumnos, la mayoría del grupo avanzado. 4 alumnos del grupo ordinario han fallado al no identificar que el resultado estaba simplificado o no saber que se podía simplificar (Figura 23). Uno ha dejado la pregunta sin responder y otro ha cometido un error de cálculo.

### Figura 23

*Ejemplo de alumno que no simplifica bien.*



El error más frecuente es el de sumar numerador y denominador, algo que han hecho 6 alumnos, de los cuales 5 eran del grupo avanzado.

#### 6.2.12 Ejercicio 5.a

En la Tabla 24 se muestran los resultados del ejercicio 5.a para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

### Tabla 24

*Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 5.a.*

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Respuestas		43		16		27	
		f	%	f	%	f	%

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Aciertos		35	81,40	12	75,00	23	85,19
Sin respuesta		1	2,33	0	0	1	3,70
Fallos	st	7	16,28	4	25,00	3	11,11

El error más cometido es el de sumar el numerador y el denominador contabilizando el 16% de los fallos.

### 6.2.13 Ejercicio 5.b

En la Tabla 25 se muestran los resultados del ejercicio 5.b para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

**Tabla 25**

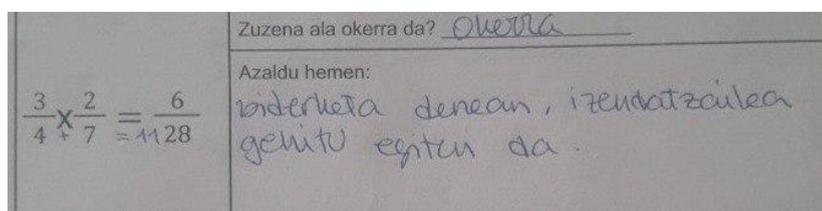
*Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 5.b.*

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Respuestas		43		16		27	
		f	%	f	%	f	%
Aciertos		39	90,70	13	81,25	26	96,3
Sin respuesta		1	2,33	0	0	1	3,70
Fallos	mul	3	6,97	3	18,75	0	0

El único error que aparece en este ejercicio es el de desconocer el procedimiento o mecánica de multiplicación de fracciones. 3 alumnos del grupo ordinario lo han cometido; uno de ellos se muestra en la Figura 24. Además, otro estudiante lo ha dejado sin responder.

## Figura 24

*Error de desconocimiento de la multiplicación de fracciones.*



*Nota.* Traducción: “Cuando es un producto, se suma el denominador”.

### 6.2.14 Ejercicio 5.c

En la Tabla 26 se muestran los resultados del ejercicio 5.c para el conjunto de alumnos de secundaria y para cada grupo.

**Tabla 26**

*Resultados de los alumnos de secundaria en el ejercicio 5.c.*

	Cód.	2 Secundaria		Ordinario		Avanzado	
Respuestas		43		16		27	
		f	%	f	%	f	%
Aciertos		14	32,56	1	6,25	13	48,15
Sin respuesta		1	2,33	0	0	1	3,70
	sim	18	41,86	9	56,25	9	33,33
Fallos	div	8	18,60	5	31,25	3	11,11
	cal	1	2,33	1	6,25	0	0
	otros	1	2,33	0	0	1	3,70

En la división aparecen 3 tipos de error. El más frecuente es no identificar o no saber simplificar correctamente el resultado de la división, como se ve en el ejemplo de la Figura 25. Más del 50% de los estudiantes del grupo ordinario lo comente y un tercio del avanzado.

## Figura 25

*Estudiante que aplica correctamente el mecanismo de división pero no identifica que el resultado es la misma fracción simplificada.*

$\frac{10 \cdot \cancel{2}}{9 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{3}$	Zuzena ala okerra da? <u>okera</u>
	Azaldu hemen: $\frac{10 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{20}{27}$

*Nota.* El estudiante ha respondido “Incorrecto”.

El segundo error más común es el desconocimiento del proceso de división, la Figura 26 muestra un ejemplo de un alumno que desconoce la operación de división de fracciones. Hasta 8 alumnos (5 del aula ordinaria y 3 de la avanzada) cometen ese error. También hay dos errores de cálculo.

## Figura 26

*Ejemplo de estudiante que desconoce el procedimiento de división.*

$\frac{10 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{5}{3}$	Zuzena ala okerra da? <u>okera</u>
	Azaldu hemen: zerbituta denean, izendatzailea bendu egiten da

*Nota.* Traducción: “Cuando es una división, el denominador se resta”.

### 6.3 Resultados por tipo de error

Finalmente, se presentan los resultados desde el punto de vista del tipo de error, independientemente del ejercicio en el que ocurren.

La Tabla 27 recoge los porcentajes de alumnos que han cometido un determinado error en cada curso, con respecto al total de respuestas recibidas en dicho ejercicio. Está ordenada del error más frecuente al menos frecuente (respecto de la columna “Total” o agregado). De esta manera el porcentaje es independiente del número de estudiantes que han respondido a los distintos

ejercicios en que podía cometerse un error. Permite ver cómo de problemático es un concepto o su cuestionamiento mediante el presente ejercicio.

**Tabla 27**

*Porcentaje de errores cometidos cuando son susceptibles de aparecer en un ejercicio. Por categoría.*

	4 Primaria	5 Primaria	6 Primaria	2 Secundaria
E0	11,27	21,05	11,27	11,63
E1	3,17	4,82	1,41	4,26
E2	0,00	0	1,41	17,05
E3	11,27	5,26	6,34	20,16
E4	49,30	42,86	42,78	22,33
E5	8,45	0,00	1,41	0,00
O	3,87	1,32	1,97	2,33

En la Tabla 28, de manera complementaria, se presentan los datos desgranados por tipo de error. En ella se puede apreciar que muchos ejercicios provocan errores de más de un 30% de los estudiantes de 4° de primaria. En 5° de primaria el 72,37% comete el error de no calcular bien la fracción con formas irregulares y se mantiene en un 50,70% en 6°.

**Tabla 28**

*Porcentaje de errores cometidos cuando son susceptibles de aparecer en un ejercicio. Por tipo de error.*

	4 Prim.	5 Prim.	6 Prim.	2 Sec.
dia	9,86	21,05	11,27	11,63
nos	1,41	0	0	0
cal	3,17	4,82	1,41	4,26
mt	0	0	0	20,93
div	0	0	0	18,60
mul	0	0	0	5,81
inv	0	0	1,41	0
sim	0	0	0	25,58
imp	30,99	5,26	6,34	9,30

	4 Prim.	5 Prim.	6 Prim.	2 Sec.
est	4,69	0	0	0
st	36,62	36,40	38,03	18,60
for	35,21	72,37	50,70	29,07
ordp	37,32	11,18	17,61	9,30
dis	17,61	22,37	21,83	4,65
tam	35,92	15,13	17,84	11,63
ornum	11,97	3,95	4,23	0
ordg	6,34	4,61	7,75	2,33
itam	7,04	3,95	0	0
nsb	3,99	0	7,04	0
snum	8,45	0	1,41	0
otros	3,87	1,32	1,97	2,33

## 7 DISCUSIÓN

### 7.1 Análisis general de la situación a través de los resultados

Los datos reflejan lo que ya se adelantaba en el marco teórico: las fracciones suponen un problema para un gran porcentaje de los estudiantes. Muy pocos estudiantes han respondido bien a todos los ejercicios (cerca del 1,5% en primaria y un 8,5% en secundaria) a pesar de ser operaciones y conceptos básicos de fracciones.

Observando la evolución de los errores a lo largo de los cursos, las mayores dificultades las encuentran los alumnos de 4° de primaria y después van remitiendo como se apreciaba en la Figura 7. Sin embargo, el hecho de que la mitad del alumnado termine primaria sin las nociones básicas sobre fracciones dominadas es preocupante, aunque no exclusivo del centro estudiado: este resultado es similar al obtenido por Pruzzo de Di Pego (2012) en su estudio con 433 participantes en Argentina.

En 4° de primaria los estudiantes han cometido muchos errores y muy variados. Esta variedad va remitiendo con los cursos. Esto es algo esperado puesto que los estudiantes van creciendo, mejoran su capacidad cognitiva y practican más con fracciones en los distintos cursos obteniendo mayor destreza. Pero hay algunos errores como el sumar tanto numerador como denominador en una suma de fracciones o los problemas para calcular fracciones a partir de porciones no iguales que se mantienen en ratios de error similares durante toda la primaria. Una posible explicación es que para poder avanzar con nuevo contenido (multiplicación, división etc.) se refuercen esos conceptos al comienzo de la secundaria. Pero también puede estar influenciado por una mejora cognitiva significativa en esas edades. Esto es imposible de argumentar con la información que se ha obtenido en este estudio.

La mayoría de los errores, cometidos en algo más del 40% de los ejercicios, son los que en este estudio se han categorizado como errores cometidos por emplear mecanismos incorrectos (E4), también han sido frecuentes los relacionados con desconocer el concepto en cuestión (E3). Es evidente que es

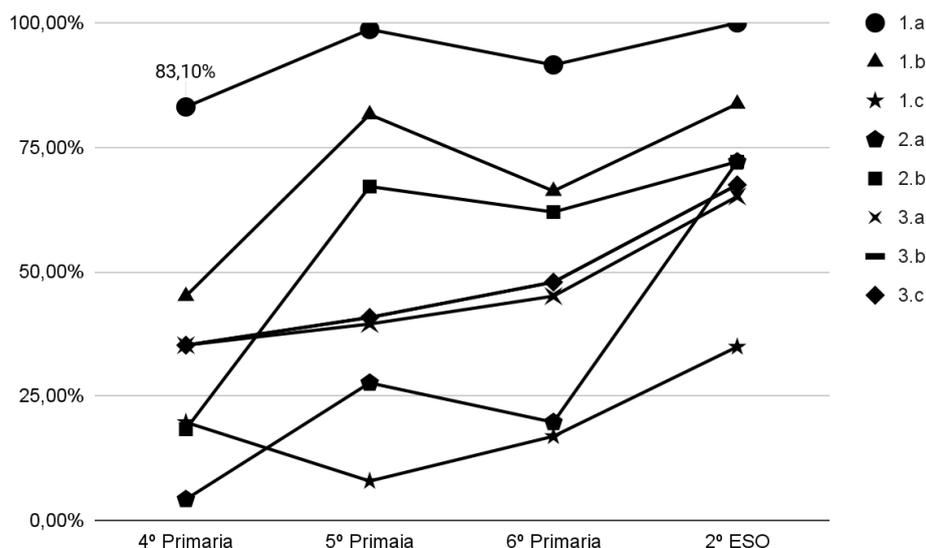
en estos en los que más debe enfocarse el esfuerzo del centro. Especialmente en primaria, puesto que son errores más relacionados con los conceptos básicos sobre fracciones, pero también se extienden a secundaria. Los errores al aplicar mal algoritmos correctos (E2), son más comunes en secundaria. Tal vez los conceptos estén mejor asentados y las operaciones se vuelvan más complejas.

Desde el punto de vista de resolución correcta de los ejercicios, como se puede ver en la Figura 27, el alumnado mejora gradualmente con los años: todos los ejercicios son resueltos correctamente por un número significativo más de estudiantes en secundaria que en primaria. Esto puede deberse a varios factores ya señalados.

En la misma figura queda en evidencia que el ejercicio más problemático es el de identificar la proporción sombreada respecto al total cuando se hace con trozos irregulares en una figura poco habitual (un triángulo). Este error se atenúa con el tiempo pero sigue generando un bajo porcentaje de aciertos incluso en secundaria (por debajo del 40%).

**Figura 27**

*Porcentaje de aciertos por curso en cada ejercicio.*



Una última lectura interesante de la Figura 27 es que en 6° de primaria parece estancarse el progreso de los estudiantes. El estudio no provee suficiente información para explicar el por qué, pero entre las posibilidades podría ser que ese año se les preste menos atención a las fracciones en la docencia. También hay que tener en cuenta que en ese curso, el centro introduce la multiplicación y división de fracciones (ver Apéndice B), con lo que el repaso anual puede verse reducido.

## **7.2 Análisis de los errores más frecuentes y sus posibles causas**

El error específico más frecuente es la suma de, ambos, numerador y denominador al sumar fracciones. Este error, como describen Llinares y Sánchez (1997), está relacionado con la aplicación de estrategias de los números enteros a las fracciones. Esto parece a la vez relacionado con el doble conteo, donde el estudiante aprende a contar trozos para ponerlos en el numerador como un entero y en el denominador, bajo una raya, como otro entero. Es posible, por tanto, que se trate de un error debido a un obstáculo educativo. El explicar las fracciones como los trozos tomados de un todo dividido en más trozos genera esa falsa concepción de la fracción como dos conjuntos de enteros separados por una línea.

Otro conjunto de errores muy frecuente, de hecho, teniendo una raíz similar, serían el grupo más grande, es el de aquellos relacionados con la identificación de fracciones de manera gráfica cuando los trozos representados no tienen un tamaño regular o una forma habitual. Estos errores parecen estar relacionados con la equipartición como ya explicaba Cortina et al. (2013). Al aprender que una fracción es un doble conteo de trozos iguales, al adquirir ese entendimiento instrumental de la identificación de una fracción a partir de un diagrama, es fácil que los estudiantes olviden una de las condiciones. En este caso la condición de que para aplicar el conteo es necesario que todas las partes sean iguales. No ocurre así para que la fracción exista o se pueda identificar, a pesar de que es lo que parecen haber entendido algunos estudiantes.

A lo largo de todos los cursos y en todos los ejercicios gráficos (apartados 1 y 3), aunque se va reduciendo paulatinamente, se ha podido observar cómo muchos de los ejercicios eran resueltos con explicaciones referentes a tartas.

Resulta claro que es el mecanismo que se ha empleado para enseñar las fracciones, con una equipartición de la tarta y doble conteo. Por un lado, esto genera una concepción de la unidad muy particular; la de que la unidad es algo que se puede partir en trozos iguales. Crea una idea homogénea y coherente de la partición. Así, se dificulta la identificación de los distintos tipos de unidad como mencionaba Obando (2003). Por otro lado, facilita la explicación de la mecánica del doble conteo. Esto beneficia a corto plazo al profesor y al estudiante, que ven resultados pronto, pero produce un aprendizaje instrumental que acaba siendo un obstáculo didáctico cuando llega la hora de sumar.

En esos ejercicios gráficos, se ve claramente el uso del mecanismo conceptual de comparar las unidades con tartas que emplean los alumnos. Esto, combinado con el uso de la misma unidad representada dos veces, crea confusión y dificultad en los estudiantes como aseguraba Pruzzo de Di Pego (2012). En el estudio se ha podido ver cómo muchos estudiantes identificaban en el ejercicio 2 tartas partidas en 8 trozos en lugar de una tarta simbólica dibujada 2 veces para representar 2 fracciones. Esto ha sido causa de múltiples errores.

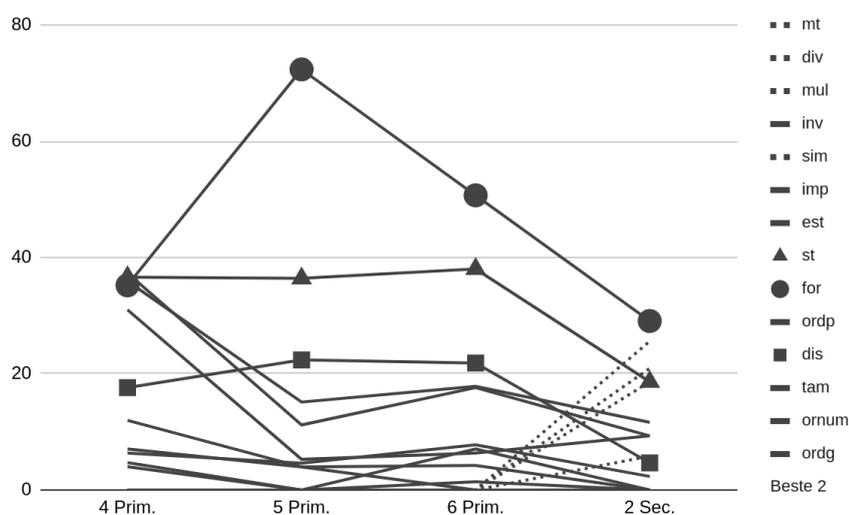
También se aprecia un entendimiento instrumental cuando se trata de ordenar las fracciones. Muchos estudiantes explican que han ordenado las fracciones según el denominador, cuanto más grande más pequeños los trozos, ignorando el numerador. O al revés, cuanto más pequeño el denominador, más grande la tarta. Otros las han ordenado mirando solo el numerador; cuantos más trozos comes, más grande es la fracción. Otros, con un entendimiento más cercano al correcto pero aún con procedimientos mecánicos mal aplicados, han intentado ordenarlos fijándose en la distancia entre el numerador y el denominador. Todos estos errores, muy frecuentes también, parecen debidos a haber aprendido procedimientos que tal vez sirvieron para las primeras explicaciones de ordenación pero que son, claramente, algoritmos equivocados que no se van hasta que los estudiantes llegan a secundaria.

Ya en secundaria, la mayoría de esos errores ha desaparecido, salvo el de la suma de numerador y denominador que tiene un repunte en 2 de bachillerato, particularmente en el grupo avanzado. Con la información disponible, a la vista de que este grupo mejora al ordinario de forma en el resto de errores, no parece arriesgado pensar que puede tratarse de un exceso de confianza. Bien es cierto de que muchos de estos errores se han cometido y contabilizado en el apartado 3, donde el propio diseño del diagrama podría ser mejorado. En la corrección se han encontrado múltiples casos de estudiantes que habían respondido mal al apartado 3 de sumar fracciones en diagramas y después habían resuelto bien el ejercicio de suma 4.a.

Resulta interesante detenerse en este punto y reordenar los datos de manera diferente. La Figura 28 muestra la frecuencia con que se ha cometido un error en cada curso, cuando ese error ha sido cometido por al menos un alumno en ese ejercicio. Se trata de una medida que permite ver cómo de prevalente es un error determinado al responder a una pregunta concreta. O dicho de una manera, cómo de extendido está el error al plantear un ejercicio de esa manera.

**Figura 28**

*Porcentaje de comisión de un error determinado por parte del alumnado cuando éste es susceptible de aparecer.*



*Nota.* Se han resaltado con iconos en los puntos los errores más extendidos; coinciden con aquellos que se mantienen más estables en el tiempo. En punteado los errores que aparecen en el segundo modelo de test, el de secundaria.

La Figura 28 nos permite entender, por ejemplo, que en 5º de primaria, cuando un ejercicio exige tener en cuenta una forma irregular en un diagrama que representa una fracción, más del 70% del alumnado comete un error. Este error es muy frecuente en todos los cursos, lo que indica una clara falta de comprensión conceptual del alumnado.

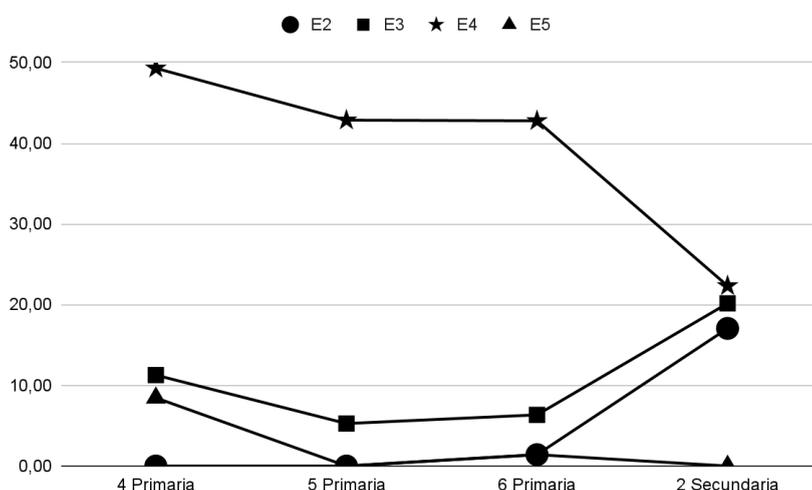
También se aprecia cómo los otros 2 errores más frecuentes, la suma de numerador y denominador y el ordenamiento mediante la distancia de ambos factores se mantienen durante toda la educación primaria y sólo empiezan a remitir en secundaria. El resto de errores o bien desaparece pronto o es menos significativo.

Si reparamos a esa misma ordenación pero con los errores agrupados según su causa, obtenemos los resultados de la Figura 29. En ella se han eliminado los errores de diseño, los inevitables y aquellos no clasificados en las categorías principales. En la gráfica se ve claramente que la mayoría de los errores, los más frecuentes, se mantienen a lo largo de los años de primaria y se reducen significativamente para 2º de secundaria.

Nuevamente, esta información puede indicar una mejora cognitiva de los grupos, cosa que es evidente por su diferencia de edad. Pero esa hipótesis, se reflejaría en una reducción más gradual. Por tanto, parece deberse a una serie de factores. También es llamativo el aumento de errores de cálculo y mecánicos (E2 y E3) en secundaria. Puede que motivado, como ya se ha expuesto, por una mayor complejidad aritmética y procedural en los ejercicios propuestos. En cualquier caso, es evidente que el alumnado tiene grandes problemas con las fracciones y que en gran medida parecen estar motivados no solo por sus capacidades individuales sino por las herramientas didácticas empleadas para enseñarles.

**Figura 29**

*Porcentaje de comisión de un error de una categoría por parte del alumnado cuando éste es susceptible de aparecer.*



El estudio ha permitido identificar unos errores muy frecuentes y que, además, se mantienen a lo largo de varios cursos. Como se ha argumentado, estos errores parecen estar muy relacionados con entendimientos instrumentales, mecánicos, que el alumnado ha aprendido en el proceso de concepción de las fracciones.

### **7.3 Propuesta de una clasificación práctica de errores**

El estudio de los tests realizados por tantos estudiantes y a lo largo de varios cursos ha sido muy demandante en cuanto al análisis de datos. Para poder extraer información interesante se han tenido que procesar los mismos datos agrupados y ordenados de muchas maneras. Las respuestas no eran cerradas sino que se pretendía analizar el razonamiento de los estudiantes. Por ello, era necesario tener un sistema de clasificación rápido y sencillo, que permitiera etiquetar cada error de forma más o menos única (aunque ha habido múltiples ambigüedades en los más de 1000 errores detectados). Con ese fin, se ha diseñado una clasificación práctica que ha resultado ser muy adecuada para el estudio.

La clasificación tiene 2 niveles de categorización. El nivel superior jerárquicamente, describe el origen o causa del error. Es el presentado en la sección de metodología en la Tabla 3. Dicha lista debe mantenerse, a priori, limitada puesto que recoge categorías de causas. Las categorías están ordenadas de menos grave, como los errores debido al propio diseño de las pruebas, que puede ser ambiguo, confuso o inconexo (E0) a más graves como lo son los errores conceptuales, los obstáculos didácticos o los obstáculos causados conocimientos previos no adquiridos.

El segundo nivel de la clasificación es el etiquetado de errores según su operativa. Es decir, cada tipo de error, ya sea este no saber simplificar o multiplicar ambos factores en un producto entre un entero y una fracción, tiene su propia etiqueta. Es una clasificación flexible que se puede extender y reordenar. En este estudio se ha utilizado la descrita en la Tabla 4 porque se corresponde con los errores encontrados, pero se puede modificar esta propuesta para usos futuros o incluso rehacerla por completo si se tienen otros objetivos o materias que estudiar.

Esta combinación de dos niveles ha resultado muy útil para clasificar los errores rápidamente y con una estructura causa-efecto. Esto ha resultado en un análisis que permitía no sólo hacer un estudio cuantitativo sino también cualitativo. O dicho de otra manera, ha permitido tener un marco útil y sencillo de manejar para poder identificar dónde están los principales problemas del alumnado con las fracciones, cuáles son sus posibles causas y cómo evolucionan en el tiempo.

#### **7.4 Propuesta de mejora**

El estudio no se ha centrado en buscar propuestas y soluciones de mejora para los problemas que ha pretendido clasificar. Sin embargo, en el proceso de llevarlo a cabo se ha podido observar la causa de gran parte de sus problemas. Esta no parece ser otra que una serie de obstáculos didácticos en forma de herramientas o enseñanzas instrumentales que están dificultando aprendizajes más relacionales y completos.

Además, el estudio ha resultado ser una buena fotografía del nivel actual de conocimientos o de problemas de los estudiantes. Esta misma fotografía podría repetirse a conveniencia para poder ver la evolución en el tiempo no de cada curso sino de la propia estrategia didáctica del centro.

Sin poder proponer medidas específicas para mejorar la enseñanza en sí, para lo cual hay extensa literatura y se recomiendan particularmente libros como Didáctica de las matemáticas (Chamorro, 2003), Fracciones: relación parte-todo (Llinares, 1997) o Enseñanza de las fracciones (Fazio y Siegler, 2010), sí es posible, en cambio, recomendar un plan de acción para abordar la situación.

A modo de esquema, ese plan se podría estructurar de la siguiente manera:

1. Análisis de la situación: analizar los datos obtenidos al realizar este test para identificar las áreas donde es necesaria la mejora didáctica.
2. Propuesta de mejora: estudiar y proponer una serie de mejoras o modificaciones didácticas para la enseñanza de las fracciones. Hay extensa literatura que ciertamente aborda los distintos tipos de errores que puedan encontrar en su alumnado.
3. Plan de actuación y seguimiento: hacer un plan de implantación a medio plazo y establecer el mecanismo de medida de la mejora para el mismo. Algo fundamental para poder ver su impacto y adaptarlo de forma dinámica. Esto puede hacerse mediante la repetición periódica de un test y la aplicación de la clasificación propuesta.

## 8 CONCLUSIONES

El estudio de la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de las funciones es un área muy trabajada por los investigadores en docencia matemática. Abordar un tema así puede resultar vertiginoso para alguien sin experiencia en el campo. A medida que se recopilaba información para el marco teórico de la investigación, cada vez era más patente todo el trabajo previo que existía a este respecto.

La investigación surge de un problema real de un centro preocupado por los resultados de su alumnado en el manejo de las fracciones. Con el objetivo de ayudar al centro, la investigación se pone en marcha y pronto se empieza a abrir un abanico de posibilidades al recabar información. Lo que inicialmente parecía una preocupación grave pero sencilla, resultó ser un problema generalizado en el conjunto de la comunidad educativa mundial. Investigadores de México, EEUU, Argentina, Turquía... todos confirmaban que la enseñanza de fracciones es un tema complejo y que los estudiantes de primaria y secundaria de todo el mundo tienen serios problemas con ellas.

Se han analizado clasificaciones de errores de múltiples autores que preceden a este estudio, se han leído multitud de explicaciones posibles a las causas de los problemas con fracciones y también muchas propuestas didácticas sobre cómo abordar algunas de ellas. El espectro era muy amplio.

Sin embargo, la investigación nace con un objetivo muy centrado: tratar de ayudar al centro con su problema. Y eso es lo que se ha intentado; entre tantos estudios previos y tantos ángulos desde los que abordar el tema, se ha optado por medir, clasificar y priorizar los problemas que se manifiestan en los alumnos del centro. La investigación ha creado un marco de trabajo replicable por el centro y futuros investigadores.

Con este marco se ha podido descubrir que la mayoría de los errores cometidos proceden de herramientas docentes útiles pero con contrapartidas en forma de obstáculos didácticos. También se ha comprobado que algunos errores se mantienen durante años en las mentes de los estudiantes, dificultando el aprendizaje de nuevos conceptos pero que, al llegar a

secundaria, se reducen para dar paso a otros nuevos errores. Los errores más comunes de primaria se reducen significativamente en secundaria pero tal vez no lo hagan con la celeridad suficiente. Afortunadamente, gracias a este estudio, el centro posee una visión más ejecutiva de dónde ha de trabajar para mejorar la situación y cómo medir el progreso de sus medidas.

La investigación realizada no está carente de limitaciones; los tests diseñados pueden ser mejorados para evitar ambigüedades, por ejemplo. Y los tests de 1º de secundaria se perdieron en su totalidad, después de realizados. También se puede mejorar el diseño del test de cara a aislar los errores que puede activar cada ejercicio. Pero, tal y como está, ha servido para proporcionar información estructurada muy valiosa para el centro, lo cual es una satisfacción personal enorme para el investigador.

El modelo en sí requiere de más aportes y del contraste con otros investigadores que corroboren su utilidad y lo mejoren. Pero su diseño ampliable lo hace adecuado para ser adaptado y mejorado en el futuro.

Lo que inicialmente buscaba ayudar al centro en que realicé las prácticas como estudiante del Máster de profesorado de secundaria, se ha convertido en un posible método de caracterización de errores relacionados con fracciones que tal vez pueda servir a otros, o incluso podría llegar a extenderse a la parametrización de otros problemas de la enseñanza-aprendizaje. Si este humilde trabajo sirve de inspiración o de base para futuros investigadores, la satisfacción será aún mayor.

Así, con los aprendizajes del proceso interiorizados, la alegría de haber ayudado al centro que me acogió y la esperanza de que este trabajo pueda servir a otros, cierro estas líneas.

## 9 REFERENCIAS

- Aliustaoğlu, F., Tuna, A., Biber, A. Çağrı. (2018). The Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10 (5), 591–599.
- Chamorro, C. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Prentice Hall.
- Cortina, J. L., & Zúñiga, C., y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2),7-29.[fecha de Consulta 28 de Junio de 2022]. ISSN: 0187-8298. Disponible en:  
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40528961002>
- Consejería de educación, política lingüística y cultura. (2015). DECRETO 236/2015, de 22 de diciembre, por el que se establece el currículo de Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Vitoria-Gasteiz: Eusko Jurlaritzta - Gobierno Vasco.
- Fazio, L., y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones*. Ginebra: Oficina Internacional de educación. UNESCO.
- Godino, J. R., Francisco y Roa, R., Cid, E. y Batanero, C. y Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática da Universidad de Granada.
- Gómez, B., y Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA*, 3(4), 169-183.
- Gould, P. (2005). Really broken numbers: Peter Gould provides insights into children's thinking about fractions through their drawings and explanations. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 10 (3),4+.

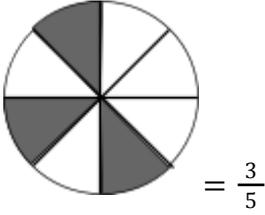
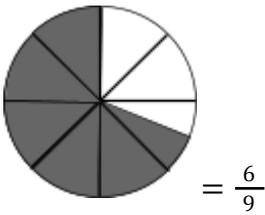
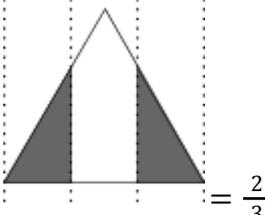
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educ Stud Math* 12, 71–87.  
<https://doi.org/10.1007/BF00386047>
- Hansen, N., Jordan, N. C., y Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, 50, 45–59.  
<https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002>
- Llinares, S., & Sánchez, M. (1997). *Fracciones: relación parte-todo* (pp. 158-164). Madrid: Síntesis.
- López, Y., Corona, A., Juárez y J. A. (2017). Requerimientos cognitivos y conceptuales para el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de secundaria. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 2, pp. 339-346 .
- Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*, 04 (02), pp. 30-54.
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8 (2), pp. 157-182.
- Olkun S. y Toluk-Uçar Z. (2007). *Activity-based mathematics teaching in primary education*. Ankara: Maya Akademi Publishing Distribution.
- Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. *Pilquen - Sección Psicopedagogía*, (8).  
Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4059230.pdf>
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26 (3), 9–15.

## Apéndice A - Test empleado para la investigación

### Adierazi ariketa bakoitza zuzena den ala ez eta azaldu zergaitik

#### 1go ariketa

Ezkerreko irudia eta alboan duen zatikia berdina adierazten al dute? Erantzun “Zuzena” edo “Okerra” eta ondoren azaldu zergaitik uste duzun hori.

a		<p>Zuzena ala okerra da? _____</p> <p>Azaldu hemen zergaitik:</p>
b		<p>Zuzena ala okerra da? _____</p> <p>Azaldu hemen zergaitik:</p>
c		<p>Zuzena ala okerra da? _____</p> <p>Azaldu hemen zergaitik:</p>

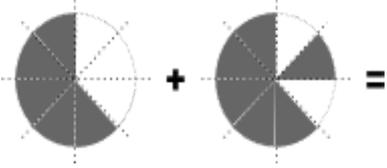
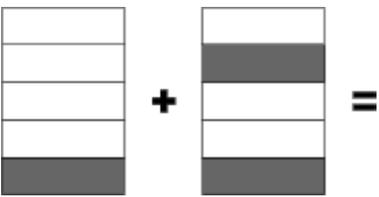
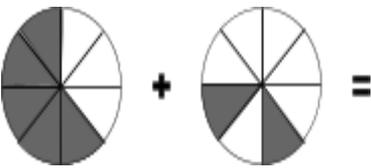
2. ariketa

Ezkerreko kutxako 3 zatikiak ordenatu txikienetik handienera. Ondoren azaldu zergaitik erantzun duzun horrela.

a	Ordenatu txikienetik handienera $\frac{1}{4}$ , $\frac{7}{8}$ <i>eta</i> $\frac{5}{16}$	Ordenatu txikienetik handienera: — < — — < —
		Azaldu hemen:
b	Ordenatu txikienetik handienera $\frac{2}{3}$ , $\frac{3}{2}$ <i>eta</i> $\frac{3}{3}$	Ordenatu txikienetik handienera: — < — — < —
		Azaldu hemen:

### 3. ariketa

Ezkerrean dauden eragiketen emaitza kalkulatu eta adierazi zatiki moduan. Ondoren azaldu erantzunaren zergaitia ondoko kutxan.

a		Emaitza a	Azaldu hemen:
b		Emaitza a	Azaldu hemen:
c		Emaitza a	Azaldu hemen:

#### 4. ariketa

Begiratu ezkerreko eragiketa eta erantzun zuzena ala okerra den. Ondoren azaldu zergaitik erantzun duzun hori.

a	$\frac{7}{6} + \frac{2}{6} = \frac{9}{12}$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:
b	$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:
c	$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 2$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:

5. ariketa

Begiratu ezkerreko eragiketa eta erantzun zuzena ala okerra den. Ondoren azaldu zergaitik erantzun duzun hori.

a	$\frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{4}{10}$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:
b	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:
c	$\frac{10}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	Zuzena ala okerra da? _____
		Azaldu hemen:

## Apéndice B - Temario por curso (Primaria) en Lauaxeta Ikastola

---

<b>4º</b>	<b>5. unitatea</b>	- Fracciones
	- Zatiak.	- Suma y resta de fracciones con igual denominador
	- Izendatzaile bereko zatikien arteko batuketa eta kenketa.	- Comparación de fracciones
	- Zatiak konparatzea.	- Calcular la fracción de un número
	- Zenbaki baten zatikia kalkulatu.	- Fracciones propias e impropias
	- Zati propioak eta inpropioak.	

---

<b>5º</b>	<b>4. unitatea</b>	- Fracciones y fracciones equivalentes
	- Zatiak eta zati baliokideak	- Fracción de un número
	- Zenbaki baten zatikia	- Suma y resta de fracciones con igual denominador
	- Izendatzaile bereko zatikien batuketa eta kenketa	- Producto de fracciones con números normales
	- Zatikien biderketa zenbaki arruntekin	

---

<b>6º</b>	<b>3. unitatea</b>	- Fracciones y números mixtos
	- Zatiak eta zenbaki mistoak	- Fracciones escritas con el mismo denominador
	- Zatiak izendatzaile berberaz adierazita	- Comparación de fracciones
	- Zatikien konparaketa	- Sumas y restas entre fracciones
	- Zatikien arteko batuketak eta kenketak	- Multiplicaciones y divisiones entre fracciones
	- Zatikien arteko biderketak eta zatiketak	

---